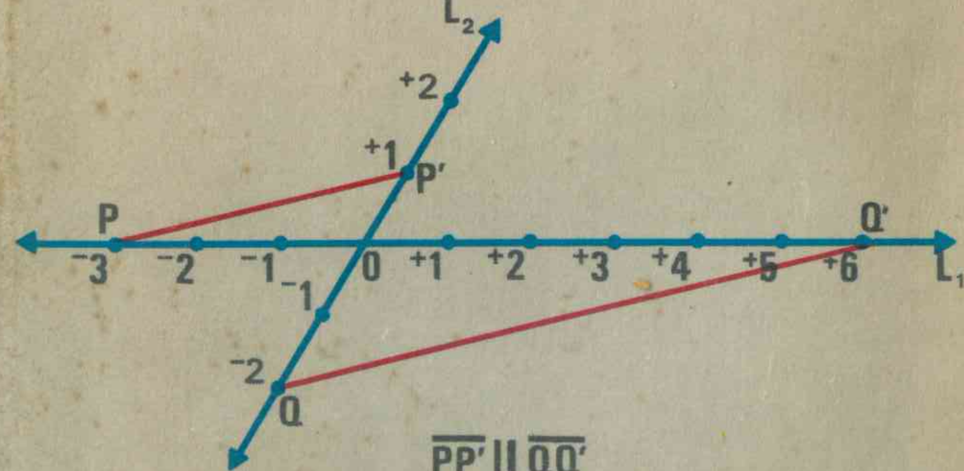
MATEMATICA MODERNA II

7º GRADO DE EDUCACION BASICA (2º SECUNDARIA)



$\overline{PP'} \parallel \overline{QQ'}$

$(^-3)\ (^-2) = {}^+6$

editorial didáctica ltda.

MATEMATICA MODERNA II

INVESTIGACION

MAXIMO DE LA CRUZ SOLORZANO
Profesor de Matemática

MATEMATICA MODERNA II

Ajustado a los Programas
Del Decreto 080 — 1974

editorial didáctica

BOGOTA - COLOMBIA

Primera edición Junio de 1977
Segunda edición corregida Febrero de 1978
Tercera edición corregida Febrero de 1979

Derechos de Autor reservados
MAXIMO DE LA CRUZ SOLORZANO

Derechos de Artes Gráficas reservados
BORIS ROMERO ACCINELLI

Derechos de edición reservados
DISTRIBUIDORA EDITORIAL DIDACTICA

Bogotá:	Carrera 21 No. 63-C-53 Teléfono 2498553
Cali:	Carrera 3a. No. 13-42 Of. 303 Edif. El Bazar Tel. 802543
Medellín:	Pasaje Comercial Veracruz Of. 503 Tel. 318476
Barranquilla:	Calle 45 No. 38-11 Of. 202 Tel. 410598

IMPRESO EN COLOMBIA   PRINTED IN COLOMBIA

PRESENTACION

La aplicación de la Reforma Educativa en nuestro País, indiscutiblemente requiere una reestructuración de los distintos aspectos educativos; y en lo que a curriculum se refiere, ésta segunda edición corregida de la obra MATEMATICA MODERNA II para el 7 grado de Educación Básica (2o. Secundaria), está elaborada de acuerdo al nuevo programa vigente y delineado con el propósito de alcanzar los objetivos trazados.

Matemática Moderna II, relaciona su contenido, conceptos, nomenclatura, simbolismos, etc., con los de Matemática Moderna I, confiriéndole así una unidad estructural capaz de proporcionar al estudiante una visión clara y secuencial de los temas, acordes al progreso de la ciencia y sus aplicaciones en los problemas de interés práctico y de vigencia cotidiana.

Algunas de las características de esta obra son: la claridad y sencillez en su exposición; el uso adecuado del lenguaje y simbolismo matemático; la conveniente ilustración que facilita la comprensión de los aspectos básicos; el enfoque conjuntista y práctico que permita al alumno participar activamente con un razonamiento lógico contribuyendo a desterrar el mecanismo y la imposición verbalista, la introducción de ejercicios graduados en orden de dificultad con instrucciones concisas, etc. Además se han incluído conjuntos de ejercicios opcionales, breves reseñas históricas, paradojas y pensamienos que complementan la cultura matemática.

Editorial Didáctica expresa su reconocimiento al autor así como a los distinguidos profesores de matemática colombianos por sus atinadas sugerencias en esta segunda edición y se compromete a realizar esfuerzos mayores con el fin de que las próximas ediciones sean superadas en su contenido científico y didáctico, a la vez que innovadas de acuerdo a los lineamientos de la Reforma Educativa.

EL EDITOR

PARA EL ALUMNO

Lo que a continuación expreso, conlleva el sincero propósito de orientar la actitud del alumno en su afán de estudiar matemática, que naturalmente requiere cierto esfuerzo, pero que resulta compensado al comprobar que a base del razonamiento y la práctica se vencen cada vez con mayor facilidad las dificultades, adquiriendo así una sólida preparación que permitirá afrontar los problemas cotidianos y comprender mejor los avances científicos del mundo en que vivimos.

El alumno debe leer un tema con mucha atención y teniendo siempre a mano papel y lápiz, debe estar seguro de haber entendido bien lo que ha leído o ser franco consigo mismo para formularse la preguntas ¿he entendido realmente? Con esa misma franqueza debe consultar al profesor las dificultades que tiene; pues, todos pasamos por esta situación al estudiar seriamente esta ciencia.

Es importante que el alumno resuelva un número suficiente de problemas utilizando su propio planteamiento si fuera posible, ello le permitirá desarrollar su habilidad matemática y encontrar plena satisfacción espiritual. Destierre la ligera lectura y cumpla con la mejor recomendación para estudiar matemática "APRENDER HACIENDO".

Estudiante colombiano, no olvides que el progreso de tu Patria depende de tu esfuerzo como estudiante y de tu noble actitud como ciudadano, requiere de tu concurso para llevar adelante las transformaciones sociales y económicas con la misma fe y esperanza con que soñaron tus héroes.

EL AUTOR

LISTA DE SIMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conj. de los núm. nat.
$\mathbb{N}^*$	Conj. de los núm. nat. sin cero
$\mathbb{Z}$	Conj. de los núm. ent.
$\mathbb{Z}^*$	Conj. de los núm. ent. sin cero
$\mathbb{Z}^+$	Conj. de los núm. ent. positivos
$\mathbb{Z}^-$	Conj. de los núm. ent. negativos
$\in$	Pertenece a
$\notin$	No pertenece a
$\cup$	Reunión
$\cap$	Intersección
$\subset$	Incluído en, subconj. de
$\not\subset$	No incluído
$\supset$	Incluye a
ϕ	Conjunto vacío
$\wedge$	"y" (conjunción)
$\vee$	"o" (disyunción)
$/$	Tal que
$\forall$	Para todo
$\mathbb{Q}$	Conj. de los núm. racionales
$\mathbb{Q}^+$	Conj. de los núm. racionales positivos
$\mathbb{Q}^-$	Conj. de los núm. racionales negativos
$\mathbb{Q}^*$	Conj. de los núm. racionales sin el cero
$=$	Es igual a
$\neq$	No es igual a,

$\cong$	Es congruente a
$<$	Es menor que
$>$	Es mayor que
$\nless$	No es menor que
$\ngtr$	No es mayor que
$\leqslant$	Es menor o igual que
$\geqslant$	Es mayor o igual que
$\Longrightarrow$	Implica, entonces
$\Longleftrightarrow$	Si y sólo si
(a, b)	Par ordenado a, b
aRb	a está en relación con b
$f: A \to B$	f es una función de a en b
$C(a, b)$	Clase de pares equivalentes
$\%$	Tanto por ciento
$\|a\|$	Valor absoluto de a
$4°C$	4 grados centígrados
μ	Micra
$m\mu$	Milimicra
$\mathring{A}$	Angstron
X	Unidad X
π	Pi
$\overleftrightarrow{L}$	Recta L
$\overline{AB}$	Segmento AB
$\overrightarrow{AB}$	Rayo AB
$\perp$	Es perpendicular a
$\parallel$	Es paralela a
AB	Distancia de A a B
$\angle ABC$	Angulo ABC
$\triangle ABC$	Triángulo ABC

ABREVIATURAS

p. e.	Peso específico
d	Densidad, diagonal, diámetro
M	Masa
V	Volumen
P	Peso
Vn	Valor nominal
Va	Valor actual
D	Descuento
I	Interés
r	Tanto por ciento o tasa porcentual, radio
t	Tiempo
C	Capital
M.C.M.	Mínimo común múltiplo
M.C.D.	Máximo común divisor
A	Area
C	Circunferencia
b	Base
l	Lado
h	Altura
p	Perímetro
a	Arista
ap	Apotema
g	Generatriz

NOTA.— En esta obra, el orden de los millares, de los millones, etc. se indica con la coma (,) y para los numerales decimales se emplea el punto (.).

CARL FRIEDRICH GAUSS

(1777—1855)

Carl F. Gauss fue hijo de padres pobres y nació en una cabaña de Brunsvic (Alemania), habiéndose criado en un ambiente familiar que le privó adquirir una educación adecuada a sus facultades. Su padre lo trató con rudeza y quizo mantenerlo tan ignorante como él; pero en cambio su madre, se puso al lado de su hijo para vencer esta obtinada idea. Gauss cuidó de ella hasta los últimos días de su vida, dándole una serena vejez.

Gauss tenía una inteligencia asombrosa, aprendió a leer por sí mismo; nadie le había enseñado nada sobre Aritmética, sin embargo comprendió el significado de los dígitos 1, 2, ...; y más tarde, le gustaba bromear diciendo que él había aprendido a contar antes que a hablar.

Cumplido los 7 años, ingresó a su primera escuela donde asombró a su maestro con su talento matemático al hallar la suma de los 100 términos de una progresión aritmética del tipo siguiente: 81,297 + 81,495 + 81,693 + ... + 100.899, en el mismo tiempo que tardó el maestro en plantear el problema, algo extraordinario para un niño que jamás había oído nada sobre progresiones. Este hecho le abrió las puertas de la inmortalidad, siendo la Aritmetica su campo de estudio y de sus primeros triunfos. Afortunadamente el Duque de Brunsvic quien vio en Gauss un muchacho prodigio, costeó toda su educación.

Gauss entabló amistad con muchos otros matemáticos, pero consideró a Newton como su ideal. Vivió modestamente e hizo grandes aportaciones en el campo de la Aritmética, la Geometría, la Astronomía, la Estadística, etc. Pero a pesar de esto, dijo siempre con mucha modestia: "Si otros hubieran reflexionado sobre las verdades matemáticas tan profunda y continuamente como yo lo he hecho, hubieran llegado a hacer mis descubrimientos".

Gauss muere el 23 de febrero de 1855 siendo profesor de la Universidad de Gottingen, donde también estudió.

* * *

¿Cuál es el mayor número que se puede escribir con 2, 2, 2? y ¿cuál el menor?

* * *

¡El infinito! Ningún otro problema ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre.

DAVID HILBERT.

Unidad 1

EL NUMERO ENTERO Y EL NUMERO RACIONAL

NUMERO ENTERO

1—1. AMPLIACION DEL CONJUNTO DE LOS NUMEROS NATURALES.— Sabemos que la sustracción de números naturales es posible siempre que el minuendo sea mayor o igual que el sustraendo. Así, por ejemplo: $5 - 3 = 2$, $4 - 4 = 0$, etc.

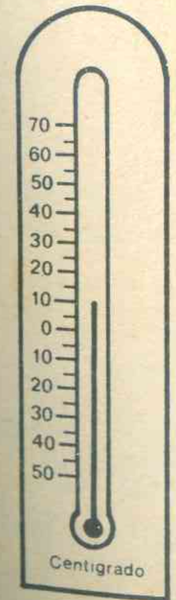


Fig. 1-1

Pero cuando el minuendo es menor que el sustraendo, la operación no es posible en el conjunto N, tal como $3 - 5$. Sin embargo, en la vida real son muchos los problemas que nos conducen a operaciones de este tipo, de allí la necesidad de ampliar el campo de los números naturales con la introducción de un nuevo conjunto de números llamado **conjunto de los números enteros.** Veamos algunos de estos problemas:

1. Sabemos que el agua se congela a cero grados centígrados y que existen temperaturas por encima y por debajo de cero grados. Así, por ejemplo, si en un determinado lugar de la tierra el termómetro (Fig. 1-1) marcó durante el día 10° **sobre cero** como temperatura máxima y durante la noche bajó 15°, ¿cuál fue la temperatura mínima registrada durante la noche? Naturalmente 5° **bajo cero**; y, ¿cómo se expresa simbólicamente esta temperatura?

2. Si Rosa tiene 200 pesos y adquiere un artículo de tocador cuyo valor es de 300 pesos, ¿cuál es su deuda? Naturalmente 100 pesos; y, ¿cómo se expresa simbólicamente este estado económico de Rosa?

Si la recta L de la figura 1-2 representa un camino en el cual supongamos que Juan parte de A y avanza 2 pasos hacia B para luego caminar 4 pasos en sentido contrario hasta llegar a M. ¿Cuál es el número que representa el punto M?

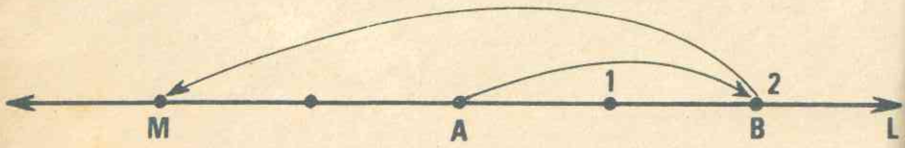


Fig. 1-2

Todas estas interrogantes tienen respuestas mediante operaciones sencillas en el conjunto de los números enteros.

1—2. EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS: CONCEPTO DE NUMERO ENTERO.—

Sea N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...} y N × N = { (0,1), (1,2), (2,3), (0,0), (1,1,), (2,2), (1,0), (2,1), (2,3), ... } (algunos pares ordenados).

En el conjunto de pares ordenados de N × N podemos establecer una relación R, de modo que:

$$(a, b) \; R \; (c, d) \Longleftrightarrow a + d = b + c.$$

Así, tenemos:

(1, 2) R (2, 3) porque 1 + 3 = 2 + 2
(1, 1) R (2, 2) porque 1 + 2 = 1 + 2
(1, 0) R (2, 1) porque 1 + 1 = 0 + 2.

Esta relación R es de equivalencia porque es:

a) **Reflexiva:** (a, b) R (a, b)

b) **Simétrica:** Si (a, b) R (c, d) $\Longrightarrow$ (c, d) R (a, b)

c) **Transitiva:** Si (a, b) R (c, d) y (c, d) R (m, n) $\Longrightarrow$ (a, b) R (m, n)

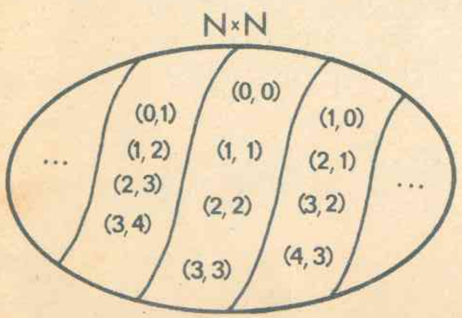


Fig. 1-3

Puesto que R es una relación de equivalencia, podemos establecer una partición en N × N en clases de equivalencia, tal como nos ilustra el diagrama de la figura 1-3.

Así, son clases de pares equivalentes:

C (0, 2) = { (0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), ... }
C (0, 1) = { (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), ... }
C (0, 0) = { (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), ... }
C (1, 0) = { (1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3), ... }
C (2, 0) = { (2, 0), (3, 1), (4, 2), (5, 3), ... }.

Cada una de estas clases representan un número entero.

Luego, podemos decir:

Número entero es una clase de equivalencia de pares ordenados de números naturales.

El conjunto formado por todas las clases de equivalencia de N × N se denomina **conjunto de los números enteros o conjunto Z.**

De modo que, podemos escribir: Z = { ..., C (0, 2), C (0, 1), C (0, 0), C (1, 0), C (2, 0), ... } y como cada clase representa un número entero, el conjunto Z simbólicamente podemos expresarlo así:

$$Z = \{ \ldots, {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0, {}^{+}1, {}^{+}2, {}^{+}3, \ldots \}.$$

El conjunto de los números enteros sin el 0 (cero) o "Z sin cero" se denota por Z^* y significa $Z^* = Z - \{ 0 \}$.

Como podemos observar, en el conjunto Z hay tres subconjuntos: Z^- (enteros negativos), { 0 } y Z^+ (enteros positivos), de donde: $Z^- \cup \{0\} \cup Z^+ = Z$.

Además, entre el conjunto Z^+ y el conjunto N^*, se puede establecer una correspondencia biunívoca, o sea:

$$\begin{array}{lcl} Z^+ & = & \{ {}^{+}1, \; {}^{+}2, \; {}^{+}3, \; {}^{+}4, \; {}^{+}5, \; \ldots \} \\ & & \;\;\updownarrow \;\;\;\; \updownarrow \;\;\;\; \updownarrow \;\;\;\; \updownarrow \;\;\;\; \updownarrow \\ N & = & \{ \; 1, \;\; 2, \;\; 3, \;\; 4, \;\; 5, \; \ldots \}. \end{array}$$

Estos números se comportan de igual manera bajo una misma operación; por tal razón, se puede usar un número natural en lugar de su correspondiente entero positivo. Pues $N \subset Z$.

1—3. NUMEROS ENTEROS OPUESTOS.—

Entre los enteros positivos y los enteros negativos se puede establecer una correspondencia biunívoca. Así:

$$
\begin{array}{l}
Z^+ = \{\ ^+1,\ ^+2,\ ^+3,\ ^+4,\ ^+5,\ \ldots\ \} \\
\qquad\ \ \updownarrow\quad\ \updownarrow\quad\ \updownarrow\quad\ \updownarrow\quad\ \updownarrow \\
Z^- = \{\ ^-1,\ ^-2,\ ^-3,\ ^-4,\ ^-5,\ \ldots\ \}
\end{array}
$$

A estos números que se diferencian solamente en el signo se les denomina **números enteros opuestos.**

Por consiguiente, si a es un número entero, el opuesto de a . es ^-a. Así, por ejemplo:

El opuesto de $^+5$ es $^-5$, o sea: $-(^+5)$ es $^-5$;

el opuesto de $^-5$ es $^+5$, o sea: $-(^-5)$ es $^+5$.

El entero 0 (cero) no tiene opuesto, porque no es negativo ni positivo.

1—4. LA RECTA NUMERICA PARA LOS NUMEROS ENTEROS.— Dado $Z = \{\ldots, ^-5, ^-4, ^-3, ^-2, ^-1, 0, ^+1, ^+2, ^+3, ^+4, ^+5, \ldots\}$ y una recta L, podemos establecer una función $f: Z \longrightarrow \overleftrightarrow{L}$, donde a cada número entero le corresponde un punto y sólo uno en la recta (Fig. 1-4). Así se obtiene la **recta numérica para los números enteros.**

Fig. 1-4

Aquí, Z es el conjunto de partida y $\overleftrightarrow{L}$ es el conjunto de llegada y cada punto marcado es imagen de un número entero. Asimismo, se observa que a la derecha de 0 (cero) se ubican los enteros positivos (números mayores que 0) y a su izquierda los enteros negativos (números menores que 0).

1—5. VALOR ABSOLUTO DE UN NUMERO ENTERO.— Sea a un número entero. A cada número entero a le corresponde un único número llamado **valor absoluto de a** y se denota así: $|a|$. Esto significa que:

$$
\begin{array}{l}
\text{Si } a > 0 \Longrightarrow |a| = a \\
\text{Si } a = 0 \Longrightarrow |a| = 0 \\
\text{Si } a < 0 \Longrightarrow |^-a| = a
\end{array}
$$

Así, por ejemplo: $|^+4| = 4$, $|0| = 0$, $|^-4| = -(^-4) = 4$.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—1

1. **Dadas las clases: C(0, 3), C(0, 4), C(3, 0) y C(4, 0), escriba el conjunto de pares ordenados equivalentes a cada clase así como el símbolo correspondiente.**
2. **Dados: {(0, 6), (1, 7), (2, 8), ...}, {(0, 0), (1, 1), (2, 2), ...} y {(5, 0), (6, 1), (7, 2), ...} escriba la notación para cada clase y los símbolos correspondientes.**
3. **Escribir los números opuestos de: $^+9$, $^+12$, $^-10$, $^-15$, $^+24$ y $^-45$.**
4. **Hallar los valores absolutos de: $|^+7|$, $|^+16|$, $|^-15|$, $|^-28|$, $|0|$ y $|^-36|$.**

1—6. IGUALDAD EN EL CONJUNTO Z.— Dos números enteros son iguales si tienen el mismo signo e igual valor absoluto. Así, por ejemplo:

$^+5 = {}^+5$, porque tienen el mismo signo (+) y $|^+5| = |^+5|$

$^-8 = {}^-8$, porque tienen el mismo signo (-) y $|^-8| = |^-8|$.

En general, dados dos números enteros a y b, a = b si tienen el mismo signo y $|a| = |b|$.

La igualdad en el conjunto Z es una relación de equivalencia.

1—7. DESIGUALDAD EN EL CONJUNTO Z.— Si a y b son dos números enteros diferentes, podemos establecer las relaciones siguientes:

1º **Relación mayor:**

a) $a > b$, si ambos son positivos y $|a| > |b|$
Así: $^+5 > {}^+2$, $^+15 > {}^+10$, etc.

b) $a > b$, si ambos son negativos y $|a| < |b|$
Así: $^-4 > {}^-9$, $^-12 > {}^-15$, etc.

c) $a > b$, si a es positivo y b es negativo.
Así: $^+3 > {}^-10$, $^+5 > {}^-20$, etc.

2º **Relación menor:**

a) $a < b$, si ambos son positivos y $|a| < |b|$.
Así: $^+3 < {}^+5$, $^+9 < {}^+12$, etc.

b) $a < b$, si ambos son negativos y $|a| > |b|$.
Así: $^-5 < {}^-2$, $^-11 < {}^-7$, etc.

c) $a < b$, si a es negativo y b es positivo.
Así: $^-6 < {}^+1$, $^-9 < {}^+3$, etc.

Además, si uno de los enteros es 0 (cero), tenemos:

$$a > 0, \text{ si } a \text{ es positivo y}$$
$$a < 0, \text{ si } a \text{ es negativo.}$$

Así: $^{+}2 > 0$, $^{-}5 < 0$, etc.

La designaldad en el conj·mto Z es una relación de orden.

1—8. LEY DE TRICOTOMIA.— Dados dos números enteros a y b, una y sólo una de las relaciones siguientes se cumple.

$$a < b \text{ ó } a = b \text{ ó } a > b.$$

Así: si $^{-}8 < {}^{+}5$, entonces no es cierto que $^{-}8 = {}^{+}5$ ni que $^{-}8 > {}^{+}5$.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—2

1. Escribir los símbolos $>$ $=$ ó $<$ en cada caso:

a) $^{+}6$ .... $^{+}6$	d) $^{-}14$ .... $^{-}20$	g) 0 .... $^{-}2$
b) $^{-}4$ .... $^{-}4$	e) $^{+}5$ .... $^{-}6$	h) 0 0
c) $^{+}9$ .... $^{+}12$	f) $^{-}7$ 0	i) $^{+}5$ .... 0.

2. Ordenar de menor a mayor:

a) $^{+}1$, 0, $^{-}5$, $^{-}7$, $^{-}1$, $^{+}2$, $^{-}4$, $^{-}6$, $^{-}2$

b) $^{-}10$, $^{-}4$, 0, $^{+}2$, $^{-}8$, $^{+}4$, $^{+}1$, $^{-}3$.

3. Ordenar de mayor a menor:

a) $^{-}3$, $^{+}1$, 0, $^{-}2$, $^{+}3$, $^{-}1$, $^{+}2$.

b) $^{+}10$, $^{-}15$, $^{+}5$, $^{-}10$, 0, $^{-}5$, $^{-}20$, $^{+}20$.

4. Dados $^{+}3$ y $^{-}7$, aplique la ley de la tricotomía.

OPERACIONES CON NUMEROS ENTEROS

1—9. ADICION DE NUMEROS ENTEROS.— Sean:

$$Z = \{\ldots, {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0, {}^{+}1, {}^{+}2, {}^{+}3, \ldots\} \text{ y}$$
$Z \times Z = \{\ldots, ({}^{-}3, {}^{-}2), ({}^{-}3, 0), ({}^{-}1, {}^{+}2), (0, {}^{+}1), ({}^{+}2, {}^{+}3), \ldots\}$ todos los pares ordenados de $Z \times Z$.

Si a y b son dos números enteros, tenemos:

La operación que hace corresponder al par ordenado (a, b) de $Z \times Z$ un tercer número entero $a + b$ de Z llamado suma, se denomina adición de números enteros.

O sea: si $(a, b) \in Z \times Z \Longrightarrow (a, b) \xrightarrow{+} a + b$.

Se lee: "Si el par ordenado (a, b) pertenece a $Z \times Z$, entonces al par (a, b) le corresponde bajo la operación de adición el número entero $a + b$".

Así, tenemos:

$$({}^{+}2, {}^{+}3) \xrightarrow{+} {}^{+}2 + {}^{+}3,$$
$$({}^{-}3, {}^{-}2) \xrightarrow{+} {}^{-}3 + {}^{-}2,$$
$$({}^{+}2, {}^{-}1) \xrightarrow{+} {}^{+}2 + {}^{-}1,$$
$$({}^{-}3, 0) \xrightarrow{+} {}^{-}3 + 0 \text{ , etc.}$$

En la adición de números enteros, debemos considerar:

a] **Adición de dos números enteros.—** Usando la recta numérica para los números enteros e indicando por medio de flechas los sumandos de modo que el primer sumando parta de 0 (cero), se obtiene la suma. Si el sumando es un entero positivo, se avanza hacia la derecha; y si el sumando es un entero negativo, se avanza hacia la izquierda.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—3

A. EJEMPLO 1.— Hallar la suma de $({}^{+}2)$ y $({}^{+}4)$.

Solución: (Fig. 1-5)

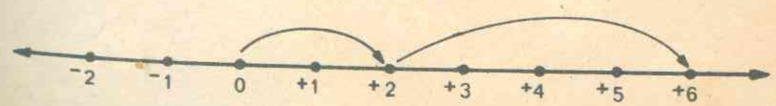


Fig. 1-5

Luego: $({}^{+}2) + ({}^{+}4) = {}^{+}6$.

EJEMPLO 2.— **Hallar la suma de $(^-3)$ y $(^-2)$.**

Solución: (Fig. 1-6)

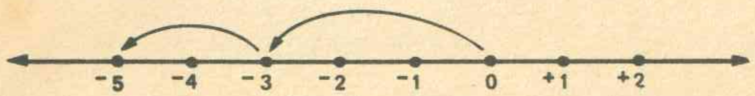


Fig. 1-6

Luego: $(^-3) + (^-2) = {}^-5.$

EJEMPLO 3.— **Hallar la suma de $(^+5)$ y $(^-4)$.**

Solución: (Fig. 1-7)

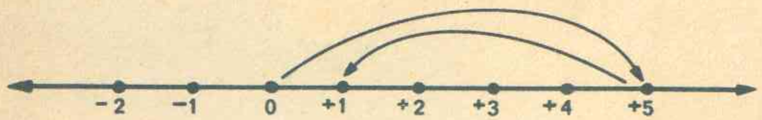


Fig. 1-7

Luego: $(^+5) + (^-4) = {}^+1.$

EJEMPLO 4.— **Hallar la suma de $(^-6)$ y $(^+3)$.**

Solución: (Fig. 1-8)

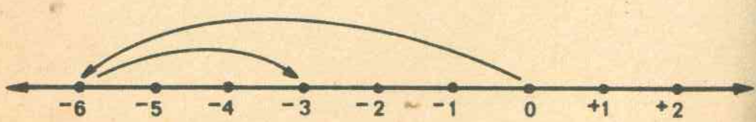


Fig. 1-8

Luego: $(^-6) + (^+3) = {}^-3.$

EJEMPLO 5.— **Hallar la suma de $(^+4)$ y $(^-4)$.**

Solución: (Fig. 1-9)

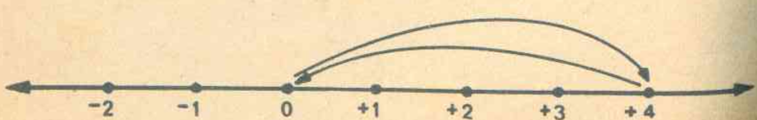


Fig. 1-9

Luego: $(^+4) + (^-4) = 0.$

La observación de estos ejemplos nos permite afirmar:

1° **Para sumar dos números enteros positivos o dos enteros negativos, se suman los valores absolutos y esta suma se escribe con el mismo signo de los sumandos.**

2° **Para sumar un número entero positivo y otro entero negativo, se restan los valores absolutos y esta diferencia se escribe con el signo del sumando que tiene mayor valor absoluto.**

B. Hallar las sumas siguientes:

1. $(^-7) + (^+6)$
2. $(^+10) + (^+5)$
3. $(^-4) + (^+10)$
4. $(^-5) + (^+1)$
5. $(^-4) + (^-10)$
6. $(^-7) + (^-7)$
7. $(^+12) + (^-5)$
8. $(^+3) + (^-8)$
9. $(^+4) + (^-9)$
10. $(^-6) + (^-11)$
11. $(^+9) + (^-9)$
12. $(^-13) + (^+13)$

NOTA.—Cuando un sumando tiene signo positivo $(+)$, puede omitirse escribir dicho signo quedando sobreentendido. Además, los sumandos pueden escribirse entre paréntesis o sin ellos y la mecánica de la operación es la misma. Así, por ejemplo:

1. $(13) + (^-5) = 13 + {}^-5 = 8$
2. $(^-15) + (^-5) = {}^-15 + {}^-5 = {}^-20.$

b) Adición de tres o más números enteros.— Usando la recta numérica se procede en forma semejante que en el caso anterior.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—4

A EJEMPLO 1.— Hallar la suma de: $(^+5)$, $(^-7)$ y $(^+2)$.

Solución: (Fig. 1-10)

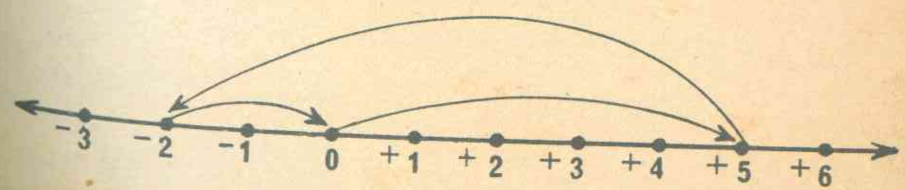


Fig. 1-10

Luego: $(^+5) + (^-7) + (^+2) = 0.$

EJEMPLO 2.— Hallar la suma de: $(^+3)$, $(^-6)$, $(^-2)$ y $(^+4)$.

Solución: (Fig. 1-11)

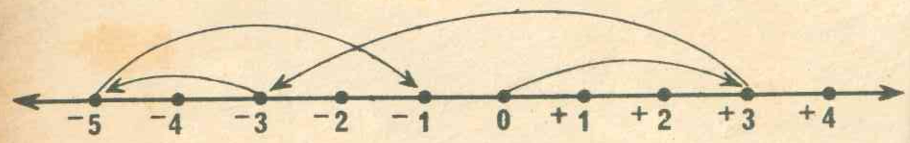


Fig. 1-11

Luego: $(^+3) + (^-6) + (^-2) + (^+4) = {}^-1$.

La observación de estos ejemplos nos permite afirmar:

Para sumar tres o más números enteros, se suman los dos primeros sumandos, este resultado se suma con el tercer sumando y así sucesivamente.

Así, en el ejemplo anterior (2) se ha procedido en la forma siguiente: $(^+3) + (^-6) = {}^-3$, $(^-3) + (^-2) = {}^-5$ y $(^-5) + (^+4) = {}^-1$.

B Hallar las sumas siguientes:

1. $(^+7) + (^+9) + (^+3)$
2. $(^-8) + (^-7) + (^-1)$
3. $(^+10) + (^-15) + (^+6)$
4. $(^-13) + (^+8) + (^+5)$
5. $(^+2) + (^+3) + (^+7) + (^+4)$
6. $(^-1) + (^-5) + (^-3) + (^-2)$
7. $(^-3) + (^-5) + (^+4) + (^-1) + (^+6)$
8. $(^+2) + (^-6) + (^-5) + (^+8) + (^+1)$
9. $(^-4) + (^+9) + (^-5) + (^+10) + (^-9)$
10. $(^+5) + (^+2) + (^-5) + (^-7) + (^-4) + (^-6)$
11. $(^-7) + (^+5) + (^-9) + (^+4) + (^-6) + (^+2)$
12. $(^-10) + (^+6) + (^-12) + (^+15) + (^-9) + (^+13)$.

1—10. PROPIEDADES DE LA ADICION DE NUMEROS ENTEROS.—

Sean a, b y c números enteros:

a) **Propiedad de clausura.**—Dados $(^-8)$ y $(^-4)$, tenemos

$$(^-8) + (^-4) = {}^-12$$

O sea: $a + b \in Z$.

Luego, podemos decir:

La suma de dos números enteros es otro número entero.

De allí que el conjunto Z es cerrado con respecto a la adición.

b) **Propiedad asociativa.**— Dados los números $(^+3)$, $(^-8)$ y $(^+2)$, tenemos:

$$(^+3) + (^-8) + (^+2) = {}^-3$$

Asociando dos sumandos, resulta:

$$[(^+3) + (^-8)] + (^+2) = (^-5) + (^+2) = {}^-3.$$

O también: $(^+3) + [(^-8) + (^+2)] = (^+3) + (^-6) = {}^-3$.

Vemos que efectuando las operaciones en cada una de estas agrupaciones se obtiene $^-3$, luego estas agrupaciones numéricas son equivalentes y podemos escribir:

$$\begin{aligned}(^+3) + (^-8) + (^+2) &= [(^+3) + (^-8)] + (^+2)\\ &= (^+3) + [(^-8) + (^+2)].\end{aligned}$$

En general, $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) = \ldots$

Luego, podemos decir:

Asociando sumandos de modos distintos se obtiene la misma suma.

c) **Elemento neutro.**—Dados los números $(^-8)$ y (0), tenemos:

$$(^-8) + (0) = (0) + (^-8) = {}^-8.$$

En general, $a + 0 = 0 + a = a$.

Luego, podemos decir:

La suma de un número entero con 0 (cero) da el mismo número.

Por tal razón, el número 0 (cero) es elemento neutro para la adición.

d) **Elemento simétrico.**—Dados los números $(^+5)$ y $(^-5)$, tenemos:

$$(^+5) + (^-5) = (^-5) + (^+5) = 0.$$

En general, $^+a + {}^-a = {}^-a + {}^+a = 0$.

Luego, podemos decir:

La suma de dos números enteros opuestos es 0 (cero).

De modo que, en la adición, el elemento simétrico de un número entero es su opuesto.

e) **Propiedad conmutativa.**—Dados los números $(^+7)$ y $(^-9)$, tenemos:

$$(^+7) + (^-9) = {}^-2.$$

Cambiando el orden de los sumandos, resulta:

$$(^-9) + (^+7) = {}^-2.$$

Por tanto, son expresiones numéricas equivalentes y podemos escribir:

$$(^+7) + (^-9) = (^-9) + (^+7).$$

En general, $a + b = b + a$.

Luego, podemos decir:

Cambiando el orden de los sumandos se obtiene la misma suma.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—5

1. ¿Por qué el conjunto Z es cerrado con respecto a la adición?
2. Dados los sumandos: $^+7$, $^-10$ y $^+4$, asocie de tres maneras diferentes dichos sumandos y verifique la equivalencia de estas expresiones numéricas.
3. Dados: $^+9$, 0 y $^-9$, escriba las adiciones:
   a) Con elemento neutro.
   b) Con elemento simétrico.
4. Dados los sumandos $^+15$ y $^-25$, escríbalos teniendo en cuenta la conmutatividad y halle la suma.

1—11 MULTIPLICACION DE NUMEROS ENTEROS.—

Sean a y b dos números enteros.

La operación que hace corresponder al par ordenado (a, b) de $Z \times Z$ un tercer número $a \times b$ de Z llamado producto, se denomina multiplicación de números enteros.

O sea: si $(a, b) \in Z \times Z \Longrightarrow (a, b) \xrightarrow{\times} a \times b$.

Así, tenemos:

$$(^+5,\ ^+2) \xrightarrow{\times} {}^+5 \times {}^+2,$$
$$(^-3,\ ^-9) \xrightarrow{\times} {}^-3 \times {}^-9,$$
$$(^+8,\ ^-6) \xrightarrow{\times} {}^+8 \times {}^-6,$$
$$(^-3,\ ^+4) \xrightarrow{\times} {}^-3 \times {}^+4, \text{ etc.}$$

En la multiplicación de números enteros debemos considerar:

a] **Multiplicación de dos números enteros.**— Para hallar el producto de dos números enteros, emplearemos un sistema de dos rectas numéricas para el conjunto Z las cuales se intersecan en el punto 0 (cero).

Sean las rectas $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$.

El procedimiento es el siguiente:

1º El punto $^+1$ de $\overleftrightarrow{L_1}$ se une con el punto indicado por el primer factor en $\overleftrightarrow{L_2}$, obteniéndose así un segmento.

2º Por el punto indicado por el segundo factor en $\overleftrightarrow{L_1}$, se traza una paralela al segmento anterior.

La intersección de esta paralela con $\overleftrightarrow{L_2}$ determina el producto.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—6

A EJEMPLO 1.— **Hallar el producto de $(^+3)$ y $(^+2)$.**

Solución: (Fig. 1-12)

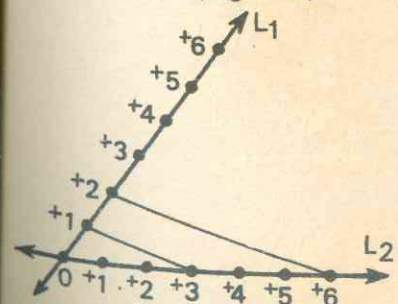


Fig. 1-12

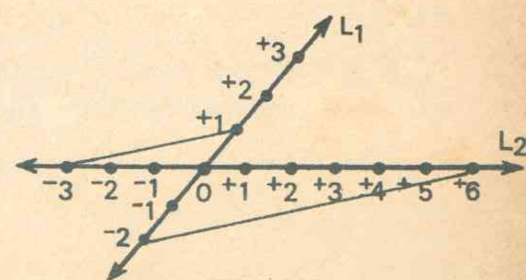


Fig. 1-13

Luego: $(^+3)\ (^+2) = {}^+6$.

Obsérvese que cuando entre dos paréntesis no se indica un signo operacional, se sobreentiende que se trata del signo $\times$.

EJEMPLO 2.— Hallar el producto de $(^-3)$ y $(^-2)$.

Solución: (Fig. 1-13)

Luego: $(^-3)\ (^-2) = {}^+6$.

De donde se deduce:

El producto de dos números enteros del mismo signo es positivo.

Así, tenemos: $(^+4)\ (^+5) = {}^+20$, $(^-7)\ (^-9) = {}^+63$, etc.

EJEMPLO 3.— Hallar el producto de $(^+3)$ y $(^-2)$.

Solución: (Fig. 1-14)

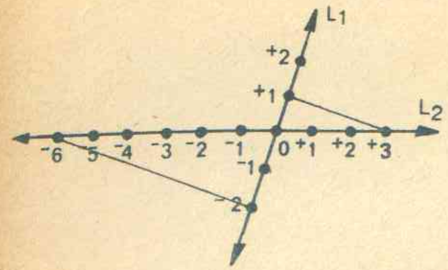


Fig. 1-14

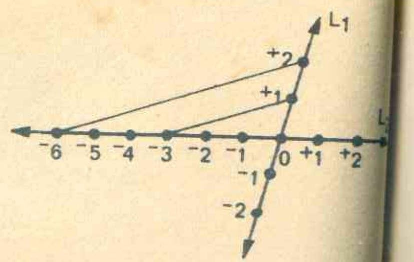


Fig. 1-15

Luego: $(^+3)\ (^-2) = {}^-6$.

EJEMPLO 4.— Hallar el producto de $(^+3)$ y $(^-2)$

Solución: (Fig. 1-15)

Luego: $(^-3)\ (^+2) = {}^-6$.

De donde se deduce:

El producto de dos números enteros de distinto signo es negativo.

Así, tenemos: $(^+7)\ (^-7) = {}^-49$, $(^-8)\ (^+9) = {}^-72$, etc.

B Hallar los productos siguientes:

1. $(^+3)\ (^+7)$
2. $(^+8)\ (^+6)$
3. $(^-6)\ (^-10)$
4. $(^-12)\ (^-4)$
5. $(^+5)\ (^-4)$
6. $(^+9)\ (^-7)$
7. $(^-8)\ (^+8)$
8. $(^-15)\ (^+5)$
9. $(^+20)\ (^+8)$
10. $(^-25)\ (^-4)$
11. $(^+18)\ (^-15)$
12. $(^-30)\ (^+17)$

b) Multiplicación de tres o más números enteros.— Para hallar el producto de tres o más números enteros, se multiplican los dos primeros factores, este resultado se multiplica con el tercer factor y así sucesivamente.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—7

A EJEMPLO 1.— Hallar el producto de: $(^+3)$, $(^+4)$ y $(^+5)$.

Solución: $(^+3)\ (^+4)\ (^+5) = {}^+60$

Se ha procedido en la forma siguiente:

$$(^+3)\ (^+4) = {}^+12,$$
$$(^+12)\ (^+5) = {}^+60.$$

EJEMPLO 2.— Hallar el producto de: $(^-3)$, $(^+2)$, $(^+5)$ y $(^-6)$.

Solución: $(^-3)\ (^+2)\ (^+5)\ (^-6) = {}^+180$.

Se ha procedido en la forma siguiente:

$$(^-3)\ (^+2) = {}^-6,\quad (^-6)\ (^+5) = {}^-30,\quad (^-30)\ (^-6) = {}^+180.$$

EJEMPLO 3.— Hallar el producto de: $(^-4)$, $(^+10)$, $(^-2)$ y $(^-5)$.

Solución: $(^-4)\ (^+10)\ (^-2)\ (^-5) = {}^-400$

Se ha procedido en la forma siguiente:

$$(^-4)\ (^+10) = {}^-40,\quad (^-40)\ (^-2) = {}^+80,\quad (^+80)\ (^-5) = {}^-400.$$

La observación de estos ejemplos nos permite afirmar:

a) Cuando los factores son positivos, el producto es positivo.
b) Cuando el número de factores negativos es par, el producto es positivo.
c) Cuando el número de factores negativos es impar, el producto es negativo.

B Hallar los productos siguientes:

1. $(^+4)\ (^+3)\ (^+2)$
2. $(^+2)\ (^+3)\ (^+4)\ (^+1)$
3. $(^-5)\ (^-3)\ (^-2)$
4. $(^-3)\ (^-5)\ (^-7)\ (^-1)$
5. $(^-2)\ (^+3)\ (^-5)\ (^+1)$
6. $(^-3)\ (^-1)\ (^+5)\ (^+3)\ (^-6)$
7. $(^-2)\ (^-1)\ (^-10)\ (^-3)\ (^-4)$
8. $(^-6)\ (^-3)\ (^+5)\ (^+1)\ (^-4)$
9. $(^+1)\ (^-2)\ (^-6)\ (^+10)\ (^+3)$
10. $(^-4)\ (^-8)\ (^-10)\ (^+2)\ (^+5)$

1—12. PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION DE NUMEROS ENTEROS.— Si a, b y c son números enteros, consideremos las propiedades siguientes:

a) **Propiedad de clausura.**—Dados $(^-5)$ y $(^+6)$, tenemos:

$$(^-5)\ (^+6) = {}^-30$$

O sea: $a \times b \in Z$.

Luego, podemos decir:

El producto de dos números enteros es otro número entero.

De allí que el conjunto Z es cerrado con respecto a la multiplicación.

b) **Propiedad asociativa.**—Dados $(^+3)$, $(^-2)$ y $(^+4)$, tenemos:

$$(^+3)\ (^-2)\ (^+4) = {}^-24.$$

Asociando dos factores, resulta:

$$[(^+3)\ (^-2)]\ (^+4) = (^-6)\ (^+4) = {}^-24.$$

O también: $(^+3)\ [(^-2)\ (^+4)] = (^+3)\ (^-8) = {}^-24.$

Vemos que efectuando las operaciones en cada una de estas agrupaciones se obtiene $^-24$, luego estas agrupaciones numéricas son equivalentes y podemos escribir:

$$(^+3)\ (^-2)\ (^+4) = [(^+3)\ (^-2)]\ (^+4) =$$
$$(^+3)\ [(^-2)\ (^+4)]$$

En general, $a.b.c = (a.b).c = a.(b.c) = \ldots$

Obsérvese que el punto marcado entre letras indica el signo operacional $\times$

Luego, podemos decir:

Asociando factores de modos distintos se obtiene el mismo producto.

c) **Elemento neutro.**—Dados $(^-5)$ y $(^+1)$, tenemos:

$$(^-5)\ (^+1) = (^+1)\ (^-5) = {}^-5.$$

En general, $(a)\ (^+1) = (^+1)\ (a) = a.$

Luego, podemos decir:

El producto de un número entero con $^+1$ da el mismo número.

De allí que el entero $^+1$ es el elemento neutro de la multiplicación.

d) **Propiedad conmutativa.**—Dados $(^-4)$ y $(^+5)$, tenemos:

$$(^-4)\ (^+5) = {}^-20.$$

Cambiando el orden de los factores, resulta:

$$(^+5)\ (^-4) = {}^-20.$$

Por tanto, $(^-4)\ (^+5)$ y $(^+5)\ (^-4)$ son expresiones numéricas equivalentes y podemos escribir:

$$(^-4)\ (^+5) = (^+5)\ (^-4).$$

En general, $a.b = b.a$

Luego, podemos decir:

Cambiando el orden de los factores se obtiene el mismo producto.

e) **Propiedad distributiva.**—Dado $(^-4)$ y $(^+6)$, tenemos:

$$(^-4)\ (^+6) = {}^-24.$$

Descomponiendo $^+6$ en dos sumandos tales como $^+4$ y $^+2$, resulta:

$$(^-4)\ (^+6) = (^-4)\ [(^+4) + (^+2)] = (^-4)\ (^+4) + (^-4)\ (^+2)$$
$$= (^-16) + (^-8) = {}^-24.$$

De modo que podemos escribir:

$$(^-4)\ [(^+4) + (^+2)] = (^-4)\ (^+4) + (^-4)\ (^+2).$$

En general, $a.(b + c) = a.b + a.c$

Esto significa que la multiplicación es distributiva con respecto a la adición.

1—13. EL CERO EN LA MULTIPLICACION DE NUMEROS ENTEROS.— El producto de un número entero con 0 (cero) es cero.

Así: $5 \times 0 = 0$, $^-7 \times 0 = 0$, $0 \times 0 = 0$, etc.

En general, $a \times 0 = 0 \times a = 0$.

Esto significa que el entero 0 (cero) es absorbente para la multiplicación.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—8

1. ¿Por qué el conjunto Z es cerrado con respecto a la multiplicación?
2. Dados los factores: $^{-}5$, $^{+}4$ y $^{-}3$, asocie de tres maneras diferentes dichos factores y verifique la equivalencia de estas expresiones numéricas.
3. Dados $^{+}10$ y $^{-}10$, escriba las multiplicaciones con elemento neutro.
4. Dados los factores $^{+}12$ y $^{-}8$, escríbalos teniendo en cuenta la conmutatividad y halle el producto.
5. Dados $^{-}3$ y $^{+}8$, descomponga $^{+}8$ en dos sumandos, escriba los factores teniendo en cuenta la distributividad y halle el producto.

1—14. SUSTRACCION DE NUMEROS ENTEROS.

Dados dos números enteros a y b, existe un tercer número c llamado diferencia y se denota por $a - b$, si $a = b + c$.

De modo que: $a - b = c \Longleftrightarrow a = b + c$.

La operación que hace corresponder a cada par ordenado (a, b) de $Z \times Z$ un tercer número $a - b$ de Z llamado diferencia, se denomina sustracción de números enteros.

O sea: si $(a, b) \in Z \times Z \Longrightarrow (a, b) \xrightarrow{-} a - b$.

Así, tenemos: $(^{+}8, {}^{+}5) \xrightarrow{-} {}^{+}8 - {}^{+}5$,

$(^{-}7, {}^{-}3) \xrightarrow{-} {}^{-}7 - {}^{-}3$,

$(^{+}12, {}^{-}8) \xrightarrow{-} {}^{+}12 - {}^{-}8$,

$(^{-}15, {}^{+}9) \xrightarrow{-} {}^{-}15 - {}^{+}9$.

La sustracción de dos números enteros equivale a la adición del minuendo y el opuesto del sustraendo.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—9

A EJEMPLO 1.—Hallar la diferencia de $(^{+}8)$ y $(^{+}5)$.

Solución: $(^{-}8) - (^{+}5) = (^{+}8) + (^{-}5) = {}^{+}3$.

Pues, $^{+}8 = (^{+}5) + (^{+}3)$.

EJEMPLO 2.— Hallar la diferencia de $(^{-}7)$ y $(^{-}3)$

Solución: $(^{-}7) - (^{-}3) = (^{-}7) + (^{+}3) = {}^{-}4$.

Pues, $^{-}7 = (^{-}3) + (^{-}4)$.

EJEMPLO 3.— Hallar la diferencia de $(^{+}12)$ y $(^{-}8)$.

Solución: $(^{+}12) - (^{-}8) = (^{+}12) + (^{+}8) = {}^{+}20$.

Pues, $^{+}12 = (^{-}8) + (^{+}20)$.

EJEMPLO 4.— Hallar la diferencia de $(^{-}15)$ y $(^{+}9)$.

Solución: $(^{-}15) - (^{+}9) = (^{-}15) + (^{-}9) = {}^{-}24$.

Pues, $^{-}15 = (^{+}9) + (^{-}24)$.

La sustracción de números enteros es **clausurativa**, porque si $(a, b) \in Z \times Z$ $a - b \in Z$. Luego, el conjunto Z es cerrado con respecto a la sustracción, pero no es asociativa ni es conmutativa. ¿Por qué?

B Hallar las diferencias siguientes:

1. $(^{+}7) - (^{+}5)$	7. $(^{-}5) - (^{-}11)$
2. $(^{+}15) - (^{+}8)$	8. $(^{-}6) - (^{-}15)$
3. $(^{-}9) - (^{-}4)$	9. $(^{+}10) - (^{-}4)$
4. $(^{-}10) - (^{-}6)$	10. $(^{+}7) - (^{-}9)$
5. $(^{-}3) - (^{+}8)$	11. $(^{+}18) - (^{-}6)$
6. $(^{+}2) - (^{+}12)$	12. $(^{-}20) - (^{+}30)$.

1—15. DIVISION DE NUMEROS ENTEROS.—

Dados dos números enteros a y b donde $b \neq 0$, existe un tercer número c llamado cociente y se denota por $a \div b$, si $a = b \times c$.

De modo que: $a \div b = c \Longleftrightarrow a = b.c$.

La operación que hace corresponder a ciertos pares ordenados (a, b) de $Z \times Z$ un tercer número $a \div b$ llamado cociente, se denomina división de números enteros.

O sea: si $(a, b) \in Z \times Z \Longrightarrow (a, b) \xrightarrow{\div} a \div b$.

Así, tenemos: $(^+12,\ ^-4) \xrightarrow{\div} {}^+12 \div {}^+4,$

$$(^-18,\ ^-9) \xrightarrow{\div} {}^-18 \div {}^-9,$$

$$(^+30,\ ^-6) \xrightarrow{\div} {}^+30 \div {}^-6,$$

$$(^-27,\ ^+9) \xrightarrow{\div} {}^-27 \div {}^+9.$$

Para hallar el cociente de dos números enteros debe tenerse en cuenta lo siguiente:

a) **El cociente de dos números enteros del mismo signo es positivo.**

Ejemplos:

1. $(^+12) \div (^+4) = {}^+3.$ Pues, $^+12 = (^+4)\ (^+3)$
2. $(^-18) \div (^-9) = {}^+2.$ Pues, $^-18 = (^-9)\ (^+2).$

b) **El cociente de dos números enteros de distinto signo es negativo.**

Ejemplos:

1. $(^+30) \div (^-6) = {}^-5.$ Pues, $(^+30) = (^-6)\ (^-5).$
2. $(^-27) \div (^+9) = {}^-3.$ Pues, $(^-27) = (^+9)\ (^-3).$

La división de números enteros no es clausurativa, ni asociativa ni conmutativa. ¿Por qué?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—10

Hallar los cocientes siguientes:

1. $(^+10) \div (^+5)$
2. $(^+15) \div (^+3)$
3. $(^-16) \div (^-4)$
4. $(^-24) \div (^-6)$
5. $(^+40) \div (^-8)$
6. $(^+56) \div (^-7)$
7. $(^-45) \div (^+9)$
8. $(^-60) \div (^-10).$

1—16. POTENCIACION DE NUMEROS ENTEROS.—

Sea b un número entero y n un número natural igual o mayor que 2.

La operación que hace corresponder al par ordenado (a, b) un tercer número b^n de Z llamado potencia, se denomina potenciación de números enteros.

O sea: si $b \in Z$ y $n \geqslant 2 \Longrightarrow (b, n) \xrightarrow{(\ )} b^n.$

Así, tenemos: $(^+3, 2) \xrightarrow{(\ )} (^+3)^2,$

$$(^-4, 3) \xrightarrow{(\ )} (^-4)^3.$$

El número b se denomina **base** de la potencia y n se llama **exponente.**

Cuando $n = 1$, $b^1 = b$ y cuando $n = 0$, $b^0 = 1$ para $b \neq 0$. ¿Por qué?

Así como en el conjunto N, la potencia de un número entero es el producto de varios factores iguales a la base, tomado tantas veces como indica el exponente.

Ejemplos:

1. $(^+5)^2 = (^+5)\ (^+5) = {}^+25$
2. $(^+4)^3 = (^+4)\ (^+4)\ (^+4) = {}^+64$
3. $(^-3)^4 = (^-3)\ (^-3)\ (^-3)\ (^-3) = 81$
4. $(^-2)^5 = (^-2)\ (^-2) \cdot (^-2)\ (^-2)\ (^-2) = {}^-32.$

De la observación de estos ejemplos se deduce:

a) Si la base es positiva, la potencia es positiva sea par o impar el exponente.

b) Si la base es negativa, la potencia es positiva si el exponente es par y es negativa si el exponente es impar.

Así, escribiremos: $(^+4)^2 = {}^+16,$

$$(^+3)^3 = {}^+27,$$
$$(^-2)^4 = {}^+16,$$
$$(-5)^2 = 125.$$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—11

Hallar las potencias siguientes:

1. $(^+2)^2$
2. $(^+5)^3$
3. $(^-4)^2$
4. $(^-1)^4$
5. $(^-2)^3$
6. $(^-4)^3$
7. $(^-2)^6$
8. $(^-9)^2$
9. $(^-1)^7$
10. $(^-10)^3$
11. $(0)^2$
12. $(0)^3$
13. $(^-5)^0$
14. $(^-7)^0$
15. $(^-6)^1$
16. $(0)^1.$

1—17. RADICACION DE NUMEROS ENTEROS.—

Dado b u número entero y n un número natural igual o mayor que 2, exis un tercer número r llamado raíz, si $r^n = b$.

De modo que: $\sqrt[n]{b} = r \Longleftrightarrow r^n = b$.

La operación que hace corresponder a ciertos pares ordenad (n, b) su raíz r, se denomina radicación de números enteros.

O sea: si $b \in Z$ y $n \geqslant 2 \Longrightarrow (n, b) \xrightarrow{\sqrt{\ }} r$.

Así, tenemos: $(2, {}^+9) \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt[2]{^+9}$,

$(3, {}^-8) \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt[3]{^-8}$,

$(4, {}^+16) \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt[4]{^+16}$.

El número b se llama **radicando** y n se denomina **índice.**

Además:

Cuando $n = 1$, $\sqrt[1]{b} = b$, pues $b^1 = b$;
cuando $b = 0$, $\sqrt[n]{0} = 0$, pues, $0^n = 0$;
cuando $b < 0$ y n es par, $\sqrt[n]{b} \notin Z$.

De allí que, la radicación de números enteros no es clausurativa.

En la radicación de números enteros debemos considerar:

a) Cuando el índice es par y el radicando es positivo, las raíces son dos números opuestos.

Así: $\sqrt{^+25} = \{^+5, {}^-5\}$, pues $(^+5)^2 = {}^+25$ y $(^-5)^2 = {}^+25$.

b) Cuando el índice es par y el radicando es negativo, la operación no es posible en el conjunto Z.

Así: $\sqrt{^-16} \notin Z$, porque $(^+4)^2 = {}^+16$ y $(^-4)^2 = {}^+16$.

c) Cuando el índice es impar y el radicando es positivo o negativo, la raíz es única y del mismo signo que el radicando.

Así: $\sqrt[3]{^+125} = {}^+5$, pues $(^+5)^3 = {}^+125$,

$\sqrt[3]{^-64} = {}^-4$, pues $(^-4)^3 = {}^-64$.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—12

Hallar las raíces siguientes:

$\sqrt{^+64}$	$\sqrt[3]{^-216}$	$\sqrt[5]{^-1}$	$\sqrt[7]{0}$
$\sqrt{^+81}$	$\sqrt[4]{^+81}$	$\sqrt[5]{^+32}$	$\sqrt[1]{0}$
$\sqrt[3]{^+125}$	$\sqrt[4]{^+1}$	$\sqrt[1]{^+13}$	$\sqrt[1]{^+1}$.

1—18. OPERACIONES COMBINADAS CON NUMEROS ENTEROS.—

El orden de ejecución de las operaciones debe ser el siguiente: primero las potencias y raíces, luego los cocientes, a continuación los productos y finalmente las sumas y restas.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—13

A

EJEMPLO 1.— Efectuar $(^+3)^2 + (^+2)(^-5) - (^+4)$.

Solución: $(^+3)^2 + (^+2)(^-5) - (^+4) =$
$(^+9) + (^-10) + (^-4) = {}^-5$. **Es la respuesta.**

EJEMPLO 2.— Efectuar $(^-12) \div (^-3) - (^-2)^3 - (^-4)(^-2)$.

Solución: $(^-12) \div (^-3) - (^-2)^3 - (^-4)(^-2) =$
$(^+4) - (^-8) - (^+8) =$
$(^+4) + (^+8) + (^-8) = {}^+4$. **Es la respuesta.**

B **Efectuar:**

1. $(^+8) + (^-6) - (^-4)$
2. $(^-6) - (^+5) + (^+10) - (^-2)$
3. $(^+5)(^+2) + (^+2)(^-6)$
4. $(^-7)(^-6) - (^-4)(^+3)$
5. $(^+24) \div (^+4) + (^-10) \div (^+5)$
6. $(^-40) \div (^-8) - (^+15) \div (^-3)$
7. $(^+4)^2 + 8$
8. $(^-6)(^-5) - (^+3)^3$
9. $(^-2)^3 + (^+4)(^-3)$
10. $(^+50) \div (^-10) - (^+2)^4$
11. $(^-4)^2 + (^-2)(^-5) - (^+4) \div (^-2)$
12. $(^-36) \div (^-12) - (^-4)^3 + (^+6)(^-3)$
13. $(^+4)(^+3) \div (^+3)(^+1) + (^-4)^2$
14. $(^+6)^2 \div (^-4)(^+3) - (^-5)$
15. $(^-8)(^-10) + (^+3)^2(^-2)^3 - (^+27) \div (^-9)$
16. $(^+20) \div (^+4) + (^-1)^3 - (^-6)(^-2) + (^-2)^4$.

1—19. PROPIEDADES FUNDAMENTALES DEL CONJUNTO Z.—Dados los números enteros a, b y c, tenemos:

a) **Propiedad de clausura.**—La suma y el producto de dos números enteros es otro número entero.

O sea: $a + b \in Z$ y $a \times b \in Z$.

b) **Elemento neutro.**—El número 0 (cero) es el elemento neutro para la adición y el número 1 para la multiplicación.

O sea: $a + 0 = 0 + a = a$.
$a \times 1 = 1 \times a = a$.

c) **Propiedad uniforme.**—Si a ambos miembros de una igualdad se suma o multiplica un mismo número, se obtiene otra igualdad.

O sea: si $a = b \Longrightarrow a + c = b + c$.
si $a = b \Longrightarrow a.c = b.c$.

d) **Propiedad conmutativa.**—Cambiando el orden de los sumandos o de los factores, se obtiene la misma suma o el mismo producto.

O sea: $a + b = b + a$.
$a.b = b.a$.

e) **Propiedad asociativa.**— Asociando sumandos o factores de modos distintos se obtiene la misma suma o el mismo producto.

O sea: $(a + b) + c = a + (b + c) = \ldots$
$(a.b).c = a.(b.c) = \ldots$

f) **Propiedad de monotonía.**—Tenemos:

1º Si a ambos miembros de una desigualdad se suma un mismo número, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido.

O sea: si $a > b \Longrightarrow a + c > b + c$.

2º Si ambos miembros de una desigualdad se multiplica por un mismo número mayor que 0 (cero), se obtiene otra desigualdad del mismo sentido; y si se multiplica por un número menor que 0 (cero), se obtiene otra desigualdad de sentido contrario.

O sea: si $a > b \wedge c > 0 \Longrightarrow a.c > b.c$,
si $a > b \wedge c < 0 \Longrightarrow a.c < b.c$.

g) **Propiedad cancelativa.**—Si en ambos miembros de una igualdad o desigualdad existe un mismo sumando o un mismo factor diferente de cero, éste puede suprimirse y se obtiene siempre una igualdad o una desigualdad del mismo sentido.

O sea: si $a + c = b + c \Longrightarrow a = b$,
si $a \,.\, c = b \,.\, c \Longrightarrow a = b$,
si $a + c > b + c \Longrightarrow a > b$,
si $a \,.\, c > b \,.\, c \Longrightarrow a > b$.

h) **Propiedad distributiva.**— La multiplicación es distributiva con respecto a la adición y la sustracción.

O sea: $a.(b + c) = a.b + a.c$
$a.(b - c) = a.b - a.c$

NUMERO RACIONAL

1—20. AMPLIACION DEL CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS.— Sabemos que el conjunto Z de los números enteros se expresa así:

$$Z = \{\ldots, {}^-3, {}^-2, {}^-1, 0, {}^+1, {}^+2, {}^+3, \ldots\}.$$

Sabemos también que en este conjunto siempre son posibles las operaciones de adición, sustracción y multiplicación. Así, por ejemplo:

$({}^+5) + ({}^-8) = {}^-3$,
$({}^-7) - ({}^-2) = ({}^-7) + ({}^+2) = {}^-5$ y
$({}^-6)\ ({}^-2) = ({}^+12)$.

Sin embargo, la división no siempre es posible en el conjunto Z. Por ejemplo, si n es el cociente de 2 entre 5, tendríamos:

$2 \div 5 = n$, de donde: $2 = 5 \times n$, lo cual es imposible, porque no existe un número entero n que multiplicado por 5 dé 2.

Análogamente, si $AB = 1$ y M es punto medio de AB (Fig. 1-16), en el conjunto Z no existe un número que exprese la medida de AM.

Fig. 1-16

Así, son muchos los problemas cotidianos tales como: dividir 3 metros de tela en 5 partes iguales, repartir 5 kilogramos de azúcar entre 2 personas, etc., que no tienen solución en el conjunto Z; de allí la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros con la introducción de un nuevo conjunto de números llamado **conjunto de los números racionales.**

1—21. CONCEPTO DE NUMERO RACIONAL.— Sea

$$Z = \{\ldots, {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \quad y$$

$$Z \times Z^* = \{\ldots, (1,2), (2,3), ({}^{-}1,4), (3,{}^{-}5), (2,4), ({}^{-}2,3)$$
$$({}^{-}4,6), ({}^{-}3,5), \ldots\}.$$

En el conjunto de pares ordenados de $Z \times Z^*$ podemos establecer una relación R, de modo que:

$$(a,b)\ R\ (c,d) \Longleftrightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Así, por ejemplo:

$(1,2)\ R\ (2,4)$ porque $1 \times 4 = 2 \times 2$,

$({}^{-}2,3)\ R\ ({}^{-}4,6)$ porque ${}^{-}2 \times 6 = 3 \times {}^{-}4$ y

$(3,{}^{-}5)\ R\ ({}^{-}3,5)$ porque $3 \times 5 = {}^{-}5 \times {}^{-}3$.

Esta relación R definida en $Z \times Z^*$ es de equivalencia porque es:

a) **Reflexiva:** $(a,b)\ R\ (a,b)$,

b) **Simétrica:** Si $(a,b)\ R\ (c,d) \Longrightarrow (c,d)\ R\ (a,b)$,

c) **Transitiva:** Si $(a,b)\ R\ (c,d)$ y $(c,d)\ R\ (m,n) \Longrightarrow (a,b)\ R\ (m,n)$.

Puesto que R es una relación de equivalencia, podemos establecer una partición de $Z \times Z^*$ en clases de equivalencia, tal como nos ilustra la figura 1-17.

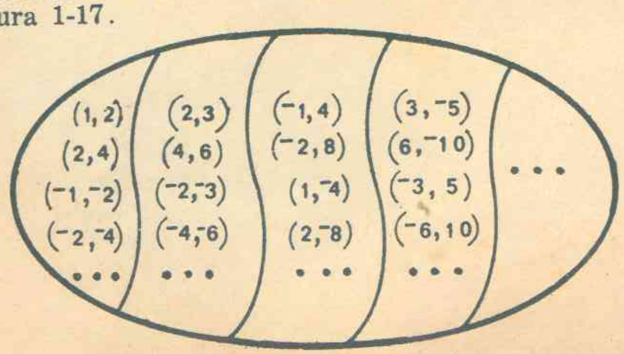


Fig. 1-17

De modo que, son algunas clases de equivalencia:

$$C(1,2) = \{(1,2), (2,4), ({}^{-}1,{}^{-}2), ({}^{-}2,{}^{-}4), \ldots\}$$
$$C(2,3) = \{(2,3), (4,6), ({}^{-}2,{}^{-}3), ({}^{-}4,{}^{-}6), \ldots\}$$
$$C({}^{-}1,4) = \{({}^{-}1,4), ({}^{-}2,8), (1,{}^{-}4), (2,{}^{-}8), \ldots\}$$
$$C(3,{}^{-}5) = \{(3,{}^{-}5), (6,{}^{-}10), ({}^{-}3,5), ({}^{-}6,10), \ldots\}.$$

Cada una de estas clases representa un número racional y los elementos de cada clase se llaman fracciones.

De modo que las clases de equivalencias consideradas podemos escribirlas:

$$C(1,2) = \left(\frac{1}{2}\right) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{{}^{-}1}{{}^{-}2}, \frac{{}^{-}2}{{}^{-}4}, \ldots\right\}$$
$$C(2,3) = \left(\frac{2}{3}\right) = \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{{}^{-}2}{{}^{-}3}, \frac{{}^{-}4}{{}^{-}6}, \ldots\right\}$$
$$C({}^{-}1,4) = \left(\frac{{}^{-}1}{4}\right) = \left\{\frac{{}^{-}1}{4}, \frac{{}^{-}2}{8}, \frac{1}{{}^{-}4}, \frac{2}{{}^{-}8}, \ldots\right\}$$
$$C(3,{}^{-}5) = \left(\frac{3}{{}^{-}5}\right) = \left\{\frac{3}{{}^{-}5}, \frac{6}{{}^{-}10}, \frac{{}^{-}3}{5}, \frac{{}^{-}6}{10}, \ldots\right\}.$$

Luego, podemos decir:

Número racional es una clase de equivalencia de pares ordenados definido por $(a,b)\ R\ (c,d) \Longleftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ en $Z \times Z^*$.

El conjunto formado por todas las clases de equivalencia de $Z \times Z^*$ se llama conjunto de los números racionales o conjunto Q.

De modo que el conjunto de los números racionales podemos expresarlo así:

$$Q = \left\{\ldots, \left(\frac{1}{2}\right), \ldots, \left(\frac{2}{3}\right), \ldots, \left(\frac{{}^{-}1}{4}\right), \ldots, \left(\frac{3}{{}^{-}5}\right), \ldots\right\}.$$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—14

1. Escriba en cada caso dos pares equivalentes a los dados multiplicando las componentes por un número diferente de cero:

a) $(2,5)$

b) $({}^{-}1,{}^{-}3)$

c) $(3,{}^{-}4)$

d) $({}^{-}7,2)$.

2. Escriba cuatro fracciones que pertenezcan a cada una de las clases siguientes:

a) $C(3,2)$ c) $C(4,{}^-2)$

b) $C(1,3)$ d) $C({}^-5,1)$.

3. Determine la verdad o falsedad y escriba (V) o (F) en cada caso:

a) $(2,3) \in Q$ c) $(4,12) \in C(1,3)$

b) $\frac{3}{5} \in C(3,5)$ d) $\frac{2}{4} \notin C(1,2)$.

4. Responda a las preguntas siguientes:

a) ¿$({}^-3,5) \in Q$? ¿Por qué?

b) ¿$\frac{{}^-5}{{}^-6} \in C(5,6)$? ¿Por qué?

1—22. CLASES ESPECIALES DEL CONJUNTO Q.— Tenemos:

a) **Clase nula.**—Los pares de la forma $(0,b)$ de $Z \times Z^*$, constituyen la clase de equivalencia llamada **clase nula** o **racional nulo**. Así, por ejemplo:

$$C(0,1) = \left(\frac{0}{1}\right) = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{{}^-1}, \frac{0}{{}^-2}, \dots \right\}$$

En general, $C(0,b) = 0$, o sea: $\left(\frac{0}{1}\right) = 0$

b) **Clase unidad.**—Los pares de la forma (a,a) de $Z \times Z^*$, constituyen la clase de equivalencia llamada **clase unidad.** Así, por ejemplo:

$$C(1,1) = \left(\frac{1}{1}\right) = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{{}^-1}{{}^-1}, \frac{{}^-2}{{}^-2}, \dots \right\}$$

En general, $C(a,a) = 1$, o sea: $\left(\frac{1}{1}\right) = 1$.

c) **Clases enteras.**—Los pares $(a,1)$ de $Z \times Z^*$, constituyen las clases de equivalencia denominadas **clases enteras.** Así, por ejemplo:

$$C(2,1) = \left(\frac{2}{1}\right) = \left\{ \frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{{}^-2}{{}^-1}, \frac{{}^-4}{{}^-2}, \dots \right\} \text{ y}$$

$$C({}^-3,1) = \left(\frac{{}^-3}{1}\right) = \left\{ \frac{{}^-3}{1}, \frac{{}^-6}{2}, \frac{9}{{}^-3}, \frac{12}{{}^-4}, \dots \right\}$$

Las clases $C(2,1)$ y $C({}^-3,1)$ se identifican con los números 2 y ${}^-3$ respectivamente.

En general, $C(a,1) = a$ y $C({}^-a,1) = {}^-a$, o sea: $\left(\frac{2}{1}\right) = 2$ y $\left(\frac{{}^-3}{1}\right) = {}^-3$. Por esta razón, estas clases también se llaman **enteros racionales.**

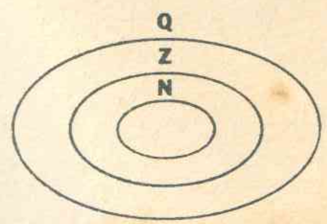


Fig. 1-18

Por consiguiente, admitimos que $Z \subset Q$; y como $N \subset Z$, se tiene:

$$N \subset Z \subset Q$$

Esta inclusión nos la ilustra la figura 1-18

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—15

1. Escriba un conjunto de fracciones que forman el racional $\left(\frac{0}{1}\right)$

2. Escriba un conjunto de fracciones que forman el racional $\left(\frac{1}{1}\right)$

3. Escriba el número entero que identifica a los racionales siguientes:

a) $\left(\frac{5}{1}\right)$ c) $\left(\frac{24}{1}\right)$

b) $\left(\frac{{}^-3}{1}\right)$ d) $\left(\frac{{}^-36}{1}\right)$

4. Escriba el racional correspondiente a:

a) 9 b) ${}^-7$ c) 0. d) ${}^-1$.

1—23. NUMERO RACIONAL NULO, POSITIVO Y NEGATIVO.— Dado el racional $\left(\frac{a}{b}\right)$, tenemos:

a) **Un número racional es nulo** cuando $a \times b = 0$.

Así, por ejemplo:

$\left(\frac{0}{1}\right)$ es nulo, porque: $0 \times 1 = 0$

$\left(\frac{0}{-2}\right)$ es nulo, porque: $0 \times {}^-2 = 0$.

b) **Un número racional es positivo** cuando $a \times b > 0$.

Así, por ejemplo:

$\left(\frac{2}{3}\right)$ es positivo, porque $2 \times 3 > 0$

$\left(\frac{-4}{-5}\right)$ es positivo, porque ${}^-4 \times {}^-5 > 0$.

c) **Un número racional es negativo** cuando $a \times b < 0$.

Así, por ejemplo:

$\frac{-3}{5}$ es negativo, porque ${}^-3 \times 5 < 0$

$\frac{1}{-4}$ es negativo, porque $1 \times {}^-4 < 0$

Como podemos observar, en el conjunto Q hay tres subconjuntos: Q^- (racionales negativos), $\{0\}$ y Q^+ (racionales positivos).

De modo que: $Q^- \cup \{0\} \cup Q^+ = Q$.

Además, el conjunto de los números racionales sin el 0 (cero) o "Q sin cero" se denota por Q^* y significa:

$$Q^* = Q - \{0\}.$$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—16

1. **Identifique si es positivo, negativo o nulo cada uno de los números racionales siguientes:**

a) $\left(\frac{-5}{-6}\right)$ c) $\left(\frac{-8}{11}\right)$ e) $\left(\frac{0}{-9}\right)$

b) $\left(\frac{0}{3}\right)$ d) $\left(\frac{7}{-12}\right)$ f) $\left(\frac{-11}{-15}\right)$

Determine la verdad o falsedad y escriba (V) o (F) en cada caso:

a) $Q^+ \subset Q$

b) $\left\{\left(\frac{3}{4}\right), \left(\frac{-3}{-4}\right), \left(\frac{-6}{-8}\right)\right\} \subset Q^-$

c) $Q^- \not\subset Q$

d) $\{0\} \not\subset Q$

e) $\left\{\left(\frac{-2}{5}\right), \left(\frac{4}{-10}\right), \left(\frac{8}{-10}\right)\right\} \not\subset Q^-$

f) $\{0\} \subset Q^+$

g) $Q^- \subset Q$

h) $\left\{\left(\frac{0}{2}\right), \left(\frac{3}{4}\right), \left(\frac{-5}{7}\right)\right\} \not\subset Q^+$

1—24. LA RECTA NUMERICA PARA LOS NUMEROS RACIONALES.—

Dado

$$Q = \left\{\ldots, ({}^-1), \left(\frac{-3}{4}\right), \left(\frac{-1}{4}\right), (0), \left(\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{4}\right),\right.$$

$\left.(1), \ldots\right\}$ y una recta $\overleftrightarrow{L}$, se puede establecer una función $f : Q \longrightarrow \overleftrightarrow{L}$, donde a cada número racional le corresponde un punto y sólo uno en la recta (Fig. 1-19). Así, se obtiene la recta numérica para los números racionales.

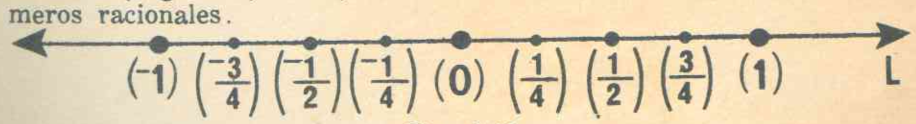


Fig. 1-19

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—17

1. En la recta numérica de la figura 1-20, escriba los racionales que corresponden a los puntos A, B y C.

Fig. 1-20

2. En la recta numérica de la figura 1-21, los racionales que correspondan a los puntos M y P.

Fig. 1-21

3. En la recta numérica de la figura 1-22 escriba 3 fracciones que nombren el mismo número racional que corresponda a los puntos A, B, C y D.

Fig. 1-22

4. En la recta numérica de la figura 1-23, escriba los racionales que corresponden a los puntos A, B, C y D.

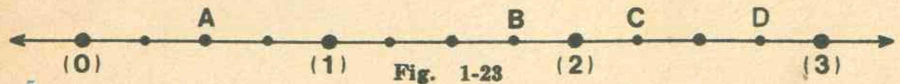


Fig. 1-23

5. En la recta numérica de la figura 1-24 escriba los racionales que corresponden a los puntos A, B, C y D.

Fig. 1-24

6. En la recta numérica de la figura 1-25, escriba los racionales que corresponden a los puntos A, B, C, D y E.

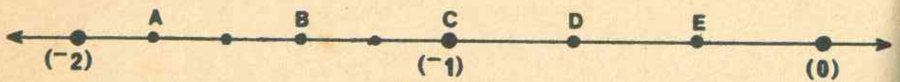


Fig. 1-25

OPERACIONES CON NUMEROS RACIONALES

1—25. ADICION DE NUMEROS RACIONALES.— Sean las clases

$$C(3,4)\left\{= \frac{3}{4}, \frac{^-3}{^-4}, \frac{6}{8}, \frac{^-6}{^-8}, \frac{9}{12}, \frac{^-9}{^-12}, \ldots\right\} \text{ y}$$

$$C(^-1,3)\left\{= \frac{^-1}{3}, \frac{1}{^-3}, \frac{^-2}{6}, \frac{2}{^-6}, \frac{^-3}{9}, \frac{3}{^-9}, \ldots\right\}$$

Si se suman un elemento de $C(3,4)$ con otro de $C(^-1,3)$, se obtienen racionales que pertenecen a una misma clase. Así:

$$\frac{3}{4} + \frac{^-1}{3} = \frac{3 \times 3 + 4 \times {}^-1}{4 \times 3} = \frac{9 + {}^-4}{12} = \frac{5}{12} \text{ y}$$

$$\frac{^-9}{^-12} + \frac{1}{^-3} = \frac{^-9 \times {}^-3 + {}^-12 \times 1}{^-12 \times {}^-3} = \frac{27 + {}^-12}{36} = \frac{15}{36}.$$

Aquí, $\frac{5}{12}$ y $\frac{15}{36}$ son nombres para un mismo numero racional, es decir, pertenecen a $C(5,12)$

A la clase $C(5,12)$ se le denomina clase suma de $C(3,4)$ y $C(^-1,3)$.

Luego: $C(3,4) + C(^-1,3) = C(5,12)$.

O lo que es lo mismo: $\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{^-1}{3}\right) = \left(\frac{5}{12}\right)$

De modo que, dados dos números racionales, existe un tercer número racional definido llamado **suma**.

Luego, podemos decir:

La adición de dos números racionales es una función de $Q \times Q$ en Q, mediante la cual se hace corresponder un par de números racionales con un tercero llamado suma.

En la práctica para sumar números racionales se procede así:

Se halla el M. C. M. de los denominadores, luego este M. C. M. se divide entre el denominador de cada fracción y el cociente se multiplica por el numerador respectivo.

Así, por ejemplo:

1. $\left(\frac{5}{8}\right) + \left(\frac{1}{8}\right)$

M. C. M. $(8, 8) = 8$

Luego: $\left(\frac{5}{8}\right) + \left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{5+1}{8}\right) = \left(\frac{6}{8}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)$

2. $\left(\frac{^-5}{6}\right) + \left(\frac{7}{12}\right)$

M. C. M. $(6, 12) = 12$.

Luego: $\left(\frac{^-5}{6}\right) + \left(\frac{7}{12}\right) = \left(\frac{^-10 + 7}{12}\right) = \left(\frac{^-3}{12}\right) = \left(\frac{^-1}{6}\right)$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—18

A EJEMPLO 1.— Hallar la suma de $\left(\frac{5}{12}\right)$, $\left(\frac{1}{12}\right)$ y $\left(\frac{^-7}{12}\right)$

Solución: $\left(\frac{5}{12}\right) + \left(\frac{1}{12}\right) + \left(\frac{^-7}{12}\right) = \left(\frac{5 + 1 + {}^-7}{12}\right) = \left(\frac{^-1}{12}\right)$

Es la respuesta.

EJEMPLO 2.— Efectuar $\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{^{-}5}{6}\right) + \left(\frac{2}{9}\right)$

Solución: M. C. M. (4, 6, 9) = 36.

$$\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{^{-}5}{6}\right) + \left(\frac{2}{9}\right) = \left(\frac{27 + {^{-}30} + 8}{36}\right) = \left(\frac{5}{36}\right)$$

Es la respuesta.

B Efectuar:

1. $\left(\frac{8}{11}\right) + \left(\frac{3}{11}\right)$
2. $\left(\frac{11}{15}\right) + \left(\frac{13}{15}\right) + \left(\frac{14}{15}\right)$
3. $\left(\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{^{-}7}{10}\right)$
4. $\left(\frac{5}{8}\right) + \left(\frac{^{-}3}{8}\right) + \left(\frac{0}{8}\right) + \left(\frac{9}{8}\right)$
5. $\left(\frac{^{-}7}{9}\right) + \left(\frac{5}{18}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)$
6. $\left(\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{5}{4}\right) + \left(\frac{7}{8}\right)$
7. $\left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{^{-}7}{3}\right)$
8. $\left(\frac{^{-}1}{7}\right) + \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{5}{14}\right)$
9. $\left(\frac{2}{9}\right) + \left(\frac{1}{12}\right) + \left(\frac{5}{18}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)$
10. $\left(\frac{^{-}3}{13}\right) + \left(\frac{^{-}15}{26}\right) + \left(\frac{17}{65}\right)$

1—26. NUMERAL MIXTO.— Los números racionales en los cuales el valor absoluto del numerador es mayor que el del denominador, pueden expresarse mediante la **suma de un racional entero y un racional no entero menor que 1.** Así, por ejemplo:

$$\left(\frac{3}{2}\right) = (1) + \left(\frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{7}{4}\right) = (1) + \left(\frac{3}{4}\right), \quad \left(\frac{^{-}7}{3}\right) = (^{-}2) + \left(\frac{^{-}1}{3}\right)$$

Estas sumas pueden abreviarse omitiendo el signo +, o sea:

$$(1) + \left(\frac{1}{2}\right) = \left(1\,\frac{1}{2}\right),$$

$$(1) + \left(\frac{3}{4}\right) = \left(1\,\frac{3}{4}\right),$$

$$(^{-}2) + \left(\frac{^{-}1}{3}\right) = \left(^{-}2\,\frac{^{-}1}{3}\right), \quad \text{etc.}$$

A esta forma de expresar ciertos números racionales tales como:

$\left(1\,\frac{1}{2}\right)$, $\left(1\,\frac{3}{4}\right)$, $\left(^{-}2\,\frac{^{-}1}{3}\right)$, etc. se le llama **numeral mixto.**

En la práctica es frecuente la transformación de un número racional expresado como numeral mixto a su forma fraccionaria y viceversa. Así:

$$\left(3\,\frac{2}{5}\right) = (3) + \left(\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{15}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{17}{5}\right),$$

transformación que se realiza fácilmente **multiplicando el entero por el denominador de la fracción a cuyo producto se suma el numerador. El denominador de esta nueva fracción es el mismo que el de la fracción dada.** Así, por ejemplo:

1. $\left(2\,\frac{4}{7}\right) = \left(\frac{2\times7+4}{7}\right) = \left(\frac{18}{7}\right).$
2. $\left(3\,\frac{1}{11}\right) = \left(\frac{34}{11}\right).$
3. $\left(^{-}5\,\frac{2}{9}\right) = \left(\frac{^{-}5\times9+{^{-}2}}{9}\right) = \left(\frac{^{-}45+{^{-}2}}{9}\right) = \left(\frac{^{-}47}{9}\right)$
4. $\left(^{-}8\,\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{^{-}35}{4}\right).$

Inversamente:

$$\left(\frac{18}{7}\right) = \left(\frac{14}{7}\right) + \left(\frac{4}{7}\right) = (2) + \left(\frac{4}{7}\right) = \left(2\,\frac{4}{7}\right)$$

$$\left(\frac{^{-}47}{9}\right) = \left(\frac{^{-}45}{9}\right) + \left(\frac{^{-}2}{9}\right) = (^{-}5) + \left(\frac{^{-}2}{9}\right) = \left(^{-}5\,\frac{2}{9}\right)$$

Esta transformación se realiza fácilmente en la forma siguiente:

Se divide el numerador entre el denominador y el numeral mixto se obtiene escribiendo el cociente seguido de la fracción que resulta de escribir el residuo sobre el divisor.

Así, por ejemplo:

1. $\left(\frac{19}{4}\right) = \left(4\,\frac{3}{4}\right)$, porque: $19 \div 4$: cociente 4, residuo 3

2. $\left(\frac{-39}{7}\right) = \left(-5\,\frac{4}{7}\right)$, porque: $-39 \div 7$: cociente -5, residuo -4

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—19

1. Exprese como numeral mixto:

a) $\left(\frac{15}{9}\right)$ c) $\left(\frac{-48}{5}\right)$ e) $\left(\frac{284}{11}\right)$

b) $\left(\frac{33}{5}\right)$ d) $\left(\frac{-73}{8}\right)$ f) $\left(\frac{-346}{13}\right)$

2. Exprese como racional de la forma $\left(\frac{a}{b}\right)$:

a) $\left(7\,\frac{1}{8}\right)$ c) $\left(-9\,\frac{5}{7}\right)$ e) $\left(15\,\frac{5}{8}\right)$

b) $\left(10\,\frac{3}{4}\right)$ d) $\left(-13\,\frac{2}{5}\right)$ f) $\left(-19\,\frac{2}{3}\right)$

1—27. MULTIPLICACION DE NUMEROS RACIONALES.—

Sean las clases:

$$C(2,3) = \left\{\frac{2}{3}, \frac{-2}{-3}, \frac{4}{6}, \frac{-4}{-6}, \frac{6}{9}, \frac{-6}{-9}, \ldots\right\} \text{ y}$$

$$C(^-1,5) = \left\{\frac{-1}{5}, \frac{1}{-5}, \frac{-2}{10}, \frac{2}{-10}, \frac{-3}{15}, \frac{3}{-15}, \ldots\right\}$$

Si se multiplican pares de elementos cualesquiera de ambas clases, se obtienen fracciones que pertenecen a una misma clase. Así:

$$\frac{2}{3} \times \frac{-1}{5} = \frac{2 \times {}^-1}{3 \times 5} = \frac{-2}{15} \quad \text{y}$$

$$\frac{-6}{-9} \times \frac{-2}{10} = \frac{{}^-6 \times {}^-2}{{}^-9 \times 10} = \frac{12}{-90}.$$

Aquí, $\frac{-2}{15}$ y $\frac{12}{-90}$ son nombres para un mismo número racional, es decir, pertenecen a $C(^-2, 15)$.

A la clase $C(^-2, 15)$ se denomina **clase producto** de $C(2, 3)$ y $C(^-1, 5)$.

De allí que, $C(2,3) \times C(^-1,5) = C(^-2,15)$.

O sea: $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{-1}{5}\right) = \left(\frac{-2}{15}\right)$.

En general, $C(a, b) \times C(c, d) = C(a.c, b.d)$.

O sea: $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a.c}{b.d}\right)$.

De modo que, dados dos números racionales, existe un tercer número racional llamado **producto.**

Luego, podemos decir:

La multiplicación de números racionales es una función de $Q \times Q$ en Q, mediante la cual se hace corresponder un par de números racionales con un tercero llamado producto.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—20

A

EJEMPLO 1.—Hallar el producto de $\left(\frac{3}{4}\right)$ y $\left(\frac{-5}{9}\right)$

Solución: $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{-5}{9}\right) = \left(\frac{\cancel{3}^{1} \times {}^-5}{4 \times \cancel{9}_{3}}\right) = \left(\frac{-5}{12}\right)$. **Es la respuesta.**

Obsérvese que antes de efectuar la multiplicación se realiza la simplificación, si es posible.

EJEMPLO 2.— Hallar el producto de $\left(\frac{5}{9}\right)$, $\left(\frac{-7}{15}\right)$ y $\left(\frac{-12}{21}\right)$

Solución: $\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{-7}{15}\right)\left(\frac{-12}{21}\right) = \left(\frac{\cancel{5}^{1} \times \cancel{-7}^{-1} \times \cancel{-12}^{-4}}{\cancel{9}_{3} \times \cancel{15}_{3} \times \cancel{21}_{3}}\right) = \left(\frac{4}{27}\right)$

Es la respuesta.

B **Efectuar:**

1. $\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{7}{12}\right)$
2. $\left(\frac{6}{11}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$
3. $\left(\frac{-7}{9}\right)\left(\frac{-13}{21}\right)$
4. $\left(\frac{-12}{35}\right)\left(\frac{-7}{36}\right)$
5. $\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{5}{27}\right)\left(\frac{35}{36}\right)$
6. $\left(\frac{5}{13}\right)\left(\frac{26}{35}\right)\left(\frac{21}{28}\right)$
7. $\left(\frac{1}{57}\right)\left(\frac{-4}{81}\right)\left(\frac{0}{321}\right)$
8. $\left(\frac{1}{333}\right)\left(\frac{0}{255}\right)\left(\frac{-9}{444}\right)$
9. $\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{-1}{10}\right)\left(\frac{12}{17}\right)\left(\frac{-34}{35}\right)$
10. $\left(\frac{-4}{7}\right)\left(\frac{-21}{28}\right)\left(\frac{10}{19}\right)\left(\frac{-38}{75}\right)$

1—28. SUSTRACCION DE NUMEROS RACIONALES.—

Sean $\left(\frac{a}{b}\right)$ y $\left(\frac{c}{d}\right)$ dos números racionales.

La operación que hace corresponder al par $\left(\left(\frac{a}{b}\right), \left(\frac{c}{d}\right)\right)$ de $Q \times Q$ un tercer número $\left(\frac{a}{b}\right) - \left(\frac{c}{d}\right)$ de Q llamado diferencia, se denomina **sustracción de números racionales**, o sea:

$$\text{Si } \left(\left(\frac{a}{b}\right), \left(\frac{c}{d}\right)\right) \in Q \times Q \Longleftrightarrow \left(\left(\frac{a}{b}\right), \left(\frac{c}{d}\right)\right) \xrightarrow{\;-\;} \left(\frac{a}{b}\right) - \left(\frac{c}{d}\right).$$

La sustracción de dos números racionales equivale a la adición del minuendo y el opuesto del sustraendo.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—21

A EJEMPLO 1.— Hallar la diferencia de $\left(\frac{5}{7}\right)$ y $\left(\frac{2}{7}\right)$

Solución: $\left(\frac{5}{7}\right) - \left(\frac{2}{7}\right) = \left(\frac{5}{7}\right) + \left(\frac{-2}{7}\right) = \left(\frac{5 + -2}{7}\right) = \left(\frac{3}{7}\right)$.

Es la respuesta.

EJEMPLO 2.— Efectuar $\left(\frac{-7}{10}\right) - \left(\frac{-4}{5}\right)$.

Solución: $\left(\frac{-7}{10}\right) + \left(\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{-7+8}{10}\right) = \left(\frac{1}{10}\right)$. **Es la respuesta.**

EJEMPLO 3.— Efectuar $\left(5\,\frac{1}{9}\right) - \left(7\,\frac{2}{3}\right)$.

Solución: $\left(\frac{46}{9}\right) - \left(\frac{23}{3}\right) = \left(\frac{46}{9}\right) + \left(\frac{-23}{3}\right) = \left(\frac{46 + -69}{9}\right) = \frac{-23}{9}$.

Es la respuesta.

B **Efectuar:**

1. $\left(\frac{4}{13}\right) - \left(\frac{1}{13}\right)$
2. $\left(\frac{3}{19}\right) - \left(\frac{7}{19}\right)$
3. $\left(\frac{-5}{11}\right) - \left(\frac{7}{11}\right)$
4. $\left(\frac{1}{15}\right) - \left(\frac{-11}{15}\right)$
5. $\left(\frac{5}{6}\right) - \left(\frac{7}{9}\right)$
6. $\left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)$
7. $\left(\frac{7}{8}\right) - \left(\frac{-2}{7}\right)$
8. $\left(\frac{-5}{9}\right) - \left(\frac{-11}{27}\right)$
9. $(3) - \left(\frac{9}{4}\right)$
10. $(6) - \left(\frac{3}{10}\right)$
11. $\left(\frac{5}{7}\right) - (8)$
12. $\left(\frac{13}{2}\right) - (4)$
13. $\left(7\,\frac{1}{2}\right) - \left(3\,\frac{3}{4}\right)$
14. $\left(2\,\frac{3}{8}\right) - \left(5\,\frac{1}{4}\right)$
15. $\left(6\,\frac{3}{5}\right) - \left(-2\,\frac{1}{10}\right)$
16. $\left(-8\,\frac{4}{9}\right) - \left(-2\,\frac{1}{10}\right)$
17. $(14) - \left(2\,\frac{1}{5}\right)$
18. $\left(3\,\frac{1}{7}\right) - (-1)$
19. De $\left(\frac{-11}{15}\right)$ restar $\left(2\,\frac{1}{2}\right)$
20. Restar $\left(\frac{4}{5}\right)$ de $\left(-6\,\frac{1}{10}\right)$

1—29. DIVISION DE NUMEROS RACIONALES.—

Sean $\left(\frac{a}{b}\right)$ y $\left(\frac{c}{d}\right)$ dos números racionales donde $\left(\frac{c}{d}\right) \neq 0$.

La operación que hace coresponder al par ordenado $\left(\left(\frac{a}{b}\right),\left(\frac{c}{d}\right)\right)$ de $Q \times Q^*$ un tercer número $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ de Q llamado cociente, se denomina **división de números racionales**, o sea:

$$\text{Si } \left(\left(\frac{a}{b}\right),\left(\frac{c}{d}\right)\right) \in Q \times Q^* \Longrightarrow \left(\left(\frac{a}{b}\right),\left(\frac{c}{d}\right)\right) \xrightarrow{\div} \left(\frac{a}{b}\right) \div \left(\frac{c}{d}\right)$$

La división de números racionales equivale a la multiplicación del dividendo por el inverso del divisor.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—22

A EJEMPLO 1.— Hallar el cociente de $\left(\frac{2}{15}\right)$ y $\left(\frac{9}{20}\right)$

Solución: $\left(\frac{2}{15}\right) \div \left(\frac{9}{20}\right) = \left(\frac{2}{15}\right)\left(\frac{20}{9}\right) = \left(\frac{2 \times \cancel{20}^{\,4}}{\cancel{15}_{\,3} \times 9}\right) = \left(\frac{8}{27}\right)$

Es la respuesta.

EJEMPLO 2. Efectuar $\left(\frac{-6}{11}\right) \div (15)$.

Solución: $\left(\frac{-6}{11}\right)\left(\frac{1}{15}\right) = \left(\frac{\cancel{-6}^{\,-2} \times 1}{11 \times \cancel{15}_{\,5}}\right) = \left(\frac{-2}{55}\right)$. **Es la respuesta.**

EJEMPLO 3.— Efectuar $\left(8\,\frac{4}{7}\right) \div \left(6\,\frac{2}{3}\right)$

Solución: $\left(\frac{60}{7}\right) \div \left(\frac{-20}{3}\right) = \left(\frac{60}{7}\right)\left(\frac{3}{-20}\right) = \left(\frac{\cancel{60}^{\,3} \times 3}{7 \times \cancel{-20}_{\,-1}}\right) = \left(\frac{9}{-7}\right) =$

$\left(1\,\frac{2}{7}\right)$ **Es la respuesta.**

B Efectuar:

1. $\left(\frac{6}{7}\right) \div \left(\frac{9}{28}\right)$
2. $\left(\frac{26}{30}\right) \div \left(\frac{13}{45}\right)$
3. $(15) \div \left(\frac{3}{7}\right)$
4. $\left(\frac{9}{20}\right) \div (-36)$
5. $\left(6\,\frac{3}{7}\right) \div \left(1\,\frac{1}{15}\right)$
6. $\left(7\,\frac{1}{2}\right) \div \left(-13\,\frac{1}{3}\right)$
7. $\left(\frac{7}{8}\right) \div \left(2\,\frac{1}{4}\right)$
8. $\left(-6\,\frac{5}{6}\right) \div \left(\frac{-11}{18}\right)$
9. $(12) \div \left(2\,\frac{2}{5}\right)$
10. $\left(-4\,\frac{2}{3}\right) \div (7)$
11. $(0) \div \left(\frac{11}{17}\right)$
12. $\left(-4\,\frac{1}{7}\right) \div \left(\frac{-29}{7}\right)$

NOTA.— La expresión $\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}$ es equivalente a $\left(\frac{a}{b}\right) \div \left(\frac{c}{d}\right)$

Por consiguiente, $\dfrac{\left(\frac{5}{6}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)} = \left(\frac{5}{6}\right) \div \left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{5 \times \cancel{3}^{\,1}}{\cancel{6}_{\,2} \times 2}\right)$

$= \left(\frac{5}{4}\right)$.

Asimismo $\left(\dfrac{-12}{\frac{3}{4}}\right) = (-12) \div \left(\frac{3}{4}\right) = (-12)\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{\cancel{-12}^{\,-4} \times 4}{\cancel{3}_{\,1}}\right)$

$= (-16)$.

1—30. POTENCIACION DE NUMEROS RACIONALES.— Sea $\left(\frac{a}{b}\right)$ un número racional y n un número natural igual o mayor que 2.

La operación que hace corresponder al par ordenado $\left(\left(\frac{a}{b}\right), n\right)$ un tercer número $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ de Q llamado potencia, se denomina **potenciación de números racionales**, o sea:

$$\text{Si } \left(\frac{a}{b}\right) \in Q \text{ y } n \geq 2 \Longrightarrow \left(\left(\frac{a}{b}\right), n\right) \xrightarrow{(\ )} \left(\frac{a}{b}\right).$$

El número $\frac{a}{b}$ se denomina **base** de la potencia y n se llama **exponente.**

Ampliando el concepto de potencia, tenemos:

$$\text{Cuando } n = 1 \Longrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^1 \Longrightarrow \left(\frac{a}{b}\right).$$

$$\text{Cuando } n = 0 \text{ y } \frac{a}{b} \neq 0 \Longrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1.$$

$$\text{Cuando } n < 0 \Longrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

A semejanza que en el conjunto Z, **la potencia de un número racional es el producto de varios factores iguales a la base, tomado tantas veces como indica el exponente.**

Ejemplos:

1. $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{4}{25}\right).$

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{27}\right).$

3. $\left(\frac{-3}{4}\right)^4 = \left(\frac{-3}{4}\right)\left(\frac{-3}{4}\right)\left(\frac{-3}{4}\right)\left(\frac{-3}{4}\right) = \left(\frac{81}{256}\right).$

4. $\left(\frac{-1}{2}\right)^5 = \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{32}\right).$

De modo que:

a) Si la base es positiva la potencia es positiva sea par o impar el exponente.

b) Si la base es negativa, la potencia es positiva si el exponente es par y es negativa si el exponente es impar.

Así, obtenemos:

1. $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3^3}{4^3}\right) = \left(\frac{27}{64}\right)$

2. $\left(\frac{-1}{7}\right)^2 = \left(\frac{-1^2}{7^2}\right) = \left(\frac{1}{49}\right)$

3. $\left(-1\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{-5^3}{3^3}\right) = \left(\frac{-125}{27}\right)$

4. $\left(5\frac{9}{19}\right)^0 = (1)$

5. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \left(\frac{5^3}{2^3}\right) = \left(\frac{125}{8}\right).$

6. $\left(\frac{-1}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{-1}\right)^4 = \left(\frac{2^4}{-1^4}\right) = \left(\frac{16}{1}\right) = 16.$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—23

Hallar las potencias siguientes:

1. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2}$
2. $\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$
3. $\left(\frac{-1}{2}\right)^{5}$
4. $\left(\frac{-1}{3}\right)^{5}$
5. $\left(3\frac{1}{2}\right)^{2}$
6. $\left(-1\frac{3}{5}\right)^{3}$
7. $\left(\frac{7}{17}\right)^{0}$
8. $\left(11\frac{9}{23}\right)^{0}$
9. $\left(\frac{6}{7}\right)^{-3}$
10. $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-3}$
11. $\left(\frac{13}{37}\right)^{1}$
12. $\left(-5\frac{3}{9}\right)^{-1}$.

1—31. RADICACION DE NUMEROS RACIONALES.—

Sea $\frac{a}{b}$ un número racional y n un número natural igual o mayor que 2.

La operación que hace corresponder a ciertos pares ordenados $\left(n, \left(\frac{a}{b}\right)\right)$ un tercer número racional $\left(\frac{c}{d}\right)$ de Q llamado raíz tal que $\left(\frac{c}{d}\right)^{n} = \left(\frac{a}{b}\right)$, se denomina **radicación de números racionales**, o sea:

$$\text{Si } \left(\frac{a}{b}\right) \in Q \text{ y } n \geqslant 2 \Longrightarrow \left(n, \frac{a}{b}\right) \xrightarrow{\sqrt{\ }} \left(\frac{c}{d}\right).$$

O lo que es lo mismo: $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \left(\frac{c}{d}\right)^{n} \Longleftrightarrow = \left(\frac{a}{b}\right)$.

El número $\left(\frac{a}{b}\right)$ se denomina **radicando** y n se llama **índice.**

Ampliando el concepto de raíz, tenemos:

Cuando $n = 1 \Longrightarrow \sqrt[1]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \left(\frac{a}{b}\right)$, pues $\left(\frac{a}{b}\right)^{1} = \left(\frac{a}{b}\right)$.

Cuando $\frac{a}{b} = 0 \Longrightarrow \sqrt[n]{0} = 0$, pues $0^{n} = 0$.

Cuando $\frac{a}{b} < 0$ y n es par $\Longrightarrow \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \notin Q$.

Por consiguiente, **la radicación de números racionales no es clausurativa.**

En la radicación de números racionales debemos considerar:

a) **Cuando el índice es par y el radicando es positivo**, las raíces **son dos números opuestos.**

Así: $\sqrt{\left(\frac{16}{25}\right)} = \left\{\left(\frac{4}{5}\right), \left(\frac{-4}{5}\right)\right\}$ pues $\left(\frac{4}{5}\right)^{2} = \left(\frac{16}{25}\right)$ y $\left(\frac{-4}{5}\right)^{2} = \left(\frac{16}{25}\right)$.

b) **Cuando el índice es par y el radicando es negativo, la operación no es posible en el conjunto Q.**

Así: $\sqrt{\left(\frac{-9}{49}\right)} \notin Q$, pues $\left(\frac{3}{7}\right)^{2} = \left(\frac{9}{49}\right)$ y $\left(\frac{-3}{7}\right)^{2} = \left(\frac{9}{49}\right)$

c) **Cuando el índice es impar y el radicando es positivo o negativo, la raíz es única y del mismo signo que el radicando.**

Así: $\sqrt[3]{\left(\frac{8}{27}\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)$, pues $\left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \left(\frac{8}{27}\right)$ y

Así: $\sqrt[3]{\left(\frac{-64}{125}\right)} = \left(\frac{-4}{5}\right)$, pues $\left(\frac{-4}{5}\right)^{3} = \left(\frac{-64}{125}\right)$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—24

Hallar las raíces siguientes:

1. $\sqrt{\left(\frac{49}{81}\right)}$
2. $\sqrt{\left(1\frac{33}{81}\right)}$
3. $\sqrt[3]{\left(\frac{27}{125}\right)}$
4. $\sqrt[3]{\left(-3\frac{3}{8}\right)}$
5. $\sqrt[4]{\left(\frac{81}{625}\right)}$
6. $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{243}\right)}$
7. $\sqrt[5]{\left(\frac{-1}{32}\right)}$
8. $\sqrt{\left(\frac{-1}{36}\right)}$
9. $\sqrt{\left(\frac{0}{64}\right)}$
10. $\sqrt[7]{\left(\frac{0}{128}\right)}$
11. $\sqrt[4]{\left(5\frac{1}{16}\right)}$
12. $\sqrt{\left(-7\frac{19}{32}\right)}$

1—32. OPERACIONES COMBINADAS DE NUMEROS RACIONALES.—

Para efectuar estas operaciones, debe tenerse en cuenta el orden siguiente: primero las potencias y raíces, luego los cocientes, a continuación los productos y por último las sumas y las restas. Cuando un paréntesis agrupa a dos o más operaciones, primero se efectúan dichas operaciones.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—25

A EJEMPLO 1.— **Efectuar** $\left(\frac{3}{8}\right) - \left(2\frac{1}{16}\right) + (1).$

Solución:
$$\left(\frac{3}{8}\right)-\left(\frac{33}{16}\right)+\left(\frac{1}{1}\right)=\left(\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{-33}{16}\right)+\left(\frac{1}{1}\right)$$
$$=\left(\frac{6+-33+16}{16}\right)=\left(\frac{-11}{16}\right).$$
Es la respuesta.

EJEMPLO 2.— **Efectuar** $\left(\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{9}\right)-\left(\frac{5}{6}\right)\div\left(\frac{5}{3}\right).$

Solución:
$$\left(\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{4}}}\right)\left(\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{3}{\cancel{9}}}\right)-\left(\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{2}{\cancel{6}}}\right)\left(\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{5}}}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{-1}{2}\right)=\left(\frac{12+5+-15}{30}\right)=$$
$$=\left(\frac{2}{30}\right)=\left(\frac{1}{15}\right)$$
Es la respuesta.

EJEMPLO 3.— Efectuar
$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{-2}{3}\right)\left(2\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{6}\right)\div(2)}$$

Solución: Efectuando separadamente las operaciones indicadas en el numerador y denominador respectivamente, tenemos:

$$\left(\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{-2}{3}\right)\left(2\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{3}\right)\left(\frac{5}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right)=$$
$$\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{9+20}{12}\right)=\left(\frac{29}{12}\right).$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{6}\right)\div(2)=\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{-1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{-1}{12}\right)=\left(\frac{6+-1}{12}\right)=\left(\frac{5}{12}\right).$$

Luego:
$$\frac{\left(\frac{29}{12}\right)}{\left(\frac{5}{12}\right)}=\left(\frac{29}{12}\right)\div\left(\frac{5}{12}\right)=\left(\frac{29}{\cancel{12}}\right)\times\left(\frac{\cancel{12}}{5}\right)=\left(\frac{29}{5}\right)=$$
$$\left(5\frac{4}{5}\right).$$
Es la respuesta.

B **Efectuar:**

1. $\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)$
2. $\left(\frac{5}{7}\right)-\left(\frac{2}{21}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)$
3. $\left(\frac{8}{9}\right)-\left(\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{5}{6}\right)$
4. $\left(\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{3}{8}\right)-(1)$
5. $\left(\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{-1}{10}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{3}{4}\right)$
6. $\left(\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{-1}{10}\right)-\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{-3}{8}\right)$
7. $(10)+\left(\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}\right)$
8. $\left(\frac{7}{6}\right)+(8)-\left(\frac{1}{3}\right)$

9. $\left(3\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{5}{7}\right) - \left(-1\frac{1}{2}\right)$

10. $\left(\frac{3}{8}\right) + (2) - \left(2\frac{1}{16}\right)$

11. $\left(2\frac{1}{2}\right) - \left(3\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{-5}{12}\right)$

12. $(1) - \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9}\right) - \left(2\frac{1}{12}\right)$

13. $\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

14. $\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{4}{5}\right) \div \left(\frac{3}{10}\right)$

15. $\left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{10}{3}\right)^2 - \left(8\frac{1}{5}\right)$

16. $\left(\frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{7}{9}\right)$

17. $\dfrac{\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{9}{10}\right)}{(4) - \left(3\frac{1}{5}\right)}$

18. $\dfrac{(2) + \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{14}{15}\right) \div \left(1\frac{1}{15}\right)}$

1—33. PROPIEDADES FUNDAMENTALES DEL CONJUNTO

Dados los números racionales $\left(\frac{a}{b}\right)$, $\left(\frac{c}{d}\right)$ y $\left(\frac{m}{n}\right)$, tenemos:

a) **Propiedad de clausura.—** La suma y el producto de dos números racionales es otro número racional.

Así, por ejemplo:

$$\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3+4}{6}\right) = \left(\frac{7}{6}\right)$$

$$\left(\frac{-3}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{-3}{20}\right).$$

Pues, $\left(\frac{7}{6}\right) \in Q$ y $\left(\frac{-3}{20}\right) \in Q$.

En general: $\left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{d}\right) \in Q$ y $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) \in Q$.

b] **Elemento neutro.—** El número 0 (cero) es el elemento neutro para la adición y el número 1 para la multiplicación.

Así, por ejemplo:

$$\left(\frac{5}{7}\right) + (0) = (0) + \left(\frac{5}{7}\right) = \left(\frac{5}{7}\right)$$

$$\left(\frac{-3}{4}\right)(1) = (1)\left(\frac{-3}{4}\right) = \left(\frac{-3}{4}\right)$$

En general:

$$\left(\frac{a}{b}\right) + (0) = (0) + \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)(1) = (1)\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right).$$

c) **Propiedad uniforme.—** Si a ambos miembros de una igualdad se les suma o multiplica un mismo número, se obtiene otra igualdad.

Así, por ejemplo:

$$\text{Si } \left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{6}{8}\right) \Longrightarrow \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{6}{8}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\text{Si } \left(\frac{-2}{3}\right) = \left(\frac{-4}{6}\right) \Longrightarrow \left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{-4}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right).$$

En general:

$$\text{Si } \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{c}{d}\right) \Longrightarrow \left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{c}{d}\right) + \left(\frac{m}{n}\right)$$

$$\text{Si } \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{c}{d}\right) \Longrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{m}{n}\right).$$

d) **Propiedad conmutativa.-** Cambiando el orden de los sumandos o de los factores, se obtiene la misma suma o el mismo producto.

Así, por ejemplo:

$$\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{(La suma es } \frac{5}{4}\text{)}$$

$$\left(\frac{-3}{5}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)=\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-3}{5}\right)$$ (El producto es $\frac{6}{15}$).

En general: $\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}\right)$

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{a}{b}\right).$$

e) **Propiedad asociativa.—** Asociando sumandos o factores de modos distintos se obtiene la misma suma o el mismo producto.

Así, por ejemplo:

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)\right]+\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)+\left[\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)\right]$$ (La suma es $\frac{23}{12}$)

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\right]\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left[\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\right]$$ (El producto es $\frac{1}{4}$).

En general: $\left[\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)\right]+\left(\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)+\left[\left(\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{m}{n}\right)\right]$

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)\right]\left(\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)\left[\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{m}{n}\right)\right]$$

f) **Propiedad cancelativa.-** Si en ambos miembros de una igualdad existe un mismo sumando o un mismo factor diferente de 0 (cero), éste puede suprimirse y se obtiene siempre una igualdad.

Así, por ejemplo:

Si $\left(\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{4}{10}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\Longrightarrow\left(\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{4}{10}\right)$ (Se ha cancelado $\left(\frac{1}{2}\right)$)

Si $\left(\frac{-3}{7}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{-6}{14}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\Longrightarrow\left(\frac{-3}{7}\right)=\left(\frac{-6}{14}\right)$ (Se ha cancelado $\left(\frac{1}{3}\right)$).

En general:

Si $\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{m}{n}\right)\Longrightarrow\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{c}{d}\right)$

Si $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{m}{n}\right)\Longrightarrow\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{c}{d}\right)$

g) **Propiedad distributiva.–** La multiplicación es distributiva con respecto a la adición.

Así, por ejemplo:

$$\left(\frac{2}{5}\right)\left[\left(\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{8}{6}\right)=\left(\frac{16}{30}\right)$$

Pero también:

$$\left(\frac{2}{5}\right)\left[\left(\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{10}{30}\right)+\left(\frac{2}{10}\right)=\left(\frac{16}{30}\right)$$

En general,

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left[\left(\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{m}{n}\right)\right]=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{m}{n}\right)$$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—26

1. Escriba el nombre de la propiedad respectiva en cada caso:

a) $\left(\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{-1}{6}\right)=\left(\frac{-1}{6}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)$

b) $\left(\frac{-5}{8}\right)(1) = (1)\left(\frac{-5}{8}\right) = \left(\frac{-5}{8}\right)$

c) $\left(\frac{3}{4}\right) + \left[\left(\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{-1}{3}\right)\right] = \left[\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{9}\right)\right] + \left(\frac{-1}{3}\right)$

d) $\left(\frac{-2}{5}\right)\left[\left(\frac{-1}{2}\right) + \left(\frac{-3}{4}\right)\right] = \left(\frac{-2}{5}\right)\left(\frac{-1}{2}\right) + \left(\frac{-2}{5}\right)\left(\frac{-3}{4}\right)$.

2. **Aplique las propiedades que a continuación se piden:**

a) **Conmutativa para la multiplicación con** $\left(\frac{2}{5}\right)$ **y** $\left(\frac{-3}{4}\right)$

b) **Elemento neutro para la adición con** $\left(\frac{-7}{9}\right)$

c) **Asociativa para la multiplicación con** $\left(\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{-2}{3}\right)$ **y** $\left(\frac{5}{6}\right)$.

d) **De clausura para la adición con** $\left(\frac{-3}{5}\right)$ **y** $\left(\frac{-7}{10}\right)$.

NOTACION DECIMAL PARA LOS NUMEROS RACIONALES

1—34. FRACCION DECIMAL.— La fracción cuyo denominador es una potencia de 10 se llama fracción decimal.

Así, por ejemplo:

$$\frac{3}{10^0},\ \frac{1}{10},\ \frac{-2}{100},\ \frac{5}{1000},\ \frac{-7}{10000},\ \text{etc.}$$

1—35. NUMERO RACIONAL DECIMAL.—

racionales $\left(\frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{3}{4}\right)$

Tenemos: $\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \ldots\right\}$ y

$$\left(\frac{3}{4}\right) = \left\{\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \ldots, \frac{75}{100}, \ldots\right\}.$$

Observamos que ciertos números racionales, tales como $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ tienen por lo menos una fracción decimal entre las que forman la clase de equivalencia; en este caso, $\frac{5}{10}$ y $\frac{75}{100}$ respectivamente. A estos números racionales se les llama **números racionales decimales.**

Son ejemplos de números racionales decimales:

$$(2), \text{ porque } (2) = \left(\frac{2}{1}\right) = \left(\frac{2}{10^0}\right)$$

$$\left(\frac{1}{8}\right), \text{ porque } \left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{125}{1000}\right)$$

$$\left(\frac{-3}{25}\right), \text{ porque } \left(\frac{-3}{25}\right) = \left(\frac{-12}{100}\right)$$

$$\left(\frac{7}{20}\right), \text{ porque } \left(\frac{7}{20}\right) = \left(\frac{35}{100}\right)$$

La observación de estos ejemplos nos permite afirmar que un **número es racional decimal si el denominador de una de las fracciones que forman la clase de equivalencia es solamente múltiplo de 2 o de 5 o de ambos.**

Los racionales que no cumplen estas condiciones, son **racionales no decimales,** tales como: $\left(\frac{1}{3}\right), \left(\frac{7}{11}\right), \left(\frac{1}{6}\right)$, etc.

1—36. NOTACION DECIMAL PARA UN NUMERO RACIONAL.— Sea

$$\left(\frac{1}{8}\right) = \left\{\frac{1}{8}, \frac{2}{16}, \frac{3}{24}, \ldots, \frac{125}{1000}, \ldots\right\}.$$

Dividiendo el numerador entre el denominador de la fracción $\frac{125}{1000}$, tenemos: $\frac{125}{1000} = 0.125$

Luego, $\frac{125}{1000}$ y 0.125 son numerales de un mismo número racional $\left(\frac{1}{8}\right)$; y 0.125 es la notación decimal para el número racional $\left(\frac{1}{8}\right)$.

Asimismo, son notaciones decimales: 0.75 de $\left(\frac{3}{4}\right)$, 1.5 de $\left(\frac{3}{2}\right)$, $^-0.06$ de $\left(\frac{^-3}{50}\right)$, $^-2.8$ de $\left(\frac{^-14}{5}\right)$, etc.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—27

1. Hallar una fracción decimal para cada uno de los números racionales siguientes: $\left(\frac{2}{5}\right)$, $\left(\frac{8}{25}\right)$, $\left(\frac{^-3}{2}\right)$ y $\left(\frac{^-1}{125}\right)$.

2. Determinar cuáles son números racionales decimales: $\left(\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{^-3}{8}\right)$, $\left(\frac{5}{9}\right)$, $\left(\frac{^-7}{11}\right)$, $\left(\frac{8}{15}\right)$, $\left(\frac{1}{75}\right)$, $\left(\frac{5}{14}\right)$, $\left(\frac{^-1}{400}\right)$, $\left(\frac{163}{450}\right)$.

3. Escribir las notaciones decimales de los números racionales siguientes: $\left(\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{4}\right)$, $\left(\frac{^-5}{8}\right)$, $\left(\frac{^-7}{10}\right)$, $\left(\frac{27}{20}\right)$ y $\left(\frac{^-111}{40}\right)$.

4. Indicar la parte entera y la parte decimal de los numerales decimales siguientes: 0.25 , 3.4 , $^-8.016$ y $^-5.3321$.

OPERACIONES CON NUMERALES DECIMALES

1—37. ADICION Y SUSTRACCION DE NUMERALES DECIMALES.— Recuerdese que al escribir los sumandos o el minuendo y el sustraendo uno debajo del otro, los puntos decimales deben estar alineados.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—28

A

EJEMPLO 1.— Hallar la suma : 0.56 + 97.4 + 124.304.

Solución:

$$\begin{array}{r} 0.56 \\ 97.4 \\ +\ 124.304 \\ \hline 222.264 \end{array}$$ **Es la respuesta.**

EJEMPLO 2.— Hallar la diferencia : 845.021 − 69.7058.

Solución:

$$\begin{array}{r} 845.0210 \\ 69.7058 \\ \hline 775.3152 \end{array}$$ **Es la respuesta.**

B

Efectuar:

1. 32.05 + 0.48 + 3.562
2. 426.5 + 0.0043 + 58.62
3. 328.2 + 120 + 24.606 + 0.4752
4. 1,450 + 308.75 + 50.739 + 6,748.5
5. 485.56 − 365.57
6. 5,826.43 − 3,089.305
7. 24,056.3 − 18,987.574
8. 45,736.640 − 8,948,705.78
9. (12.016 + 8.592) − (16.2345 − 9.54321)
10. (8 − 3.007) + (4.205 − 2.7532).

1—38. MULTIPLICACION DE NUMERALES DECIMALES.- Recuérdese que en el producto debe haber tantas cifras decimales como las hay en los factores.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—29

A

EJEMPLO 1.— Hallar el producto : 408.305 × 5.08.

Solución:

$$\begin{array}{r} 408.305 \\ \times\ 5.08 \\ \hline 3266440 \\ 2041525 \\ \hline 2074.18940 \end{array}$$. **Es la respuesta**

EJEMPLO 2.— Multiplicar 0.0136×1000.

Solución: $0.0136 \times 1000 = 13.6$. **Es la respuesta.**

Recuérdese que para multiplicar un numeral decimal por una potencia de 10, se traslada el punto decimal hacia la derecha tantas cifras decimales como ceros tenga dicha potencia de 10, completándose con ceros si el caso lo requiere.

B Multiplicar:

1. 4.18×3.06
2. 2.009×3.207
3. 1.362×1.415
4. 142.016×18.05
5. $16.168 \times 10{,}000$
6. 0.679×1.000
7. $2.3 \times 5.2 + 0.07 \times 3.2 - 1.7 \times 4.9$
8. $8.61 \times 3.7 - 5.73 \times 0.18 + 5.8 \times 6.5$
9. $6.23 \times 10 - 0.142 \times 100 + 8 \times 100$
10. $12.018 \times 100 + 8.23 \times 1{,}000 - 10.86 \times 100$.

1—39. POTENCIACION DE NUMERALES DECIMALES.—

Recuérdese que en la potencia hay el doble, triple, etc. número de cifras decimales que en la base.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—30

A EJEMPLO 1.— Hallar la potencia: $(0.24)^2$.

Solución: $(0.24)^2 = 0.24 \times 0.24 = 0.0576$. **Es la respuesta.**

EJEMPLO 2.— Efectuar $(0.12)^3$.

Solución: $(0.12)^3 = 0.12 \times 0.12 \times 0.12 = 0.001728$. **Es la respuesta.**

B Efectuar:

1. $(1.5)^2$
2. $(0.12)^2$
3. $(0.9)^3$
4. $(1.3)^3$
5. $(432.57)^0$
6. $(0.805)^1$
7. $(0.10)^2$
8. $(0.10)^3$
9. $(0.100 + 0.4)^2$
10. $(0.20 + 0.10)^3$
11. $(0.5 + 1.25)^2$
12. $(0.2 + 0.04)^3$

1—40. DIVISION DE NUMERALES DECIMALES.—

Recuérdese que previamente el divisor debe transformarse a entero (si no lo es) multiplicando el dividendo y dicho divisor por una misma potencia de 10.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—31

A EJEMPLO 1.— Hallar el cociente de $1.230 \div 15$.

Solución:

```
 1.230 | 15
- 1 20   0.082
 -----
  0 030
-    30
 ------
     00
```

Respuesta.—El cociente es 0.082. (Es una división exacta).

EJEMPLO 2.— Dividir $32.8 \div 4.6$

Solución: $328 \div 46$ (Se ha multiplicado por 10).

```
  328 | 46
- 322   7
 ----
  006
```

Respuesta.—El cociente es 7 y el residuo es 6. (Es una división inexacta).

EJEMPLO 3.— Dividir $48.082 \div 0.64$

Solución: $4808.2 \div 64$ (Se ha multiplicado por 100)

```
 4808.2 | 64
- 448     75.1
 -----
  0328
 - 320
 -----
  0082
 -  64
 -----
    18
```

Respuesta.—El cociente es 75.1 y el resto es 1.8.

EJEMPLO 4.— Dividir $43.72 \div 1000$

Solución: $43.72 \div 1000 = 0.04372$. **Es la respuesta.**

Recuérdese que para dividir un numeral decimal entre una potencia de 10, se traslada el punto decimal hacia la izquierda tantas cifras decimales como ceros tenga dicha potencia de 10, completándose con ceros si el caso lo requiere.

B Dividir:

1. $38.4 \div 12$
2. $5.025 \div 25$
3. $464.4 \div 8.6$
4. $780.8 \div 0.64$
5. $308.642 \div 0.15$
6. $672 \div 5.6$
7. $5 \div 7$ (Con aprox. a milésimos)
8. $15 \div 11$ (Con aprox. a centésimos)
9. $8075.2 \div 1000$
10. $41.65 \div 10000$.

1—41. RAIZ CUADRADA DE NUMERALES DECIMALES.—

Recuérdese que los grupos de dígitos se separan a partir del punto decimal hacia la derecha y hacia la izquierda, completando con un cero (o ceros) si es necesario cuando es hacia la dercha. Además el número de cifras decimales de la raíz es la mitad que las del radicando.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—32

A EJEMPLO 1.— Hallar la raíz cuadrada de 0.0144.

Solución: $\sqrt{0.0144} = 0.12$. **Es la respuesta.** (Es una raíz exacta).

EJEMPLO 2.— Hallar la raíz cuadrada de 538.3.

Solución:

√ 5'38.30	23.2
− 4	2 × 2 = 4
13'8	43 × 3 = 129
− 12 9	23 × 2 = 46
00 93'0	462 × 2 = 924
− 92 4	
00 6	

Respuesta.—La raíz cuadrada es 23.2 y el resto 0.06.

Hallar la raíz cuadrada:

1. 0.225
2. 3.24
3. 9.3025
4. $1{,}697.44$
5. 0.385
6. 385.4
7. 2 con aprox. a centésimos.
8. 3 con aprox. a milésimos.

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE REPASO 1—1

1. ¿Es posible efectuar $5 - 9$ en el conjunto N? ¿Por qué?
2. Escriba los símbolos que representan las clases de pares ordenados siguientes: C(0, 5), C(7, 0), C(0, 0), C(0,3), C(11,0).
3. Escriba algunos de los elementos de los conjuntos siguientes: Z^+, Z^-, Z^* y Z.
4. Escriba los enteros opuestos de: $^+12$, $^-7$, $^+516$, $^-1{,}208$, ^-x, ^+y.
5. En la recta numérica escriba los números enteros comprendidos entre $^-8$ y $^+8$.
6. Ordene los valores absolutos de: $|^-55|$, $|0|$ y $|^+108|$.
7. ¿Cuándo dos números enteros son iguales? Escriba un ejemplo de igualdad con enteros positivos y otro con enteros negativos.
8. Escriba de:

   a) Menor a mayor: $^-14$, $^+10$, $^-11$, $^+3$, $^-8$, 0, $^-6$ y $^+1$.

   b) Mayor a menor: $^+15$, $^-7$, $^-11$, $^+3$, $^-4$, $^-13$, $^+9$ y 0.
9. Efectúe:

   a) $(^-5) + (^-9) + (^-10) + (^+15)$

   b) $(^+10) + (^-4) + (^-7) + (^-8) + (^-12)$.

   c) $(^-20)\ (^-5)\ (^+10)$

   d) $(^-5)\ (^-3)\ (^+6)\ (^-20)$

   e) $(^+36) - (^-40)$

   f) $(^-120) - (^+80)$

   g) $(^-30) \div (^+15)$

h) $(^{-}80) \div (^{-}20)$

i) $(^{-}7)^3$

j) $(^{-}10)^4$

k) $\sqrt[4]{^{+}256}$

l) $\sqrt[5]{^{-}243}$.

10. En el conjunto Z, seleccione entre las operaciones de adición, multiplicación y sustracción, cuáles de ellas gozan de las propiedades siguientes e ilustre con ejemplos en cada caso:

a) De clausura
b) Asociativa
c) Conmutativa
d) Elemento neutro
e) Elemento simétrico
f) Distributiva.

11. Escriba el racional euivalente a C(2, 5) así como el conjunto de fracciones que forman esta clase de equivalencia.

12. ¿Cuál es su concepto acerca de número racional?

13. Escriba el entero que identifica a cada uno de los racionales siguientes:

$\left(\frac{-4}{1}\right), \left(\frac{0}{8}\right)$ y $\left(\frac{-5}{5}\right)$.

14. Dados los números racionales $\left(\frac{-4}{1}\right), \left(\frac{0}{-11}\right)$ y $\left(\frac{-13}{15}\right)$, determinar cuál es positivo, cuál es negativo y cuál es nulo.

15. Efectuar las siguientes operaciones con fracciones:

a) $\frac{3}{5} + 2\frac{1}{4} + 1$

b) $7\frac{1}{3} - \frac{5}{6}$

c) $\frac{48}{55} \times 110 \times 1\frac{2}{8}$

e) $\frac{19}{50} \div \left(7\frac{3}{5}\right)$

f) $\left(3\frac{1}{4}\right)^2$

g) $\sqrt[3]{\frac{125}{729}}$

16. Efectuar las siguientes operaciones con numerales decimales:

a) $48.5 + 136.24 + 1.238 + 0.020$

b) $3085.04 - 1080.583$

c) 57.04×36.008

d) $(0.13)^3$

e) $408.05 \div 0.075$

f) $8.0469 \div 4.06$.

CONJUNTO DE EJERCICIOS OPCIONAL 1—1

1. Escribir de menor a mayor:

a) $^{-}9, ^{-}12, ^{+}3, 0, ^{+}1, -5, ^{-}15, ^{+}6, +2, ^{-}10$.

b) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{11}{12}, \frac{5}{6}, \frac{5}{4}$.

c) 0.5; 1.2; 0.25; 0.75.

2. Escriba el opuesto del opuesto de $^{-}15$.

3. Complete el cuadro escribiendo los resultados de las operaciones que se indican:

a	$a+(-6)$	$a-(^{-}10)$	$^{-}4a-(^{-}2)$	$(2a)^3$	$^{-}8a \div 4$
$^{+}2$	$^{-}4$				
$^{-}3$					
0					

4. Efectuar:

a) $(^{-}5)\ (^{-}2) + (^{+}18) \div (^{-}9) - (^{-}4)^2 \div (^{-}2)$

b) $(^{+}18) \div (^{+}9) + (^{+}6)\ (^{-}8) + (^{-}2)^3 - (4 \times 3) + (^{-}3)$

c) $\left(\frac{5}{6}\right) + \left(1\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) - (1)$

d) $\left[\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{5}\right)\right] + \left[\left(\frac{3}{20}\right)\times\left(\frac{5}{12}\right)\right] - \left[\left(\frac{12}{15}\right)\div\left(\frac{3}{5}\right)\right]$

e) $(0.8 + 2.5) + (38.2 - 20.48)$

f) $(2500.5 \times 100) - \frac{(0.5)^2 \times 1000}{(0.10)^3}$.

JOSEPH-LOUIS LAGRANGE

(1736—1813)

Nació en Turín (Italia), donde pasó sus primeros años, trasladándose posteriormente a Berlín para luego pasar sus últimos años en París, donde logró su mayor fama.

Su padre lo abandonó a muy temprana edad, hecho que a decir de él mismo, le sirvió para descubrir su vocación matemática. A los 16 años de edad, fue nombrado profesor de matemáticas en la Escuela Real de Artillería de Turín donde dos años después fundaba una asociación científica que fue el germen de la Academia de Ciencias. Aún cuando no tenía recursos de orador y era de muy pocas palabras, su encantadora personalidad mantenía la atención de los hombres mayores que él.

A los 19 años de edad, saltó a la fama con la solución del llamado problema isope imétrico que por más de medio siglo había desconcertado al mundo matemático, habiendo comunicado su demostración a Euler, quien se interesó por su solución, y cuando comprobó que era la misma que él había hallado, con mucho tino y amabilidad respondió a Lagrange, ocultando deliberadamente su propia obra, con el fin que todos los honores recayeran sobre su joven amigo.

En 1766 pasó a Berlín llamado por Federico el Grande, donde sucedió a Euler. A la muerte de Federico el Grande, marcha a París donde publicó su obra titulada Mecánica Analítica que fue redactada durante su permanencia en la capital alemana. A su llegada a París, Lagrange estaba desgastado matemáticamente y su talento para esta ciencia había desaparecido por lo que durante dos años se dedicó a la filosofía y otras ramas del saber humano; pero en años posteriores, después de la revolución, su habilidad matemática volvió y produjo varios trabajos sobre álgebra y análisis.

Feliz en su vida hogareña, pasó sus tranquilos años fructíferos hasta que murió a los 66 años de edad.

* * *

Una polilla penetra por la parte exterior de la tapa delantera del tomo I de una colección compuesta de tres volúmenes. Si el espesor de cada volumen es 2 cm. y la polilla se abre paso hasta la parte de afuera de la tapa posterior del tercer volumen, ¿cuántos centímetros ha recorrido?.

La respuesta no es 6 cm.

* * *

Una buena notación tiene una tal sutileza y ejerce una sugestión tal que a veces parece como un maestro vivo.

BERTRAND RUSSELL.

Unidad 2

SISTEMA METRICO

2—1. MAGNITUD.— Observemos las figuras 2-1 y 2-2.

Fig. 2-1

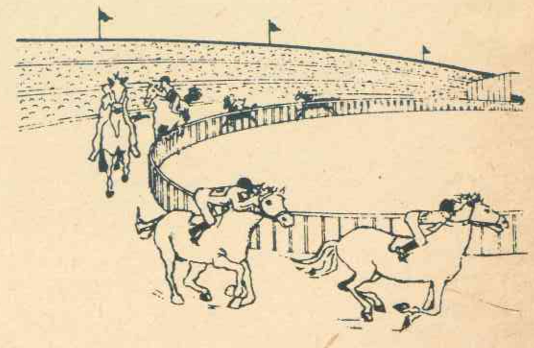


Fig. 2-2

Si comparamos las alturas y los pesos del hombre y de la mujer de la figura 2—1, podremos afirmar que ambas personas son de igual estatura pero que el peso del hombre es mayor que el peso de la mujer. Entonces existen características comunes entre estas personas, que son la **altura** y el **peso.**

Análogamente en la figura 2-2, la característica común entre las acciones de los caballos es la **velocidad**, que también puede comparase.

A la característica común que existe entre los objetos y que es capaz de compararse, se le denomina **magnitud.**

Son ejemplos de magnitud: la longitud, la superficie, el volumen, el peso, el tiempo, la velocidad, la fuerza, el calor, etc.

2—2. CANTIDAD.— Hemos afirmado que el peso es una magnitud, pero el **peso de un determinado objeto es una cantidad.** Así, por ejemplo, el peso del hombre de la figura 2-1 es una cantidad, como también lo es su estatura (longitud).

Asimismo, la velocidad es una magnitud, pero la velocidad de uno de los caballos de la figura 2-2 es una cantidad.

Luego, podemos decir:

Cantidad es la magnitud de un determinado objeto.

2—3. MEDICION Y MEDIDA DE UNA CANTIDAD.— Se trata, por ejemplo, de medir el largo de la pizarra del aula de clase.

Para ello, se elige previamente una unidad de medida (de la misma magnitud) como por ejemplo el metro, y a partir de un extremo de la pizarra se lleva sucesivamente esta unidad tantas veces como sea necesario hasta el otro extremo. (Fig. 2-3). Si como resultado obtenemos que el metro está contenido 4 veces exactas, afirmaremos que la pizarra tiene 4 metros de largo.

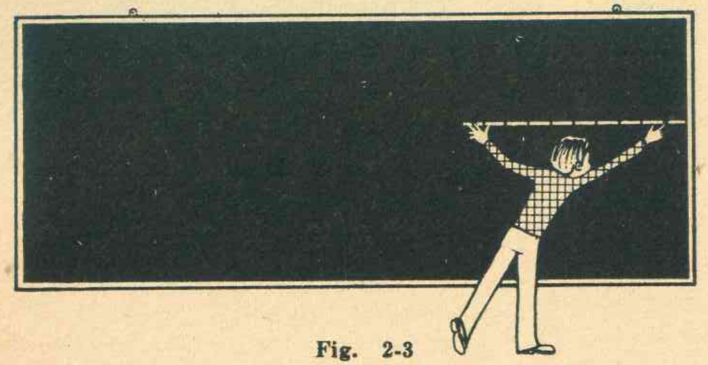


Fig. 2-3

Asimismo, para medir la capacidad de un recipiente de agua, elegiremos como unidad de medida el litro, por ejemplo; y si al vaciar el agua del recipiente completamente lleno se obtienen 3 litros exactos, tendremos un recipiente de 3 litros de capacidad. (Fig. 2-4).

Fig. 2-4

En estos ejemplos, el metro y el litro son las **unidades de medida**; el procedimiento que se emplea para medir se llama **medición** y los números 4 (metros) y 3 (litros) son las **medidas** de las cantidades.

Luego, podemos decir:

Medición es el procedimiento que se emplea para determinar las veces que la unidad elegida está contenida en la cantidad; y medida, es el número que se obtiene como resultado de esta medición.

2—4. SISTEMA DE MEDIDAS.— La civilización trajo como consecuencia urgentes necesidades en el hombre, entre ellas, las de medir longitudes, superficies, volúmenes, pesos, etc. Estas medidas hicieron que se crearan algunas unidades tales como la braza, el codo, el pie, la legua, etc. Sin embargo, hasta fines del siglo XVIII, cada país y a veces cada región dentro de un mismo país utilizaba sus propias unidades de medida, lo cual hacía inoperante establecer las equivalencias para el intercambio comercial; de allí que, la preocupación constante de los hombres de ciencias fue la adopción de un solo sistema de medidas que tengan las condiciones de universalidad, unidad básica, unidades superiores e inferiores a la básica denominadas múltiplos y submúltiplos respectivamente. A este conjunto de unidades se le denomina **sistema de medidas.**

2—5. SISTEMA METRICO DECIMAL.— Francia tuvo el privilegio de ser la creadora de un nuevo sistema de medidas con las condiciones anotadas y cuya unidad básica de longitud tuviera cierta relación con las dimensiones del globo terrestre, y que sus diversas unidades guardasen cierta relación entre sí como las potencias de 10.

En el año 1790 la Asamblea Constituyente Francesa encargó a la Academia de Ciencias de París el estudio y establecimiento de este nuevo sistema de medidas para cuyo fin dicha Academia designó una comisión de sabios franceses formada por Borda, Lagrange, Laplace y Cordoret, quienes establecieron una unidad de longitud llamada **metro patrón** y cuya longitud debería ser la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre. Los astrónomos Mechaín y Delambre fueron designados para medir el arco del meridiano comprendido entre Dunkerque (Francia) y Barcelona (España) y partiendo de esta medida se calculó la longitud media del cuadrante del meridiano terrestre: es aproximadamente 10,000,000 metros y a la diezmillonésima parte de esta longitud se le llamó **metro** (Fig. 2-5).

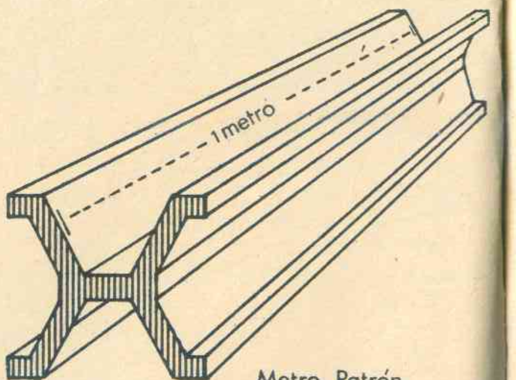
Pero cálculos posteriores comprobaron un pequeño error en esa medición, pues el cuadrante del meridiano terrestre mide 10,002,208 metros; por tal razón, en la Conferencia de Pesas y Medidas llamada **prototipo internacional** debe definirse así:

El metro es la distancia entre dos marcas de una barra de platino iridiado a la temperatura de 0°C.

Este metro patrón (Fig. 2-6) fue construído por el físico francés Borda y se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas de París.

Globo Terráqueo

Fig. 2-5



Metro Patrón

Fig. 2-6

Sin embargo, esta definición de metro fue normalizada en octubre de 1960, cuando delegados de 32 naciones acordaron que el metro debe definirse en "términos de longitud de onda de la luz rojo-anaranjada de gas criptón", o sea:

"Un metro es igual a 1,650,763.73 longitudes de onda rojo-anaranjada en el vacío, de un átomo de gas criptón 86".

Esta definición tiene la ventaja de que en cualquier lugar de la tierra se puede determinar la longitud del metro por medio de un instrumento llamado interferómetro y con una aproximación hasta de cien millones.

Esta unidad metro como unidad básica dio origen a un nuevo sistema de medidas llamada **sistema métrico decimal.**

Se llama decimal porque sus unidades aumentan o disminuyen como las potencias de 10.

Este sistema ha sido adoptado oficialmente por la mayoría de los países del mundo salvo Estados Unidos de Norte América e Inglaterra donde utilizan el sistema inglés pero no está prohibido el uso del sistema métrico decimal.

En el sistema métrico decimal estudiaremos las unidades de longitud, de superficie, de volumen, de peso y de capacidad.

UNIDADES METRICAS DE LONGITUD

2—6. UNIDAD BASICA.— La unidad básica de las unidades de longitud es el metro (Fig. 2-7).

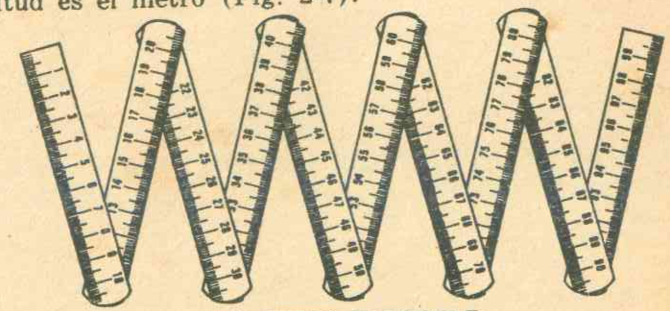

1 METRO PLEGABLE

Fig. 2-7

2—7. MULTIPLOS Y SUBMULTIPLOS DEL METRO.— Las unidades mayores que el metro constituyen los múltiplos y las unidades inferiores los submúltiplos. En el cuadro siguiente se muestran las unidades, abreviaturas y equivalençias correspondientes.

	Unidades	Notación	Equivalencias en metros
Múltiplos	1 Miriámetro 1 Kilómetro 1 Hectómetro 1 Decámetro	1 Mm 1 Km 1 Hm 1 Dm	10,000 m 1,000 m 100 m 10 m
Unidad básica	1 metro	1 m	1 m
Submúltiplos	1 decímetro 1 centímetro 1 milímetro	1 dm 1 cm 1 mm	0.1 m 0.01 m 0.001 m

En la práctica se utilizan otras medidas materializadas en instrumentos como son el doble metro y decámetro en las construcciones, en la medición de terrenos, etc.

En Astronomía, hay distancias tan grandes que el uso del Kilómetro no es lo más apropiado para expresar tales distancias, por lo que se utilizan otras unidades mayores, como el **año luz.** Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año y aproximadamente equivale a 9.46×10^{12} Km (9,460,000,000,000 Km). Por ejemplo, la estrella más cercana a la tierra es Alfa Centauro y está a 4.3 años luz de distancia.

Además, hay unidades tan pequeñas tales como la **micra** y **milimicra**, usadas en microscopía, y las unidades **Angstrom** y **X** utilizadas en espectroscopía. Las notaciones y equivalencias en metros de estas unidades son:

1 micra (μ) = 0.000 001 m
1 milimicra ($m\mu$) = 0.000 000 001 m
1 Unidad Angstrom (A) = 0.000 000 000 1 m
1 Unidad X (X) = 0.000 000 000 000 1 m.

2—8. TRANSFORMACION DE LAS UNIDADES DE LONGITUD.—Para transformar una unidad mayor a otra menor se multiplica el número dado por 10, 100, 1,000, etc.; y si es una unidad menor a otra mayor, se divide entre 10, 100, 1,000, etc. Además, con la finalidad de comprender mejor la técnica de esta transformación, se recomienda tener como referencia el **esquema** siguiente:

Mm	Km	Hm	Dm	m	dm	cm	mm

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—1

A **EJEMPLO 1.**— Transformar 48 Km a m.

Solución: De Km a m (esquema) hay: Hm, Dm y m, es decir, tres unidades, luego el número dado se multiplica por 1,000, o sea:

48 Km = 48 × 1,000 = 48,000 m. **Es la respuesta.**

EJEMPLO 2. Transformar 65.2 Hm a cm.

Solución: 65.2 Hm = 65.2 × 10,000 = 652,000 cm. **Es la respuesta.**

EJEMPLO 3.— Transformar 205 dm a Km.

Solución: De dm a Km (esquema — de derecha a izquierda) hay: m, Dm, Hm y Km, es decir, cuatro unidades, luego el número dado se divide entre 10,000, o sea:

205 dm = 205 ÷ 10,000 = 0.0205 Km. **Es la respuesta.**

EJEMPLO 4.— Transformar 0.0806 m a Dm.

Solución: 0.0806 m = 0.0806 ÷ 10 = 0.00806 Dm. **Es la respuesta.**

B Transformar:

1. 450 Km a m.
2. 58 Mm a Dm.
3. 5.8 Km a m.
4. 0.36 Hm a dm.
5. 8,052 m a Km.
6. 45 Dm a Mm.
7. 348.5 m a Hm.
8. 56.25 dm a m.
9. 25,020 Hm a cm.
10. 280.4 Dm a Km.
11. 40.2 m a Mm.
12. 0.0850 Dm a mm.
13. 30.25 Km a Dm.
14. 25.6 m a Hm.

2—9. UNIDADES NO DECIMALES DE LONGITUD Y SU EQUIVALENCIA CON EL METRO.— Algunas de estas unidades y sus respectivas equivalencias con el metro se muestran en el cuadro siguiente y la importancia de su estudio radica en el intercambio comercial que existe con los países de habla inglesa y el hecho de que en algunos pueblos de Latinoamérica todavía se usan algunas antiguas unidades españolas.

CUADRO DE ALGUNAS UNIDADES DE LONGITUD TERRESTRE

De Castilla	Inglesa
1 legua (leg) = 5,444 m	1 milla (mi) = 1,609 m
1 vara (v) = 0.836 m	1 yarda (yd) = 0.914 m
1 pie (p) = 0.279 m	1 pie (ft) = 0.304 m
1 pulgada (pulg) = 0.023 m.	1 pulgada (in) = 0.025 m.

En la navegación generalmente se emplean:

1 milla marina (mi ma) = 1,852 m
1 legua marina (leg ma) = 5,556 m.

NOTA.—El **nudo** es una unidad de velocidad que se emplea en la navegación y es equivalente a la velocidad de una milla marina por hora.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—2

A **EJEMPLO 1.**— Transformar 10 v a m.
Solución: 10 v = 10 × 0.836 = 8.36 m. **Es la respuesta.**

EJEMPLO 2.— Transformar 12.54 m a v.
Solución: 12.54 m = 12.54 ÷ 0.836 = 15 v. **Es la respuesta.**

EJEMPLO 3.—Transformar 500 yd a m.
Solución: 500 yd = 500 × 0.914 = 457 m. **Es la respuesta.**

EJEMPLO 4.— Transformar 128.72 Km. a mi.
Solución: 128.72 Km = 128,720 m.
128,720 m = 128,720 ÷ 1,609 = 80 mi. **Es la respuesta.**

B Transformar:

1. 20 v a m.
2. 8 m a v.
3. 1,000 yd a m.
4. 5,000 m a yd.
5. 1,200 mi a Km.
6. 804.5 Km a mi.
7. 6 ft a m.
8. 74 pulg a m.
9. 12.5 v a m.
10. 86.944 m a v.
11. 8.6 yd a m.
12. 16,452 m a yd.
13. 80.4 mi a Km.
14. 200mi a Km.
15. 2.128 m a ft.
16. 2 m a in.
17. 457 v a yd.
18. 40.5 yd a v.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—3

(Problemas)

A EJEMPLO 1.— Se compran 5,000 yd de alambre de púa. Después de cercar con 4 hileras un terreno de 200 m de largo por 120 m de ancho, ¿cuántos metros de alambre sobran?

Solución: 5,000 yd $= 5{,}000 \times 0.914 = 4{,}570$ m.

$p = 2 \times 200 + 2 \times 120 = 400 + 240 = 600$ m (perímetro del terreno o longitud de una hilera)

$640 \times 4 = 2{,}560$ m. (Longitud de las 4 hileras)

$$\begin{array}{r} 4{,}570 \\ -\ 2{,}560 \\ \hline 2{,}010 \end{array}$$

2,010 m. (Longitud del alambre que sobra).

Respuesta.—Sobran 2,010 m de alambre.

B Resolver los problemas siguientes:

1. Un comerciante compra 167.2 m de tela a $ 65 cada metro. ¿A cómo tiene que vender la vara para ganar $ 1,608?
2. Un comerciante compra 500 yd de seda a $ 50 la yarda. ¿A cómo tiene que vender el metro para ganar $ 5,270?
3. El pico Bolívar mide 19,013.16 pies (ft) aproximadamente. ¿Cuál es su altura en metros?
4. El río Cauca, el más largo del Occidente de Colombia, mide 1,350 Km aproximadamente. ¿Cuál es su longitud en millas?
5. ¿Cuál es su estatura en pies (ft)?
6. La frontera de Colombia con el Perú mide 1,626 Km. ¿Cuál es la longitud en millas?
7. Un submarino navega a 40 nudos. ¿Cuántos Km habrá navegado en 10 horas?
8. Un automóvil ha empleado 4 horas para recorrer 386.16 Km. Si su velocímetro marca en millas, ¿cuál fue su velocidad?

2—10. NUMERO DENOMINADO Y NO DENOMINADO.—

Consideremos los ejemplos siguientes:

La longitud de una pieza de tela: 3 m 20 cm y

el peso de un alumno: 50 Kg 200 g

Estas cantidades que expresan distintas unidades de una misma magnitud y corresponden a un mismo sistema se llaman **números denominados.**

Son también ejemplos de números denominados:

13 años 5 meses: 13 a 5 me,

1 quintal 2 arrobas 10 libras: 1 qq 2 @ 10 lbs,

12 varas 1 pie 8 pulgadas: 12 v 1 p 8 pulg,

24 grados 40 minutos 20 segundos: $24° 40' 20''$.

Luego, podemos decir:

Número denominado es la medida de una cantidad expresada en distintas unidades de una misma magnitud.

Si la medida de una cantidad se expresa con una sola unidad, se llama **número no denominado.** Así, por ejemplo:

15 m, 200 mi, 65 Kg,

2 @ 17 v, etc.

2—11. TRANSFORMACION DE NUMERO DENOMINADO DE LONGITUD A NO DENOMINADO.—

Se transforma cada una de las unidades del número denominado a la unidad pedida y luego se suman.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—4

EJEMPLO 1.— **Transformar 7 Dm 2 dm 3 cm a cm.**

Solución: 7 Dm $= 7 \times 1{,}000 = 7{,}000$ cm

2 dm $= 2 \times 10 = 20$ cm

3 cm $= 3$ cm

Luego: 7,000 cm + 20 cm + 3 cm = 7,023 cm. Es la respuesta.

EJEMPLO 2.— **Transformar 5 Hm 2 Dm 8 cm a m.**

Solución: 5 Hm $= 5 \times 100 = 500$ m

2 Dm $= 2 \times 10 = 20$ m

8 cm $= 8 \div 100 = 0.08$ m.

Luego: 500 m + 20 m + 0.08 m = 520.08 m. Es la respuesta.

B Transformar:

1. 5 Km 2 Hm 6 Dm a m.
2. 1 Dm 3 m 5 cm a cm.
3. 8 m 5 dm 2 cm 5 mm a mm.
4. 4 Mm 2 Km 18 m a m.
5. 6 dm 3 cm a cm.
6. 9 Hm 5 m 8 dm a mm.

2—12. TRANSFORMACION DE NUMERO NO DENOMINADO DE LONGITUD A NUMERO DENOMINADO.— Para esta transformación debe tenerse en cuenta que la última cifra entera representa la unidad dada y que a partir de esta cifra, hacia la derecha deben considerarse las unidades inferiores y hacia la izquierda las unidades superiores.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—5

A EJEMPLO 1.— Transformar 538 Dm a número denominado.

Solución: Tenemos:

Km	Hm	Dm
5	3	8

Luego: 538 Dm = 5 Km 3 Hm 8 Dm. **Es la respuesta.**

EJEMPLO 2.— Transformar 126.24 m a número denominado.

Solución: Tenemos:

Hm	Dm	m	dm	cm
1	2	6	2	4

Luego: 126.24 m = 1 Hm 2 Dm 6 m 2 dm 4 cm. **Es la respuesta.**

B Transformar a número denominado:

1. 328 Dm.
2. 5,625 cm.
3. 26.35 Hm.
4. 208.05 m.
5. 30,865 dm.
6. 0.0608 Km.

2—13. ADICION Y SUSTRACCION DE NUMEROS DENOMINADOS DE LONGITUD.— Para efectuar estas operaciones se transforman los números denominados a no denominados de una misma unidad y luego se suman o restan.

A EJEMPLO 1.— Hallar la suma expresada en metros de: 2 Km 3 Dm 5 m 3 Hm 4 Dm y 3 Km 1 Dm 3 m.

Solución: Tenemos: 2 Km 3 Dm 5 m = 2,035 m

3 Hm 4 Dm = 340 m

3 Km 1 Dm 3 m = 3,013 m.

Luego: 2,035 m + 340 m + 3,013 m = 5,388 m.
Es la respuesta.

EJEMPLO 2.— Hallar la diferencia expresada en Km entre 2 Km 3 Hm 2 Dm y 5 Hm 3 Dm 4 m.

Solución: Tenemos: 2 Km 3 Hm 2 Dm = 2.320 Km

5 Hm 3 Dm 4 m = 0.534 Km.

Luego: 2.320 − 0.534 = 1.786 m. **Es la respuesta.**

B Hallar la suma expresada en metros de:

1. 5 Km 2 Hm 3 Dm + 2 Km 5 Dm.
2. 3 Hm 2 Dm 5 m + 2 Km 1 Hm.
3. 4 Hm 6 m 20 cm + 8 m 5 dm 50 cm.
4. 3 m 2 dm 5 cm + 4 dm 6 cm + 2 Dm 8 dm.

Hallar la diferencia expresada en Km:

5. 8 Km 8 Hm 3 Dm − 5 Km 3 Hm 5 Dm.
6. 2 Km 5 Dm 8 m − 7 Hm 1 Dm 6 m.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—7
(Problemas)

Resolver los problemas siguientes:

1. Una pieza de tela mide 22.4 m. ¿Cuántos retazos de 2 m 80 cm se pueden obtener?
2. ¿Cuántos pasos dará un hombre para recorrer 2 Km 4 Hm, si en cada paso avanza 60 cm?
3. La longitud de la rueda mayor de un tractor es de 0.5 Dm 0.625 m. Si para recorrer el largo de un terreno dicha rueda da 60 vueltas, ¿cuál es la longitud en metros del terreno?
4. La longitud de la rueda delantera de una bicicleta mide 1.884 m. ¿Cuántas vueltas dará dicha rueda en un recorrido de 3 Km 7 Hm 68 m?

UNIDADES METRICAS DE SUPERFICIE

2—14. SUPERFICIE Y AREA.— La magnitud que tienen los cuerpos considerados como el producto de dos dimensiones se llama **superficie**, tales como: la superficie de una pizarra, la superficie de un terreno, la superficie de un disco, etc.; y, la medida de la superficie constituye el **área**, así diremos: la pizarra tiene 6 metros cuadrados de área, el territorio colombiano tiene 1,138,914 kilómetros cuadrados, etc.

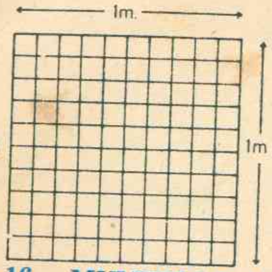


Fig. 2-8

2—15. UNIDAD BASICA.—

La unidad básica de las unidades de área es el metro cuadrado (m^2).

El metro cuadrado es el área de una superficie que tiene un metro por lado (Fig. 2-8).

2—16. MULTIPLOS Y SUBMULTIPLOS DEL METRO CUADRADO.— Véase el cuadro siguiente:

	Unidades	Notación	Equivalencia en metros cuadrados
Múltiplos	1 Miriámetro cuadrado 1 Kilómetro cuadrado 1 Hectómetro cuadrado 1 Decámetro cuadrado	1 Mm^2 1 Km^2 1 Hm^2 1 Dm	100,000,000 m^2 1,000,000 m^2 10,000 m^2 100 m^2
Unidad básica	**1 metro cuadrado**	**1 m^2**	1 m^2
Submúltiplos	1 decímetro cuadrado 1 centímetro cuadrado 1 milímetro cuadrado	1 dm^2 1 cm^2 1 mm^2	0.01 m^2 0.0001 m^2 0.000001 m^2

Obsérvese que las unidades de superficie aumentan y disminuyen como las potencias de 100, tales como: 100^2, 100^3, etc.; o también, 100^{-2}, 100^{-3}, etc.

2—17. TRANSFORMACION DE LAS UNIDADES DE AREA. —Para transformar una unidad mayor a otra menor se multiplica el número dado por 100, 10,000, 1 000 000, etc.: y si es de menor a mayor se divide entre esas potencias de 100. Además, se recomienda tener como referencia el esquema siguiente:

Mm^2	Km^2	Hm^2	Dm^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—8

A EJEMPLO 1.— Transformar 2 Km^2 a m^2.

Solución: De Km^2 a m^2 (esquema) hay: Km^2, Dm^2 y m^2, es decir, tres unidades, luego el número dado se multiplica por 1,000,000, o sea:

2 Km^2 = 2 × 1,000,000 = 2,000,000 m^2. **Es la respuesta.**

EJEMPLO 2.— **Transformar 208.5 m^2 a cm^2.**

Solución: 208.5 m^2 = 208.5 × 10,000 = 2,085,000 cm^2. **Es la respuesta.**

EJEMPLO 3.— **Transformar 4,082 dm^2 a Hm^2.**

Solución: De dm^2 a Hm^2 (esquema — de izquierda a derecha) hay: m^2, Dm^2 y Hm^2, es decir, tres unidades, luego el número dado se divide entre 1,000,000, o sea:

4,082 dm^2 = 4,082 ÷ 1,000,000 = 0.004082 Hm^2 **Es la respuesta.**

EJEMPLO 4.— **Transformar 56.04 m^2 a Dm^2.**

Solución: 56.04 m^2 = 56.04 ÷ 100 = 0.5604 Dm^2. **Es la respuesta.**

B **Transformar:**

1. 5 Km^2 a m^2
2. 25 m^2 a cm^2
3. 4.5 Dm^2 a m^2
4. 6.32 Km^2 a m^2
5. 348 m^2 a Km^2
6. 5,862 cm^2 a m^2
7. 64.5 Dm^2 a Km^2
8. 260.45 dm^2 a Hm^2
6. 50.8 Hm^2 a dm^2
10. 30.65 cm^2 a Dm^2.

2—18. UNIDADES NO DECIMALES DE AREA Y SU EQUIVALENCIA CON EL METRO CUADRADO.— Algunas de estas unidades y sus respectivas equivalencias con el metro cuadrado se muestran a continuación; y la importancia de su estudio, radica en el hecho de que en algunos países de habla española se utilizan estas unidades.

Algunas unidades de área de Castilla

1 vara cuadrada (v^2) = 0.6987 m^2

1 pie cuadrado (p^2) = 0.0776 m^2

1 pulgada cuadrada ($pulg^2$) = 0.000539 m^2.

Algunas unidades de área inglesas

1 milla cuadrada (mi^2) = 2,500,000 m^2

1 acre = 4046.8 m^2

1 yarda cuadrada (yd^2) = 0.8361 m^2

1 pie cuadrado (ft^2) = 0.0929 m^2.

Otra unidad de área empleada es la fanegada equivalente a 28,981 m^2

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—9

A EJEMPLO 1.— Transformar 1,000 v^2 a m^2.

Solución: $1{,}000\ v^2 = 1{,}000 \times 0.6987 = 698.7\ m^2$. Es la respuesta.

EJEMPLO 2.— Transformar 182,106 m^2 a acres.

Solución: $182{,}106\ m^2 = \dfrac{182{,}106}{4046.8} = 45$ acres. Es la respuesta.

B Transformar:

1. 20 v^2 a m^2
2. 209.61 m^2 a v^2
3. 200 p^2 a m^2
4. 11.64 m^2 a p^2
5. 2,000 $pulg^2$ a m^2
6. 26.95 m^2 a $pulg^2$
7. 2 mi^2 a m^2
8. 116,550,000 m^2 a mi^2
9. 20 acres a m^2
10. 222.574 m^2 a acres
11. 200 yd^2 a m^2
12. 418.05 m^2 a yd^2
13. 5 fanegadas a m^2
14. 579.620 m^2 a fanegadas.

2—19. TRANSFORMACION DE NUMERO DENOMINADO DE AREA A NO DENOMINADO.— Se transforma cada una de las unidades del número denominado a la unidad pedida y luego se suman.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—10

A EJEMPLO 1.— Transformar 5 Dm^2 5 m^2 5 dm^2 a m^2.

Solución: $5\ Dm^2 = 5 \times 100 = 500\ m^2$

$5\ m^2 = 5\ m^2$

$5\ dm^2 = 5 \div 100 = 0.05\ m^2$

Luego: $500\ m^2 + 5\ m^2 + 0.05\ m^2 = 505.05\ m^2$. Es la respuesta.

EJEMPLO 2.— Transformar 8 Km^2 5 Hm^2 6 Dm^2 a Km^2.

Solución: $8\ Km^2 = 8\ Km^2$

$5\ Hm^2 = 5 \div 100 = 0.05\ Km^2$

$6\ Dm^2 = 6 \div 10{,}000 = 0.0006\ Km^2$.

Luego: $8\ Km^2 + 0.05\ Km^2 + 0.0006\ Km^2 = 8.0506\ Km^2$ Es la respuesta.

B Transformar:

4 Km^2 6 Hm^2 2 Dm^2 a m^2

5 Dm^2 8 m^2 7 dm^2 a m^2

4 m^2 5 dm^2 8 cm^2 a cm^2

2 Dm^2 5 m^2 3 cm^2 a dm^2

4 Hm^2 2 Dm^2 9 m^2 a Dm^2

8 m^2 6 dm^2 5 cm^2 a dm^2.

2—20. TRANSFORMACION DE NUMERO NO DENOMINADO DE AREA A NUMERO DENOMINADO.— Esta transformación se realiza en forma semejante que en las unidades de longitud, para lo cual debe tenerse en cuenta que las dos últimas cifras enteras representan la unidad dada.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—11

A EJEMPLO 1.— Transformar 4,235 cm^2 a número denominado.

Solución: Tenemos:

dm^2	cm^2
42	35

Luego: $4{,}235\ cm^2 = 42\ m^2\ 35\ cm^2$.

EJEMPLO 2.— Transformar 408,254 Km^2 a número denominado.

Solución: Tenemos:

Mm^2	Km^2	Hm^2	Dm^2
4	08	25	40

Luego: $408.254\ Km^2 = 4\ Mm^2\ 08\ Km^2\ 25\ Hm^2\ 40\ Dm^2$. Es la respuesta.

B Transformar a número denominado:

1. 5,642 cm^2
2. 36,572 dm^2
3. 468.2 Dm^2
4. 6536.704 m^2
5. 758.5 cm^2
6. 0.7528 Km^2.

2—21. ADICION Y SUSTRACCION DE NUMEROS DENOMINADOS DE AREA.— Para efectuar estas operaciones se transforman los números denominados a no denominados de una misma unidad y luego se suman o restan.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—12

A EJEMPLO 1.—Hallar la suma expresada en m^2 de: $5\ Hm^2\ 2\ Dm^2\ 8\ m^2$, $6\ Dm^2\ 8\ dm^2$ y $1\ Dm^2\ 5\ m^2\ 6\ dm^2$.

Solución: Tenemos:

$$5\ Hm^2\ 2\ Dm^2\ 8\ m^2 = 50{,}208\ m^2$$
$$6\ Dm^2\ 8\ dm^2 = 600.08\ m^2$$
$$1\ Dm^2\ 5\ m^2\ 6\ dm^2 = 105.06\ m^2$$

Luego: $50{,}208\ m^2 + 600.08\ m^2 + 105.06\ m^2 = 50{,}913.14\ m^2$.
Es la respuesta.

EJEMPLO 2.—Hallar la diferencia expresada en Km^2 entre:

$7\ Km^2\ 5\ Dm^2$ y $3\ Km^2\ 8\ Hm^2\ 6\ Dm^2$.

Solución: Tenemos:

$$7\ Km^2\ 5\ Dm^2 = 7.0005\ Km^2$$
$$3\ Km^2\ 8\ Dm^2\ 6\ Dm^2 = 3.0806\ Km^2.$$

Luego: $7.0005\ Km^2 - 3.0806\ Km^2 = 3.919\ Km^2$.
Es la respuesta.

B Hallar la suma expresada en m^2 de:

1. $2\ Hm^2\ 3\ Dm^2 + 5\ Dm^2\ 7\ m^2$
2. $4\ Dm^2\ 8\ m^2\ 6\ dm^2 + 7\ Dm^2\ 9\ dm^2$
3. $7\ Km^2\ 2\ Hm^2\ 3\ Dm^2 + 5\ Hm^2\ 2\ Dm^2\ 6\ m^2$
4. $4\ Hm^2\ 3\ Dm^2 + 5\ Dm^2\ 8\ m^2 + 6\ m^2\ 5\ dm^2$.

Hallar la diferencia expresada en Km^2:

5. $9\ Km^2\ 6\ Hm^2\ 2\ Dm^2 - 6\ Km^2\ 8\ Hm^2\ 7\ Dm^2$
6. $5\ Mm^2\ 3\ Km^2 - 6\ Km^2\ 5\ Hm^2\ 3\ m^2$.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—13

(Problemas)

A EJEMPLO 1.—Un terreno urbano que mide 1,000 m^2 se divide en dos lotes. Si uno de los lotes se vende por $\$\ 450{,}000$ y el otro lote tiene 280 m^2 más que éste, ¿cuánto valdrá este segundo lote al venderlo en el mismo precio el m^2?

Solución: $1{,}000\ m^2 - 280\ m^2 = 720\ m^2$

$720\ m^2 \div 2 = 360\ m^2$ (1er. lote)

$360\ m^2 + 280\ m^2 = 640\ m^2$ (2do. lote)

$\$\ 450{,}000 \div 360 = \$\ 1{,}250$ c/m^2 (Precio por m^2 del 1er. lote)

$640\ m^2 \times \$\ 1{,}250 = \$\ 800{,}000$ (Precio del 2do. lote)

Respuesta.—El segundo lote valdrá $\$\ 800{,}000$.

B Resolver los problemas siguientes:

1. Una finca de 2 Hm^2 fue vendida a $\$\ 20$ el m^2. ¿Cuál fue el precio de venta?
2. He comprado un terreno en una zona urbana por $\$\ 180{,}000$. Si tiene 240 m^2 de área, ¿cuánto vale el m^2?
3. En un huerto de manzanos, cada planta ocupa un área de 16 m^2. Si el huerto tiene 16.64 Dm^2, ¿cuántos árboles de manzano hay?
4. Un terreno de cultivo de forma rectangular tiene 200 m de largo por 80 m de ancho. Si cada m^2 vale $\$\ 40$, ¿cuánto cuesta dicho terreno? (El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.)
5. Por un lote de terreno urbano de forma rectangular de 1 Dm de frente por 6.5 Dm de fondo se pagó $\$\ 780{,}000$. ¿Cuánto costó el m^2?
6. ¿Cuánto cuesta un terreno de forma cuadrada de 20 m de lado a $\$\ 800$ el m^2? (El área de un cuadrado es igual al cuadrado de su lado).
7. Alberto compró un terreno de 5 Dm de fondo por 2.6 Dm de frente por $\$\ 156{,}000$. ¿Cuánto gana en cada m^2 si lo vende a $\$\ 300$ el m^2?
8. ¿Cuántas baldosas cuadradas de 20 cm de lado se necesitarán para el piso de una sala de 7 m de largo por 4 m de ancho?

2—22. UNIDADES AGRARIAS DE USO EN COLOMBIA.—

A las unidades de área empleadas en la medición de terrenos de agricultura se les denominan **unidades agrarias** y su única unidad básica es el área (á) equivalente a 100 m^2.

El cuadro siguiente nos muestra el múltiplo y el submúltiplo del área así como su equivalencia con el m^2.

	Unidades	Notación	Equivalencia en m^2
Múltiplo	1 Hectárea	1 Há	10,000 m^2
Unidad básica	1 área	1 á	100 m^2
Submúltiplo	1 centiárea	1 cá	1 m^2

De modo que: $1\ Há = 1\ Hm^2 = 100\ á$,
$1\ á = 1\ Dm^2$ y
$1\ cá = 1\ m^2 = 0.01\ á$.

2—23. TRANSFORMACIONES.— Para las transformaciones de unidades deben tenerse en cuenta las equivalencias y proceder como en las unidades de área.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—14

A EJEMPLO 1.— Transformar 12 Há a m².

Solución: 12 Há = 12 × 10,000 = 120,000 m². **Es la respuesta.**

EJEMPLO 2.—Transformar 480,000 m² a Há.

Solución: 480,000 m² = 480,000 ÷ 10,000 = 48 Há. **Es la respuesta.**

EJEMPLO 3.—Transformar 18.5 Há a á.

Solución: 18.5 Há = 18.5 × 100 = 1,850 á. **Es la respuesta.**

EJEMPLO 4.—Transformar 6542.5 cá a á.

Solución: 6542.5 cá = 6542.5 ÷ 100 = 65.425 á. **Es la respuesta.**

B Transformar:

1. 45 Há a m²
2. 620.5 á a m²
3. 72,500 m² a Há
4. 6258.5 m² a á
5. 18 Há a á
6. 430.5 á a cá
7. 12,600 á a Há
8. 40,685.5 cá a Há.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—15

(Problemas)

A EJEMPLO 1.—De un terreno que tiene 40 Há 24 á 80 cá, la mitad está cultivada de caña de azúcar, la tercera parte de algodón y el resto de árboles frutales. ¿Cuántas Há están cultivadas de árboles frutales?

Solución: 40 Há = 40 Há
24 á = 0.24 Há
80 cá = 0.0080 Há

Luego: 40 Há + 0.24 Há + 0.0080 Há = 40.2480 Há. (Area del terreno).

40.2480 Há ÷ 2 = 20.1240 Há (Area cultivada de caña de azúcar).

40.2480 Há ÷ 3 = 13.4160 Há (Area cultivada de algodón)
20.1240 Há + 13.4160 Há = 33.5400 Há
40.2480 Há − 33.5400 Há = 6.7080 Há (Area cultivada de árboles frutales).

Respuesta.—De árboles frutales están cultivadas 6.7080 Há.

B Resolver los problemas siguientes:

1. Un terreno tiene 8 Há 20 á. ¿Cuál es su área en m²?
2. Se compra un terreno de cultivo de 5 Há 8 á a razón de $ 20 el m². ¿Cuánto cuesta dicho terreno?
3. Por un terreno que tiene 1.5 Há se ha pagado $ 360,000. ¿Cuánto se pagó por m²?
4. Un agricultor compró un terreno de cultivo de 5 Há 15 á 50 cá a $ 20 el m² y lo vende por $ 1,300,000. ¿Cuál es su ganancia?
5. Tengo una finca de 4 Há 25 á. Las $\frac{3}{5}$ partes están cultivadas de árboles frutales y el resto de hortalizas. ¿Cuántos m² están cultivados de hortalizas?

UNIDADES METRICAS DE VOLUMEN

2—24. VOLUMEN.—Sean las figuras: 2-9, 2-10 y 2-11 representaciones de cuerpos considerados en el espacio.

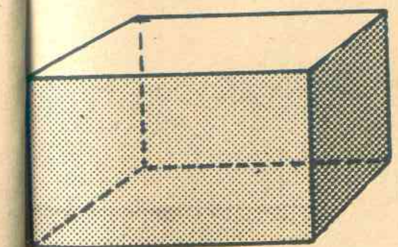


Fig. 2-9

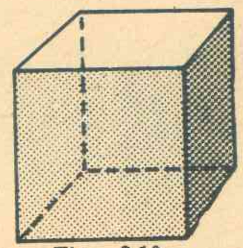


Fig. 2-10

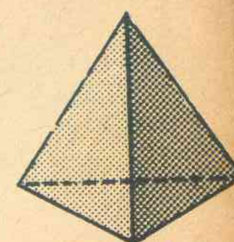


Fig. 2-11

A la reunión del interior y la frontera de cada uno de estos cuerpos se le denomina **región cerrada en el espacio.** Así, tenemos: regiones cúbicas, regiones piramidales, regiones esféricas, etc. Y, si a cada región cerrada en el espacio se le asocia un número positivo único, se obtiene el **volumen de la región.**

Además, el hecho de que exista una correspondencia entre las regiones cerradas y los números positivos, le da al volumen el carácter de función; por tal razón, el volumen de una región cerrada en el espacio está en función de sus tres dimensiones (largo, ancho y alto o profundidad).

2—25. PROPIEDADES DEL VOLUMEN.— Consideremos las propiedades siguientes:

a) Dos regiones cerradas en el espacio y congruentes tienen el mismo volumen.

Dadas las regiones R_1 y R_2 y sus volúmenes respectivos V_1 y V_2, tenemos:

$$\text{Si } R_1 \cong R_2 \Longrightarrow V_1 = V_2.$$

b) **Dadas dos regiones cerradas en el espacio cuya intersección es vacía, el volumen de la reunión de dichas regiones es la suma de los volúmenes de cada una de ellas.**

Dadas las regiones R_1 y R_2 y sus volúmenes respectivos V_1 y V_2 y V el volumen de la reunión, tenemos:

$$\text{Si } R_1 \cap R_2 = \varnothing \Longrightarrow V_1 + V_2 = V.$$

c) **Toda región cerrada en el espacio tiene un volumen único con respecto a otra región considerada como unidad.**

Así, por ejemplo, si se forma un cuerpo con un número determinado de dados, el volumen de este cuerpo es único con respecto a un dado considerado como unidad.

2—26. UNIDAD BASICA.— Una región cerrada en el espacio formada por 6 caras cuadradas congruentes se denomina **cubo** (Fig. 2-12). La intersección de dos caras se denomina **arista**; y en el cubo, todas las aristas son congruentes.

La unidad básica de las unidades de volumen es el metro cúbico (m^3).

El metro cúbico es el volumen de un cubo que tiene 1 m por arista (Fig. 2-13).

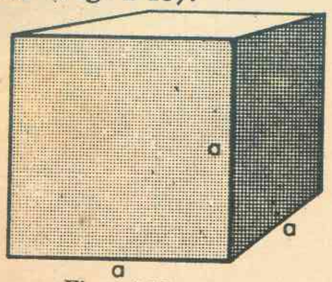


Fig. 2-12

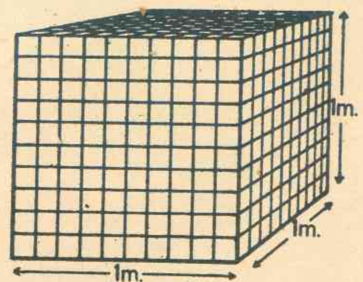


Fig. 2-13

2—27. MULTIPLOS Y SUBMULTIPLOS DEL METRO CUBICO.— Los múltiplos y submúltiplos del m^3 se muestran en el cuadro siguiente:

	Unidades	Notación	Equivalencia en metros cúbicos
Múltiplos	1 Miriámetro cúbico	1 Mm^3	1 000 000 000 000 m^3
	1 Kilómetro cúbico	1 Km^3	1 000 000 000 m^3
	1 Hectómetro cúbico	1 Hm^3	1 000 000 m^3
	1 Decámetro cúbico	1 Dm^3	1 000 m^3
Unidad básica	1 metro cúbico	1 m^3	1 m^3
Submúltiplos	1 decímetro cúbico	1 dm^3	0.001 m^3
	1 centímetro cúbico	1 cm^3	0.000001 m^3
	1 milímetro cúbico	1 mm^3	0.000000001 m^3

Nótese que las unidades de volumen aumentan y disminuyen como las potencias de 1,000. En la práctica, los múltiplos del m^3 son poco usados.

2—28. TRANSFORMACION DE LAS UNIDADES DE VOLUMEN.— Para transformar una unidad mayor a otra menor, se multiplica el número dado por 1 000, 1 000 000, etc.; y si es de menor a mayor, se divide entre 1 000, 1 000 000, etc. Asímismo, se recomienda tener como referencia el esquema siguiente:

Mm^3	Km^3	Hm^3	Dm^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—16

A

EJEMPLO 1.— Transformar 3 m^3 a cm^3.

Solución: De m^3 a cm^3 (esquema) hay: dm^3 y cm^3, es decir, dos unidades, luego el número dado se multiplica por 1 000 000, o sea:

$$3 \text{ m}^3 = 3 \times 1\,000\,000 = 3{,}000{,}000 \text{ cm}^3.$$ **Es la respuesta.**

EJEMPLO 2.— Transformar 13.26 cm^3 a mm^3.

Solución: $13.26 \text{ cm}^3 = 13.26 \times 1\,000 = 13{,}260 \text{ mm}^3$. **Es la respuesta.**

EJEMPLO 3.— Transformar 3,142 dm^3 a m^3.

Solución: De dm^3 a m^3 (esquema — de izquierda a derecha) hay una unidad, luego el número dado se divide entre 1 000, o sea:

$$3{,}142 \text{ dm}^3 = 3{,}142 \div 1\,000 = 3.142 \text{ m}^3.$$ **Es la respuesta.**

EJEMPLO 4.— Transformar 85.36 cm^3 a dm^3.

Solución: $85.36 \text{ cm}^3 = 85.36 \div 1\,000 = 0.08536 \text{ dm}^3$. **Es la respuesta.**

B Transformar:

1. 12 m^3 a dm^3
2. 20 dm^3 a mm^3
3. 4.82 dm^3 a cm^3
4. 7.06 m^3 a cm^3
5. 20,208 cm^3 a dm^3
6. 45,725 mm^3 a dm^3
7. 564.205 dm^3 a m^3
8. 48.3 cm^3 a m^3.

2—29. ADICION Y SUSTRACCION DE NUMEROS DENOMINADOS DE VOLUMEN.— Para efectuar estas operaciones se transforman los números denominados a no denominados de una misma unidad y luego se suman o restan.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—17

A EJEMPLO 1.—Hallar la suma expresada en dm^3 de: $6\ m^3\ 4\ dm^3$ y $7\ dm^3\ 8\ cm^3$.

Solución: $6\ m^3\ 4\ dm^3 = 6{,}004\ dm^3$

$7\ dm^3\ 8\ cm^3 = 7.008\ dm^3$

Luego: $6{,}004\ dm^3 + 7.008\ dm^3 = 6{,}011.008\ dm^3$. Es la respuesta.

EJEMPLO 2.—Hallar la diferencia expresada en m^3 entre: $8\ m^3\ 5\ dm^3$ y $3\ m^3\ 9\ cm^3$.

Solución: $8\ m^3\ 5\ dm^3 = 8.005000\ m^3$

$3\ m^3\ 9\ cm^3 = 3.000009\ m^3$

Luego: $8.005000\ m^3 - 3.000009\ m^3 = 5.004991\ m^3$. **Es la respuesta.**

B Hallar la suma expresada en m^3:

1. $8\ m^3\ 5\ dm^3 + 4\ m^3\ 3\ dm^3$
2. $5\ dm^3 + 3\ dm^3\ 4\ cm^3$.

Hallar la diferencia expresada en m^3:

3. $8\ m^3\ 4\ dm^3 - 6\ m^3\ 8\ dm^3$
4. $4\ m^3 - 1\ m^3\ 7\ dm^3$.

UNIDADES METRICAS DE CAPACIDAD Y DE PESO

2—30. UNIDADES DE CAPACIDAD.—La capacidad es el volumen de un depósito que sirve para medir líquidos o áridos, tales como: la leche, el aceite, el trigo, el maíz, etc. y cuya unidad básica es el **litro** (l) (Fig. 2-14).

El litro es la capacidad de un cubo cuya arista mide 1 dm (Fig. 2-15). Por consiguiente, el litro representa el volumen de 1 dm^3.

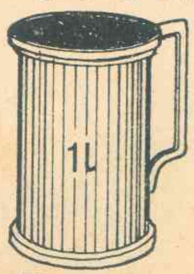


Fig. 2-14

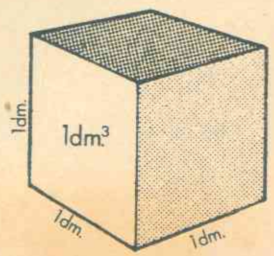


Fig. 2-15

Los múltiplos y submúltiplos de las unidades de capacidad se uestran en el cuadro siguiente:

	Unidades	Notación	Equivalencia en litros
últiplos	1 Mirialitro 1 Kilolitro 1 Hectolitro 1 Decalitro	1 Ml 1 Kl 1 Hl 1 Dl	10 000 l 1 000 l 100 l 10 l
nidad ásica	1 litro	1 l	1 l
Submúltiplos	1 decilitro 1 centilitro 1 mililitro	1 dl 1 cl 1 ml	0.1 l 0.01 l 0.001 l

2—31. —UNIDADES DE PESO.—Los cuerpos poseen peso debido a la atracción de una fuerza llamada gravedad (Ver 2-35). La unidad básica de peso es el gramo (g) (Fig. 2-16).

El gramo es el peso de 1 cm^3 de agua destilada a 4°C de temperatura al nivel del mar (Fig. 2-17).

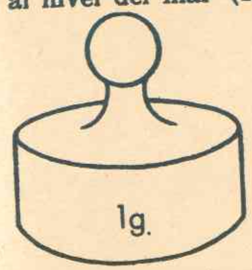


Fig. 2-16

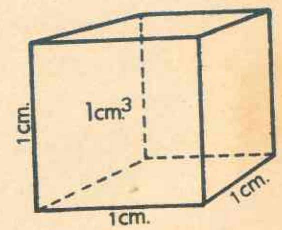


Fig. 2-17

Los múltiplos y submúltiplos de las unidades de peso se muestran en el cuadro siguiente:

	Unidades	Notación	Equivalencia en gramos
Múltiplos	1 Tonelada métrica 1 Quintal métrico 1 Miriagramo 1 Kilogramo 1 Hectogramo 1 Decagramo	1 Tm 1 Qm 1 Mg 1 Kg 1 Hg 1 Dg	1 000 000 g 100 000 g 10 000 g 1 000 g 100 g 10 g
Unidad básica	1 gramo	1 g	1 g
Submúltiplos	1 decigramo 1 centigramo 1 miligramo	1 dg 1 cg 1 mg	0.1 g 0.01 g 0.001 g

2—32. TRANSFORMACIONES DE LAS UNIDADES DE CAPACIDAD Y DE PESO.—

Debido a que estas unidades aumentan y disminuyen como las potencias de 10, las transformaciones se realizan en forma semejante que las unidades de longitud. Los esquemas de referencia son:

Ml	Kl	Hl	Dl	l	dl	cl	ml

Tm	Qm	Mg	Kg	Hg	Dg	g	dg	cg	mg

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—18

A EJEMPLO 1.— Transformar 120 l a cl.

Solución: $120\ l = 120 \times 100 = 12{,}000$ cl. **Es la respuesta.**

EJEMPLO 2.— Transformar 40.5 dl a Dl.

Solución: 40.5 dl $= 40.5 \div 100 = 0.405$ Dl. **Es la respuesta.**

EJEMPLO 3.— Transformar 40.75 Tm a Kg.

Solución: 40.75 Tm $= 40.75 \times 1000 = 40{,}750$ Kg. **Es la respuesta.**

EJEMPLO 4.— Transformar 8,225 g a Kg.

Solución: $8{,}225$ g $= 8{,}225 \div 1000 = 8.225$ Kg. **Es la respuesta.**

B Transformar:

1. 12 Kg a g
2. 60 l a cl
3. 20 Qm a Kg
4. 4 Kg a dg
5. 0.65 Kl a l
6. 18.75 Tm a Kg
7. 48 l a Kl
8. 42,025 g a Kg
9. 46.25 l a Hl
10. 12.86 Kg a Qm
11. 48.5 dl a l
12. 820.5 g a Kg.

2—33. ADICION Y SUSTRACCION DE NUMEROS DENOMINADOS DE CAPACIDAD Y DE PESO.—

Para efectuar estas operaciones, se transforman los números denominados a no denominados de una misma unidad y luego se suman o restan.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—19

A EJEMPLO 1.— Hallar la suma expresada en l de: 3 Kl 5 Hl, 8 Dl 6 l 8 dl y 15 l 5 cl.

Solución: Tenemos: 3 Kl 5 Hl $= 3{,}500\ l$

8 Dl 6 l 8 dl $= 86.8\ l$

15 l 5 cl $= 15.05\ l$.

Luego: $3{,}500\ l + 86.8\ l + 15.05\ l = 3{,}601.85\ l$.

Es la respuesta.

EJEMPLO 2.—Hallar la diferencia expresada en Kg entre: 5 Tm 3 Qm y 12 Mg 5 Hg.

Solución: Tenemos: 5 Tm 3 Qm $= 5{,}300$ Kg

12 Mg 5 Hg $= 120.5$ Kg

Luego: $5{,}300$ Kg $- 120.5$ Kg $= 5{,}179.5$ Kg. Es la respuesta.

B Hallar la suma expresada en l de:

1. 3 Kl 2 Hl + 6 Dl 8 l
2. 5 Hl 7 l 4 cl + 8 l 5 cl + 3 dl 4 cl

Hallar la suma expresada en Kg de:

3. 6 Tm 4 Qm + 9 Mg 6 Hg
4. 3 Qm 2 Hg + 1 Mg 3 Dg + 4 Hg 6 Dg 5 g

Hallar la diferencia expresada en Kl :

5. 2 Ml 4 Kl − 8 Kl 2 Hl
6. 5 Kl 3 Dl − 4 Hl 6 Dl 3 l

Hallar la diferencia expresada en g:

7. 4 Kg 5 Hg − 9 Hg 7 Dg
8. 3 Dg 4 g − 15 g 5 dg.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—20
(Problemas)

1. ¿Cuántos frascos de 4.5 l serán necesarios para envasar 2 Hl 7 Dl de vino?
2. Un comerciante compra 4 Qm de fríjoles por $ 11,200. ¿A cómo compró cada Kg?

3. La capacidad de un tanque es de 4 Kl 5 Hl. Si está lleno de agua, ¿qué tiempo tardará en vaciarse si se abre la llave por la cual salen 50 litros por minuto?

4. La venta de 1 Tm 4 Qm de leña deja una ganancia de $ 560. ¿Cuál es la ganancia en cada Kg?

5. Un comerciante compra 50 bolsas de fideos de 10 Kg cada bolsa por $ 10,000 ¿Cuánto gana en cada Kg si lo vende a $ 22.50 el Kg?

6. Se compran 5 Qm de azúcar por $ 2,000. ¿A cómo habrá que vender el Kg para ganar en total $ 400?

7. Un tanque puede llenarse por dos llaves que vierten 4 Dl y 6 Dl por minuto respectivamente. Si se abren al mismo tiempo las dos llaves y tardan en llenarlo 2 h 40 min, ¿cuál es la capacidad en litros del tanque?

8. Un depósito que tiene una capacidad de 5 Kl 8 Hl tiene dos llaves que vierten 50 litros y 70 litros por minuto respectivamente y un desagüe por el que salen 8 Dl por minuto. Si se abren al mismo tiempo las dos llaves y el desagüe, ¿qué tiempo tardará en llenarse el depósito?

9. Un niño toma 3 cucharaditas diarias de cierto tónico cuyo frasco tiene una capacidad de 1.2 dl. Si cada cucharadita contiene 5 ml, ¿en cuántos días terminará el tónico?

10. Un cilindro de aceite de 189 litros de capacidad cuesta $ 4,158. ¿A cómo habrá que vender la botella de 75 cl si se quiere ganar en cada una $ 1.50?

2—34. RELACIONES ENTRE ALGUNAS UNIDADES DE VOLUMEN, PESO Y CAPACIDAD.— Estas relaciones se refieren al agua pura y el cuadro siguiente resume las equivalencias correspondientes.

Volumen	Capacidad	Peso
1 m^3	1 Kl	1 Tm
1 dm^3	1 l	1 Kg
1 cm^3	1 ml	1 g

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—21

A

EJEMPLO 1.—Transformar 5 Kl a dm^3.

Solución: Tenemos: 1 Kl = 1 m^3

Luego: 5 Kl = 5 m^3 = 5,000 dm^3. **Es la respuesta.**

EJEMPLO 2.—Transformar 75 cm^3 a l.

Solución: Tenemos: 1 cm^3 = 1 ml.

Luego: 75 cm^3 = 75 ml = 0.075 l. **Es la respuesta.**

EJEMPLO 3.— **Transformar 48.5 Kg a m^3.**

Solución: Tenemos: 1 Kg = 1 dm^3.

Luego: 48.5 Kg = 48.5 dm^3 = 0.0485 m^3. Es la respuesta.

B **Transformar:**

1. **460 g a cm^3**
2. **12 Kl a dm^3**
3. **2.5 Tm a l**
4. **50.8 l a g**
5. **6 m^3 a l**
6. **150 dm^3 a g**
7. **245 cm^3 a Kg**
8. **1,250.2 g a l**
9. **4,320.25 cm^3 a l**
10. **1,824 Kg a Kl.**

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—22

(Problemas)

1. **El río Amazonas al desembocar desaloja 300,000 m^3 por segundo. ¿Cuántos litros desaloja?**

2. **Un depósito contiene 5 Kl de agua pura. ¿Cuántos Kg pesará el agua contenida en dicho depósito?**

3. **Una cubeta llena de agua pura pesa 16.5 Kg. Si la cubeta pesa 0.5 Kg, ¿cuántos litros de agua contiene la cubeta?**

4. **Un estanque cuyo volumen es 4.8 m^3 está lleno de agua. Si se desalojan 1,200 litros, ¿cuántos litros de agua quedan?**

5. **La capacidad de un estanque es 3 Kl 5 Hl. ¿Cuál es el volumen de dicho estanque en cm^3?**

6. **El volumen de un depósito es 8 m^3. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarlo una llave que vierte 20 l por minuto?**

7. **Un estanque lleno de agua la desalojan en 5 horas 2 llaves que vierten 12 litros y 18 litros por minuto respectivamente. ¿Cuántos metros cúbicos tiene el estanque?**

8. **Un enfermo toma tres cucharadas diarias de cierto jarabe. Si cada cucharada contiene 0.8 cl y lo terminó en 6 días, ¿cuál es la capacidad del frasco en litros?**

2—35. INERCIA Y MASA.— Todo cuerpo permanece en estado de reposo o de movimiento hasta que una fuerza actúe sobre él y haga variar ese estado. A esta variación de estado de un cuerpo se denomina **inercia de reposo** o **inercia de movimiento** respectivamente. Esto significa que si un cuerpo está en reposo, no podrá ponerse en movimiento por sí mismo y si está en movimiento no podrá detenerse; es el caso de los astros y los planetas, entre ellos la tierra, planeta que tiene una velocidad de traslación de 29.8 Km/seg en torno al sol. Esta velocidad seguirá teniéndola mientras no exista una causa que la varíe.

Por tal razón, cuando un vehículo parte bruscamente, los ocupantes son impelidos hacia atrás, porque la inercia tiende a seguir en reposo; pero cuando un vehículo en movimiento se detiene bruscamente, los ocupantes son impelidos hacia adelante, porque la inercia tiende a seguir un movimiento. De modo que todos los cuerpos poseen inercia, es decir, ofrecen resistencia a los cambios de velocidad.

Esta resistencia que opone un cuerpo, al cambiar su estado de reposo o de movimiento, se denomina **masa.**

La masa de un cuerpo es la medida de su inercia con relación a otra tomada como unidad y es invariable cualquiera que sea el lugar donde se encuentre.

2—36. GRAVEDAD Y PESO.— Gravedad es la atracción que ejerce la tierra sobre los cuerpos; por tal razón, un cuerpo abandonado libremente en las inmediaciones de la superficie terrestre cae sobre ella con dirección vertical y con un movimiento que aumenta uniformemente llamado **aceleración.** La fuerza con que actúa esta atracción se llama **fuerza de gravedad** y constituye el **peso** de un cuerpo.

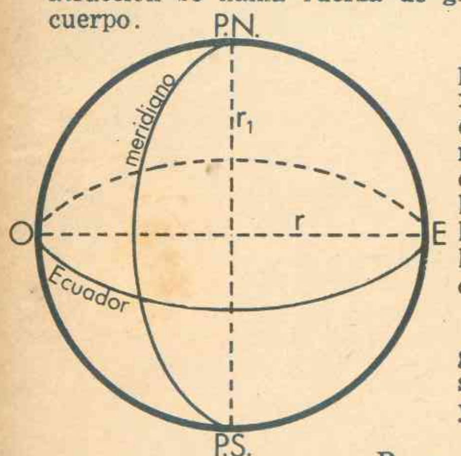


Fig. 2-18

Debido a que la tierra no es completamente esférica (Fig. 2-18), la fuerza de gravedad no es la misma en todos los lugares de nuestro planeta; por consiguiente, el peso de un cuerpo también varía de acuerdo al lugar. Así, una persona pesa más en los polos que en el ecuador, porque la distancia (radio) de los polos al centro de la tierra es menor.

Siendo g la aceleración que la gravedad imprime a los cuerpos en su caída libre, m la masa del cuerpo y P su peso, tenemos:

$$P = m \times g$$

De donde se deduce:

El peso de un cuerpo es función de su masa y de la masa del cuerpo que lo atrae.

Así, en la luna, un cuerpo pesa menos que en la tierra porque la aceleración de la gravedad lunar es la sexta parte de la aceleración de la gravedad terrestre. Por ejemplo, si un cuerpo pesa 60 Kg en la tierra, ese mismo cuerpo en la luna pesa 10 Kg.

2—37. DIFERENCIA ENTRE PESO Y MASA.— De lo afirmado con respecto a la masa y al peso, se pueden establecer claramente ciertas diferencias:

a) La masa es la **inercia** del cuerpo, mientras que el peso es la **fuerza** con que un cuerpo es atraído por la tierra.

b) La masa es **independiente** del lugar y el peso **depende** de la latitud y la altura del lugar.

2—38. PESO ESPECIFICO.— La comparación de los pesos de un centímetro cúbico de plomo y un centímetro cúbico de madera por ejemplo, nos permite afirmar que el primero pesa más que el segundo; esto obedece a que el plomo tiene mayor **peso específico** que la madera.

El peso específico de un cuerpo es el peso de la unidad de volumen de dicho cuerpo.

Si se tiene un cuerpo de peso P y volumen V, su peso específico (p e) es:

$$p\,e. = \frac{P}{V}$$

El peso específico de un cuerpo es un número cuya denominación depende de las unidades de peso y volumen. Por ejemplo, si 8 cm^3 de plomo pesan aproximadamente 90.80 g, tendremos:

$$p\,e. = \frac{P}{V}$$

$$p\,e. = \frac{90.80 \text{ g}}{8 \text{ cm}^3} = 11.35 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Luego, el peso específico del plomo es 11.35 gramos por centímetro cúbico, es decir, cada cm^3 de plomo pesa 11.35 g.

Pero, el peso específico del plomo también puede expresarse en otras unidades, tales como: $11.35 \frac{\text{Kg}}{\text{dm}^3}$ ú $11.35 \frac{\text{Tm}}{\text{m}^3}$.

2—39. DENSIDAD.— La densidad de un cuerpo es la masa contenida en la unidad de volumen.

Si se tiene un cuerpo de masa M y volumen V, su densidad (d) es:

$$d = \frac{M}{V}$$

Por ejemplo, si la masa de 20 cm^3 de cobre es 178.20 gramos-masa, (g - m), tendremos:

$$d = \frac{M}{V}$$

$$d = \frac{178.20 \text{ g-m}}{20 \text{ cm}^3} = 8.91 \frac{\text{g-m}}{\text{cm}^3}.$$

Luego, la densidad del cobre es 8.91 g-m por cm^3, es decir, que cada cm^3 de cobre tiene una masa de 8.91 g-m.

Asimismo, la densidad del cobre puede expresarse por $8.91 \dfrac{\text{Kg-m}}{\text{dm}^3}$ o $8.91 \dfrac{\text{Tm}}{\text{m}^3}$.

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE REPASO 2—23

1. ¿Qué inercia es:
   a) Cuando un jinete desprevenido es lanzado hacia adelante si el caballo se detiene bruscamente? ¿Por qué?
   b) Cuando se retira con rapidez un mantel de una mesa y los objetos que estaban sobre él quedan sobre la mesa? ¿Por qué?
2. ¿La masa de un cuerpo es la misma al nivel del mar y en los polos? ¿Por qué?
3. ¿Por qué una pelota lanzada hacia arriba vuelve a tierra?
4. ¿Por qué un hombre pesa más en la tierra que en la luna?
5. ¿Cuánto pesan 50 cm^3 de oro si su peso específico es $19.3 \dfrac{g}{cm^3}$?
6. ¿Cuál es el volumen de una barra de hierro que pesa 10 Kg y cuyo peso específico es $7.25 \dfrac{g}{cm^3}$?
7. ¿Cuál es la densidad de un cuerpo de 680 g-m si su volumen es 0.050 dm^3?
8. ¿Cuál es la masa de un cuerpo de platino de 80 cm^3 de volumen si su densidad es $21.45 \dfrac{\text{Kg-m}}{\text{dm}^3}$?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—1

1. ¿Qué entiende Ud. por magnitud y qué por cantidad?
2. ¿Qué concepto tiene acerca de medición y qué de medida? Fundamente sus respuestas con un ejemplo.
3. ¿Qué condiciones debe tener un buen sistema de medidas?
4. ¿Cuál es su concepto acerca del metro?
5. **Transformar:**
   a) 48.5 Km a m
   b) 3,582 dm a Hm
   c) 120 yd a v
   d) 520.5 mi a Km
   e) 80.5 Kg a g
   f) 4.68 Kg a Tm
   g) 325 Hl a *l*
   h) 368.5 *l* a Kl
   i) 360 Km^2 a m^2
   j) 8,594 cm^2 a m^2
   k) 5 fanegadas a m^2
   l) 40.5 v^2 a m^2
   m) 150.2 m^3 a dm^3
   n) 3,846 mm^3 a dm^3.
6. **Transformar:**
   a) 48,620 m^2 a Há
   b) 120.25 Há a m^2
7. **Transformar:**
   a) 1 Kl a dm^3
   b) 8 m^3 a *l*
   c) 432 cm^3 a Kg
   d) 180.5 g a *l*.
8. **Transformar:**
   a) 8 Km 4 Hm 5 Dm a m
   b) 0.405 Km a número denominado
   c) 3 Dm^2 6 m^2 4 cm^2 a m^2
   e) 48,725 dm^2 a número denominado.
9. **Expresar en metros las operaciones siguientes:**
   a) 2 Km 3 Hm + 5 Dm 8 m + 4 Km 2 Dm
   b) 6 Hm 4 m — 10 Dm 8 m 5 dm.
10. **Expresar en m^2 las operaciones siguientes:**
    a) 1 Km^2 3 Hm^2 + 5 Dm^2 8 dm^2 + 6 m^2 8 cm^2
    b) 4 Hm^2 7 m^2 — 9 Dm^2 5 m^2 3 dm^2.
11. **Expresar en dm^3 las operaciones siguientes:**
    a) 8 m^3 5 cm^3 + 6 dm^3 8 mm^3
    b) 4 m^3 3 cm^3 -- 8 dm^3 6 cm^3.
12. **Expresar en litros las operaciones siguientes:**
    a) 2 Kl 4 Hl + 6 Dl 8 *l* + 9 *l* 5 dl
    b) 4 Dl 6 *l* — 8 *l* 2 dl 5 cl.

13. Expresar en Kg las operaciones siguientes:

a) 4 Tm 2 Mg. + 3 Hg 2 Dg + 5 Qm 8 Kg

b) 1 Tm 2 Qm — 6 Kg 4 Hg 2 Dg.

Resolver los problemas siguientes:

14. ¿Cuántos pasos dará una persona para recorrer 1 Km 8 m si en cada paso avanza 50 cm?

15. La frontera de Colombia con Venezuela es de 2,219 Km. ¿Cuál es su longitud en millas?

16. ¿Cuántas baldosas cuadradas de 10 cm de lado se necesitarán para el piso de un baño de 4 m de largo por 3 m de ancho?

17. Se compra un terreno de cultivo de 15 Há 5 á a razón de \$25 el m². ¿Cuánto cuesta el terreno?

18. ¿Cuántos m³ de agua hay en una represa de 80 m de largo por 50 m de ancho y 10.5 m de profundidad?

19. Un enfermo toma 3 cucharadas al día de cierto tónico cuyo frasco contiene 0.36 dm³. Si cada cucharada contiene 8 cm³, ¿en cuántos días terminará de tomar el tónico el enfermo?

20. Un negociante compra 2 Tm 5 Qm de carbón por \$ 3,000. ¿A cómo tendrá que vender el Kg para ganar \$ 0.50 en cada Kg?

21. ¿Cuántos frascos de 5 l de capacidad cada uno serán necesarios para envasar 8 Dl 5 l de vino?

22. Las dimensiones de un depósito de agua son 4 m de largo por 3 m de ancho y 1.50 de profundidad. ¿Cuál es la capacidad en litros del depósito?

23. ¿Qué concepto tiene de inercia y qué de masa?

24. ¿Qué concepto tiene de gravedad y qué de peso?

25. ¿En qué lugar de la tierra existe mayor gravedad? ¿Por qué?

26. ¿Un cuerpo pesa más en Barranquilla o en la Sierra Nevada de Santa Marta? ¿Por qué?

27. ¿Qué diferencias pueden establecerse entre la masa y el peso?

28. ¿Qué concepto tiene acerca de la densidad de un cuerpo?

29. ¿Cuánto pesan 80 cm³ de cobre si su peso específico es 8.9 $\frac{\text{Kg}}{\text{dm}^3}$?

30. ¿Cuál es la masa de un cuerpo de 120 cm³ si su densidad es 11.30 $\frac{\text{Kg-m}}{\text{dm}^3}$?

CONJUNTO DE EJERCICIOS OPCIONAL 2—1

1. ¿En la construcción de la línea férrea entre Bogotá y Girardot distantes 134 Km se emplearon rieles de 1 Dm de longitud. ¿Cuántos rieles fueron necesarios en esta obra?

2. Un terreno que tiene 3 Hm 5 Dm de largo por 1 Hm 8 Dm de ancho se quiere cercar con 4 hileras de alambre de púa. Si cada metro de alambre cuesta \$ 2.50, ¿cuál es el importe de la compra?

3. Se quiere construir una pared de 26.45 m de largo por 3 m de alto. ¿Cuántos ladrillos de dimensiones 23 cm por 11.5 cm serán necesarios?

4. Un agricultor compra un terreno de cultivo de 120 m de largo por 80 m de ancho a \$ 25 el m². Si cercarlo con alambre de púa le cuesta \$ 12 el metro, ¿cuánto gastó en total?

5. Compré un terreno de 7 á 20 cá por \$ 21,600. ¿A cómo debo vender el m² si quiero ganar \$ 8,640 en total?

6. Un depósito de agua de 2 m de largo por 1.50 m de ancho y 0.6 m de profundidad se desaloja con una cubeta que contiene 10 dm³ de agua. ¿Cuántas cubetas fueron necesarias para desalojar el agua de dicho depósito?

7. Se quiere construir una pared de 20 m de largo por 3 m de alto y 0.3 m de espesor. ¿Cuántos ladrillos de 24 cm por 15 cm por 10 cm serán necesarios para dicha construcción?

8. Un comerciante compró dos barriles de vino de 13 Dl 8 l cada uno por \$ 11,040. Si en total quiere ganar \$ 2,760, ¿a cómo debe vender cada litro?

9. Un estanque lleno de agua es desalojado en 8 horas por una llave que vierte 20 litros por minuto. ¿Cuál es el volumen en m³ del estanque y cuál el peso del agua en Kg?

10. Se compra 2,000 yardas de alambre de púa para cercar con cuatro hileras un terreno de 140 m de largo por 60 m de ancho. ¿Cuántos metros de alambre sobran?

11. Se han comprado 2 fanegadas de terreno por \$ 1,449,050. ¿Cuánto cuesta el m²?

12. ¿Cuántas parcelas de 4 m por 3 m de dimensiones hay en un terreno de 0.2 fanegadas?

13. Al talar un bosque se calcula que tiene 120 m³ de madera y convertida en carbón dicha madera se reduce a $\frac{2}{3}$ de su volumen. ¿Cuánto se recaudará al vender a \$ 1.50 el Kg de carbón?

14. Una botella vacía pesa 450 g y llena de agua 1,250 g. ¿Cuántas botellas del mismo volumen serán necesarias para llenar 3 Hl 20 l de agua?

ARQUIMEDES

(287 — 212 a. de J. C.)

Arquímedes fue uno de los más grandes matemáticos y científicos griegos, imagen del profesor distraído de nuestros tiempos. Pues, cuando estaba enfrascado en un problema, se olvidaba de comer, descansar, etc., y podía permanecer sentado durante horas contemplando alguna figura geométrica que dibujara para su investigación. Justamente, cuando se encontraba examinando un trabajo de este tipo, una sombra se proyectó sobre su diagrama y protestó por haber sido interrumpido en su pensamiento; en estas circunstancias, un soldado romano lo mató en Siracusa, su ciudad natal. Su cadáver fue sepultado con todos los honores, y sobre su tumba —cumpliendo sus deseos— se colocó un cilindro inscrito en una esfera con una explicación de la razón descubierta por él entre las áreas y los volúmenes de ambos cuerpos.

Arquímedes inventó muchos aparatos mecánicos, algunos de los cuales se utilizaron como elementos bélicos. Descubrió el principio de la sumersión de los cuerpos de un líquido. Al respecto, hay una anécdota que se le atribuye, la cual es: "Mientras se bañaba, repentinamente pensó en el desplazamiento del líquido y corrió a informar a su rey sin tomarse tiempo para vestirse".

En las matemáticas, Arquímedes se distinguió por su aproximación del valor de π; demostró muchas fórmulas acerca de las áreas y volúmenes de los cuerpos geométricos; escribió sobre conoides, esferoides, espirales, equilibrio de los planos y su centro de gravdad, etc. Se afirma que Arquímedes dijo: "Si me dan una palanca lo suficientemente larga, podré mover el mundo".

* * *

$$\frac{1}{4}\text{ peso} = 25 \text{ centavos},$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}}\text{ peso} = \sqrt{25} \text{ centavos},$$

$$\frac{1}{2}\text{ peso} = 50 \text{ centavos}.$$

* * *

¿Verdadero o falso? ¿Por qué?

Hay una asombrosa imaginación, incluso en la ciencia de las matemáticas... Repetimos, hay mucha más imaginación en la cabeza de Arquímedes que en la de Homero.

VOLTAIRE

Unidad 3

EL TIEMPO

3—1. UNIDADES DE TIEMPO.— Otro sistema de medidas es del tiempo (duración) que también es una magnitud y cuyas unidades fundamentales son el **día solar** y el **año solar.**

Sabemos que la tierra tiene dos movimientos: el de **rotación**, o sea en torno de su eje empleando 24 horas (23 horas 56 minutos 4 segundos es la mayor aproximación), período que se llama **día solar**; y el de **traslación** o de **revolución** sideral alrededor del sol, que lo ejecuta en 365 días (365 días 5 horas 48 minutos es la mayor aproximación), período de tiempo que se llama **año solar.**

En el cuadro siguiente se muestran las unidades de tiempo, las notaciones y las equivalencias respectivas.

Unidades	Notación	Equivalencias
1 Milenio	1 M	10 siglos
1 Siglo	1 S	10 décadas
1 Década	1 D	10 años
1 año	**1 a**	12 meses
1 mes	1 m	30 días
1 día	**1 d**	24 horas
1 hora	1 h	60 minutos
1 minuto	1 min	60 segundos
1 segundo	1 seg	

Anotamos que también **un segundo** (1 seg) se considera como unidad principal de tiempo.

Además de estas unidades, suelen usarse otros períodos de tiempo, tales como:

1 quinquenio que equivale a 5 años,
1 trienio que equivale a 3 años,
1 bienio que equivale a 2 años,
1 semestre que equivale a 6 meses,
1 trimestre que equivale a 3 meses,
1 bimestre que equivale a 2 meses, y
1 semana que equivale a 7 días.

Asimismo, para las transacciones comerciales se considera el año de 360 días y el mes de 30 días; y, para los fines civiles y legales, se considera el año de 365 días.

3—2. BREVE RESEÑA HISTORICA DE LAS REFORMAS DEL CALENDARIO.—

Antiguamente la periodicidad del tiempo no se basaba en los movimientos de rotación y traslación de la tierra —que se desconocían— sino en las fases de la luna que duraba 28, 29 ó 30 días, períodos que se llamaron meses considerándose también el año de 12 meses. Posteriormente, las observaciones de los cuerpos celestes hechas por los babilonios, determinaron que el año se componía de 360 días aproximadamente y lo dividieron en 10 períodos de 36 días cada uno, períodos que se siguieron llamando meses.

En la época del emperador romano Julio César ya se conocía que el año se componía de $365\frac{1}{4}$ días aproximadamente y él decretó que el año legal debería ser de 365 días, con el cual se perdía cerca de $\frac{1}{4}$ de un día en cada año, error que fue corregido por él mismo con otro decreto creando el año bisiesto, es decir, agregando al cuarto año un día en el mes de febrero, dando lugar así que el año bisiesto resulte un múltiplo de 4.

Otra de las reformas introducidas en el calendario por Julio César fue dividir el año en 11 meses en lugar de 10 meses, dándosele a este mes el nombre de Julius, del cual se ha derivado el nombre de Julio.

Se atribuye al emperador César Augusto, quien sucedió a Julio César, la división del año en 12 meses y que el nuevo mes llevaría su nombre Augustus, del cual se ha derivado el nombre de Agosto.

Sabemos que la mayor aproximación de tiempo de un año es 365 días 5 horas 48 minutos; pues, a partir de los $365\frac{1}{4}$ días (1 año) que consideró Julio César, en el año 1582 d. de J. C., el calendario juliano tenía un error por exceso de 0,0312 días en cada 4 años, es decir, que en 400 años habría un error de 3,12 días. Para corregir este error el Papa Gregorio XIII decretó: que los años tengan 365 días excepto los años que son divisibles por 4 (años bisiestos), y que los años finales de cada siglo serán bisiestos si son divisibles por 400. Así, por ejemplo, fueron años bisiestos 1968 y 1972; pero, 1900 no fue bisiesto por no ser divisible por 400, pero sí lo será el año 2000.

3—3. TRANSFORMACIONES DE NUMERO DENOMINADO DE TIEMPO A NO DENOMINADO Y VICEVERSA.—

Los ejemplos que a continuación se consideran nos ilustran claramente el procedimiento que se emplea para estas transformaciones.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3—1

A EJEMPLO 1.— **Transformar 5 a 4 me 7 d a días.**

Solución:

$5 \times 12 = 60$ me (1 a = 12 me)

60 me + 4 me = 64 me

$64 \times 30 = 1{,}920$ d (1 me = 30 d)

1,920 d + 7 d = 1,927 d.

Luego: 5 a 4 me 7 d = 1,927 d. **Es la respuesta.**

EJEMPLO 2.— Transformar 1,240 h a número denominado.

Solución:

$$\begin{array}{r|l} 1240 & 24 \\ \cline{2-2} 040 & 51 \\ 16 & \end{array}$$, o sea: 51 d 16 h

$$\begin{array}{r|l} 51 & 30 \\ \cline{2-2} 21 & 1 \end{array}$$, o sea: 1 me 21 d.

Luego: 1,240 h = 1 me 21 d 16 h. **Es la respuesta.**

B **Transformar:**

1. 3 a 2 me 12 d a d
2. 2 S 2 D 2 B a d
3. 5 d 4 h a min
4. 15 d 20 min 40 seg a seg
5. 1,258 d a número denominado
6. 24,248 h a número denominado
7. 3,240 me a número denominado
8. 6,820 seg a número denominado.

3—4. ADICION Y SUSTRACCION DE NUMERO DENOMINADO DE TIEMPO.—

Los ejemplos considerados en el Conjunto de Ejercicios 3-2, nos ilustran claramente el procedimiento a seguir en cada una de estas operaciones.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3—2

A EJEMPLO 1.— **Sumar:** 20 d 12 h 25 min + 12 d 5 h + 18 d 20 h 40 min.

Solución:

$$\begin{array}{rrrr} & 20\text{ d} & 12\text{ h} & 25\text{ min} \\ & 12\text{ d} & 5\text{ h} & \\ + & 18\text{ d} & 20\text{ h} & 40\text{ min} \\ \hline & 50\text{ d} & 37\text{ h} & 65\text{ min.} \end{array}$$

Transformaciones:

65 | 60
5   1 , o sea: 1 h 5 min

37 h + 1 h = 38 h

38 | 24
14   1 , o sea: 1 d 14 h

50 d + 1 d = 51 d

51 | 30
21   1 , o sea: 1 me 21 d.

Luego, la suma es 1 me 21 d 14 h 5 min.

EJEMPLO 2.— **Restar: 25 a 8 me 12 d 4 h — 15 a 6 me 18 d 16 h.**

Solución:

```
               41 d
          7 me 11 d 28 h
   25 a 8 me 12 d  4 h
 — 15 a 6 me 18 d 16 h
 ---------------------
   10 a 1 me 23 d 12 h.
```

Es la respuesta.

La observación de estos ejemplos nos permite afirmar:

a) Para sumar números denominados de tiempo se escriben en columna las unidades de la misma denominación, se suman dichas unidades y luego se hacen las transformaciones necesarias en esta suma.

b) Para restar números denominados de tiempo, se escriben en columna las unidades de la misma denominación; luego se restan dichas unidades empezando por el orden inferior. Si algún sustraendo parcial es mayor que el de la unidad correspondiente del minuendo, se le agrega a este minuendo una unidad inmediata superior quitada del minuendo parcial inmediato anterior.

B Efectuar:

1. 5 a 8 me 15 d + 3 a 6 me 25 d
2. 8 me 6 d 12 h + 28 d 20 h 40 min
3. 5 D 6 a 3 me + 3 D 6 me + 2 D 2 a 6 me
4. 20 h 15 min 40 seg + 16 h 50 min 30 seg + 40 min 40 seg
5. 20 a 6 me 15 d -- 10 a 8 me 20 d
6. 18 h 10 min 12 seg -- 15 h 50 min 40 seg.

3—5. MULTIPLICACION DE UN NUMERO DENOMINADO DE TIEMPO POR UN NUMERO NATURAL.— Se multiplica el número natural por el número denominado y luego en este producto se hacen las transformaciones.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3—3

A EJEMPLO 1.—**Multiplicar 12 h 15 min 20 seg × 5.**

Solución:

```
12 h 15 min  20 seg
              × 5
-------------------
60 h 75 min 100 seg.
```

Transformaciones:

100 | 60
40   1 , o sea: 1 min 40 seg

75 min + 1 min = 76 min

76 | 60
16   1 , o sea: 1 h 16 min

60 h + 1 h = 61 h

61 | 24
13   2 , o sea: 2 d 13 h

Luego, el producto es: 2 d 13 h 16 min 40 seg.

B Multiplicar:

1. 8 me 16 d 20 h × 8
2. 5 me 18 d 3 h 40 min × 10
3. 8 a 20 d × 12
4. 10 a 6 me 15 h × 20.

3—6. DIVISION DE UN NUMERO DENOMINADO DE TIEMPO ENTRE UN NUMERO NATURAL.— El ejemplo siguiente nos ilustra claramente el procedimiento que se emplea en esta operación.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3—4

A EJEMPLO 1.— **Dividir 8 me 18 h 36 min ÷ 5.**

Solución: **Procedemos así:**

a) 8 me | 5
3 me 1 me

b) 3 me = 3 × 30
= 90 d

90 d | 5
40 18 d
0

c) 18 h | 5
3 h 3 h

d) 3 h = 3 × 60 = 180 min
180 min + 36 min = 216 min

216 min | 5
16 43 min
1 min

e) 1 min = 1 × 60 = 60 seg

60 seg | 5
10 12 seg
0

Luego: El cociente es 1 me 18 d 3 h 43 min 12 seg.

B Dividir:

1. 8a 7 me 24 d ÷ 5
2. 6 me 15 d 14 h ÷ 4
3. 5 D 6 a 5 me ÷ 3
4. 18 D 7 a 20 d ÷ 7

3—7. LONGITUD Y LATITUD.— Sabemos que la forma de la tierra es la de una esfera no perfecta. Asimismo, la recta imaginaria que pasa por su centro y alrededor del cual gira se llama **eje** y los extremos de esta recta sobre la superficie terrestre se denominan **Polo Norte** y **Polo Sur** (Fig. 3-1).

En la tierra, la línea imaginaria que la rodea y que equidista de los polos se llama **ecuador**, línea que divide al planeta en dos hemisferios: Norte y Sur; y las líneas imaginarias que pasan por los polos y cruzan al ecuador se denominan **meridianos**, donde el primer meridiano o meridiano 0° es el meridiano de Greenwich (ciudad cerca de Londres), que divide a la tierra en Hemisferio Oriental (Este) y Hemisferio Occidental (Oeste).

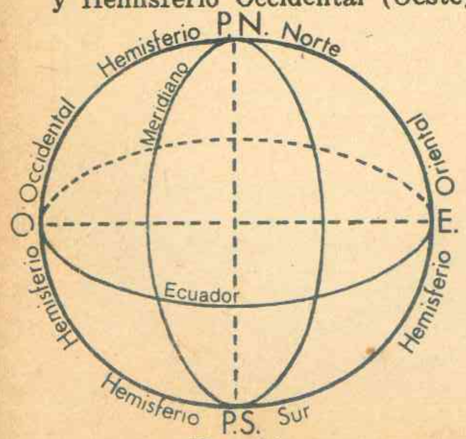


Fig. 3-1

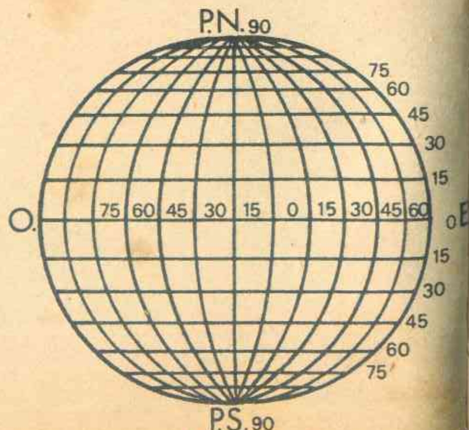


Fig. 3-2

El grupo de líneas paralelas a la línea ecuatorial (Fig. 3-2) se llaman **paralelos de latitud** o simplemente **paralelos** y el grupo de líneas que pasan por los polos se denominan **meridianos de longitud** o simplemente **meridianos.** Los paralelos se enumeran de 0° a 90° desde el Ecuador a cada Polo tomados de 15° en 15° y los meridianos se enumeran de 0° a 180°, también de 15° en 15°, tomando como base el meridiano de Greenwich por acuerdo internacional.

A la distancia medida en grados desde un punto de la superficie terrestre al ecuador se le llama **latitud** (latitud norte o latitud sur) y la distancia medida en grados desde el meridiano de Greenwich y un lugar de la tierra se llama **longitud** (longitud este o longitud oeste). Cualquier lugar de la tierra se localiza por medio de sus coordenadas geográficas que son su longitud y su latitud. Así, por ejemplo: la ciudad de Bogotá está a 4°35′55″ de latitud norte y 74°04′53.01″ de longitud oeste y la ciudad de México está a 19°24′17.9″ de latitud norte y 99°11′41.1″ de longitud oeste. Anotamos que en el globo terrestre se pueden ver estas coordenadas aproximadamente teniendo en cuenta que los grados de latitud están marcados en el meridiano de Greenwich y los grados de la longitud están marcados en el ecuador.

3—8. RELACION ENTRE LA LONGITUD Y EL TIEMPO.— La tierra da una vuelta completa en 24 horas alrededor de su eje donde cada punto de su superficie describe una circunferencia. Como una circunferencia mide 360°, resulta que en una hora la tierra recorre (gira) 360 ÷ 24 = 15°. Por tanto:

15° de longitud equivale a 1 hora,
1° de longitud equivale a 4 minutos y
1′ de longitud equivale a 4 segundos.

Recíprocamente:

1 h equivale a 15° de longitud,
1 min equivale a 15′ de longitud y
1 seg equivale a 15″ de longitud.

De modo que:

a) **La longitud se puede expresar en función del tiempo dividiendo la longitud dada entre 15.**

b) **El tiempo se puede expresar en función de la longitud multiplicando el tiempo dado por 15.**

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3—5

A EJEMPLO 1.— Expresar 115° 20′ 30″ de longitud en tiempo.

Solución: 115° 20′ 30″ ÷ 15

115 | 15 , o sea: 7 h con residuo de 10°
10 7

10° = 10 × 60 = 600

600′ + 20′ = 620

620 | 15 , o sea: 41 min con residuo de 5′
20 41
5

5′ + 5 × 60 = 300″

300″ + 30″ = 330″

330 | 15 , o sea: 22 seg.
30 22
0

Luego: 115° 20′ 30″ equivalen a 7 h 41 min 22 seg.

EJEMPLO 2.— Expresar 5 h 20 min 38 seg en longitud.

Solución:

5 h 20 min 38 seg
× 15
75° 300′ 570″

Transformaciones:

570 | 60 , o sea: 9′ 30″
30 9

300′ + 9′ = 309′

309 | 60 , o sea: 5° 9′
9 5

75° + 5° = 80°

Luego: 5 h 20 min 38 seg equivalen a 80° 9′ 30″.

B Expresar en tiempo las longitudes siguientes:

1. **84° 20′**
2. **136° 45′**
3. **70° 18′ 48″**
4. **160° 50′ 24″.**

Expresar en longitud los tiempos siguientes:

5. 4 h 20 min
6. 7 h 42 min
7. 2 h 45 min 15 seg
8. 6 h 12 min 18 seg.

3—9. DIFERENCIA DE LONGITUD.— La diferencia de longitud entre dos lugares de la tierra es la distancia que existe entre los meridianos que pasan por dichos lugares, expresada en grados, minutos y segundos.

Para hallar la diferencia de longitud entre dos lugares, se restan las longitudes dadas si ambos están al este o al oeste del primer meridiano (Greenwich) y se suman si uno está al este y el otro al oeste de este meridiano; si la suma es mayor que 180°, dicha suma se resta de 360°.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3—6

A **EJEMPLO 1.— Hallar la diferencia de longitud entre Bogotá (74°4′ 53″ Longitud Oeste) y Río de Janeiro (43°10′22″ Longitud Oeste).**

Solución:

73° 64′
74° 4′ 53″
− 43° 10′ 22″
30° 54′ 31″. **Es la respuesta.**

EJEMPLO 2.— **Hallar la diferencia de longitud entre Tokio (139° 45′ longitud este) y Nueva York (73° 58′ 41″ longitud oeste).**

Solución:

139° 45′
+ 73° 58′ 41″
212° 103′ 41″
213° 43′ 41″

359° 59′ 60″
− 213° 43′ 41″
146° 16′ 19″ **Es la respuesta**

B **Hallar la diferencia de longitud entre:**

1. **Hong-Kong de 114° 29′ 19″ longitud este y Roma de 12° 29′ 5″ longitud este.**
2. **Bogotá de 74° 04′ 51″ longitud oeste y Washington de 77° 03′ 06″ longitud oeste.**

3. París de 2° 20′ 22″ longitud este y Buenos Aires de 58° 15′ 14″ longitud oeste.

4. Londres de 5′ 43″ longitud oeste y Barcelona de 2° 11′ 04″ longitud oeste.

5. México de 99° 11′ 41″ longitud oeste y Tokio de 139° 45′ longitud este.

6. Barranquilla de 74°48′ longitud oeste y Manila de 120° 57′ 24″ longitud este.

3—10. LA HORA LEGAL Y LA LINEA INTERNACIONAL DE LA FECHA.— Todos los lugares de la tierra que se encuentran en un mismo meridiano tienen la misma hora internacional u hora legal. Así, por ejemplo, las ciudades de Bogotá, Lima, Quito y Nueva York tienen la misma hora porque se encuentran en el mismo meridiano 75°.

Como la tierra gira de Oeste a Este, cuando en el meridiano de Greenwich son las 12 del día, en todos los lugares ubicados en el meridiano 15° de Longitud Oeste son las 11 a. m., porque falta una hora para que este meridiano pase frente al sol; y en todos los lugares ubicados en el meridiano 15° de Longitud Este es la 1 p. m. porque este meridiano pasó hace una hora frente al sol. Así, por ejemplo, cuando en Bogotá son las 12 m. (meridiano 75°), en San Salvador son las 11 a. m. (meridiano 90°) y en Buenos Aires es la 1 p. m. (meridiano 60°).

La línea que sigue el meridiano 180° atravesando el Océano Pacífico de un Polo a otro con desviaciones sin pasar por ningún País, se denomina **línea internacional de la fecha** y da lugar al cambio de fecha. Así, cuando a un lado de la línea es domingo en el otro lado es lunes.

3—11. HALLAR LA HORA DE UN LUGAR CON RELACION A OTRO DADAS SUS LONGITUDES.— Para hallar la hora de un lugar conociendo la de otro, debemos considerar:

a) Si el lugar está al **este** del otro dado, se suma a la hora dada la diferencia de tiempo entre dichos lugares.

b) Si el lugar está al **oeste** del otro dado, se resta a la hora dada la diferencia de tiempo entre dichos lugares.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3—7

A EJEMPLO 1.— ¿Qué hora es en Pekín (116° 23′ 45″ longitud este) cuando en Moscú (37° 34′ 15″ longitud este) son las 8 a. m.?

Solución: Diferencia de longitudes:

$$\begin{array}{rrrr} & 115° & 83′ & \\ & 116° & 23′ & 45″ \\ - & 37° & 34′ & 15″ \\ \hline & 78° & 49′ & 30″ \end{array}$$

Diferencia de tiempo:

78° 49′ 30″ ÷ 15 = 5 h 15 min 18 seg

Hora: (Pekín está al este de Moscú)

8 h + 5 h 15 min 18 seg = 13 h 15 min 18 seg

Respuesta.—En Pekín son las 13 h 15 min 18 seg del mismo día.

B Resolver los problemas siguientes:

1. ¿Qué hora es en México (99° 11′ 41″ longitud oeste) cuando en Buenos Aires (58° 15′ 14″ longitud oeste) son las 15 h? (México está al oeste de Buenos Aires).

2. ¿Qué hora es en Lima (77° 03′ 00″ longitud oeste) cuando en Washington (77° 03′ 56″ longitud oeste) son las 10 h? (Lima está al este de Washington).

3. Hallar la hora en Viena (116° 20′ 20″ longitud este) cuando en Hong-Kong (114° 10′ 19″ longitud este) son las 18 h? (Viena está al oeste de Hong-Kong).

4. Hallar la hora en Manila (120° 57′ 24″ longitud este) cuando en Roma (12° 29′ 05″ longitud este) son las 5 horas (Manila está al este de Roma).

5. Cuando en La Habana (82° 20′ 54″ longitud oeste) son las 12 horas, ¿qué hora es en Calcuta (88° 20′ 12″ longitud este)? (Calcuta está al este de La Habana).

6. Cuando en Londres (0° 05′ 43″ longitud oeste) son las 20 horas, ¿qué hora es en Río de Janeiro (43° 10′ 22″ longitud oeste)? (Río de Janeiro está al oeste de Londres)

7. ¿Qué hora es en Varsovia (21° 01′ 49″ longitud este) cuando en Berlín (13° 22′ longitud este) son las 10 horas? (Varsovia está al este de Berlín).

8. ¿Qué hora es en Panamá (79° 32′ 04″ longitud oeste) cuando en Madrid (3° 41′ 15″ longitud oeste) son las 15 horas? (Panamá está al oeste de Madrid).

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE REPASO 3—1

1. ¿Qué es un día solar? ¿Qué es un año solar?

2. ¿En qué consistió la reforma gregoriana del calendario?
3. Determine cuáles de los años siguientes son bisiestos: 1600, 1900, 1976, 1984, 2000 y 2100.
4. Transformar:
   a) 5 a 4 me 18 d a días.
   b) 12,124 h a número denominado.
5. Efectuar:
   a) 4 a 5 me 20 d + 1 a 7 me 10 d + 8 me 24 d
   b) 15 a 4 me − 12 a 7 me 24 d
   c) 6 h 20 min 40 seg × 8
   d) 15 a 8 me 12 d ÷ 3.
6. Nombre cinco países ubicados en el Hemisferio Oriental y otros cinco ubicados en el Hemisferio Occidental.
7. ¿Qué entiende por latitud de un lugar?
8. ¿Cuál es la latitud y cuál la longitud geográfica de Cali?
9. ¿Cuántos grados recorre la tierra en 4 horas?
10. Expresar 80° 40′ 15″ de longitud de tiempo.
11. Expresar 5 h 36 min 20 seg en longitud.
12. Hallar la diferencia de longitud entre:
    a) Roma de 12° 29′ 5″ longitud este y Tokio de 139° 45′ longitud este.
    b) Medellín de 75° 34′ longitud oeste y Sidney (Australia) de 151° 12′ 23″ longitud este.
13. ¿Qué entiende por hora legal?
14. ¿Qué entiende por hora internacional de la fecha?
15. ¿Qué hora es en Ottawa (Canadá) (75° 42′ 59″ longitud oeste) cuando en Honolulú (157° 51′ 48″ longitud oeste) son las 10 horas?

CONJUNTO DE EJERCICIOS OPCIONAL 3—1

1. Cuando en Berlín (13° 22′ longitud este) son las 12 horas, ¿qué hora es en Washington (77° 03′ 56″ longitud oeste)?

2. ¿Qué hora es en México (99° 11′ 41″ longitud oeste) cuando en Londres (0° 05′ 43″ longitud oeste) son las 18 horas?
3. Cuando en Cali 76° 32′ longitud oeste) son las 19 h 46 min 53 seg en Buenos Aires son las 21 horas. ¿Cuál es la longitud de Buenos Aires?
4. Cuando en La Habana son las 2 h 30 min (82° 20′ 54″ longitud oeste), en El Cabo (Africa del Sur) son las 9 h 13 min 20 seg. ¿Cuál es la longitud de El Cabo?
5. Una persona viaja de San Francisco (112° 26′ 15″ longitud oeste) a Madrid (3° 41′ 15″ longitud oeste). Con relación a la hora de Madrid ¿su reloj estará atrasado o adelantado y en qué tiempo?
6. Un turista viaja de Bogotá (74° 04′ 51″ longitud oeste) a Londres (0° 05′ 43″ longitud oeste). ¿Estará atrasado o adelantado su reloj con relación a la hora de Londres?

H POINCARE

(1854 — 1912)

Henri Poincaré fue un matemático y filósofo francés. Pasó su infancia en un círculo de personas interesadas en los estudios científicos. Se distinguió por ser un niño precoz y de extraordinaria facilidad para comprender las ideas. Tuvo gran originalidad y profundidad de conceptos. Fue afectuoso y amable, distraído hasta tal punto de que se olvidaba con frecuencia si había comido o no.

En 1871, al rendir su examen de ingreso para seguir el Bachillerato de Ciencias, por poco es desaprobado en un examen escrito de Matemática, le valió la fama que ya tenía como tal. Posteriormente ingresó en la Politécnica en el primer puesto y después en la Escuela de Minas. Obtuvo la licenciatura en ciencias matemáticas y el título de Ingeniero de Minas, encargándosele el mismo año la enseñanza de Análisis Matemático en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Caen.

En 1879 se doctoró en Ciencias Matemáticas y en 1881 fue llamado a la Sorbona, primero como maestro de conferencias y después como profesor titular.

Sus múltiples trabajos sobre Matemática, Física y Mecánica Celeste, constituyen joyas inestimables de la ciencia. Por su gran talento fue solicitado por las corporaciones científicas más importantes de Francia. Las principales Universidades de Europa le confirieron el título de Doctor Honoris Causa. Sus trabajos, que se calculan en más de 300, fueron publicados en las revistas científicas más importantes de Europa y traducidos a varios idiomas.

Poincaré hizo de la ciencia su verdadera religión y su estilo es un modelo de precisión y claridad.

* * *

"Escriba un número de tres cifras distintas que no termine en cero; pero en tal forma que cada cifra sea igual a la anterior menos uno. Invierta el orden de las cifras del número, luego reste estos dos números. La diferencia es 198. (¿Por qué?).

* * *

La ciencia será determinante o no será ciencia.

HENRI POINCARE.

Unidad 4

LA PROPORCIONALIDAD Y SUS APLICACIONES

4—1. RAZON GEOMETRICA.— Sean los conjuntos:

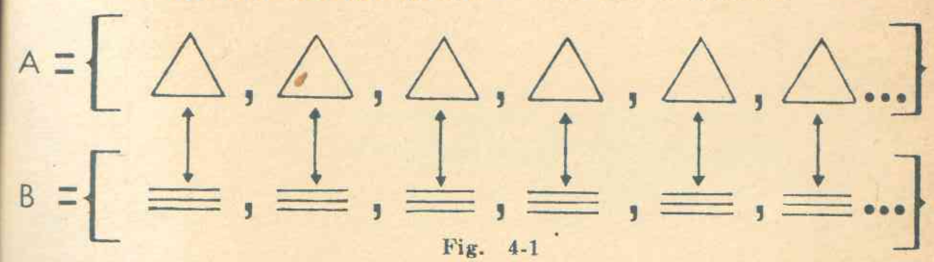


Fig. 4-1

Si comparamos estos conjuntos, pensamos en un triángulo por cada tres segmentos. Esta comparación tiene un lenguaje especial que se llama **razón**, en este caso decimos que "la razón del número de triángulos al de segmentos es de 1 a 3". Estos números forman el par ordenado (1, 3) y podemos expresarlo así: $1 : 3$ o $\frac{1}{3}$

Esta razón $\frac{1}{3}$ (fracción), tiene otras equivalentes tales como: $\frac{2}{6}$ (2 triángulos por cada 6 segmentos) $\frac{3}{9}$ (3 triángulos por cada 9 segmentos), etc.; es decir, la razón del número de triángulos al número de segmentos es el número racional $\frac{1}{3}$ y podemos escribir así:

$$\left(\frac{1}{3}\right) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \ldots\right\}$$

Cualquiera de estas fracciones indican la razón $\frac{1}{3}$; a esta razón se le denomina **razón geométrica.**

En general, si $\left(\frac{a}{b}\right)$ es un número racional, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)$ expresa la razón geométrica de **"a a b".**

Luego, podemos decir:

Razón geométrica es la comparación de dos números.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—1

1. Expresar como razón geométrica:

   a) 2 a 3
   b) $\frac{1}{2}$ a $\frac{3}{5}$
   c) 0.25 a 0.75
   d) x a y.

2. Si por cada 2 pelotas hay 5 jugadores, escriba la razón geométrica correspondiente.

3. Juan tiene 12 años y su hermano Ricardo 18. ¿Cuál es la razón de sus edades?

4. La velocidad de un bus es 80 Km por hora y la de un automóvil es 100 Km por hora. ¿Cuál es la razón de estas velocidades?

5. En un baile hay 24 personas de las cuales 10 son damas:

   a) ¿Cuál es la razón geométrica del número de damas y el total de personas?
   b) ¿Cuál es la razón geométrica del número de caballeros y el total de personas?
   c) ¿Cuál es la razón geométrica entre el número de damas y el de caballeros?

6. Escriba en cada caso un conjunto de fracciones equivalentes a:

   a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{4}$ d) 4.

4—2. PROPORCION GEOMETRICA.—

Sea $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots\right\}$ un conjunto de fracciones equivalentes.

Puesto que este conjunto de fracciones equivalentes expresa la misma razón $\frac{1}{2}$, podemos escribir:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}, \quad \frac{2}{4} = \frac{3}{6}, \quad \frac{3}{6} = \frac{4}{8}, \quad \text{etc.}$$

Cada una de estas igualdades se denomina **proporción geométrica.**

Luego, podemos decir:

Proporción geométrica es la igualdad de dos razones geométricas.

En general, en la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (se lee "a es a b como c es a d"), los términos a y d se llaman **extremos** y los términos b y c se llaman **medios**. Además, a y c se denominan **antecedentes** y b y d se denominan **consecuentes.**

Conviene advertir que solamente dos fracciones equivalentes determinan una proporción geométrica.

4—3. PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES GEOMETRICAS.—

Tenemos:

a) **En toda proporción geométrica el producto de los extremos es igual al producto de los medios.**

Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Multiplicando ambos miembros por $b \times d$, resulta:

$$\frac{a}{b} \times b \times d = \frac{c}{d} \times b \times d$$

$$a \times d = c \times b.$$

Esta propiedad comúnmente se llama **propiedad fundamental.**

Ejemplos:

1. En $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$ tenemos: $4 \times 10 = 8 \times 5$.

2. En $\frac{^-3}{7} = \frac{^-6}{14}$ tenemos: $^-3 \times 14 = {}^-6 \times 7$.

3. En $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = \dfrac{\frac{3}{6}}{\frac{15}{24}}$ tenemos: $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{15}{24} = \dfrac{3}{6} \times \dfrac{5}{8}$.

4. En $\dfrac{0.2}{10} = \dfrac{1}{50}$ tenemos: $0.2 \times 50 = 1 \times 10$.

NOTA IMPORTANTE.— Si en una proporción geométrica se cambian de lugar los términos medios entre sí o los términos extremos, se obtiene otra proporción. Así, dado $\dfrac{3}{4} = \dfrac{6}{8}$, tenemos:

$\dfrac{3}{6} = \dfrac{4}{8}$, pues $3 \times 8 = 4 \times 6$ y

$\dfrac{8}{4} = \dfrac{6}{3}$, pues $8 \times 3 = 6 \times 4$.

Asimismo se pueden cambiar de lugar los antecedentes entre sí o los consecuentes y siempre se obtiene una proporción. Por tal razón, una misma proporción se puede escribir de 8 maneras distintas.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—2

A EJEMPLO 1.— Hallar el valor de n en $\dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{n}$.

Solución: $6 \,.\, n = 3 \times 8$ **propiedad fundamental.**

$$\frac{6 \,.\, n}{6} = \frac{3 \times 8}{6} \quad \text{(Dividiendo entre 6)}$$

$$n = \frac{3 \times 8}{6}$$

$n = 4$. **Es la respuesta**.

Comprobación: Sustituyendo el valor de n en la proporción dada se tiene:

$\dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$, pues $6 \times 4 = 3 \times 8$.

En general, dado $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ **se tiene:**

$$a = \frac{b \,.\, c}{d} \quad \text{ó} \quad d = \frac{b \,.\, c}{a}.$$

Luego, podemos decir:

En toda proporción geométrica, un extremo es igual al producto de los medios dividido entre el otro extremo.

EJEMPLO 2.— **Hallar el valor de x en** $\dfrac{10}{x} = \dfrac{12}{6}$.

Solución: $12 \,.\, x = 10 \times 6$

$$\frac{12 \,.\, x}{12} = \frac{10 \times 6}{12}$$

$$x = \frac{10 \times 6}{12}$$

$x = 5$. **Es la respuesta**.

En general, dado $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, **se tiene:**

$$b = \frac{a \,.\, d}{c} \quad \text{ó} \quad c = \frac{a \,.\, d}{b}.$$

Luego, podemos decir:

En toda proporción geométrica, un medio es igual al producto de los extremos dividido entre el otro medio.

EJEMPLO 3.— **Hallar el valor de x en** $\dfrac{x}{10} = \dfrac{2.5}{\frac{5}{3}}$.

Solución: $x = \dfrac{2.5 \times 10}{\frac{5}{3}} = \dfrac{25}{\frac{5}{3}} = \dfrac{3 \times 25}{5} = 15$. **Es la respuesta.**

B Hallar el valor de x en:

1. $\dfrac{4}{10} = \dfrac{8}{x}$

2. $\dfrac{x}{5} = \dfrac{16}{10}$

3. $\dfrac{10}{4} = \dfrac{x}{2}$

4. $\dfrac{9}{x} = \dfrac{12}{4}$

5. $\dfrac{-4}{x} = \dfrac{2}{7}$

6. $\dfrac{-5}{3} = \dfrac{x}{\frac{3}{5}}$

7. $\dfrac{9}{6} = \dfrac{6}{x}$

8. $\dfrac{20}{-10} = \dfrac{-10}{x}$

9. $\dfrac{0.36}{1.2} = \dfrac{1.2}{x}$

10. $\dfrac{\frac{-5}{6}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{x}$

b) **En toda proporción geométrica la suma o diferencia de los antecedentes es a la suma o diferencia de los consecuentes como un antecedente es a su respectivo consecuente.**

Dado $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, tenemos:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \quad \text{ó} \quad \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}.$$

Así, por ejemplo, dado $\dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{10}$ tenemos:

1. $\dfrac{3+6}{5+10} = \dfrac{3}{5}$, de donde $\dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$.

2. $\dfrac{3-6}{5-10} = \dfrac{3}{5}$, de donde $\dfrac{-3}{-5} = \dfrac{3}{5}$.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—3

A EJEMPLO 1.— Dados $\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{3}$ y $a + b = 20$, hallar los valores de a y de b.

Solución: Valor de a:

$$\frac{a+b}{2+3} = \frac{a}{2} \quad \text{(Propiedad)}$$

$$\frac{20}{5} = \frac{a}{2} \quad \text{(Sustitución)}$$

$$a = \frac{20 \times 2}{5} = 8.$$

Valor de b:

$$b = 20 - 8 = 12$$

Respuesta.—Los valores de a y de b son 8 y 12 respectivamente.

EJEMPLO 2.— Dos números están en la relación de 12 a 9. Si la diferencia de dichos números es 4, ¿cuáles son estos números?

Solución: Sean los números x, y.

Su diferencia: $x - y = 4$

Tenemos:

a) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{12}{9} \Rightarrow \dfrac{x}{12} = \dfrac{y}{9}$ (Permutando los medios)

$$\frac{x-y}{12-9} = \frac{x}{12} \quad \text{(Propiedad)}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{x}{12}$$

$$x = \frac{4 \times 12}{3} = 16$$

b) De $\dfrac{x}{y} = \dfrac{12}{9}$, resulta:

$$\frac{16}{y} = \frac{12}{9}$$

$$y = \frac{16 \times 9}{12} = 12.$$

Respuesta.—Los números son 16 y 12.

B Hallar los valores de x, y, en:

1. $\dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{10}$, si $x + y = 8$

2. $\dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{6}$, si $x + y = 4$

3. $\dfrac{x}{8} = \dfrac{y}{2}$, si $x - y = 15$

4. $\dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{3}$, si $x - y = 2$

5. $\dfrac{6}{x} = \dfrac{4}{y}$, si $x + y = 20$

6. $\dfrac{11}{y} = \dfrac{7}{x}$, si $y - x = 8$

7. La razón de dos números es $\dfrac{2}{3}$ y su suma es 25. Hallar los números

8. Dos números son entre sí como 4 es a 3. Si su diferencia es 3, ¿cuá-les son estos números?

9. La edad de un hijo y la de su padre están en la relación de 1 a 3. Si ambas edades suman 60 años, ¿qué edad tiene cada uno?

10. La diferencia de las calificaciones de matemática de Rosa y Luisa es 2 y la razón $\dfrac{4}{3}$. ¿Cuál es la nota de cada una?

4—4. CONJUNTO DE RAZONES EQUIVALENTES.— Sea por ejemplo un conjunto de fracciones equivalentes a $\left(\dfrac{1}{2}\right)$:

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots\right\}.$$

De aquí, podemos escribir: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{4}{8} = \ldots$

Para un conjunto de razones equivalentes tenemos la siguiente propiedad:

En un conjunto de razones equivalentes, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como un antecedente es a su respectivo consecuente.

Así, por ejemplo, en $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6}$ tenemos:

$$\frac{1 + 2 + 3}{2 + 4 + 6} = \frac{1}{2}$$

De donde: $\dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$, porque $6 \times 2 = 12 \times 1$.

En general, dado $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n}$, tenemos:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} = \frac{a_1}{b_1}.$$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—4

A EJEMPLO 1.— Las edades de 3 hermanos suman 40 años. Si dichas edades están en relación con los números 2, 3 y 5 respectivamente. ¿Cuántos años tiene cada uno?

Solución: Sean las edades x, y, z.

$x + y + z = 40$ (Suma de las edades)

Tenemos:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$$

$$\frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{x}{2} \quad \text{(Propiedad)}$$

$$\frac{40}{10} = \frac{x}{2} \quad \text{(Sustitución)}$$

$$x = \frac{40 \times 2}{10} = 8.$$

$$\frac{40}{10} = \frac{y}{3}$$

$$y = \frac{40 \times 3}{10} = 12.$$

$$\frac{40}{10} = \frac{z}{5}$$

$$z = \frac{40 \times 5}{10} = 20.$$

Respuesta.—Tienen 8, 12 y 20 años.

B 1. Hallar los valores de x, y, z, en:

a) $\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{8}$, si $x + y + z = 24$

b) $\frac{0.3}{x} = \frac{1.2}{y} = \frac{3.5}{z}$, si $x + y + z = 30.$

2. Tres números cuya suma es 21 están en la relación con los números 4, 8 y 16. Hallar los números.

3. La suma de los tres ángulos de un triángulo es 180°. Hallar la medida de cada ángulo si guardan relación con los números 1, 2 y 3.

4. La suma de tres números es 42. El primero con el segundo están en relación con 5 y 9 respectivamente y suman 28. Hallar los números.

5. La suma de tres números es 24. La relación del primero con el segundo es $\frac{4}{3}$ y su diferencia es 2. Hallar los números.

4—5. PROPORCIONALIDAD DIRECTA.—

Supongamos que un vehículo se mueve a una velocidad constante de 100 Km por hora. Naturalmente habrá una correspondencia entre el **tiempo** transcurrido desde el instante de la partida y la **distancia** recorrida, tal como nos lo ilustra la tabla siguiente:

Tiempo (h)	1	2	3	4	5	...	t
Distancia (Km)	100	200	300	400	500	...	d

Observamos que si el tiempo se duplica, triplica, etc., también la distancia se duplica, triplica, etc., correspondencia que podemos expresarla así:

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow 100 \\ 2 &\longrightarrow 200 \\ 3 &\longrightarrow 300 \\ t &\longrightarrow d. \\ \ldots &\longrightarrow \ldots \end{aligned}$$

Si: $t_1, t_2, t_3, \ldots$ son las unidades de tiempo transcurridas y $d_1, d_2, d_3, \ldots$ las distancias recorridas, podemos escribir:

$$A = \{ t_1, t_2, t_3, \ldots \} \text{ y}$$

$$B = \{ d_1, d_2, d_3, \ldots \}.$$

Este fenómeno nos permite establecer una función de A en B, o sea:

$$f : A \longrightarrow B, \text{ definida por } f(t) = d,$$

es decir, "la imagen del tiempo t es la distancia d" o sea: $t \longrightarrow d$

En esta función, si se multiplica el tiempo t por un número k, la distancia correspondiente d también queda multiplicada por dicho número k, o sea:

$$kt \longrightarrow kd.$$

De donde: $f(kt) = kd.$

Pero como $f(t) = d$, sustituyendo resulta:

$$f(kt) = kf(t).$$

Esta igualdad tiene validez, siempre que $t \in A$ y $kt \in A$

Así, en nuestro ejemplo, si $f(1) = 100$, tenemos:

$$f(2 \times 1) = 2 \times 100 = 2f(1)$$

$$f(3 \times 1) = 3 \times 100 = 3f(1)$$

$$f(4 \times 1) = 4 \times 100 = 4f(1)$$

$$\ldots$$

Esto nos permite afirmar que la función f es una proporcionalidad directa del conjunto A en el conjunto B.

Luego, podemos decir:

Dados dos conjuntos A y B, la $f: A \longrightarrow B$ es una proporcionalidad directa si para cada número $x \in A$ y $kx \in A$, se verifica $f(kx) = kf(x)$.

Si $f: A \longrightarrow B$ es una proporcionalidad directa, podemos escribir la razón de dos unidades de tiempo y dos distancias:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{2} \quad y \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}.$$

De donde: $$\frac{t_1}{t_2} = \frac{d_1}{d_2}.$$

Por esta razón afirmamos que los tiempos transcurridos son directamente proporcionales a las distancias recorridas.

Algunos otros ejemplos de proporcionalidad directa son: (Plantee un ejemplo numérico en cada caso)

1. El número de objetos (n) y el precio (p): $\dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$
2. El tiempo de trabajo (t) y la ganancia (g): $\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{g_1}{g_2}$
3. El número de trabajadores (n) y la unidad de trabajo (u) realizada: $\dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{u_1}{u_2}$
4. La velocidad (v) y el espacio (e) si el tiempo no varía: $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{e_1}{e_2}$

4—6. PROPORCIONALIDAD INVERSA.— Supongamos que un móvil a una velocidad de 20 Km por hora emplea 12 horas para recorrer una distancia fija. Habrá, pues una correspondencia entre la velocidad y el tiempo transcurrido para recorrer la misma distancia, tal como nos lo muestra la tabla siguiente:

Velocidad (Km/h)	20	40	60	80	...	v
Tiempo (h)	12	6	4	3	...	t

Observamos que si la velocidad se duplica, triplica, etc., el tiempo es la mitad, la tercera parte, etc., correspondencia que podemos expresarla así:

$$20 \longrightarrow 12$$
$$40 \longrightarrow 6$$
$$60 \longrightarrow 4$$
$$80 \longrightarrow 3$$
$$\ldots$$
$$v \longrightarrow t.$$

Si $v_1, v_2, v_3, \ldots$ son las velocidades y $t_1, t_2, t_3, \ldots$ los tiempos, podemos escribir:

$$A = \{ v_1, v_2, v_3, \ldots \} \quad y$$
$$B = \{ t_1, t_2, t_3, \ldots \}.$$

Este fenómeno nos permite establecer una función de A en B, o sea:

$$f: A \longrightarrow B, \text{ definida por } f(v) = t,$$

es decir, "la imagen de la velocidad v es el tiempo t", o sea: $v \longrightarrow t$.

Si en esta función se multiplica la velocidad v por un número k, el tiempo correspondiente t queda dividido entre dicho número k, o sea:

$$kv \longrightarrow \frac{1}{k} \cdot t.$$

De donde: $$f(kv) = \frac{1}{k} \cdot t.$$

Pero como $f(v) = t$, sustituyendo resulta:

$$f(kv) = \frac{1}{k} \cdot f(v).$$

Esta igualdad tiene validez siempre que $v \in A$ y $kv \in A$. Así en nuestro ejemplo, si $f(20) = 12$, tenemos:

$$f(2 \times 20) = \frac{1}{2} \times 12 = \frac{1}{2} f(20)$$

$$f(3 \times 20) = \frac{1}{3} \times 12 = \frac{1}{3} f(20)$$

$$f(4 \times 20) = \frac{1}{4} \times 12 = \frac{1}{4} f(20)$$

etc.

Esto nos permite afirmar que la función f es una proporcionalidad inversa del conjunto A en el conjunto B.

Luego, podemos decir:

> Dados dos conjuntos A y B, donde $0 \notin A$, la $f : A \longrightarrow B$ es una proporcionalidad inversa si para cada número $x \in A$ y $kx \in A$, se verifica $f(kx) = \frac{1}{k} f(x)$.

Si $f : A \longrightarrow B$ es una proporcionalidad inversa, la razón de dos velocidades y dos tiempos podemos escribir:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \quad y$$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

De donde: $$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1}.$$

Por esta razón afirmamos que las velocidades son inversamente proporcionales a los tiempos transcurridos.

Algunos otros ejemplos de proporcionalidad inversa son: (Plantee en cada caso un ejemplo numérico)

1. El número de obreros (n) y el tiempo (t) empleado para efectuar una obra (con la misma rapidez y habilidad) $\qquad \frac{n_1}{n_2} = \frac{t_2}{t_1}$
2. El número (n) de litros por minuto que vierte el grifo de un tanque de agua y el tiempo (t) que tarda en llenarlo: $\qquad \frac{n_1}{n_2} = \frac{t_2}{t_1}$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—5

Dado $f : A \longrightarrow B$ para $A = \{1, 2, 3, 4\}$, forme en cada caso la tabla de valores y diga si se trata de una proporcionalidad directa o inversa y por qué:

1. Si 1 metro de tela cuesta 50 pesos.
2. Si 1 obrero gana 120 pesos diarios.
3. Si en 1 hora un móvil recorre una distancia fija a una velocidad de 120 Km/h.
4. Si 1 obrero ejecuta una obra en 12 días.

REGLA DE TRES

4—7. REGLA DE TRES SIMPLE.— Existen ciertos problemas donde intervienen dos variables, obteniéndose así una función que es una proporcionalidad directa simple o una proporcionalidad inversa simple llamada **regla de tres simple.**

Cuando el problema nos plantea una proporcionalidad directa simple, tenemos una **regla de tres simple directa;** si el problema nos plantea una proporcionalidad inversa simple, tenemos una **regla de tres simple inversa.**

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—6

A EJEMPLO 1.— En una hora un automóvil recorre 120 Km. ¿Cuántos kilómetros recorrerá en $5\frac{1}{4}$ horas si la velocidad es constante?

Solución: Esquema:

h	Km
1	120
5.25	?

Análisis: Si en 1 h recorre 120 Km, en más horas (5.25 h) recorrerá más kilómetros. Es una proporcionalidad directa.

Tenemos:

$$f(kx) = kf(x)$$

$$f(1) = 120$$

$$f(5.25) = ?$$

Luego: $$f(5.25) = f\left(\frac{5.25}{1} \times 1\right) = \frac{5.25}{1} f(1)$$

$$= 5.25 \times 120 = 630.$$

(Obsérvese que 5.25 se ha multiplicado por 120 que es f (1) y dividido por 1).

Respuesta.—Recorrerá 630 Km.

EJEMPLO 2.— La capacidad de un tanque de agua es 6,300 litros y el desagüe la desaloja en 45 minutos. Estando lleno el tanque, ¿cuántos litros de agua quedan después de 30 minutos de funcionamiento del desagüe?

Solución: Esquema:

l	min
6,300	45
?	30

Análisis: Si en 45 min el desagüe desaloja 6,300 *l*, en menos minutos (30 min) desalojará **menos** litros. Es una proporcionalidad directa.

Tenemos: $$f(kx) = kf(x)$$

$$f(45) = 6{,}300$$

$$f(30) = ?$$

Luego: $$f(30) = f\left(\frac{30}{45} \times 45\right) = \frac{30}{45} f(45)$$

$$= \frac{30}{45} \times 6{,}300 = 4{,}200.$$

$$6{,}300\ l - 4{,}200\ l = 2{,}100 \text{ litros.}$$

Respuesta.—En el tanque quedan 2,100 *l*.

EJEMPLO 3.— Si 6 hombres hacen una obra en 20 días, ¿en cuántos días harán 10 hombres otra obra igual con la misma rapidez y habilidad?

Solución: Esquema:

homb.	d
6	20
10	?

Análisis: Si 6 hombres hacen la obra en 20 días, más hombres (10 homb.) lo harán en **menos** días. Es una proporcionalidad inversa.

Tenemos: $$f(kx) = \frac{1}{k} f(x)$$

$$f(6) = 20$$

$$f(10) = ?$$

Luego: $$f(10) = f\left(\frac{10}{6} \times 6\right) = \frac{6}{10} f(6)$$

$$= \frac{6}{10} \times 20 = 12.$$

(Obsérvese que se ha escrito el inverso de $\frac{10}{6}$ o sea $\frac{6}{10}$).

Respuesta.—Lo harán en 12 días.

EJEMPLO 4.— Una expedición de 15 hombres tiene víveres para 24 días. Si se quiere que los víveres duren 6 días más, ¿a cuántos hombres habrá que reducir la expedición?

Solución: Esquema:

homb.	d
15	24
?	30

Análisis: Si para 24 días tienen víveres 15 hombres, para **más** días (30 días) deberán ser **menos** hombres. Es una proporcionalidad inversa.

Tenemos: $$f(kx) = \frac{1}{k} f(x)$$

$$f(24) = 15$$

$$f(30) = ?$$

$$\text{Luego:}\quad f(30) = f\left(\frac{30}{24} \times 24\right) = \frac{24}{30}\, f(24)$$

$$= \frac{24}{30} \times 15 = 12.$$

Respuesta.—La expedición habrá que reducirla a 12 hombres.

B Resolver:

1. Si 5 m de tela cuestan \$ 300, ¿cuánto costarán 24 m de la misma tela
2. El transporte de un paquete de libros cuesta \$ 48.20. ¿Cuánto cos tará el transporte de 60 paquetes iguales?
3. Si 8 obreros hacen una obra en 30 días, ¿en cuántos días harán 1 obreros otra obra igual con la misma rapidez y habilidad?
4. Trabajando 8 horas diarias una cuadrilla de obreros hace una obr en 20 días. ¿En cuántos días hará otra obra igual trabajando 1 horas diarias?
5. Si 50 docenas de naranjas se compran por \$ 510. ¿Qué vale el ciento
6. La chimenea del edificio de una fábrica tiene 20 m de longitud y pro yecta una sombra de 30 m. Si la sombra proyectada por el edifici en ese instante es 12 m, ¿qué altura tiene el edificio?
7. Un constructor que dispone de 30 obreros se compromete hacer un obra en 4 meses; por razones varias, la obra deberá concluirse en 10 días. ¿Cuántos obreros más serán necesarios?
8. Leyendo una novela 30 minutos diarios puede concluirse en 18 días Si se quiere terminar en 12 días la lectura de dicha novela, ¿cuánto minutos habrá que leer diariamente?
9. Un depósito de agua cuya capacidad es 5,000 litros es desalojado po un desagüe en una hora. ¿Cuántos litros menos tuvo el depósito s fue desalojado en 45 minutos por el mismo desagüe?
10. Los tripulantes de una lancha tienen agua para 3 días a razón de 3 litros diarios. Si por el mal tiempo presentado deben permanecer días más mar adentro, ¿a cuántos litros habrá que reducir la ració diaria?
11. Cinco exploradores tienen víveres para 45 días. Si desisten partir de ellos, ¿para cuántos días tendrán víveres los demás?
12. Un móvil tarda 3 horas en recorrer $\frac{5}{7}$ de la distancia que hay entr dos pueblos. ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer la distancia total?

4—8. REGLA DE TRES COMPUESTA.— Una regla de tres es ompuesta cuando en el problema intervienen tres o más variables. n estos problemas, la proporcionalidad directa o proporcionalidad nversa estudiadas son proporcionalidades parciales de otra denomi ada **proporcionalidad compuesta.**

Determinemos a continuación unas fórmulas análogas deducidas ara las proporcionalidades directa e inversa, cuya aplicación nos per itirá resolver los problemas de regla de tres compuesta.

Sabemos que: $f(kx) = kf(x)$ (Proporc. directa simple) y

$$f(kx) = \frac{1}{k} f(x) \quad \text{(Proporc. inversa simple).}$$

Ahora, cuando la proporcionalidad es compuesta, podemos es ribir:

a) $f(k_1x_1, k_2x_2, \ldots, k_nx_n) = (k_1, k_2, \ldots, k_n)\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. s una proporcionalidad compuesta directa.

b) $f(k_1x_1, k_2x_2, \ldots, k_nx_n = \frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \ldots, \frac{1}{k_n}\; f(x_1, x_2, \ldots,$ $x_n)$. Es una porporcionalidad compuesta inversa.

Cuando en una proporcionalidad compuesta intervienen propor cionalidades directas e inversas, se denomina **proporcionalidad compuesta mixta.**

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—7

A EJEMPLO 1.— Si 5 obreros trabajando 8 horas diarias hacen una obra en 15 días, ¿en cuántos días harán otra obra igual 10 obreros trabajando 6 horas diarias con la misma rapidez y habilidad?

Solución: Esquema:

Ob.	h/d	d
5	8	15
10	6	?

Análisis: Tenemos que el número de obreros y el número de días es una proporcionalidad inversa; y, las horas diarias y el número de días también es una proporcionalidad inversa.

Tenemos: $f(k_1x_1, k_2x_2) = \frac{1}{k_1} \cdot \frac{1}{k_2} \cdot f(x_1, x_2)$

$$f(5,8) = 15 \text{ (Tiempo en días)}$$

$$f(10,6) = ?$$

Luego:

$$f(10,6) = f\left(\frac{10}{5} \times 5, \frac{6}{8} \times 8\right)$$

$$= \frac{5}{10} \times \frac{8}{6} \cdot f(5,8)$$

$$= \frac{5}{10} \times \frac{8}{6} \times 15 = 10$$

Respuesta.—Lo harán en 10 días.

Obsérvese que para obtener $f\left(\frac{10}{5} \times 5, \frac{6}{8} \times 8\right)$, cada uno de los el[…] mentos de $f(10,6)$ se ha multiplicado y dividido respectivamente por cada un[…] de los elementos de $f(5,8)$. Además, como la proporcionalidad es inversa, se ha[…] escrito los inversos de $\frac{10}{5}$ y $\frac{6}{8}$.

EJEMPLO 2.— Un móvil que se desplaza a 60 Km/h recorre 480 Km en […] horas. ¿Cuánto tiempo empleará para recorrer 300 Km si se desplaza a 80 Km/h?

Solución: Esquema:

v (Km/h)	d (Km)	t (h)
60	480	8
80	300	?

Análisis: La velocidad con respecto al tiempo es una pro-porcionalidad inversa y la distancia con respecto al tiempo es una proporcionalidad directa.

Tenemos:

$$f(k_1x_1, k_2x_2) = \frac{1}{k_1} \cdot k_2 \cdot f(x_1, x_2)$$

$$f(60, 480) = 8$$

$$f(80, 300) = ?$$

Luego:

$$f(80, 300)) = f\left(\frac{80}{60} \times 60, \frac{300}{480} \times 480\right)$$

$$= \frac{60}{80} \times \frac{300}{480} \cdot f(60, 480)$$

$$= \frac{60}{80} \times \frac{300}{480} \times 8 = 3.75$$

Respuesta.—Empleará 3.75 h.

EJEMPLO 3.— Seis obreros trabajando 8 horas diarias hacen 12 m de un muro en 15 días. ¿En cuántos días harán 10 obreros 20 m del mismo muro trabajando 6 horas diarias?

Solución: Esquema:

Ob.	h/d.	m	d
6	8	12	15
10	6	20	?

Análisis: El número de obreros y el número de días es una proporcionalidad inversa; las horas diarias y el número de días es una proporcionalidad inversa; y el número de metros y el número de días es una proporcionalidad directa.

Tenemos:

$$f(k_1x_1, k_2x_2, k_3x_3) =$$

$$\frac{1}{k_1} \cdot \frac{1}{k_2} \cdot k_3 \cdot f(x_1, x_2, x_3)$$

$$f(6, 8, 12) = 15 \text{ (Tiempo en días)}$$

$$f(10, 6, 20) = ?$$

Luego:

$$f(10, 6, 20) = f\left(\frac{10}{6} \times 6, \frac{6}{8} \times 8, \frac{20}{12} \times 12\right)$$

$$= \frac{6}{10} \times \frac{8}{6} \times \frac{20}{12} \cdot f(6, 8, 12)$$

$$= \frac{6}{10} \times \frac{8}{6} \times \frac{20}{12} \times 15 = 20.$$

Respuesta.—Lo harán en 20 días.

B Resolver los problemas siguientes:

1. Cuatro hombres han construído 40 metros de una pared en 24 días. ¿Cuántos metros de la misma obra harán 6 hombres en 18 días trabajando con la misma rapidez y habilidad?
2. Si 5 obreros hacen una obra en 18 días trabajando 8 horas diarias, ¿en cuántos días harían dicha obra 8 obreros trabajando 6 horas diarias con la misma rapidez y habilidad?
3. Doce hombres tardan 10 días en cavar una zanja de 2 m de profundidad. ¿Cuántos hombres serían necesarios para cavar otra zanja semejante de 3 m de profundidad en 20 días?
4. Una familia de 5 personas se alojó en una pensión durante una semana y pagó $ 3,150. ¿Cuánto pagó otra familia de 8 personas que estuvo alojada en la misma pensión durante dos semanas?
5. Ciento veinte soldados tienen provisiones para 20 días a razón de 3 raciones diarias. ¿Para cuántos días tendrán provisiones si se aumentan 30 soldados y el número de raciones diarias se reducen a 2.
6. Doce hombres trabajando 8 horas diarias construyen 24 metros de una pared en 10 días. ¿Cuántos hombres serían necesarios si se quiere construir 20 m de dicha pared en 5 días trabajando 10 horas diarias?
7. Ocho obreros cavan una zanja de 24 m de largo por 2 m de ancho y 2 m de profundidad en 12 días. ¿Cuántos obreros con la msma rapidez y habilidad serían necesarios para cavar otra zanja de 18 m de largo por 3 m de ancho y 4 m de profundidad en 8 días?
8. Un mecánico que trabaja 7 horas diarias recibe $ 2,800 por una obra. ¿Cuánto recibirá si trabajando 2 horas diarias menos se retira después de trabajar solamente las $\frac{3}{5}$ partes de otra obra igual?

4—9. REPARTO PROPORCIONAL.— Debemos considerar:

a) Reparto proporcional directo.— Analicemos el problema siguiente:

Juan, Pedro y Ricardo emprenden un negocio aportando los capitales siguientes: Juan $ 100,000, Pedro $ 200,000 y Ricardo $ 300,000. Si después de un año obtienen una ganancia de $ 180,000, ¿cuánto le corresponde a cada uno?

Naturalmente, a cada socio le corresponde diferente ganancia ya que aportan diferentes capitales, es decir, la ganancia se reparte en partes directamente proporcionales a los capitales (proporcionalidad directa). A este tipo de problemas se le denomina **reparto proporcional directo.** Así, tenemos:

$$\$\ 100{,}000 + \$\ 200{,}000 + \$\ 300{,}000 = \$\ 600{,}000$$

$$f(600{,}000) = 180{,}000$$

$$f(100{,}000) = ?$$

$$f(200{,}000) = ?$$

$$f(300{,}000) = ?$$

Luego: $f(100{,}000) = f\left(\frac{100{,}000}{600{,}000} \times 600{,}000\right) =$

$$\frac{100{,}000}{600{,}000}\ f(600{,}000) =$$

$$\frac{100{,}000}{600{,}000} \times 180{,}000 = 30{,}000$$

$$f(200{,}000) = f\left(\frac{200{,}000}{600{,}000} \times 600{,}000\right) =$$

$$\frac{200{,}000}{600{,}000}\ f(600{,}000) =$$

$$\frac{200{,}000}{600{,}000} \times 180{,}000 = 60{,}000$$

Luego: $f(300{,}000) = f\left(\frac{300{,}000}{600{,}000} \times 600{,}000\right) =$

$$\frac{300{,}000}{600{,}000}\ f(600{,}000) =$$

$$\frac{300{,}000}{600{,}000} \times 180{,}000 = 90{,}000$$

Respuesta.—A Juan le corresponde $ 30,000, a Pedro $ 60,000 y a Ricardo $ 90,000.

En general, si N es un número que se reparte directamente entre a, b, c, tenemos:

$$S = a + b + c$$

$$f(S) = N$$

$$f(a) = ?$$

$$f(b) = ?$$

$$f(c) = ?$$

Luego:
$$f(a) = f\left(\frac{a}{S} \times S\right) = \frac{a}{S}\, f(S) = \frac{a}{S} \times N$$
$$f(b) = f\left(\frac{b}{S} \times S\right) = \frac{b}{S}\, f(S) = \frac{b}{S} \times N$$
$$f(c) = f\left(\frac{c}{S} \times S\right) = \frac{c}{S}\, f(S) = \frac{c}{S} \times N.$$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—8

A EJEMPLO 1.— Repartir 360 en partes directamente proporcionales a 8, 10 y 18.

Solución: Tenemos: $S = 8 + 10 + 18 = 36$

$$f(36) = 360$$
$$f(8) = ?$$
$$f(10) = ?$$
$$f(18) = ?$$

Luego:
$$f(8) = \frac{8}{36} \times 360 = 80$$
$$f(10) = \frac{10}{36} \times 360 = 100$$
$$f(18) = \frac{18}{36} \times 360 = 180$$

Respuesta.—A 8, 10 y 18 le corresponden 80, 100 y 180 respectivamente.

EJEMPLO 2.— Repartir 183 en partes directamente proporcionales a 0.6, 2 y $3\frac{1}{2}$.

Solución: Tenemos: $0.6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$$3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$
$$S = \frac{3}{5} + \frac{2}{1} + \frac{7}{2} = \frac{6 + 20 + 35}{10} = \frac{61}{10}$$

$$f\left(\frac{61}{10}\right) = 183$$
$$f\left(\frac{3}{5}\right) = ?$$
$$f(2) = ?$$
$$f\left(\frac{7}{2}\right) = ?$$

Luego:
$$f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{61}{10}} \times 183 = \frac{30}{305} \times 183 = 18$$
$$f(2) = \frac{2}{\frac{61}{10}} \times 183 = \frac{20}{61} \times 183 = 60$$
$$f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{61}{10}} \times 183 = \frac{70}{122} \times 183 = 105.$$

Respuesta.—A 0.6, 2 y $3\frac{1}{2}$ le corresponden 18, 60 y 105 respectivamente.

B Repartir en partes directamente proporcionales:

1. 200 entre 4, 7 y 9
2. 1500 entre 8, 10 y 12
3. 28 entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$
4. 108 entre $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$
5. 84 entre $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ y 0.25
6. 3,600 entre 0.8, $\frac{7}{10}$ y 3.

b) **Reparto proporcional inverso.**— Sea N un número que se reparte inversamente entre a, b, c, siendo $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ y $\frac{1}{c}$ los inversos de a, b y c respectivamente.

Tenemos: $$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$f(S) = N$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = ?$$

$$f\left(\frac{1}{b}\right) = ?$$

$$f\left(\frac{1}{c}\right) = ?$$

Luego: $$f\left(\frac{1}{a}\right) = f\left(\frac{\frac{1}{a}}{S} \times S\right) = \frac{1}{S.a} f(S) = \frac{1}{S} \times \frac{1}{a} \times N$$

$$f\left(\frac{1}{b}\right) = f\left(\frac{\frac{1}{b}}{S} \times S\right) = \frac{1}{S.b} f(S) = \frac{1}{S} \times \frac{1}{b} \times N$$

$$f\left(\frac{1}{c}\right) = f\left(\frac{\frac{1}{c}}{S} \times S\right) = \frac{1}{S.c} f(S) = \frac{1}{S} \times \frac{1}{c} \times N.$$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—9

A

EJEMPLO 1.— **Repartir 105 en partes inversamente proporcionales a 3, 5 y 6.**

Solución: Tenemos: $$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{10 + 6 + 5}{30} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$$

$$f\left(\frac{7}{10}\right) = 105$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = ?$$

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = ?$$

$$f\left(\frac{1}{6}\right) = ?$$

Luego: $$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{7} \times \frac{1}{3} \times 105 = 50$$

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{10}{7} \times \frac{1}{5} \times 105 = 30$$

$$f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{10}{7} \times \frac{1}{6} \times 105 = 25$$

Respuesta.—A 3, 5 y 6 le corresponden 50, 30 y 25, respectivamente.

EJEMPLO 2.— Repartir 67 en partes inversamente proporcionales a $\frac{5}{6}$, $2\frac{1}{4}$ y 0.75.

Solución: Tenemos: $$2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

$$S = \frac{6}{5} + \frac{4}{9} + \frac{4}{3} = \frac{54 + 20 + 60}{45} = \frac{134}{45}$$

$$f\left(\frac{134}{45}\right) = 67$$

$$f\left(\frac{6}{5}\right) = ?$$

$$f\left(\frac{4}{9}\right) = ?$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = ?$$

Luego: $$f\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{45}{134} \times \frac{6}{5} \times 67 = 27$$

$$f\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{45}{134} \times \frac{4}{9} \times 67 = 10$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{45}{134} \times \frac{4}{3} \times 67 = 30.$$

Respuesta.—A $\frac{5}{6}$, $2\frac{1}{4}$ y 0.75 le corresponden 27, 10 y 30 respectivamente.

B Repartir en partes inversamente proporcionales:

1. 34 entre 3, 4 y 8
2. 420 entre 5, 6 y 10
3. 58 entre $\frac{2}{5}$, 0.5 y 3
4. 220 entre 0.75, $\frac{5}{7}$ y 5
5. 36.1 entre $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{6}$
6. 245.3 entre 4, 8 y 12.

4—10. REGLA DE COMPAÑIA.—La regla de compañía o de sociedad tiene por objeto repartir la ganancia o pérdida de una compañía entre los socios que la forman. Desde luego, este repartimiento está en función del capital aportado y el tiempo que dura dicha aportación.

Los problemas de regla de compañía son problemas de reparto proporcional directo y pueden ser simples o compuestos.

a) **Regla de compañía simple.**— Una regla de compañía es simple cuando los capitales o los tiempos son iguales.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—10

A EJEMPLO 1.— **Juan, Luis y Pedro forman una sociedad para establecer una industria de jabones. Juan aporta $ 120,000, Luis $ 100,000 y Pedro $ 60,000. Si después de un año obtienen una ganancia de $ 80,000, ¿cuánto le corresponde a cada uno?**

Solución: Como el tiempo es el mismo, la ganancia se reparte directamente proporcional entre los capitales.

Tenemos: $S = \$\,120{,}000 + \$\,100{,}000 + \$\,60{,}000 = \$\,280{,}000$

$$f(280{,}000) = 80{,}000$$
$$f(120{,}000) = ?$$
$$f(100{,}000) = ?$$
$$f(60{,}000) = ?$$

Luego: $$f(120{,}000) = \frac{120{,}000}{280{,}000} \times 80{,}000 = 34{,}285.71$$

$$f(100{,}000) = \frac{100{,}000}{280{,}000} \times 80{,}000 = 28{,}571.43$$

$$f(60{,}000) = \frac{60{,}000}{280{,}000} \times 80{,}000 = 17{,}142.86$$

Respuesta.—A Juan le corresponde $ 34,285.71, a Luis $ 28,571.43 y a Pedro $ 17,142.86.

EJEMPLO 2.— **César emprende un negocio, a los 8 meses admite a José como socio y 6 meses después a Miguel. Si cada socio impuso igual capital y después de un año y medio de iniciado el negocio se liquidó éste con una pérdida de $ 48,000, ¿cuánto pierde cada socio?**

Solución: Como los capitales son iguales, la pérdida se reparte directamente proporcional entre los tiempos.

Tenemos: César permaneció 18 meses, José 10 meses y Miguel 4 meses.

$$S = 18 \text{ me} + 10 \text{ me} + 4 \text{ me} = 32 \text{ me}.$$

$$f(32) = 48{,}000$$

$$f(18) = ?$$

$$f(10) = ?$$

$$f(4) = ?$$

Luego: $$f(18) = \frac{18}{32} \times 48{,}000 = 27{,}000$$

$$f(10) = \frac{10}{32} \times 48{,}000 = 15{,}000$$

$$f(4) = \frac{4}{32} \times 48{,}000 = 6{,}000$$

Respuesta.—César pierde \$ 27,000, José \$ 15,000 y Miguel \$ 6,000.

B Resolver los problemas siguientes:

1. Dos amigos se asocian para emprender un negocio. El primero aporta \$ 18,000 y el segundo \$ 30,000. Si después de un año tienen una ganancia de \$ 36,000, ¿cuánto le corresponde a cada uno?

2. Para establecer un almacén de zapatería, Alberto aporta \$ 40,000, Julio \$ 65,000 y Fernando \$ 35,000. Después de 6 meses tienen una ganancia de \$ 70,000, ¿cuánto le corresponde a cada uno?

3. Una compañía formada por los socios Alberto, Bernardo y Carlos tiene una pérdida de \$ 180,000. Si Alberto permaneció un año en la compañía, Bernardo 15 meses y Carlos un año y medio, ¿cuánto pierde cada socio?

4. Una sociedad duró 2 años y medio. Pedro y Antonio inician la sociedad; un año después ingresa Armando con igual capital que cada socio anterior. Si la ganancia es de \$ 156,000, ¿cuánto le corresponde a cada socio?

5. Tres amigos se asocian para establecer una farmacia. El primero aporta \$ 150,000, el segundo \$ 120,000 y el tercero \$ 100,000. Después de dos años se reparten una ganancia de \$ 111,000, ¿cuánto recibe cada uno?

6. Cuatro hermanos forman una sociedad para establecer una fábrica de cueros aportando los capitales siguientes: el primero \$ 120,000, el segundo \$ 80,000, el tercero \$ 200,000 y el cuarto \$ 500,000. Al cabo de dos años tienen un beneficio de \$ 150,000 y venden la fábrica por \$ 1,200,000. ¿Cuánto recibe cada uno?

7. Arturo, Ricardo y Guillermo emprenden un negocio aportando igual capital cada uno. A los 6 meses se retira Arturo y 8 meses después lo hace Ricardo. Después de un año y medio se liquida el negocio con una pérdida de \$ 76,000. ¿Cuánto pierde cada uno?

Una sociedad que duró dos años fue iniciada por Rodrigo y Víctor. Después de 6 meses ingresa Iván y 9 meses después ingresó Pedro. Si cada socio impuso igual capital y la ganancia fue de \$ 600,000, ¿cuánto le corresponde a cada uno?

9. Para emprender un negocio Pedro impuso \$ 150,000 y Luis los $\frac{3}{5}$ de lo que impuso Pedro y Juan el doble de lo que impuso Luis. El primer año perdieron \$ 70,000 y el segundo año ganaron \$ 154,000. ¿Cuál es la ganancia que corresponde a cada uno después de este segundo año?

10. Dos hermanos emprenden un negocio con \$ 180,000. Después de un año a uno de ellos le corresponde una ganancia de \$ 24,000 y al otro \$ 16,000. ¿Cuánto impuso cada uno al iniciar el negocio?

b) Regla de Compañía compuesta.—Una regla de compañía es compuesta cuando los capitales y los tiempos son diferentes.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—11

A

EJEMPLO 1.— Ricardo estableció una industria con \$ 200,000. Al año siguiente ingresa como socio Antonio con 150,000 de capital y al tercer año admiten como socio a Alberto con \$ 300,000. Si después de 5 años de iniciada la industria obtienen una ganancia de \$ 1,250,000, ¿cuánto le corresponde a cada socio?

Solución: Como los capitales y los tiempos son diferentes, la ganancia se reparte directamente proporcional entre los productos de cada capital y el tiempo respectivo, o sea:

Ricardo: $200{,}000 \times 5 = 1{,}000{,}000$

Antonio: $150{,}000 \times 4 = 600{,}000$

Alberto: $300{,}000 \times 3 = 900{,}000$

Tenemos: $S = \$\ 1{,}000{,}000 + \$\ 600{,}000 + \$\ 900{,}000$

$= \$\ 2{,}500{,}000$

$$f(2{,}500{,}000) = 1{,}250{,}000$$
$$f(1{,}000{,}000) = ?$$
$$f(\ 600{,}000) = ?$$
$$f(\ 900{,}000) = ?$$

Luego: $$f(1{,}000{,}000) = \frac{1{,}000{,}000}{2{,}500{,}000} \times 1{,}250{,}000 = 500{,}000$$

$$f(\ 600{,}000) = \frac{600{,}000}{2{,}500{,}000} \times 1{,}250{,}000 = 300{,}000$$

$$f(\ 900{,}000) = \frac{900{,}000}{2{,}500{,}000} \times 1{,}250{,}000 = 450{,}000$$

Respuesta.—A Ricardo le corresponden $ 500,000, a Antonio $ 300,000 y a Alberto $ 450,000.

EJEMPLO 2.— **Carlos y Manuel forman una sociedad para establecer un negocio. Carlos aportó inicialmente $ 24,000 y después de 10 meses impuso $ 6,000 más. Manuel empezó con $ 20,000, pero después de 6 meses retira $ 5,000. Si después de un año y medio obtienen una ganancia de $ 78,000, ¿cuánto le corresponde a cada uno?**

Solución: Como los capitales han variado dentro de un tiempo máximo de 18 meses, la ganancia se reparte entre:

Carlos: $(24{,}000 \times 10) + (30{,}000 \times 8) = 480{,}000$

Manuel: $(20{,}000 \times 6) + (15{,}000 \times 12) = 300{,}000$

Tenemos: $S = \$\ 480{,}000 + \$\ 300{,}000 = \$\ 780{,}000$

$$f(780{,}000) = 78{,}000$$
$$f(480{,}000) = ?$$
$$f(300{,}000) = ?$$

Luego: $$f(480{,}000) = \frac{480{,}000}{780{,}000} \times 78{,}000 = 48{,}000$$

$$f(300{,}000) = \frac{300{,}000}{780{,}000} \times 78{,}000 = 30{,}000$$

Respuesta.—A Carlos le corresponden $ 48,000 y a Manuel $ 30,000.

B **Resolver los problemas siguientes:**

1. **Juan inicia un negocio con $ 50,000, transcurridos 4 meses admite como socio a Pedro quien aporta $ 35,000. Si después de un año de iniciado el negocio obtienen una ganancia de $ 44,000, ¿cuánto le corresponde a cada uno?**

2. **Alberto establece un negocio con $ 18,000; después de 4 meses admite como socio a Gregorio cuyo aporte es $ 15,000, y 2 meses después ingresa Miguel con $ 27,000. Si después de un año tienen una ganancia de $ 83,000, ¿cuánto le corresponde a cada socio?**

3. **Una sociedad duró 3 años. Augusto estuvo todo el tiempo, Gonzalo ingresó después de un año y Carlos ingresó 6 meses después. Las aportaciones fueron de $ 300,000, $ 500,000 y $ 200,000 respectivamente. Si se tuvo una pérdida de $ 88,000, ¿cuánto perdió cada uno?**

4. **Dos socios emprenden un negocio con un capital de $ 60,000, de los cuales el primero impone $ 35,000 y el segundo el resto. Después de 4 meses el primero retira $ 5,000, después de 6 meses (de iniciado el negocio) el segundo retira $ 10,000. Si el negocio duró un año y tuvieron una pérdida de $ 31,000, ¿cuánto perdió cada uno?**

5. **Una sociedad duró 2 años. Amadeo la inicia con $ 36,000, a los 6 meses agregó $ 4,000 y 10 meses después $ 8,000 más; Bernardo empieza con $ 30,000 y un año después retira $\frac{1}{3}$ de su capital; Oscar comienza con $ 9,000. Si tienen una ganancia de $ 560,000, ¿cuánto le corresponde a cada uno?**

PORCENTAJE

4—11. POR CIENTO.— En el comercio y las finanzas es frecuente el uso de las frases: "el 50 por ciento de", "el 20 por ciento de", "el 10 por ciento de", etc.

El término **por ciento** cuyo símbolo es %, significa "por cada 100". Así, cuando afirmamos que "el 20 por ciento de alumnos de un Centro Educativo son deportistas", queremos decir que "20 de cada 100 alumnos son deportistas" y podemos expresarlo en las formas siguientes: $\frac{20}{100}$ (como fracción decimal), 0.20 (como numeral decimal) y 20 % (como por ciento).

Análogamente, en el cuadro siguiente tenemos otros ejemplos:

	Fracción decimal	Numeral decimal	Por ciento
2 por ciento	$\frac{2}{100}$	0.02	2 %
10 por ciento	$\frac{10}{100}$	0.10	10 %
25 por ciento	$\frac{25}{100}$	0.25	25 %
50 por ciento	$\frac{50}{100}$	0.50	50 %
100 por ciento	$\frac{100}{100}$	1.00	100 %

4—12. PORCENTAJE.— Analicemos el problema siguiente:

Si un capital de \$ 5,000 produjo una ganancia de \$ 500, ¿cuál es la ganancia que produce \$ 100?

Tenemos: $f(5{,}000) = 500$

$f(100) = ?$

$f(kx) = kf(x)$

$$\text{Luego:}\quad f(100) = f\left(\frac{100}{5{,}000}\cdot \times 5{,}000\right) = \frac{100}{5{,}000}\, f(5{,}000)$$

$$= \frac{100}{5{,}000} \times 500 = 10. \quad \text{(Proporc. directa)}$$

Aquí, \$ 100 produce una ganancia de \$ 10; en este caso, se afirma que 10 es el **porcentaje de ganancia** o que la ganancia es el 10 %.

Luego, podemos decir:

Si $f : A \longrightarrow B$ es una proporcionalidad directa, tal que $100 \in A$, se llama porcentaje al valor $f(100)$.

De $f(100) = \frac{100}{5{,}000} \cdot f(5{,}000)$, se deduce:

$$\frac{f(100)}{100} = \frac{f(5{,}000)}{5{,}000} \quad ó \quad \frac{f(5{,}000)}{5{,}000} = \frac{f(100)}{100}$$

En este ejemplo, \$ 5,000 representa el **capital**, $f(5{,}000)$ la **ganancia** y $f(100)$ el **porcentaje** (10 %).

En general, si x representa un número cualquiera (capital, objetos, etc.), $f(x)$ el tanto por ciento del número dado y $f(100)$ el porcentaje, tenemos:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(100)}{100}$$

Esta es la **fórmula** que nos permite resolver problemas sobre porcentaje.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—12

A EJEMPLO 1.—Hallar el 12 % de 600.

Solución: Tenemos: $f(100) = 12$

$x = 600$

$f(x) = ?$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(100)}{100}$$

Luego: $$\frac{f(x)}{600} = \frac{12}{100}$$

$$f(x) = \frac{600 \times 12}{100} = 72.$$

Respuesta.—El 12 % de 600 es 72.

EJEMPLO 2.— ¿Qué tanto por ciento de 700 es 35?

Solución: Tenemos: $f(100) = ?$

$$x = 700$$

$$f(x) = 35$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(100)}{100}$$

Luego: $$\frac{35}{700} = \frac{f(100)}{100}$$

$$f(100) = \frac{35 \times 100}{700} = 5.$$

Respuesta.—35 es el 5 % de 700.

EJEMPLO 3.— ¿Cuál es el capital si \$ 360.90 es su 18%?

Solución: Tenemos: $x = ?$

$$f(x) = 360.90$$

$$f(100) = 18$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(100)}{100}$$

Luego: $$\frac{360.90}{x} = \frac{18}{100}$$

$$x = \frac{360.90 \times 100}{18} = 2{,}005$$

Respuesta.—El capital es \$ 2,005.

B Hallar el:

1. 15 % de 720
2. 20 % de 450.50
3. 2.5 % de 2,000
4. 10.5 % de 150,000
5. $\frac{1}{2}$ % de 320
6. $33\frac{1}{3}$ % de 150

¿Qué tanto por ciento de:

7. 3,850 es 539?
8. 20,640 es 3715.2?
9. 1,582 es 632.8?
10. 820.40 es 615.30?

¿Cuál es el número si:

11. 52 es el 42 %?
12. 1,179 es el 15 %?
13. 168.04 es el 20 %?
14. 6,175.50 es el 30 %?
15. 0.6 es el 0.5 %?
16. 18,750 es el 12.5 %?

4—13. PROBLEMAS CUYAS SOLUCIONES IMPLICAN PORCENTAJE

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—13

A EJEMPLO 1.— El precio de contado de un juego de muebles de sala es \$ 20,912. Para adquirirlo a plazos, debe pagarse un recargo del 25%. Si la cuota inicial es \$ 4,540 y el resto debe cancelarse en 18 meses, ¿cuánto se pagará mensualmente?

Solución: Tenemos: $x = 20{,}912$

$$f(100) = 25$$

$$f(x) = ?$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(100)}{100}$$

Luego: $$\frac{f(x)}{20{,}912} = \frac{25}{100}$$

$$f(x) = \frac{20{,}912 \times 25}{100} = 5{,}228 \text{ pesos (Recargo)}$$

$$\begin{array}{r} 20{,}912 \\ +\ \ 5{,}228 \\ \hline 26{,}140 \end{array}$$ **pesos (Precio a plazos)**

$$\begin{array}{r} 26{,}140 \\ -\ \ 4{,}540 \\ \hline 21{,}600 \end{array}$$ **pesos (Resto)**

$$\begin{array}{r|l} 21\not{6}00 & 18 \\ \hline 36 & 1{,}200 \text{ pesos (Pago mensual)} \\ 000 & \end{array}$$

Respuesta.—Mensualmente se pagará $ 1,200.

EJEMPLO 2.— En un aula de 50 alumnos del 2do. Año, Juan y Pedro postulan para ser delegados ante el Consejo Estudiantil del Plantel. Si Juan obtuvo 32 votos y Pedro 18 votos, ¿qué tanto por ciento obtuvo cada uno?

Solución: Tenemos: $x = 50$

$$f(x) = 32$$

$$f(100) = ?$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(100)}{100}$$

Luego: $\frac{32}{50} = \frac{f(100)}{100}$

$$f(100) = \frac{32 \times 100}{50} = 64$$

(64 % votos de Juan)

100 % − 64 % = 36 % (Votos de Pedro).

Respuesta.—Juan obtuvo el 64% y Pedro el 36% de votos.

EJEMPLO 3.— En una granja el 34% de aves son gallinas y el 56% son pollos. Si hay 75 patos, ¿cuántas aves hay en la granja?

Solución: Tenemos: 34% + 56% = 90% (gallinas y pollos)

100% − 90% = 10% (patos)

$$x = ?$$

$$f(x) = 10\%$$

$$f(100) = 75$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(100)}{100}$$

Luego: $\frac{75}{x} = \frac{10}{100}$

$$x = \frac{75 \times 100}{10} = 750$$

Respuesta.—En la granja hay 750 aves.

B Resolver los problemas siguientes:

1. De 50 alumnos de un aula del 1er. Año que rindieron un examen escrito de matemática, el 16% salieron desaprobados. ¿Cuántos alumnos aprobaron la prueba?
2. Por la venta a plazos de una brilladora se cobra $ 12,400 y vendiéndola al contado tiene un descuento del 24%. ¿Cuál es el precio al contado de dicho artefacto?
3. De 60 problemas que se propuso resolver una alumna, solucionó satisfactoriamente 45 problemas y el resto no pudo resolverlo. ¿Qué tanto por ciento no resolvió?
4. En un aula del 3er. Año, 12 alumnos fueron desaprobados en un examen escrito de matemática. Si este número representa el 25%, ¿cuántos alumnos hay en dicha aula?
5. Después de gastar el 76% de mi dinero me quedo con $ 120. ¿Cuánto tenía?
6. Un empleado gana $ 3,200 mensuales, de los cuales invierte: el 40% para pagar su pensión, el 24% en ropa y el 15% en otros gastos. Si el resto lo ahorra, ¿cuánto ahorra mensualmente?
7. Un comerciante perdió el 8% de su capital el 1er. año de iniciado su negocio y el 7% el año siguiente. Si ahora el negocio está valorizado en $ 76,500, ¿cuál era su capital inicial?
8. Tres personas establecen un negocio. Uno de ellos aporta el 40% del capital impuesto, el otro el 25% y el tercero $ 75,600. ¿Cuál es el capital inicial?
9. Un agente cobró $3,187.50 de comisión por la venta de 5 radios portátiles valorizados en $ 4,250 cada uno. ¿Qué tanto por ciento ganó?
10. Un vendedor recibe el 10% por la venta de un televisor valorizado en $ 10,500. Si paga una deuda que representa el 60% de su comisión, ¿cuánto le queda?
11. Una máquina de escribir cuesta $ 12,600. Si se compra a plazos, la cuota inicial es $ 3,600 y las mensualidades son de $ 480 por un período de 2 años. ¿Cuál es el tanto por ciento de recargo?
12. Vendí dos lotes de terreno por $ 182,000 cada uno. En uno de ellos perdí el 30% de lo que me costó y en el otro gané el 30%. ¿Gané o perdí? ¿Cuánto?

4—14. TANTO POR CIENTO MAS Y TANTO POR CIENTO MENOS.—Supongamos que un comerciante compra un artículo por \$ 400 pesos y lo vende por \$ 480. ¿A qué tanto por ciento más lo vendió?

Tenemos: $\$480 - \$400 = \$80$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(100)}{100}$$

Luego: $$\frac{80}{400} = \frac{f(100)}{100}$$

$$f(100) = \frac{80 \times 100}{400} = 20\%.$$

De modo que lo vendió con el 20% más, o sea que \$ 480 representa: 100% + 20% = 120% de 400.

Pero si lo hubiera vendido por \$ 320, la pregunta sería: ¿A qué tanto por ciento menos lo vendió?

Tenemos: $\$400 - \$320 = \$80$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(100)}{100}$$

Luego: $$\frac{80}{400} = \frac{f(100)}{100}$$

$$f(100) = \frac{80 \times 100}{400} = 20\%$$

De tal manera que lo vendió en el 20% menos, o sea que \$ 320 representa: 100% − 20% = 80% de 400.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—14

¿Qué tanto por ciento más es:

1. 60 de 40?
2. 150 de 75?
3. 3,600 de 900?
4. 6,000 de 5,000?
5. 24,000 de 8,000?
6. 16,000 de 12,000?
7. 2,600,000 de 2,000,000?
8. 4,500,000 de 3,000,000?

¿Qué tanto por ciento menos es:

9. 30 de 40?
10. 35 de 70?
11. 1,350 de 1,800?
12. 2,700 de 4,500?
13. 30,000 de 60,000?
14. 0 de 1,200?
15. 255 de 300?
16. 42,000 de 60,000?

INTERES

4—15. INTERES SIMPLE.—Es práctica cotidiana que personas habituadas a ahorrar depositen su dinero en una cuenta de ahorros en el Banco. Naturalmente, el Banco pone a trabajar este dinero y de las ganancias que obtiene entrega una parte al depositante.

Consideremos el ejemplo siguiente con el fin de aclarar esta idea:

Juan abre una libreta de ahorros en un Banco con \$ 2,000, pero después de un año, al retirar su dinero, recibe \$ 2,320. ¿Qué representa esta suma adicional de \$ 320?

Aquí, \$ 320 representa la ganancia que recibe Juan por haber depositado su dinero y haberlo trabajado el Banco. A esta ganancia se le llama **interés.**

Suponiendo que Juan hubiera retirado su dinero después de 3 años y hubiera recibido \$ 960 de intereses, esto significaría que su dinero en cada año (unidad de tiempo) ha ganado \$ 320. A esta clase de interés se le denomina **interés simple.** Pero comúnmente los Bancos en la Sección Ahorros, después de cada unidad de tiempo suman al capital el interés ganado, formando así un nuevo capital que producirá un nuevo interés; a esta clase de interés se le llama **interés** compuesto. En nuestro curso nos referiremos solamente al interés simple.

En lo que respecta al tiempo, generalmente se considera como unidad de tiempo **el año.** "Por eso, cuando no se especifica nada sobre cómo es el tanto por ciento, se sobreentiende que es anual". Asimismo, comercialmente el año se considera de 360 días y el mes de 30 días; pero cuando el tiempo se refiere a dos fechas determinadas dentro de un mismo año o a un período no mayor de un año, comúnmente se consideran todos los días que tiene cada mes. Así, por ejemplo, entre el 12 de marzo y el 15 de junio hay: 19 días de marzo, 30 días de abril y 15 días de junio que hacen un total de 64 días.

Los elementos y símbolos convencionales que se utilizan en el interés son:

I (interés),
C (capital),
r (rata, tasa porcentual o tanto por ciento) y
t (tiempo).

El interés simple es directamente proporcional al capital y al tiempo, desde luego con dos variables; por consiguiente, el interés es una proporcionalidad compuesta directa, es decir,

$$I = f(C, t).$$

Luego, podemos decir:

Interés simple es toda proporcionalidad compuesta directa producida por un capital C en un tiempo t.

Es convención de que el capital y el interés estén expresados en una misma unidad monetaria, el peso por ejemplo.

4—16. DEDUCCION DE LA FORMULA DEL INTERES SIMPLE.— Sabemos que

$$I = f(C, t).$$

Además, el tanto por ciento r correspondiente a la unidad de tiempo es:

$$r = f(100, 1)$$

Esta fórmula expresa que r es el interés producido por 100 pesos en la unidad de tiempo.

$$\text{Luego:}\quad I = f(C, t) = f\left(\frac{C}{100} \times 100,\ \frac{t}{1} \times 1\right)$$

$$= \frac{C}{100} \times \frac{t}{1} \times f(100, 1) = \frac{C}{100} \times \frac{t}{1} \times r$$

O sea: $\boxed{I = \dfrac{C \times r \times t}{100}}$, fórmula del interés en función del capital, del tanto por ciento y del tiempo.

NOTA IMPORTANTE.—Para aplicar esta fórmula, conviene advertir que el tanto por ciento r debe expresarse en la misma unidad de tiempo que el tiempo dado t, pudiendo ser anual, mensual o diario.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—15

A

EJEMPLO 1.— ¿Cuál es el interés producido por $ 18,500 al 16% durante 3 años?

Solución: Tenemos:

$I = ?$

$C = 18{,}500$ pesos

$r = 16\%$ anual

$t = 3$ a

$$I = \frac{C \times r \times t}{100}$$

$$\text{Luego:}\quad I = \frac{18{,}500 \times 16 \times 3}{100} = 8{,}880$$

Respuesta.—El interés es $ 8,880.

EJEMPLO 2.— Un capital de $ 120,000 se presta al 15% durante 5 años 8 meses. ¿Qué interés producirá?

Solución: Tenemos:

$C = 120{,}000$ pesos

$$r = \frac{15}{12} = 1.25\% \text{ mensual}$$

$t = 5$ a 8 me $= 68$ me

$$I = \frac{C \times r \times t}{100}$$

$$\text{Luego:}\quad I = \frac{120{,}000 \times 1.25 \times 68}{100} = 102{,}000$$

Respuesta.—Producirá $ 102,000 de interés.

EJEMPLO 3.— ¿Qué interés han producido $ 3,800 prestados al 14.4% durante 6 meses 20 días?

Solución: Tenemos:

$I = ?$

$C = 3{,}800$ pesos

$$r = \frac{14.4}{360} = 0.04\% \text{ diario}$$

$t = 6$ me 20 d $= 200$ d

$$I = \frac{C \times r \times t}{100}$$

$$\text{Luego:}\quad \frac{3{,}800 \times 0.04 \times 200}{100} = 304.$$

Respuesta.—El interés producido es $ 304.

B Resolver los problemas siguientes:

Hallar el interés producido por $ 3,500 al 15% durante 4 años.

¿Cuál es el interés producido por $ 90,000 al 16.5% durante 5 años?

¿Qué interés produce un capital de $ 24,000 impuesto al 16% durante 2 años 6 meses?

Juan hace un préstamo de $ 24,000 al 15.5% durante 1 año 3 meses. ¿Qué interés pagará?

Hallar el interés que producen $ 6,800 al 17% durante 2 años 3 meses 9 días.

Ricardo hace un préstamo de $ 18,600 al 20% durante 1 año 3 meses 18 días. ¿Cuánto de interés pagará?

María prestó $ 6,000 a Julia el 6 de Agosto, suma que fue devuelta conjuntamente con sus intereses el 3 de Enero del año siguiente. Si el préstamo se hizo al 24%, ¿cuánto recibió en total María?

¿Qué interés han producido $ 6,500 al 16%, prestados el 20 de Mayo y devueltos el 10 de Julio del mismo año?

4—17. PROBLEMAS QUE IMPLICAN HALLAR EL CAPITAL. EL TANTO POR CIENTO Y EL TIEMPO.— Para resolver estos problemas, debe escribirse la fórmula del interés y luego despejar el elemento que se desea hallar.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—16

A **EJEMPLO 1.—** ¿Cuál es el capital que impuesto al 16% durante 5 años ha producido $ 800 de interés?

Solución: Tenemos: $C = ?$

$r = 16\%$ anual

$t = 5$ a

$I = 800$ pesos

$$I = \frac{C \times r \times t}{100}$$

Luego: $$C = \frac{100 \times I}{r \times t}$$

$$C = \frac{100 \times 800}{16 \times 5} = 1,000.$$

Respuesta.—El capital es $ 1,000.

B Resolver los problemas siguientes:

1. Hallar el capital que prestado al 14% ha producido $ 350 en 2 años.
2. ¿Cuál es el capital que prestado al 16.5% ha producido $ 4,313.40 de interés durante 5 años?
3. Una suma de dinero prestada al 15% durante 5 años 4 meses ha producido $ 840 de interés. ¿Cuánto se prestó?
4. Una persona otorgó a un comerciante en calidad de préstamo cierta suma de dinero al 18%. Si después de 1 año 8 meses el comerciante pagó $ 9,600 de interés, ¿cuál fue la suma prestada?
5. ¿Cuál es el capital que prestado al 16% durante 3 años 5 meses 20 días ha producido $ 850 de interés?
6. Una persona hace un préstamo de cierta suma de dinero al 20% el 10 de marzo. El 18 de mayo del mismo hace la devolución de dicho préstamo conjuntamente con sus intereses. Si el interés ascendía a $ 460, ¿cuánto abonó?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—17

A **EJEMPLO 1.—** ¿A qué tanto por ciento anual se prestaron $ 36,000 que en 5 años 4 meses ha producido $ 28,800 de interés?

Solución: Tenemos: $r = ?$

$C = 36,000$ pesos

$t = 5$ a 4 me $= 64$ me

$I = 28,800$ pesos

$$I = \frac{C \times r \times t}{100}$$

Luego: $$r = \frac{100 \times I}{C \times t}$$

$$r = \frac{100 \times 28,800}{36,000 \times 64} = \frac{15}{12}\ \%\ \text{mensual}$$

$$r = \frac{15}{12} \times 12 = 15\%\ \text{anual.}$$

Respuesta.—Se impuso al 15% anual.

B Resolver los problemas siguientes:

1. ¿A qué tanto por ciento se impusieron \$ 15,000 que en 2 años ha producido \$ 4,800 de interés?
2. Un capital de \$ 1,700 se prestó durante 3 años y produjo \$ 918 de interés. ¿A qué tanto por ciento anual se prestó?
3. Se pagó \$ 384 de interés después de 4 meses por un préstamo de \$ 4,800. ¿A qué tanto por ciento anual se prestó?
4. Por \$ 9,000 que presté durante 6 meses he recibido \$ 900 de interés. ¿A qué tanto por ciento anual presté?
5. Julio prestó a su amigo Juan \$ 1,800. Después de 2 años 2 meses 20 días, Juan devolvió el capital y el interés ascendiente a \$ 2,600. ¿qué tanto por ciento anual se hizo el préstamo?
6. Humberto realiza un préstamo el 6 de junio consistente en \$ 5,000 y hace la devolución, el 5 de agosto del mismo año, de la suma de \$ 5,200. ¿Qué tanto por ciento anual pagó?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—18

EJEMPLO 1.— *Por* \$ 6,000 prestados al 15% anual se pagaron \$ 208 de interés. ¿Cuánto tiempo estuvo prestada dicha cantidad?

Solución: Tenemos:

$$C = 6{,}000 \text{ pesos}$$
$$r = 15\% \text{ anual}$$
$$I = 208 \text{ pesos}$$
$$t = ?$$

$$I = \frac{C \times r \times t}{100}$$

Luego:

$$t = \frac{100 \times I}{C \times r}$$

$$t = \frac{100 \times 208}{6000 \times 15} = 0.23111\ldots \text{ años}$$

$$t = 0.23111\ldots = \frac{231 - 23}{900}$$

$$= \frac{208}{900} = \frac{104}{450}$$

$$t = \frac{104}{450} \times 12 = 2.77 \text{ me} = 2 \text{ me } 23 \text{ d.}$$

Respuesta.—Estuvo prestada 2 meses 23 días.

B Resolver los problemas siguientes:

1. ¿Qué tiempo estuvieron prestados \$ 4,500 que al 20% anual produjeron \$ 300 de interés?
2. Para producir \$ 168 de interés, ¿qué tiempo estarán impuestos \$ 3,000 al 24% anual?
3. Ricardo prestó \$ 200,000 al 16% anual. ¿Al cabo de cuánto tiempo recibió \$ 40,000 de interés?
4. Carlos solicitó un préstamo de \$ 2,500 al 15% anual. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que el interés sea igual al capital?
5. Hallar el tiempo que transcurrirá para que un capital de \$ 4,000 impuesto al 18% anual produzca un interés igual al de otro capital de \$ 6,000 prestado al 12% anual durante 2 años 8 meses.
6. Una suma de dinero de \$ 7,200 prestada al 18% anual se devuelve el 10 de julio del mismo año pagando \$ 126 de interés. ¿En qué fecha se hizo el préstamo?

DESCUENTO

4—18. DESCUENTO COMERCIAL.— La compra de artículos en el comercio no siempre se hace "al contado" (operación comercial en el instante de la compra), sino pagándose en un plazo de tiempo convenido. Así, por ejemplo:

Una casa comercial vendió un televisor a Juan quien pagó en efectivo \$3,000 y firmó un documento (letra de cambio) por \$10,000 que vence dentro de 90 días.

Si la casa comercial desea convertir este documento en dinero efectivo, puede negociarlo con un Banco antes de la fecha de su vencimiento. Supongamos que el Banco acepte la letra en el plazo fijado; naturalmente el dinero que entrega el Banco gana interés; por tal razón, la casa comercial no recibirá los \$10,000 escritos en el documento, sino una suma menor tal como \$9,550 por ejemplo. Esta diferencia de \$450 es lo que el Banco descuenta por concepto del interés que \$10,000 ganaría en 90 días. Esta cantidad (\$450) que el Banco descuenta por el hecho de efectuar el pago antes de la fecha fijada se denomina descuento comercial.

Como podemos observar, el descuento se realiza sobre \$10,000 (valor nominal), la cual no es un trato del todo justo, porque si el descuento se realizaría sobre el efectivo que entrega el Banco, en este caso \$9,550, resultaría:

$$t = 90 \text{ d} = 3 \text{ me} = \frac{3}{12} \text{ a} = 0.25 \text{ a}$$

Si $r = 18\%$, tenemos:

$$I = \frac{9{,}550 \times 18 \times 0.25}{100} = 429.75$$

O sea que la casa comercial recibe: \$ 450 — \$ 429.75 = \$ 20.2 menos. Por tal razón, el descuento comercial se considera un conve nio aceptable cuando se refiere a capitales de menor cuantía y tiem pos breves, porque la cantidad que se pierde es relativamente pequeñ

Luego, podemos decir:

Descuento comercial es el interés que produce el valor nomin de una letra desde el día que se negocia hasta la fecha de su venc miento.

Si: Vn representa el valor nominal,

D representa el descuento y

Va representa el valor actual o valor efectivo.

tenemos:

$$D = Vn - Va.$$

El descuento comercial guarda estrecha analogía con el interé simple, donde Vn (valor nominal) representa el capital C y D (des cuento) representa el interés I; por tal razón, el procedimiento qu se emplea en la solución de problemas de descuento es semejant al del interés, y su fórmula es:

$$D = \frac{Vn \times r \times t}{100}$$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—19

A **EJEMPLO 1.**— Una letra de cambio por \$ 12,000 fue negociada al 18 60 días antes de su vencimiento. ¿Cuál es el descuent

Solución: Tenemos: $Vn = 12{,}000$ pesos

$r = 18\%$

$t = 60 \text{ d} = 2 \text{ me} = \frac{2}{12} \text{ a} = \frac{1}{6} \text{ a}$

$D = ?$

$$D = \frac{Vn \times r \times t}{100}$$

Luego: $$D = \frac{12{,}000 \times 18 \times \frac{1}{6}}{100} = 360.$$

Respuesta.—El descuento es \$ 360.

EJEMPLO 2.— Una letra por \$ 6,420 fue negociada al 24% faltando 4 meses para su vencimiento. ¿Cuál es el valor actual?

Solución: Tenemos: $Vn = 6{,}420$ pesos

$r = 24\%$

$t = 4 \text{ me} = \frac{1}{3} \text{ a}.$

$Vn = ?$

$Va = Vn - D$

$$D = \frac{Vn \times r \times t}{100}$$

Luego. $$D = \frac{6{,}420 \times 24 \times \frac{1}{3}}{100} = 513.60$$

$Va = \$\ 6{,}420 - \$\ 513.60 = \$\ 5{,}906.40$

Respuesta.—El valor actual es \$ 5,906.40.

EJEMPLO 3.—¿Cuál es el valor nominal de una letra que vence el 20 de mayo y que fue descontada el 12 de marzo del mismo año al 20% por \$ 345?

Solución: Tenemos: $Vn = ?$

$t = 69 \text{ d} = \frac{69}{360} \text{ a} = \frac{23}{120} \text{ a}.$

$r = 20\%$

$D = 345$ pesos

$$Vn = \frac{100 \times D}{r \times t}$$

Luego: $$Vn = \frac{100 \times 345}{20 \times \frac{23}{120}} = 9{,}000$$

Respuesta.—El valor nominal de la letra es de \$ 9,000.

EJEMPLO 4.— Una letra por \$ 7,200 fue descontada 5 meses antes de s vencimiento habiéndose recibido \$ 6,000. ¿A qué tanto p ciento se descontó?

Solución: Tenemos: $Vn = 7{,}200$ pesos

$$t = 5 \text{ me} = \frac{5}{12} \text{ a}$$

$Va = 6{,}000$ pesos

$$D = \$\,7{,}200 - \$\,6{,}000 = \$\,1{,}200$$

$$r = \frac{100 \times D}{Vn \times t}$$

Luego: $$r = \frac{100 \times 1{,}200}{7{,}200 \times \frac{5}{12}} = 40$$

Respuesta.—Se descontó al 40%.

EJEMPLO 5.— ¿Cuánto tiempo antes de su vencimiento fue descontada u letra por \$ 3,600 al 18%, si se descontaron \$ 540?

Solución: Tenemos: $t = ?$

$Vn = 3{,}600$ pesos
$r = 18\%$
$D = 540$ pesos

$$t = \frac{100 \times D}{Vn \times r}$$

Luego: $$t = \frac{100 \times 540}{3600 \times 18} = \frac{5}{6}$$

$$t = \frac{5}{6} \text{ a} = \frac{5}{6} \times 12 \text{ me} = 10 \text{ me.}$$

Respuesta.—Fue descontada 10 meses antes de su vencimiento.

Resolver los problemas siguientes:

1. ¿Cuál es el descuento de una letra de \$ 2,500 negociada al 24% 60 días antes de su vencimiento?
2. Faltando 2 meses 20 días para su vencimiento una letra de \$ 1,800 se descuenta al 20%. ¿Cuál es el descuento?
3. ¿Cuál es el valor actual de una letra de \$ 10,600 descontada al 15% 4 meses antes de su vencimiento?
4. Una letra de \$ 8,400 que vence el 18 de julio se negocia el 10 de mayo del mismo año al 22%. Hallar el descuento y el valor actual.
5. Hallar el valor nominal de una letra que vence dentro de 4 meses y que descontada al 18% tiene una rebaja de \$ 4,500.
6. Una letra que vence el 15 de diciembre es negociada el 4 de setiembre del mismo año al 20%, la misma que tuvo un descuento de \$ 212.50. ¿Cuál es el valor nominal y cuál el valor actual de la letra?
7. ¿A qué tanto por ciento se descontó una letra de \$ 24,000 si se obtuvo una rebaja de \$ 1,200 por haber sido negociada 3 meses antes de su vencimiento?
8. El 18 de marzo fue negociada una letra de \$ 2,520 que vence el 5 de mayo y se rebajan \$ 67.2. Hallar el valor actual y el tanto por ciento de descuento.
9. Hallar el tiempo que falta para el vencimiento de una letra de \$ 8,000 que descontada al 20% se ha rebajado en \$ 400.
10. Si por una letra de \$ 18,600 negociada al 19% se descuentan \$ 589, ¿qué tiempo falta para su vencimiento?
11. El 8 de setiembre se negocia una letra de \$ 3,600 al 20%, habiéndose recibido por ella \$ 3,360. ¿En qué fecha vence la letra?
12. ¿Cuál es el valor nominal de una letra que descontada faltando 1 mes 15 días para su vencimiento al 24% ha tenido una rebaja de \$ 60?
13. Una persona recibe \$ 3,360 por una letra de la cual se descontaron \$ 240 faltando 5 meses para su vencimiento. ¿Cuál es el valor nominal de la letra y cuál el tanto por ciento de descuento?
14. Una letra por \$ 12,000 fue descontada 3 meses 10 días antes de su vencimiento habiéndose recibido \$ 11,400. Hallar a qué tanto por ciento se descontó y cuánto.
15. Una letra por \$ 1,500 se descuenta al 2% mensual y se reciben \$ 1,410. ¿Cuánto es el descuento y qué tiempo falta para su vencimiento?
16. Por una letra que fue descontada al 1.5% mensual se reciben \$ 2,425. Si el descuento asciende a \$ 75, ¿cuál es el valor nominal y qué tiempo falta para su vencimiento?

MEZCLA

4—19. PROMEDIO.— Consideremos los ejemplos siguientes:

1. Un ciclista emplea 3 horas para ir de una ciudad a otr Si en la primera hora recorre 25 Km, en la segunda hora 20 Km en la tercera hora 15 Km, ¿cuál es la distancia media recorri por hora?

Tenemos: $$p \text{ (promedio)} = \frac{25 + 20 + 15}{3} = \frac{60}{3} = 20$$

Luego, la distancia media recorrida es 20 Km/h.

2. Un negociante compra 100 piñas por 600 pesos. Si ven 50 piñas a \$ 8 cada una, 30 a \$ 7 cada una y el resto a \$ 5 cad una, ¿cuál es el precio promedio de venta de cada piña.

Tenemos:

$$50 \times \$ 8 = \$ 400$$
$$30 \times \$ 7 = \$ 210$$
$$20 \times \$ 5 = \$ 100$$

$$p = \frac{400 + 210 + 100}{100} = 7.10$$

Luego, el precio promedio de venta de cada piña es \$ 7.10.

3. Carlos obtuvo las siguientes calificaciones en matemática:

En el 1er. bimestre 5,
en el 2do. bimestre 7,
en el 3er. bimestre 6,
en el 4to. bimestre 8, y
en el 5to. bimestre 6.

¿Cuál es su calificación definitiva (promedio)?

Tenemos: $$p = \frac{5 + 7 + 6 + 8 + 6}{5} = \frac{32}{5} = 6.4$$

Luego, la calificación final de Carlos en matemática es 6.4.

De donde se deduce:

Para hallar el promedio de varias cantidades, se suman dichas ntidades y esta suma se divide entre el número de ellas.

4—20. MEZCLA.—En el comercio, para la venta de ciertos ar culos tales como: granos, licores, aceites, etc., se mezcla, en algu s casos un mismo artículo pero de diferentes precios.

En la mezcla se presentan dos problemas: mezcla directa y mez a inversa.

a) Mezcla directa.— Un problema de mezcla es directo cuando e mezclan sustancias conocidas pero de precios diferentes con el fin e hallar el precio promedio.

Sean: $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ las cantidades que se mezclan,

$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ los precios respectivos y

p el precio promedio de la mezcla.

Tenemos: $c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3 + \ldots + c_np_n$ (precio total) y

$c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n$ (total de cantidades que se mezclan)

Luego: $$p = \frac{c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3 + \ldots + c_np_n}{c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n}.$$ **Es la fórmula.**

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—20

EJEMPLO 1.— Un comerciante compró 120 Kg de arroz a \$ 8 cada kilogramo, 100 Kg a \$ 7.50 el kilogramo y 80 Kg a \$ 6 cada kilogramo. ¿A cómo tendrá que vender el kilogramo de la mezcla para ganar \$ 0.70 en cada kilogramo?

Solución: Tenemos:

$$120 \times \$ 8 = \$ 960$$
$$100 \times \$ 7.50 = \$ 750$$
$$80 \times \$ 6 = \$ 480$$

Luego: $$p = \frac{960 + 750 + 480}{120 + 100 + 80} = \frac{2190}{300} = 7.30 \text{ pesos}$$

(precio promedio de c/Kg) y

\$ 7.30 + \$ 0.70 = \$ 8 (precio de venta de c/Kg).

Respuesta.—Tendrá que vender a \$ 8 c/Kg.

B Resolver los problemas siguientes:

1. Se mezclan 500 galones de gasolina de \$ 3.47 cada galón con 300 galones de \$ 8 el galón. ¿Cuál es el precio promedio de la mezcla?
2. ¿Cuál es el precio promedio de la mezcla de 60 lb de café a \$ 12.5 c/lb con 50 lb a \$ 14 c/lb y 40 lb a \$ 5.5 c/lb?
3. Un negociante compra 200 litros de vino a \$ 40 cada litro y lo mezcla con 150 litros de \$ 50 cada litro. ¿A como tiene que vender el litro de la mezcla para ganar \$ 8 en cada litro?
4. Un comerciante compra 300 Kg de frijol a \$ 15 c/Kg, 400 Kg a \$ 15.50 c/Kg y 450 Kg a \$ 17 el Kg. ¿A cómo debe vender el kilogramo de mezcla para ganar \$ 1.50 en cada kilogramo?
5. Un comerciante compra 200 botellas de aceite a \$ 18 la botella, 250 a \$ 18.50 cada botella y 300 botellas a \$ 20 cada botella. ¿A cómo tiene que vender la botella de la mezcla para ganar en total \$ 1,500?

b) Mezcla inversa.— Un problema de mezcla es inverso cuando se conocen los precios de las sustancias y el precio promedio y se desea hallar en qué proporción deben mezclarse las sustancias.

Sea, por ejemplo:

¿En qué proporción deben mezclarse las cantidades de maíz de \$ 11 cada libra y \$ 14 cada libra para vender a \$ 12 la libra?

Tenemos: $p_1 = \$\ 11$
$p = \$\ 12$
$p_2 = \$\ 14$

Comparando los precios, resulta:

$p_1 < p \quad (11 < 12)$
$p < p_2 \quad (12 < 14)$

Sabemos que a mayor cantidad (c_2) le corresponde menor precio (p_1) y a menor cantidad (c_1) le corresponde mayor precio (p_2), o sea:

$$c_2 \longrightarrow p - p_1 = 12 - 11 = 1$$
$$c_1 \longrightarrow p_2 - p = 14 - 12 = 2.$$

De donde: $\dfrac{c_2}{c_1} = \dfrac{1}{2}$ (Proporción)

Por consiguiente, deben mezclarse: $\dfrac{c_2}{c_1} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6} = \dots = \dfrac{n}{2n}$

Significa que: por 1 proporción de c_2 debe emplearse 2 proporciones de c_1.

En general: c_1 y c_2 son las cantidad que se mezclan,
p_1 y p_2 son los precios respectivos y
p es el precio promedio de la mezcla.

Pues: $p_1 < p$ y $p < p_2$.

Sabemos que: $\dfrac{c_1p_1 + c_2p_2}{c_1 + c_2} = p$

De donde: $c_1p_1 + c_2p_2 = c_1p + c_2p$

$$c_2p_2 - c_2p = c_1p - c_1p_1$$
$$c_2(p_2 - p) = c_1(p - p_1)$$
$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{p - p_1}{p_2 - p}$$ **Es la fórmula.**

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—21

A EJEMPLO 1.— ¿Qué cantidades de fríjoles de \$ 16 el Kg y \$ 21 cada kilogramo deben mezclarse para venderlas a \$ 18 el kilogramo?

Solución: Tenemos: $c_1 = ?$
$c_2 = ?$
$p_1 = 16$
$p_2 = 21$
$p = 18$

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{p - p_1}{p_2 - p}$$

Luego: $\dfrac{c_2}{c_1} = \dfrac{18 - 16}{21 - 18} = \dfrac{2}{3}$

Respuesta.—Pueden mezclarse 2 Kg de \$ 21 con 3 Kg de \$ 16; o también: 4 Kg, 6 Kg, 8 Kg, etc. de \$ 21 con 6 Kg, 9 Kg, 12 Kg,. etc. de \$ 16.

Como podemos observar, este tipo de problemas tiene muchas soluciones; pues, multiplicando o dividiendo por un mismo número las cantidades, se obtienen otras soluciones que cumplen con las condiciones del problema.

EJEMPLO 2.— Se quieren obtener 120 Kg de café que puedan venderse a $ 14 el kilogramo. ¿Cuáles son las cantidades de café de $ 12 y $ 15 cada kilogramo que deben mezclarse?

Solución: Tenemos: $c_1 + c_2 = 120$ Kg

$$p = \$\ 14$$
$$p_1 = \$\ 12$$
$$p_2 = \$\ 15$$
$$c_1 = ?$$
$$c_2 = ?$$
$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{p - p_1}{p_2 - p}$$

Luego:
$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{14 - 12}{15 - 12} = \frac{2}{1}$$
$$\frac{c_2 + c_1}{c_1} = \frac{1 + 2}{1}$$
$$\frac{120}{c_1} = \frac{3}{1}$$
$$c_1 = \frac{1 \times 120}{3} = 40$$
$$c_2 = 120 - 40 = 80$$

Respuesta.—Las cantidades deben ser 40 Kg de $ 15 y 80 Kg de $ 12.

B Resolver los problemas siguientes:

1. ¿Qué cantidades de maíz de $ 10 y $ 13 el Kg deben mezclarse para venderlas a $ 12 el kilogramo?
2. Para obtener una mezcla de aceite de $ 22 la botella, ¿qué cantidades de aceite de $ 20.50 y $ 24 serán necesarias para dicha mezcla?
3. ¿Qué cantidades de café de $ 11.50 el Kg habrá que mezclar con 20 Kg de café de $ 15.50 para vender a $ 14 el Kilogramo?
4. Se mezclan 90 lb de lenteja de $ 25 la libra con 60 lb de lenteja de otra calidad. ¿Qué precio debe tener cada libra de esta otra calidad para que la mezcla pueda venderse a $ 24?
5. Se quieren obtener 90 botellas de vino que se pueda vender a $ 40 la botella. ¿Cuáles son las cantidades de vino de $ 36 y $ 45 la botella que deben mezclarse?

6. ¿Qué cantidades de harina de $ 12 y $ 16.50 cada Kg deben mezclarse para obtener 135 Kg de $ 14?

4—21. ALEACION.— La aleación es una mezcla de metales que se realiza por medio de la fundición.

Los metales finos tales como el oro, la plata y el platino se unen en aleaciones con otros metales inferiores tales como: el cobre, el níquel, el estaño, etc.

4—22. LEY DE LOS METALES FINOS.— Se llama **ley de una aleación** a la cantidad de metal fino que hay en cada unidad de peso de la aleación. Así, por ejemplo, cuando en un Kg (1,000 g) de aleación hay 850 g de oro, la ley de aleación es: $850 \div 1{,}000 = 0.850$. Asimismo, cuando la ley de aleación es 0.860 por ejemplo, significa que hay 860 g de metal fino por cada Kg de aleación.

De modo que, si P es el peso total de la aleación, P_1 el peso del metal fino y L la ley de aleación, tenemos:

$$L = \frac{P_1}{P}$$

Generalmente, cuando el metal fino se refiere al oro, la ley puede expresarse en **kilates** y un kilate significa $\frac{1}{24}$ del peso total. Así, por ejemplo, cuando se afirma que un anillo de oro es de 18 kilates, significa que $\frac{18}{24}$ son de oro y $\frac{6}{24}$ son de metal inferior.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—22

A EJEMPLO 1.— Una medalla de oro de 16 kilates pesa 33 g. ¿Cuántos gramos de oro hay en la medalla?

Solución: Tenemos: $P = 33$ g

$$L = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$
$$P_1 = ?$$
$$L = \frac{P_1}{P}$$

Luego: $P_1 = L \cdot P$

$$P_1 = \frac{2}{3} \times 33 = 22.$$

Respuesta.—En la medalla hay 22 g de oro.

B **Resolver los problemas siguientes:**

1. ¿Cuál es la ley de aleación de 12 g de plata con 4 g de cobre?
2. Una cadena de oro pesa 80 g y contiene 30 g de cobre. ¿Cuál es la ley de aleación?
3. Un anillo de platino pesa 18 g. Si la ley de aleación es 0.730, ¿cuántos gramos de platino hay en el anillo?
4. Un prendedor de oro de 18 kilates pesa 20 g. ¿Cuántos gramos de oro hay en el prendedor?
5. Un objeto de plata contiene 42.5 g de plata. Si la ley de aleación es 0.850, ¿cuánto pesa el objeto?
6. Una pulsera contiene 20 g de oro de 16 kilates. ¿Cuánto pesa la pulsera?

4—23. MONEDA.— La moneda es un objeto mercantil con autorización y sello del gobierno de un país y sirve para facilitar las transacciones comerciales.

Las monedas de un país pueden ser de metal y billetes (monedas de papel) respaldando su valor por metales finos como son el oro y la plata.

La moneda de metal es una aleación de un metal fino con otros metales ordinarios tales como el estaño, níquel, cobre, bronce, etc. Así, por ejemplo, las monedas de metal que circulan en Colombia son el **peso** cuyo valor es 100 centavos. Además, circulan monedas de metal de 50 centavos, 20 centavos, 10 centavos y 5 centavos. Asimismo, circulan billetes cuyos valores son: $ 1, $ 2, $ 5, $ 10, $ 20, $ 50, $ 100.

4—24. LEY DE LAS MONEDAS.— La razón que existe entre la cantidad de metal fino y la cantidad total de metal se denomina **ley de la moneda**.

La ley de la moneda se expresa en milésimos; así, cuando la ley es 0.900, significa que en la aleación hay 900 partes de metal fino y 100 partes de metal ordinario.

4—25. PROBLEMAS SOBRE ALEACIONES.— Como una aleación es una mezcla de metales, los problemas sobre aleaciones se resuelven de manera semejante que los de mezcla directa o mezcla inversa, donde $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$ representan las leyes de los metales componentes, $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ los pesos respectivos, y L la ley de aleación.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—23

A EJEMPLO 1.— Si se mezcla 12 g de oro de 0.750 de ley con 20 g de 0.900 de ley y 24 g de 0.850 de ley, ¿cuál es la ley de aleación?

Solución: Tenemos: (Aleación directa)

$$12 \text{ g} \times 0.750 = 9 \text{ g}$$
$$20 \text{ g} \times 0.900 = 18 \text{ g}$$
$$24 \text{ g} \times 0.850 = 20.4 \text{ g}$$

$$L = \frac{L_1P_1 + L_2P_2 + L_3P_3}{P_1 + P_2 + P_3}$$

Luego: $$L = \frac{9 + 18 + 20.4}{12 + 20 + 24} = \frac{47.4}{56} = 0.846$$

Respuesta.—La ley de aleación es 0.846.

EJEMPLO 2.— ¿Qué cantidades de plata de 0.950 y 0.900 de ley será necesario mezclar para obtener una aleación de 40 g de plata de 0.920 de ley?

Solución: Tenemos: (Aleación inversa)

$$P_1 = ?$$
$$P_2 = ?$$
$$L_1 = 0.950$$
$$L_2 = 0.900$$
$$P_1 + P_2 = 40 \text{ g}$$
$$L = 0.920$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{L - L_2}{L_1 - L}$$

Luego: $$\frac{P_1}{P_2} = \frac{0.920 - 0.900}{0.950 - 0.920} = \frac{0.020}{0.030} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{P_1 + P_2}{P_2} = \frac{2 + 3}{3}$$

$$\frac{40}{P_2} = \frac{5}{3}$$

$$P_2 = \frac{40 \times 3}{5} = 24$$

$$P_1 = 40 - 24 = 16.$$

Respuesta.—Las cantidades que deben mezclarse son 24 g de 0.950 de ley y 16 g de 0.900 de ley.

B Resolver los problemas siguientes:

1. ¿Cuál es la ley de la aleación de 12 g de oro de 0.750 de ley con 20 g de 0.800 de ley?
2. Se hace una aleación de 50 g de plata de 0.940 de ley con 40 g de 0.920 de ley y 30 g de 0.950 de ley. ¿Cuál es la ley de aleación?
3. ¿Qué cantidades de platino de 0.800 y 0.850 de ley será necesario mezclar para obtener una aleación de 30 g de platino de 0.830 de ley?
4. Se desea obtener una aleación de 60 g de oro de 16 kilates. ¿Qué cantidades de oro de 17 kilates y 14 kilates deben mezclarse?
5. La ley de una aleación es 0.820. Si se mezclan 20 g de plata de 0.850 de ley con 30 g de plata, ¿cuál es la ley de los 30 g de plata?
6. Se hace una aleación de 10 g de plata de 0.900 de ley con otra cantidad del mismo metal de 0.930 de ley. Si la ley de aleación es 0.924, ¿qué cantidad de plata de 0.930 de ley será necesaria?
7. Se hace una aleación de 90 g de oro de 0.800 de ley con 30 g de oro. Si la ley de aleación es de 0.750, ¿cuál es la ley de los 30 g de oro?
8. Si 0.810 es la ley de una aleación de 60 g de platino de 0.800 de ley con 15 g de platino, ¿cuál es la ley de los 15 g de platino?

4—26. CAMBIO. Supongamos que Juan, ciudadano y residente colombiano, se propone viajar a los Estados Unidos de Norte América con fines turísticos. Para tal efecto, Juan debe adquirir una determinada cantidad de dólares (moneda de ese País); y la adquiere por medio de la compra con pesos colombianos en el Banco de la República.

Pero puede ocurrir que Manuel, otro turista colombiano, debe viajar a Venezuela; también él debe comprar dólares, pero al llegar a Venezuela cambiará esta moneda por bolívares (moneda de ese País).

Esta operación de comprar y vender monedas o documentos valorados se llama **cambio.**

El cambio está sujeto al valor fluctuante del dólar en el mercado de cada País, llamado **tipo de cambio.**

En los ejemplos considerados, la compra de dólares con pesos colombianos en el Banco de la República se denomina **cambio directo.** Pero cuando primero se adquieren dólares para luego adquirir otra moneda con estos dólares, se llama **cambio indirecto.**

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—24

A

EJEMPLO 1.— ¿Cuántos dólares se obtendrán con $ 6,308 si el cambio oficial está a $ 31.54 por dólar?

Solución: **Esquema:**

Peso	Dólar
31.54	1
6.308	?

Análisis: **Si $ 31.54 equivale a 1 dólar, más pesos ($ 6,308) equivaldrán a más dólares. Es una proporcionalidad directa.**

Tenemos: $f(Kx) = Kf(x)$

$f(31.54) = 1$

$f(6{,}308) = ?$

Luego:
$$f(6{,}308) = \left(\frac{6{,}308}{31.54} \times f(31.54)\right)$$
$$= \frac{6308}{31.54} f(31.54)$$
$$= \frac{6308}{31.54} \times 1 = 200$$

Respuesta.—Se obtendrán 200 dólares.

En la práctica, para cambiar pesos colombianos por moneda extranjera de mayor valor, se divide la cantidad de pesos entre el tipo de cambio; y cuando el cambio es por moneda de menor valor que el peso, se **multiplica.**

En general, si:

A representa la unidad monetaria de mayor valor que otra unidad monetaria B,

C representa el tipo de cambio,

n.A representa el número de unidades monetarias de la moneda de mayor valor y

n_1.B representa el número de unidades monetarias de la moneda de menor valor,

tenemos: $n.A \times C = n_1.B$ (Fórmula de cambio de moneda de mayor valor por otra de menor valor) y

$$\frac{n_1.B}{C} = n.A$$ (Fórmula de cambio de moneda de menor valor por otra de mayor valor)

Así, por ejemplo:

1. Al cambiar 200 bolívares por pesos colombianos si el tipo de cambio es $ 7.19 por bolívar, se obtendrán:

$$200 \times 7.19 = 1{,}438 \text{ pesos colombianos.}$$

2. Al cambiar S/. 10,500 (moneda peruana) por dólares si el tipo de cambio es S/. 43.50 por dólar, se obtendrán:

$$\frac{10{,}500}{43.50} = 241.38 \text{ dólares.}$$

B Resolver los problemas siguientes:

1. ¿Cuántos dólares se obtendrán al cambiar $ 5,000 si el tipo de cambio es $ ——— por dólar?
2. Se cambia 450 dólares por pesos colombianos. ¿Cuántos pesos se recibirán si por cada dólar se pagan ——— pesos?
3. ¿Cuántos bolívares se obtendrán con $ 10,000 si el tipo de cambio está a $ ——— por bolívar?
4. Se cambian $ 20,000 por sucres (moneda ecuatoriana). ¿Cuántos sucres se obtendrán si el tipo de cambio está a $ ——— por sucre?
5. ¿Cuántos francos (moneda francesa) se recibirán al cambiar 850 dólares si el tipo de cambio es de ——— francos por dólar?
6. Se cambian 12,000 pesetas (moneda española) por dólares. ¿Cuántas pesetas se obtendrán si el tipo de cambio es ——— pesetas por dólar?

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE REPASO 4—1

1. En un círculo estudiantil hay 25 mujeres y 40 hombres:
   a) ¿Cuál es la razón entre el número de mujeres y el número de hombres?
   b) ¿Cuál es la razón entre el número de hombres y el total de personas?
2. Dada la razón $\frac{2}{5}$, determine otra razón que le permita formar una proporción.
3. Hallar los valores de x, y, en:
   a) $\frac{x}{y} = \frac{7}{12}$ cuando $x + y = 38$
   b) $\frac{x}{9} = \frac{y}{15}$ cuando $x + y = 24$
   c) $\frac{5}{x} = \frac{3}{y}$ cuando $x - y = 8$.

4. Resolver los problemas siguientes:
   a) Si 6 hombres hacen un trabajo en 5 días, ¿en cuántos días harán 4 hombres otra obra igual trabajando con la misma rapidez y habilidad?
   b) Si 8 metros de tela cuestan $ 520, ¿cuánto costarán 5 metros de la misma tela?
   c) Si 3 obreros hacen una obra en 12 días trabajando 8 horas diarias, ¿en cuántos días harán otra obra igual 5 obreros trabajando 6 horas diarias con la misma rapidez y habilidad?
5. Repartir:
   a) 180 en partes directamente proporcionales a 2, 3 y 4.
   b) 630 en partes inversamente proporcionales a 6, 10 y 12.
6. Juan y Pedro emprenden un negocio aportando $ 20,000 y $ 36,000 respectivamente. Si después de un mes obtienen una ganancia de $ 14,000, ¿cuánto le corresponde a cada uno?
7. ¿Cuánto es el 20% de 1,200?
8. ¿Qué tanto por ciento de 1,600 es 640?
9. ¿Cuál es el número si 50.4 es el 12%?
10. Hallar el interés producido por $ 5,000 al 18% en 2 años.
11. Hallar el capital que prestado al 16% ha producido $ 600 de interés en un año?
12. Un capital de $ 20,000 ha producido $ 4,950 de interés en un año y medio. ¿A qué tanto por ciento se impuso?
13. ¿Qué tiempo estuvo prestado un capital de $ 16,000 que al 20% produjo $ 8,000 de interés?
14. Una letra de $ 12,000 fue negociada al 20% faltando 6 meses para su vencimiento. ¿Cuál es su valor actual?
15. Un negociante compra 100 botellas de vino a $ 50 cada botella y las mezcla con 60 botellas de $ 60 la botella. ¿A cómo tiene que vender la botella de la mezcla para ganar $ 12.50 en cada botella?
16. ¿Qué cantidades de café de $ 15 y $ 12 la libra deben mezclarse para venderlas a $ 14 la libra si la mezcla es de 200 libras?
17. ¿Qué entiende por:
    a) Aleación?
    b) Ley de los metales finos?
    c) Ley de la moneda?
18. Un anillo de oro de 18 kilates pesa 8 gramos. ¿Cuántos gramos de oro hay en el anillo?
19. Se mezclan 20 g de oro de 0.800 de ley con 12 g de 0.850 de ley. ¿cuál es la ley de aleación?

20. Se desea obtener una aleación de 30 g de oro de 16 kilates. ¿Qué cantidades de oro de 18 y 14 kilates deben mezclarse?

21. ¿Cuántos dólares se obtendrán al cambiar $ 15,000 si el tipo de cambio es $ ———— por dólar?

22. ¿Cuántos pesos colombianos se obtendrán al cambiar 1,200 bolívares si el tipo de cambio es de $ ———— por bolívar?

CONJUNTO DE EJERCICIOS OPCIONAL 4—1

1. En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{x}{6}$, hallar el valor de x sabiendo que: $a + b = 7$, $a - b = 1$.

2. En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{z}{3}$, hallar el valor de b sabiendo que: $a + z = 6$, $a - z = 3$.

3. La suma de los tres ángulos de un triángulo es 180°. Hallar el valor de cada ángulo sabiendo que guardan relación con los números 1, 2 y 3.

4. 112 soldados de un campamento militar tienen provisiones para 30 días. Si se incorporan 8 soldados más, ¿para cuántos días tendrán provisiones?

5. Un terreno de cultivo de 9,600 m^2 de área cuesta $ 240,000. ¿Cuánto costará otro terreno de 0.8 Há que tiene el mismo precio por metro cuadrado?

6. Un perro persigue a una liebre que le lleva 60 m de ventaja cuando inicia la persecución. El perro da 700 saltos en 45 segundos y en cada salto avanza 1.20 m y la liebre da 920 saltos en el mismo tiempo y en cada salto avanza 90 cm. ¿En cuánto tiempo alcanzará el perro a la liebre?

7. Dieciocho obreros han ejecutado los $\frac{3}{5}$ de una obra en 20 días. ¿Cuántos obreros habrá que aumentar si se quiere concluir la obra en 10 días más?

8. Dividir 246 en partes directamente proporcionales a tres números de modo que el primero sea al segundo como 2 es a 5 y el segundo sea al tercero como 3 es a 4.

9. En una granja hay 3,000 aves entre patos, gallinas y pollos. El número de patos es al de gallinas como 1 es a 4; y el número de gallinas es al de pollos como 1 es a 5. ¿Cuántas aves de cada especie hay?

10. José y Ricardo establecen un negocio con un capital de $ 39,000. El capital de José estuvo durante 5 meses y el de Ricardo durante 8 meses. Si a los 8 meses liquidaron el negocio y las ganancias para ambos fueron iguales, ¿qué capital aportó cada uno?

11. Un negociante compra 150 docenas de plátanos a $ 14.40 la docena. Si en el transporte se malograron 6 docenas, ¿a cómo tendrá que vender cada docena de las restantes para obtener una ganancia total del 25%?

12. Un negociante compró limones a $ 3.60 la docena y las vendió ganando $ 0.10 en cada limón. ¿Qué tanto por ciento ganó en cada uno?

13. Un comerciante perdió el 8% de su capital el 1er. año de establecida su tienda y el 7% el año siguiente. Si ahora se valoriza este establecimiento comercial en $ 76,500, ¿cuál fue su capital inicial?

14. Jorge retira sus ahorros del Banco para prestar a dos amigos. A uno de ellos le da $ 2,500 al 1.5% mensual y al otro el resto, cantidad tres veces mayor que la anterior y al 20% anual. Si el préstamo fue hecho el mismo día y fue devuelto por ambos después de 4 meses, ¿cuál fue la suma que recibió entre su capital e intereses?

15. Un padre de familia obtuvo un premio de la lotería de Bogotá y lo depositó íntegramente en un Banco local ganando el 15%. Si después de un año el interés que produce dicho depósito le permite comprar un artefacto eléctrico valorado en $ 20,000 y realizar un viaje de turismo al extranjero con una inversión de $ 35,000, ¿cuál fue el premio obtenido?

16. Un Banco me paga $ 240 mensuales de interés por mis ahorros que ascienden a $ 18,000. Retiro mi capital para prestar a una persona, quien me paga $ 300 mensuales de interés. ¿Qué tanto por ciento aumentará?

17. Un padre al morir deja a su hija menor una libreta de ahorros cuyo depósito inicial y único fue $ 2,500 al 12% anual. ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta la fecha en que al cancelar su libreta de ahorros, reciba el doble del depósito? (Considérese la imposición a interés simple).

18. Juan entrega a Guillermo $ 90,000 en calidad de préstamo al 10%. Después de 4 años 8 meses es devuelto dicho préstamo conjuntamente con el interés, dinero con el cual compra 192 m^2 de terreno urbano. ¿Cuánto pagó por metro cuadrado?

19. Raúl presta a José $ 4,500 al 16%. Pedro presta a la misma persona $ 4,200 que le producen un interés anual de $ 69 más que a Raúl. ¿A qué tanto por ciento impuso su dinero Pedro?

20. Se mezclan dos calidades de café de $ 12 y $ 18 la libra. Si se quiere obtener una mezcla de $ 16 la libra, pero de tal manera que de la primera calidad entre 6 lb más que el de la segunda, ¿qué cantidad de cada calidad debe mezclarse?

21. ¿Cuántos pesos mexicanos se obtendrán al cambiar 1,500 dólares si el tipo de cambio es ———— pesos por dólar?

22. José cambia $ 50,000 por dólares a $ ———— cada dólar. Viaja a Alemania y debe cambiar el total de dólares adquiridos por marcos (moneda alemana) cuyo tipo de cambio es ———— marcos por dólar. ¿Cuántos marcos obtendrá?

VIETA

(1540 — 1603)

En el siglo XVI, Francia y España se encontraban en guerra; y como tal, sus mensajes eran enviados en clave para ocultar sus planes guerreros.

Pero los secretos españoles no se podían conservar; pues, cuando los franceses capturaban un correo español, leían el mensaje con suma precisión. ¿Quién era ese hombre que poseía esta extraordinaria habilidad? Ese hombre no era aquél que tenía pacto con el diablo o que practicaba la magia negra como creían los españoles, sino fue un abogado francés llamado Francisco Vieta, gran aficionado del Algebra, para quien descifrar claves no era sino resolver ecuaciones.

A Vieta se debe la forma moderna del Algebra, él introdujo notaciones adecuadas, tales como el uso de las letras como variables, el de los signos de operación y otros símbolos algebraicos. Gracias a él, Descartes y Fermat aplicaron el Algebra a la Geometría y crearon la Geometría Analítica.

Vieta escribió varios tratados de Algebra que se caracterizaron por su abstracción y profundidad, y aunque sólo fue un aficionado de esa ciencia, es conocido como "el padre del Algebra".

* * *

¿Es $\sqrt{16+9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$? ¿Por qué?

* * *

Los matemáticos son como los franceses: se les diga lo que se les diga, ellos lo traducen a su lengua, y desde ese momento se trata de algo diferente.

GOETHE

Unidad 5

NOCIONES DE CONTABILIDAD Y COMERCIO

5—1. LETRA DE CAMBIO.— Generalmente las casas comerciales utilizan un documento llamado **letra de cambio** como garantía de la venta al crédito de algunos artículos, valor que debe cancelarse directamente a la casa o por intermedio de un Banco Comercial.

Este documento es suscrito en forma legal por tres personas representativas, fijándose el lugar y el tiempo que debe durar la operación.

A la persona que ordena pagar se le llama **girador** o **librador**, la persona quien paga se llama **aceptante** o **girado** y la persona quien debe cobrar el documento se denomina **tenedor** o **beneficiario**, siendo generalmente un Banco.

Por ejemplo supongamos que Alfredo Rojas adquiere un televisor en Almacenes J. Glottman el día 15 de Julio de 1.981 por $30.000,oo . Para ello entrega en el acto $20.000,oo y firma una letra de cambio por los $10.000,oo restantes , suma que debe cancelar en el Banco Popular de Bogotá el día 15 de Marzo de 1.982. El modelo de la letra que Alfredo Rojas firma , es el que se incluye a continuación.

ACEPTADA: Alfredo Rojas
C.C./NIT. C.C./NIT.

LETRA DE CAMBIO

No. ____ POR $ 10,000.00

SEÑOR (ES) Alfredo Rojas

EL 15 DE Octubre DE 197[illegible] SE SERVIRA (N) UD. (S) PAGAR SOLIDARIAMENTE EN ____

POR ESTA UNICA DE CAMBIO, SIN PROTESTO, EXCUSADO EL AVISO DE RECHAZO Y LA PRESENTACION PARA EL PAGO, A LA ORDEN DE Almacenes J. Glott Mann

EXACTOS Diez mil y oo/100 Pesos Moneda Corriente.

PESOS M/C. MAS INTERESES DURANTE EL PLAZO DEL 4 % Y DE MORA DEL 4 % MENSUALES

GIRADO(S)	
DIRECCION	TEL.
Calle 12-N°37-44 Bogotá	373399

ATTO. Y S. S.

Glottmann

ALMACENES J. GLOTT MANN

En esta letra Alfredo Rojas es el girado o aceptante, J Glottman es el girador y el Banco Popular es el tenedor o beneficiario.

Las letras pueden ser giradas: **a la vista** o **a su presentación**, cuando el girado paga la letra el día que se la presentan; **a días vista**, cuando el plazo de vencimiento se empieza a contar a partir del día siguiente de su aceptación; **a días fecha**, cuando el plazo de vencimiento se empieza a contar a partir del día siguiente en que se gira la letra; y **a plazo fijo**, cuando se paga el día señalado, tal como la letra del modelo.

5—2. ALGUNAS OPERACIONES QUE SE REALIZAN CON LA LETRA DE CAMBIO.— Tenemos:

En una letra debe figurar:

a) Endoso.— El endoso de una letra de cambio consiste en transferir a otra persona o entidad el derecho de cobrarla, por el cual obtiene un valor prometido o entregado de acuerdo a las normas legales (Código de Comercio) y lo hará escribiendo al dorso de la letra: "Páguese a la orden", la fecha del endoso y llevará la firma de quien endosa la letra. Así, por ejemplo, si Mario Rodríguez endosa una letra a favor de Pablo Bermúdez, escribirá al dorso:

> Páguese a la orden del Sr.
>
> Pablo Bermúdez.
>
> Bogotá, 28 de Febrero de 1.982
>
> Mario Rodríguez.

b) Renovación.— Cuando el aceptante de una letra de cambio no tiene el dinero requerido para pagarla en la fecha de su vencimiento, previa aceptación del beneficiario puede obtener un nuevo plazo de pago (generalmente a 30 días). A esta operación se denomina **renovación de la letra.**

Cuando en el instante de efectuar esta operación se paga una parte del valor de la letra más los gastos de renovación, la renovación es **parcial**; y cuando sólo se paga los gastos de renovación y no se hace entrega alguna, la renovación es **total.**

c) Aval.— El aval es un compromiso que una tercera persona adquiere para garantizar el pago de dicha letra en la fecha de su vencimiento.

El aval generalmente se realiza escribiendo en la misma letra al dorso "Por aval" y firmando la persona que lo otorga. También puede hacerse en un documento separado en la forma siguiente:

> El que suscribe garantiza la letra Nº ....
> adjunta, obligándose a pagar su valor de $ ....
> al(os) Sr.(es) ....
> ....
> Para constancia firmo este aval en
> Bogotá, el ... de .... de 1.982
>
> ....
> Rolando Ruiz

5—3. PAGARE.— El pagaré es un documento por medio del cual una persona se compromete a pagar a otra una suma de dinero en una fecha determinada.

La persona que se compromete a pagar es el **suscritor** o **pagador**, la persona que cobra o a cuya orden se efectúa el pago es el **beneficiario.** En algunos casos el beneficiario puede endosar este documento —siempre que esté expedido a la orden— a una tercera persona quien se constituye en **tenedor** o **portador.**

Cuando en el documento aparece el nombre de la persona beneficiaria, el pagaré no es negociable; pero, cuando lleva la palabra "a la orden" y el nombre de la persona, si es negociable mediante el endoso.

Son modelos de pagaré:

> **PAGARE NO NEGOCIABLE**
>
> Yo, HERNAN GONZALES debo y pagaré al Sr. ALFREDO CARMONA la suma de Diez mil y 00/100 pesos ($ 10,000.00).
> Valor recibido en efectivo a mi entera disposición sin lugar a reclamo alguno, la misma que me obligo a devolver, en la misma moneda, en el plazo de ciento cincuenta (150) días contados a partir de la fecha de este documento, constituyendo domicilio para ese efecto en Carrera 10 Nº 21-15 de esta ciudad, o en el lugar donde se presente el mismo, quedando convenido que abonaré 25% (Veinticinco por ciento) de interés anual y 4% adicional y anual por concepto de comisiones hasta su total cancelación.
> Declaro conocer que el presente contrato es de naturaleza mercantil y queda sujeta a las leyes de Comercio.
>
> Bogotá, 28 de Febrero de 1.982
>
> ....
> Hernán Gonzales

En este pagaré, el pagador Hernán Gonzales y el beneficiario es Alfredo Carmona; luego, no es negociable.

PAGARE SI NEGOCIABLE

Yo, JULIO GARCIA debo y pagaré a la orden y disposición del Sr. ALERTO ROSAS la suma de Veinte mil y 00/100 pesos. ($ 20,000.00).

Valor recibido en efectivo a mi entera disposición sin lugar a reclamo alguno, la misma que me obligo a devolver, en la misma moneda, en el plazo de ciento cincuenta (150) días contados a partir de la fecha de este documento, constituyendo domicilio para ese efecto en Carrera 15 N° 31-24 de esta ciudad, o en el lugar donde se presente el mismo, quedando convenido que abonaré el 25% (Veinticinco por ciento) de interés anual y 4% adicional y anual por concepto de comisiones hasta su total cancelación.

Declaro conocer que el presente contrato es de naturaleza mercantil y queda sujeta a las leyes de Comercio.

Bogotá , 28 de Febrero de 1.982

Julio García

Este pagaré sí es negociable.

Si Alberto Rosas quiere endosarlo a Roberto Ramírez, escribirá en el dorso: "Páguese a la orden de Roberto Ramírez", pondrá la fecha y firmará.

5—4. CHEQUE.— El cheque es un documento bancario mediante el cual una persona o empresa que tiene dinero depositado en un Banco (en Cuenta Corriente) ordena al Banco que pague a cierta persona o al portador una determinada suma de dinero.

En un cheque deben figurar : La fecha en que se expide, la ciudad de expedición y de pago, el nombre de la persona a quien se entrega el cheque la cantidad girada expresada en letras y números y la firma del girador. Así por ejemplo en el modelo siguiente :

Jaime Carrillo (girador) gira a la orden del Jaime Contreras (beneficiario) y el Banco Popular es el girado.

Cuando el cheque es girado a **la orden**, solamente podrá cobrar esta persona o aquella a quien ésta lo endose; cuando el cheque es girado al **portador**, podrá cobrarlo la persona que lo presente. Además, un cheque se puede cobrar en cualquier momento después de ser expedido.

El cheque que gira un cuenta correntista va unido a un talón fijo que queda después de desglosado el cheque, en dicho talón que lleva el número del cheque, quedan consignados los datos siguientes: la fecha, la orden, el saldo anterior, el importe girado y el salario actual

El **cheque cruzado** lleva dos líneas paralelas transversales y solamente puede ser depositado en cuenta corriente por "la orden", es decir, no podrá hacerse efectivo a su entrega, lo cual constituye un instrumento de seguridad.

CONJUNTO DE EJERCICIOS OPCIONAL 5—1

1. **¿Qué personas intervienen en una letra de cambio?**

2. **Supongamos que: El Sr. Jairo García compró un automóvil en Motorcol por $ 200,000 entregando en el acto $ 50,000 y firma una letra por la diferencia de $ 150,000. Si esta compra la hizo el 5 de Mayo de 1.981 y debe cancelar al Banco del Comercio el 5 de Agosto del mismo año:**

   a) **Preparar la letra correspondiente.**
   b) **Indicar: el girador, el girado y el beneficiario.**

3. **¿Cuándo un pagaré es negociable y cuándo no?**

4. **Supongamos que: En la fecha el Sr. Gregorio Dongo ha suscrito un pagaré a la orden de Alvaro Vásquez por un préstamo de $ 5,000 al 10% anual para pagarla en Bogotá el 18 de Septiembre de 1.981**

   a) **Preparar el pagaré correspondiente.**
   b) **Indicar el pagador y el beneficiario.**

5. **¿Cuál es su idea acerca de cheque bancario?**

6. **Preparar un cheque por $ 7,500 girado en la fecha a la orden del comerciante Raúl Soto por la compra de un artefacto eléctrico por parte del Sr. Ramiro Quesada.**

5—5. LIBROS DE CONTABILIDAD.— Los libros de contabilidad son los que se emplean para registrar las operaciones comerciales y administrativas que realiza un comerciante o una empresa.

Estos libros muestran el estado financiero de un establecimiento comercial o de una empresa y deben ser registrados, foliados y sellados en la Cámara de Comercio antes de su apertura. Entre estos libros podemos mencionar: El libro de Inventarios y Balances, el libro Diario, el libro Caja y el libro Mayor (Estos libros reciben el nombre de libros principales).

5—6. CONCEPTO DE CUENTA.— Supongamos que se trata de una casa comercial que vende artículos de uso personal. Todos los artículos tales como: vestidos, pañuelos, camisas, corbatas, etc., se agrupan y toman el nombre de mercancías, así el comerciante habrá creado una **cuenta de mercancías.** Del mismo modo, la venta de estos artículos cuyo dinero se deposita en un cajón o una máquina registradora forman una nueva cuenta llamada **caja**; todos los documentos de las ventas a crédito constituyen una nueva cuenta denominada **cuenta por cobrar**; todas las letras u obligaciones que la empresa debe pagar a un plazo determinado, constituye una cuenta llamada **documentos por pagar.**

Los muebles que prestan servicios, tales como: vitrinas, sillas, estantería, mostradores, máquinas (de escribir, sumar, registrar, etc) constituyen una nueva cuenta denominada **mobiliario** o **muebles y enseres.**

Como podemos observar, para que haya una cuenta es necesario agrupar los valores de acuerdo a su naturaleza y a la clase de actividad que se desarrolla.

Luego, podemos decir:

Cuenta son nombres especiales de los valores que posee o debe una empresa.

Estas cuentas tienen por objeto informar los procedimientos contables y facilitar las operaciones en los libros.

Toda cuenta tiene dos partes: Debe y Haber.

El **Debe** constituye el ingreso de valores de una empresa y el **Haber** el egreso o salida.

El **saldo** es la diferencia entre el Debe y el Haber de una cuenta y pueden ser: **Deudor,** si el Debe es mayor que el Haber; **Acreedor,** si el Haber es mayor que el Debe; y Nulo, si la suma del Debe y el Haber es el mismo.

5—7. CLASIFICACION DE CUENTAS.— Tenemos:

a) **Cuentas reales o de balance.—** Son aquellas que representan saldo a favor o saldo en contra (deudas) de una empresa. Estas cuentas pueden ser:

a_1) **Cuentas del activo,** aquellas que representan saldo a favor, tales como: caja, mercaderías, mobiliario, clientes deudores, semovientes, documentos por cobrar, inmuebles, etc.

a_2) **Cuentas del pasivo,** aquellas que representan deudas, tales como: documentos por pagar, proveedores, etc.

a_3) **Cuentas del capital,** aquellas que representan la diferencia entre el activo y el pasivo; o sea, lo que la empresa le debe a sus dueños.

b) **Cuentas Nominales o de resultado.—** Son aquellas que determinan las utilidades obtenidas o las pérdidas producidas en una operación empresarial. Estas pueden ser:

b_1) **Ingresos,** son los valores que aumentan el patrimonio de una empresa como resultado de sus ganancias, ventas, intereses recibidos, arrendamientos recibidos, rebajas en compras, comisiones cobradas, etc.

b_2) **Egresos,** son los valores que disminuyen el patrimonio de una empresa como resultado de las pérdidas, compras, intereses pagados, arrendamientos pagados, rebajas en ventas, comisiones pagadas, etc.

b_3) **Ganancias y pérdidas,** es el resultado que determina la utilidad o la pérdida de una empresa al final de un período contable de acuerdo a los ingresos y egresos.

Si los ingresos son mayores que los egresos, el saldo es **acreedor** o de **utilidad neta;** si los egresos son mayores que los ingresos, el saldo es **deudor** o de **pérdida neta.**

5—8. INVENTARIO.— El inventario es una relación detallada de los bienes o recursos (activo) y de las deudas (pasivo) que tiene una empresa.

5—9. BALANCE.— El balance es un cuadro resumen de recursos y deudas el cual puede realizarse en cualquier tiempo. Así, puede hacerse al iniciar un negocio y se tiene un Balance de Inventario Inicial, siendo obligación de una empresa realizar un balance general por lo menos una vez al año.

5—10. LIBRO DE INVENTARIO Y BALANCE.— Es un libro donde se registra todos los inventarios y balances realizados mientras dure una empresa. Es un libro de foliación simple y es el primero que se emplea al iniciar un negocio.

Así, por ejemplo, el inventario que realiza Juan Vega al iniciar su negocio el 28 de Febrero de 1.982 con los valores siguientes, es:

1. Dinero en efectivo: $ 18,000
2. Cheques a su orden (Banco Nacional): $ 12,000
3. Fondos en cuenta corriente (Banco del Comercio): $ 10,000
4. Mobiliario:
   a) 3 escritorios de metal a $ 5,000 c/u.
   b) 4 sillas de metal a $ 1,200 c/u.
   c) 2 máquinas de escribir a $ 8,000 c/u.

5 Debe:

a) A la casa ERVICO: $ 50,000
b) Una letra a la orden del Banco Bogotá por: $ 10,000

INVENTARIO INICIAL

al 12 de Febrero de 1.981

ACTIVO

		Parcial	Total
Caja			
Dinero Efectivo		18,000	
Ch. Nº 56702 Banco Nacional		12,000	30,000
Bancos:			
Banco del Comercio (cta. cte.)			10,000
Mobiliario:			
3 Escritorios de Metal	5,000	15,000	
4 Sillas de Metal	1,200	4,800	
2 Máquinas de escribir	8,000	16,000	35,800
Total Activo			75,800

PASIVO

Proveedor:	
Ervico	50,000
Documento por pagar:	
L. Nº 6504 c/. Banco del Comercio	10,000
Total Pasivo	60,000

RESUMEN

BALANCE INICIAL

Caja	30,000	
Bancos	10,000	
Mobiliario	35,800	
Proveedor		50,000
Documentos por pagar		10,000
Capital		15,800
	75,800	75,800

Bogotá, 12 de Febrero de 1.981

Juan Vega	**Raúl Medina**
Propietario	Contador

5—11. LIBRO DIARIO.— Es un libro que el comerciante debe tener para anotar diariamente las operaciones que realiza su empresa. Su foliación es simple y los registros que en él se realizan se llaman **asientos.**

			Diario al 31 de Enero de 1.982	1	2
1	35	12	Clientes	54.670 48	
2	20	60	Compras en el País	8,025 00	
3	35	43	Letras por Pagar	72000 00	
4	52	67	Cargos financieros	1.776 50	
5	41		10- Caja y Bancos		136,472,26
6			—— 40 ——		
7					
8	40	10	- Caja y Bancos	1201.311 52	
9	35		12 - Clientes		125.311 52
10	14		13- Letras por Cobrar		833.460 00
11	28		17- Cuentas por Cobrar		242,540 00
12			—— 41 ——		
13					

5—12. LIBRO CAJA.— Es un libro donde se registran los ingresos y salidas del dinero de una empresa anotando los ingresos o cobros en el Debe y los egresos o pagos en el Haber.

Las operaciones comerciales tales como: compras al contado, pagos, cobros, ventas al contado, etc. se registran en el Debe si son ingresos y en el Haber si son egresos.

La foliación de un Libro Caja es doble y se abre con el importe de la Cuenta Caja que el Inventario Inicial arroja.

	101 Caja al 31 de Enero de 1.982					
	Saldo Anterior		1169846 62	Ene 31 Por	10- Caja y Bancos	2340954 90
Ene 31 a	13. Clientes	1498.620 97			depósitos en cta. cte. Bancos	
" " a	13. Letras por Cobrar	2370.612,30		" " "	12 - Clientes	753239 08
	cobro letras en el mes				entrega a	
" "	10- Caja y Bancos	3245.264,70		" " "	43- Letras por Pagar	945233 60
	cobro cheques en el mes				pago de letras	
" "	16- Cuentas por Cobrar	325,600 00		" " "	40- Tributos por Pagar	43575 80
	cobro cuentas pendientes				pago de obligaciones tribut.	
" "	69. Cargos Financieros	1,560 00		" " "	60- Compras en el País	1395460 30
	recuperación de gastos				por compras en el país	
" "	40. Tributos por Pagar			" " "	61- Compras en el Exterior	854320 80
	retención de impuestos de ley	43,575 80	9485233,77		compras efectuadas en el ext.	
				" " "	42- Proveedores	310.120 60
					pago de facturas pendientes	
				" " "	67 - Cargos Financieros	360.190 30
					pago de gastos Bancarios	
				" " "	62- Gastos de Personal	760.130 20
					pago a nuestro personal	
				" " "	63- Servicio de Correos	136.260 80
				" " "	47- Cuentas por Pagar	430.135 00
					pago de cuentas pendientes	
						8352.601 38
					Saldo al 31-1-82	296.479,01
						8655 080 39

5—13. LIBRO MAYOR.– Es un libro donde se registran finalmente las cuentas e importes de una empresa en forma resumida e independiente. Es un libro de foliación doble.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5—2

1. ¿Qué idea tiene de Cuenta?
2. ¿Qué son:
   - a) Cuenta de mercancías?
   - b) Cuenta por cobrar?
   - c) Cuenta Caja?
   - d) Cuenta por pagar?
   - e) Mobiliario?
3. ¿Cuáles son las partes de una cuenta y qué idea tiene de cada una de ellas?
4. ¿Qué constituye el balance en una cuenta?
5. ¿Qué representan las cuentas del Capital?
6. ¿Qué representan las ganancias y las pérdidas en una operación contable?
7. ¿Qué idea tiene de Inventario?
8. ¿Qué idea tiene de Libro Caja?

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE REPASO 5—1

1. ¿Qué idea tiene de una letra de cambio?
2. ¿Cuándo una letra de cambio es:
   - a) A la vista?
   - b) A días vista?
   - c) A días fecha?
   - d) A plazo fijo?
3. En una letra de cambio ¿qué entiende por:
   - a) Endoso?
   - b) Renovación?
   - c) Aval?
   - d) Protesto?
4. ¿Qué es un pagaré y qué personas intervienen?
5. ¿Qué entiende por cheque girado a la orden y por cheque girado al portador?
6. ¿Qué concepto tiene de cheque cruzado?
7. ¿Qué objeto tienen las Cuentas?
8. ¿Qué entiende por Saldo en una Cuenta y cómo puede ser?
9. ¿Qué diferencia existe entre cuentas del activo y cuentas del pasivo?
10. ¿Qué entiende por Saldo Acreedor y qué por Saldo Deudor?

11. ¿Qué idea tiene de inventario?
12. ¿Qué diferencia puede establecer entre Libro Diario y Libro Mayor?

CONJUNTO DE EJERCICIOS OPCIONAL 5—1

1. Prepare la letra de cambio correspondiente a: El Sr. Luis Rojas acepta una letra a 90 días vista al Sr. José Rodríguez por $ 24,000 el día 3 de junio de 1975, la cual debe ser cancelada en el Banco de Crédito de Bogotá.

2. Prepare el pagaré correspondiente a: En la fecha el Sr. Pedro Ramírez ha suscrito un pagaré No. 0436 a la orden del Banco Comercial de Medellín por su préstamo de $ 10,000 al 12% anual.

3. En la fecha gire Ud. un cheque al Banco de Crédito por $ 5,000 a la orden de Manuel Medina por la compra de una colección de libros.

4. Prepare el inventario del comerciante Sr. Gonzalo Hernández quien inicia su negocio el 10 de mayo de 1975 con los valores siguientes:
   1. Dinero en efectivo: $ 60,000
   2. Cheques a su orden:
      - a) Banco del Comercio: $ 36,000
      - b) Banco Popular: $ 25,000
   3. Fondos en cuenta corriente en el Banco de Crédito: $ 15,000
   4. Mobiliario:
      - a) 5 escritorios de metal a $ 8,000 c/u.
      - b) 10 sillas de metal a $ 1,500 c/u.
      - c) 8 máquinas de escribir a $ 12,000 c/u.
      - d) 8 mesas de máquina a $ 2,000 c/u.
      - e) 2 archivadores a $ 3,000 c/u.
   5. Posee una casa avaluada en $ 800,000
   6. Debe:
      - a) A la casa I. M. P.: $ 30,000
      - b) A la casa COLTEJER: $ 50,000
      - c) Una letra a orden del Banco Internacional por $ 20,000

NICOLAI I. LOBATCHEVSKY

(1793 — 1856)

Lobatchevsky nació en Rusia e hizo sus estudios en la Universidad de Kazán, donde más tarde fue profesor de Matemática, Decano y Rector.

A él se debe la primera publicación sobre una Geometría no-euclideana, aún cuando los matemáticos Gauss en Alemania y Bolyai en Hungría trabajaron y descubrieron en forma independiente dicha Geometría, fue Lobatchevsky quien tuvo el valor de publicarla y la envió a la Sociedad Físico-Matemática de Kazán, pero su trascendencia no se advirtió hasta que fue traducido al francés en 1837 y tres años más tarde al alemán.

Hasta esa época, todos creían en la unicidad de las paralelas, pero los tres matemáticos mencionados supusieron lo contrario, es decir, "por un punto exterior a una recta, pasa más de una recta paralela".

En su obra "Principios de Geometría", Lobatchevsky empieza enunciando unas cuantas proposiciones válidas para ambas geometrías; y luego, otras que son también válidas si se sustituye la palabra "paralela" por la frase "rectas que no se encuentran por mucho que se les prolongue", siguiendo después una definición que contradice el V Postulado de Euclides.

Esta Geometría no-euclideana que desde el punto de vista matemático tenía la misma validez que la de Euclides, resultó de gran valor para la Física cuando Einstein descubrió su Teoría de la Relatividad.

* * *

Se tiene 2 monedas de metal de $ 5 cada una y en posición tangencial. ¿Cuántas vueltas dará la primera moneda alrededor de la segunda hasta llegar a su posición inicial?

La respuesta no es 2 vueltas.

* * *

Geometría, que es la única ciencia que hasta ahora Dios ha querido conferir a los hombres.

THOMAS HOBBES.

Unidad 6

AREAS DE LAS REGIONES POLIGONALES

6—1. REGION POLIGONAL.— Todo polígono separa al plano en dos subconjuntos de puntos que son: el interior y exterior del polígono (Fig. 6-1). A la reunión del polígono y su interior se le denomina **región poligonal.**

Las figuras 6-2 y 6-3 ilustran una región triangular y una región limitada por un paralelogramo respectivamente.

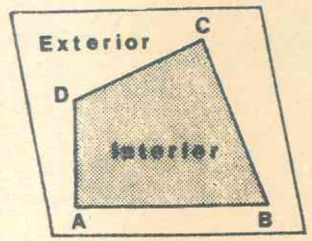


Fig. 6-1

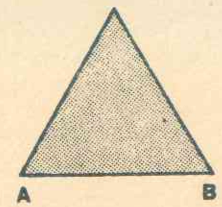


Fig. 6-2

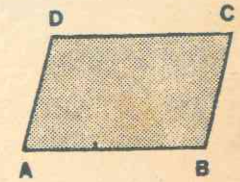


Fig. 6-3

6—2. AREA DE UNA REGION POLIGONAL.— El área de una región poligonal es la medida de dicha región.

Para hallar el área de una región poligonal, se elige generalmente como **unidad de área** una **región cuadrada** que tiene por lado una unidad de longitud y desde luego por área una unidad cuadrada (Fig. 6-4). De modo que, si la unidad de longitud es 1 cm por ejemplo, la unidad de área será "centímetro cuadrado ($1\ cm^2$).

Fig. 6-4

Luego, el área de una región poligonal es el número que expresa las veces que dicha región contiene a la unidad de área.

Nótese, que el término región es un conjunto de puntos y área es una medida o número.

De ahora en adelante, abreviadamente

diremos: área de un rectángulo, área de un triángulo, área de un paralelogramo, etc., para referirnos a las áreas de las regiones correspondientes. Asimismo, usaremos los términos: base, altura, apotema, radio, etc., para referirnos a las longitudes de estos segmentos.

6—3. AREA DE UN RECTANGULO.—

Sea por ejemplo un rectángulo ABCD (Fig. 6-5) cuya base mide 4 unidades y cuya altura 2 unidades.

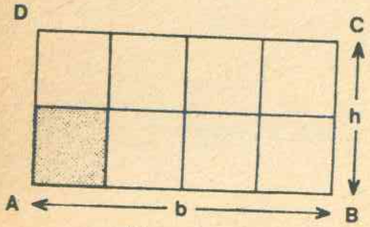


Fig. 6-5

¿Cuántas unidades cuadradas hay en total?

Hay 8, o sea: el área del rectángulo es $4 \times 2 = 8$ unidades de área.

En general, si A expresa el área de un rectángulo, b su base y h su altura, tenemos:

$$A = bh$$

Luego, podemos decir:

El área de un rectángulo es el producto de su base y su altura.

A veces, suelen emplearse los términos largo y ancho para expresar la base y la altura de un rectángulo.

6—4. AREA DE UN CUADRADO.—

Sea el cuadrado ABCD (Fig. 6-6) cuyo lado mide 4 unidades de longitud. ¿Cuántas unidades de área mide la región limitada por el cuadrado? Contamos, y la respuesta es 16, o sea: $4^2 = 16$

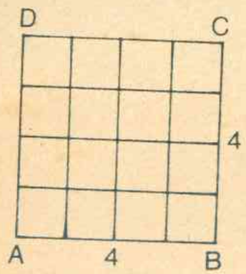


Fig. 6-6

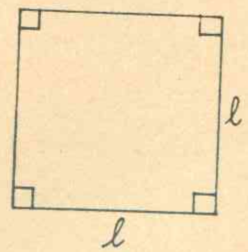


Fig. 6-7

En general, si A expresa el área de un cuadrado y l la longitud de su lado, (Fig. 6-7), tenemos:

$\boxed{A = l^2}$ **Es la fórmula.**

Luego, podemos decir:

El área de un cuadrado es el cuadrado de su lado.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6—1

A

EJEMPLO 1.— La base de un rectángulo mide 12 cm y su altura mide los $\frac{3}{4}$ de su base. ¿Cuál es su área?

Solución: Tenemos: $b = 12$ cm

$$h = \frac{3}{4} \times b = \frac{3}{4} \times 12 \text{ cm} = 9 \text{ cm}$$

$$A = b \times h$$

Luego: $A = 12 \text{ cm} \times 9 \text{ cm} = 108 \text{ cm}^2$.

Respuesta.—El área es 108 cm^2.

EJEMPLO 2. El perímetro de un terreno de forma cuadrada mide 48 m Hallar su área.

Solución: Tenemos: $p = 48$ m

$$l = \frac{48 \text{ m}}{4} = 12 \text{ m}$$

$$A = l^2$$

Luego: $A = (12 \text{ m})^2 = 144 \text{ m}^2$.

Respuesta.—El área es 144 m^2.

B Resolver los problemas siguientes:

Hallar el área de un rectángulo que tiene 15 cm de base y 8 cm de altura.

2. La base de un rectángulo mide 120 cm y su altura mide los $\frac{3}{5}$ de su base. Hallar el área.

3. Hallar el área de un cuadrado que tiene 15 m de lado.

4. El lado de un cuadrado mide 10.5 cm. ¿Cuál es su área?

5. El área de un terreno de forma cuadrada mide 400 m^2. ¿Cuál es la longitud de su lado?

6. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado cuya área es 2,304 m^2?

7. Las dimensiones de un terreno de forma rectangular miden 10 m y 36 m. Si fue vendido a \$ 820 el m^2, ¿cuál fue el precio?

8. Un terreno de forma cuadrada de 1,024 m^2 de área se compró por \$ 634,880. ¿Cuánto costó el m^2?

9. La altura de un rectángulo mide 24.5 cm y su base es el doble de su ancho. ¿Cuál es su área?

10. El perímetro de un terreno de forma cuadrada mide 64 m ¿Cuál es el precio de dicho terreno si el metro cuadrado cuesta \$ 600?

6—5. AREA DE UN PARALELOGRAMO.—

Sea el paralelogramo ABCD (Fig. 6-8), cuya base **b** mide 6 unidades de longitud y cuya altura **h** mide 3 unidades de longitud.

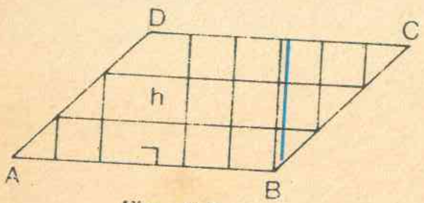


Fig. 6-8

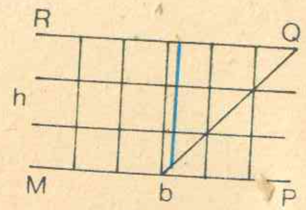


Fig. 6-9

Si separamos la región triangular de la izquierda del paralelogramo y la unimos a la derecha de la parte que queda, obtenemos una región rectangular de igual base e igual altura que el paralelogramo dado (Fig. 6-9)

Contando las unidades de área de cada figura, comprobamos que cada una tiene 18 unidades de área; es decir, sus áreas son equivalentes. Por consiguiente, si el área del rectángulo se expresa por $A = b \times h$, entonces el área (A) del paralelogramo se expresa:

$\boxed{A = b \times h.}$ **Es la fórmula.**

Luego, podemos decir:

El área de un parelelogramo es el producto de su base y su altura.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6—2

A **EJEMPLO 1.—** La base de un paralelogramo mide 20 cm y su altura mide los $\frac{2}{5}$ de su base. Hallar su área.

Solución: Tenemos: $b = 20$ cm

$$h = \frac{2}{5} \times b = \frac{2}{5} \times 20 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$

$$A = b \times h$$

Luego: $a = 20 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} = 160 \text{ cm}^2.$

Respuesta.—El área es 160 cm^2

Resolver los problemas siguientes:

1. Hallar el área de un paralelogramo que tiene 18 cm de base y 12 cm de altura.

2. ¿Cuál es el área de un paralelogramo cuya base mide 16.64 dm y cuya altura mide la mitad de su base?

3. La base de un paralelogramo mide 12 cm y su altura mide la tercera parte de la base. Hallar el área.

4. La altura de un paralelogramo mide 5 cm y su base mide el doble de su altura más 2 cm. Hallar el área.

5. El perímetro de un cuadrado mide 400 m. Hallar el área de un paralelogramo cuya altura mide igual que un lado del cuadrado y cuya base mide 250 m.

6. El área de un cuadrado mide 36 cm^2. Si la base de un paralelogramo mide igual al perímetro del cuadrado y su altura igual a un lado del cuadrado, ¿cuál es el área del paralelogramo?

6—6. AREA DE UN TRIANGULO.—

Sea el triángulo ABC (Fig. 6-10), cuya base **b** mide 6 unidades de longitud y cuya altura **h** mide 3 unidades de longitud.

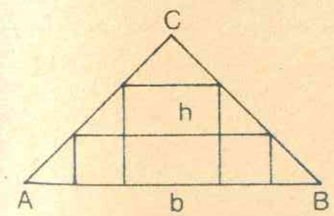


Fig. 6-10

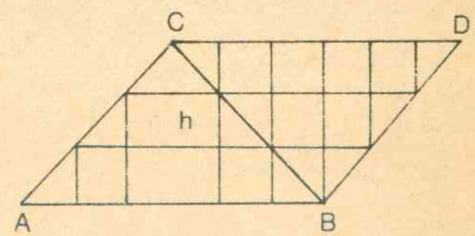


Fig. 6-11

Si a la derecha del triángulo ABC dibujamos otro triángulo (posición invertida) de igual base e igual altura, obtenemos el paralelogramo ABCD (Fig. 6-11).

Contando las unidades de área de cada figura, comprobamos que el triángulo tiene 9 unidades de área y el paralelogramo 18 unidades de área; es decir. el área del triangulo es la mitad del área del paralelogramo. Por consiguiente, si el área del paralelogramo se expresa por $A = b \times h$, entonces el área (A) del triángulo se expresa:

$$\boxed{A = \frac{1}{2} b \times h.}$$ **Es la fórmula.**

Luego, podemos decir:

El área de un triángulo es el semiproducto de su base y su altura.

NOTA.—El área de un triángulo equilátero está también dada por la fórmula

$$\boxed{A = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}}$$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6—3

A EJEMPLO 1.— La base de un triángulo mide 40 cm y su altura los $\frac{5}{8}$ de su base. Hallar su área.

Solución: Tenemos: $b = 40$ cm

$$h = \frac{5}{8} \times b = \frac{5}{8} \times 40 \text{ cm} = 25 \text{ cm}$$

$$A = ?$$

$$A = \frac{1}{2} b \times h$$

Luego: $$A = \frac{1}{2} \times 40 \text{ cm} \times 25 \text{ cm} = 500 \text{ cm}^2.$$

Respuesta.—El área mide 500 cm^2.

B Resolver los problemas siguientes:

1. La base de un triángulo mide 24 cm y su altura mide 15 cm. Hallar su área.
2. Hallar el área de un triángulo cuya base mide 36 cm y cuya altura mide los $\frac{5}{6}$ de su base.
3. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 30 cm y 48 cm respectivamente. ¿Cuál es su área?

4. El perímetro de un triángulo equilátero mide 18 dm. Hallar su área.
5. La base de un triángulo mide 18.6 cm y su altura mide la tercera parte de su base. Hallar su área.
6. La base de un terreno de forma triangular mide 30 m y su altura 20 m. Si se vende por $ 500 cada m^2, ¿cuál es su valor?
7. Halle el área de la figura 6-12.
8. Halle el área de cada uno de los triángulos de la figura 6-13, donde E es punto medio de DC.

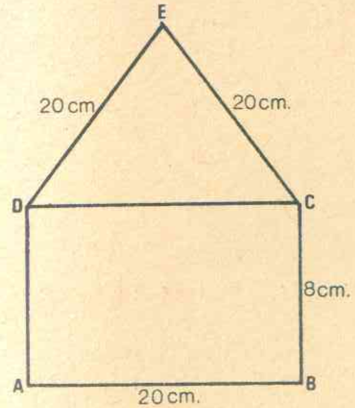


Fig. 6-12

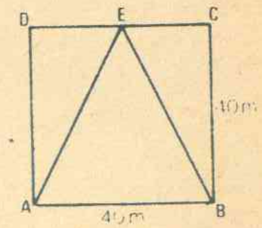


Fig. 6-13

6—7 AREA DE UN TRAPECIO.—

Sea el trapecio ABCD (Fig. 6-14), cuya base mayor es b_1, su base menor b_2 y su altura h

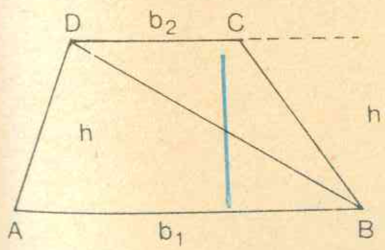


Fig. 6-14

Si trazamos la diagonal BD, se forman los triángulos ABD y BCD que tienen la misma altura **h.**

Por tanto, el área del trapecio es:

$$A = A\triangle\ ABD + A\triangle\ BCD$$

$$A = \frac{1}{2} b_1 \times h + \frac{1}{2} b_2 \times h$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \left(b_1 + b_2 \right) \times h.}$$ **Es la fórmula.**

Luego, podemos decir:

El área de un trapecio es el semiproducto de la suma de sus bases y su altura.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6—4

A EJEMPLO 1.— La base mayor de un trapecio mide 18 cm, la base meno mide los $\frac{5}{6}$ de la base mayor y la altura los $\frac{2}{3}$ de la bas menor. Hallar su área.

Solución: Tenemos: $b_1 = 18$ cm

$$b_2 = \frac{5}{6} b_1 = \frac{5}{6} \times 18 \text{ cm} = 15 \text{ cm}$$

$$h = \frac{2}{3} b_2 = \frac{2}{3} \times 15 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

$$A = \frac{1}{2} (b_1 + b_2) \times h$$

Luego: $$A = \frac{1}{2} (18 + 15) \times 10 =$$

$$\frac{1}{2} \times 33 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 165 \text{ cm}^2.$$

Respuesta.—El área mide 165 cm^2.

B Resolver:

1. Las bases de un trapecio miden 20 cm y 16 cm respectivamente, y su altura mide 12 cm. Hallar su área.
2. ¿Cuál es el área de un trapecio cuyas bases miden 34 m y 30 m respectivamente y cuya altura mide 18.5 m?
3. La base mayor de un trapecio mide 20 m y la base menor los $\frac{4}{5}$ de la mayor. Si su altura mide 12.50 m, hallar su área.
4. Las bases de un trapecio miden 48 m y 36 m respectivamente. Si su altura mide la mitad de la base menor, hallar su área.
5. La altura de un trapecio mide 6 cm, la base menor 12 cm más que la altura y la base mayor tanto como la altura y la base menor juntas. Hallar el área del trapecio.
6. La base menor de un trapecio mide 12.5 cm y la base mayor el doble que la base menor. Si la altura del trapecio mide los $\frac{2}{5}$ de la base mayor, ¿cuál es su área?

6—8. AREA DE UN ROMBO.—El rombo es un paralelogramo cuyos lados son congruentes y sus diagonales son perpendiculares entre sí (Fig. 6-15).

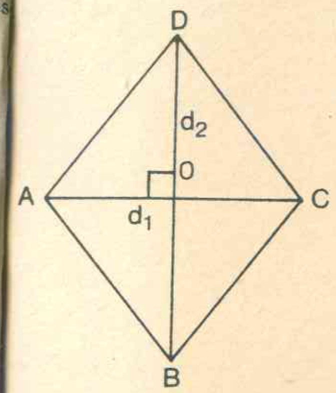


Fig. 6-15

Si A expresa el área de un rombo y sus diagonales son d_1 y d_2, respectivamente, tenemos:

$$A = A\ \triangle ACD + \triangle ACB$$

$$A = \frac{1}{2} d_1 \times DO + \frac{1}{2} d_1 \times OB$$

$$A = \frac{1}{2} d_1 (DO + OB)$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2} d_1 \times d_2.}$$ **Es la fórmula.**

Luego, podemos decir:

El área de un rombo es el semiproducto de sus diagonales.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6—5

A EJEMPLO 1.— **La diagonal mayor de un rombo mide 20 cm y la diagonal menor mide los $\frac{4}{5}$ de la mayor. Hallar su área.**

Solución: Tenemos: $d_2 = 20$ cm

$$d_1 = \frac{4}{5} \times d_2 = \frac{4}{5} \times 20 \text{ cm} = 16 \text{ cm}$$

$$A = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$$

Luego: $$A = \frac{1}{2} \times 16 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} = 160 \text{ cm}^2.$$

Respuesta.—El área mide 160 cm^2.

B **Resolver:**

1. **Las diagonales de un rombo miden 36 cm y 45 cm, respectivamente. Hallar su área.**

Las diagonales de un romboide son entre sí como $\frac{5}{8}$. Si la suma de dichas diagonales es 26 cm y la diagonal menor divide a la diagonal mayor en segmentos de 6 cm y 10 cm respectivamente, ¿cuál es el área del romboide?

6—10. AREA DE UN POLIGONO REGULAR.—

Sabemos que un polígono es regular si sus lados y ángulos son congruentes (Fig. 6-17).

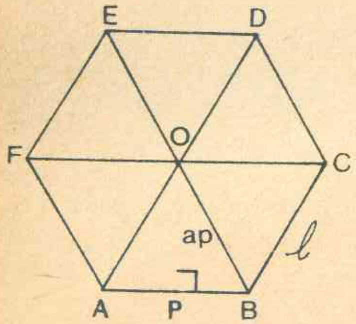


Fig. 6-17

Asimismo, el **perímetro** es la suma de las longitudes de sus lados y el **apotema** es el segmento perpendicular comprendido entre su centro y el punto medio de un lado, tal como **ap.**

Si se une el centro del polígono regular con sus vértices, se obtienen **n** triángulos congruentes; de modo que si A expresa el área del polígono regular de **n** lados, **n.l** su perímetro (p) y **ap** su apotema tenemos:

$$\text{A-}\triangle AOB = \frac{1}{2}\, l \,.\, ap.$$

El área A del polígono es el área de n triángulos, o sea:

$$A = n \times \frac{1}{2} \times l \times ap$$

$$A = \frac{1}{2}\, n \,.\, l \times ap$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\, p \times ap.}$$ **Es la fórmula.**

Luego, podemos decir:

El área de un polígono regular es el semiproducto de su perímetro y apotema.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6—7

A

EJEMPLO 1.— Hallar el área de un exágono regular de 10 cm de lado y $5\sqrt{3}$ cm de apotema.

Solución: Tenemos:

$A = ?$

$l = 10$ cm

$p = 6 \times 10 \text{ cm} = 60 \text{ cm}$

$ap = 5\sqrt{3} = 5 \times 1.73 \text{ cm} = 8.65 \text{ cm}$

$$A = \frac{1}{2}\, p \times ap$$

Luego: $$A = \frac{1}{2} \times 60 \text{ cm} \times 8.65 \text{ cm} = 259.50 \text{ cm}^2.$$

Respuesta.—El área del hexágono regular mide 259.50 cm².

Resolver los problemas siguientes:

1. Hallar el área de un polígono regular de 16 cm de perímetro y 2 cm de apotema.
2. El perímetro de un polígono regular mide 18 cm y su apotema 5.19 cm. Hallar su área.
3. Hallar el área de un exágono regular de 4 cm de lado y $2\sqrt{3}$ cm de apotema.
4. El lado de un decágono regular mide 3 cm y su apotema 4.7 cm. Hallar su área.
5. El perímetro de un triángulo equilátero mide 12 cm y su apotema $2\sqrt{3}$ cm. Hallar su área.
6. El apotema de un cuadrado mide 3.5 cm. Hallar su área.

6—11. POLIGONO INSCRITO Y POLIGONO CIRCUNSCRITO

—Un polígono es **inscrito en una circunferencia** si todos sus vértices son puntos de dicha circunferencia, tal como el $\triangle ABC$ de la figura 6-18.

Un polígono es **circunscrito en una circunferencia** si todos sus lados son tangentes a dicha circunferencia, tal como el cuadrilátero ABCD de la figura 6-19.

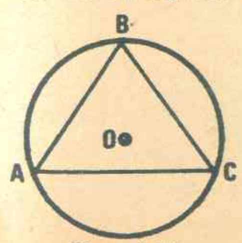


Fig. 6-18

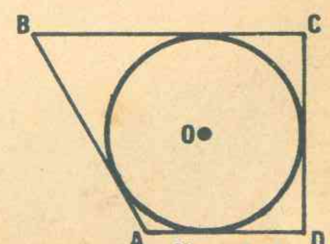


Fig. 6-19

6—12. POLIGONO REGULAR INSCRITO.— Sabemos que polígono es regular si sus ángulos y lados son congruentes.

Cualquier polígono regular puede inscribirse en una circunferencia, tal como el cuadrado inscrito de la figura 6-20, el cual se construye trazando las cuerdas que unen los extremos de los diámetros perpendiculares; y el exágono regular inscrito de la figura 6-21, el cual se construye dividiendo la circunferencia en 6 arcos congruentes con una longitud igual al radio y luego trazando sucesivamente las cuerdas que unen estos puntos. De modo que el lado del exágono regular inscrito es igual al radio de la circunferencia respectiva.

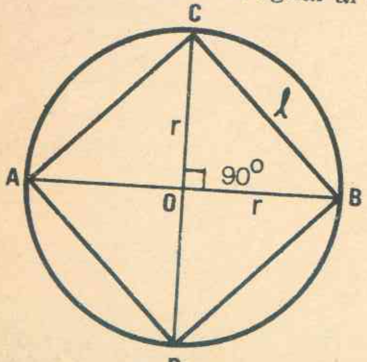


Fig. 6-20

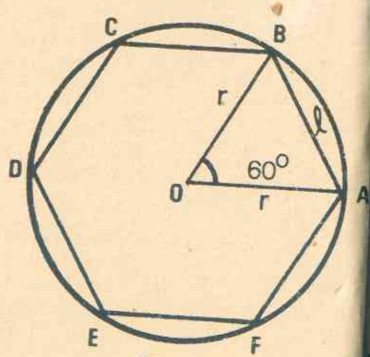


Fig. 6-21

En un polígono regular inscrito, el centro del polígono es el centro de la circunferencia y los lados del polígono son cuerdas congruentes de la circunferencia; por consiguiente, los arcos así como los ángulos centrales son congruentes. Así, en el cuadrado inscrito, cada ángulo central y cada arco miden 90° y los triángulos que se forman son triángulos rectángulos; y en el exágono regular inscrito, cada ángulo central y cada arco correspondiente miden 60° y los triángulos que se forman, tales como el $\triangle AOB$, son equiláteros.

6—13. LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA.— Sabemos que un segmento puede medirse utilizando, una regla graduada por ejemplo; en cambio cuando se trata de una curva y en particular de una circunferencia, no es posible esta medición mediante un instrumento rectilíneo, es decir, no se puede establecer una relación entre la cuerda y el arco correspondiente. Por consiguiente, para calcular la longitud de una circunferencia se emplea otro procedimiento.

Consideremos un exágono regular inscrito y un cuadrado circunscrito (Fig. 6-22); vemos que la circunferencia está comprendida entre ambos polígonos. Ahora bien, si se duplican sucesivamente los lados de cada polígono, obtendremos polígonos inscritos de 12, 24, 48, ... lados, y polígonos circunscritos de 8, 16, 32 ... lados, tales como el dodecágono regular inscrito y el octógono regular circunscrito de la figura 6-23.

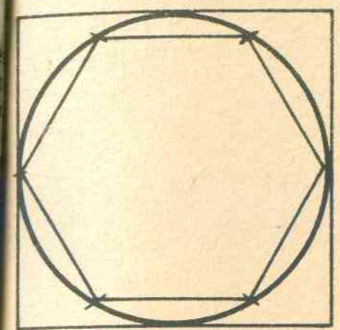


Fig. 6-22

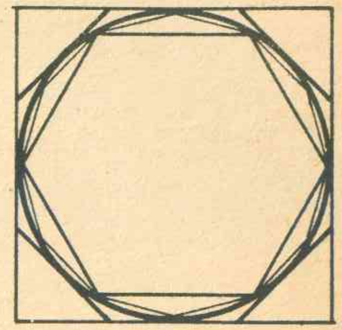


Fig. 6-23

Este proceso de duplicar los lados del exágono regular inscrito y el cuadrado circunscrito da lugar a las sucesiones:

$$p_6 < p_{12} < p_{24} < p_{48} < \ldots < p_n < \ldots \quad \text{y}$$

$$p_4 < p_8 < p_{16} < p_{32} < \ldots < p_m < \ldots ,$$

donde los perímetros p (números reales) se aproximan cada vez más a la longitud C de la circunferencia que es su límite, es decir, la diferencia $p_m - p_n$ se hace cada vez más pequeña a medida que crecen las sucesiones indefinidamente, determinando así un **número único** que es la **longitud C de la circunferencia.**

De modo que podemos escribir:

$$p_6 < C < p_8$$

De donde:

$$6r < C < 8r$$

$$\frac{6r}{2r} < \frac{C}{2r} < \frac{8r}{2r}$$

$$3 < \frac{C}{2r} < 4$$

La razón $\frac{C}{2r}$, que es la misma para todas las circunferencias, determina un número llamado "pi" que se representa con la letra griega π, cuyas algunas aproximaciones son: 3.14; 3.1416; 3.141592; etc. En nuestro curso emplearemos el número 3.14 como valor aproximado de π.

Por consiguiente, si $\dfrac{C}{2r} = \pi$

$\boxed{C = 2\,\pi\,r.}$ **Es la fórmula.**

Luego, podemos decir:

La longitud de una circunferencia de radio r es igual al prod
to de $2\,\pi$ y su radio.

A **EJEMPLO 1.**— El lado de un exágono regular inscrito mide 6.2 cm.
llar la longitud de la circunferencia.

Solución: Tenemos: $l = r = 6.2$ cm

$C = 2\,\pi\,r.$

Luego: $C = 2 \times 3.14 \times 6.2 \text{ cm} = 38.936$ cm.

Respuesta.—La longitud de la circunferencia mide 38.936 cm.

B Resolver los problemas siguientes:

1. Hallar la longitud de la circunferencia de 4 cm de radio.
2. ¿Cuál es la longitud de la circunferencia de 11 cm de diámetro?
3. El lado de un exágono regular inscrito mide 2.4 cm. Hallar la lo
gitud de la circunferencia.
4. La diagonal de un cuadrado inscrito mide 20 cm. ¿Cuál es la longit
de la circunferencia?
5. El radio del arco de la rueda delantera de una bicicleta mide 26 cm
el espesor de la goma mide 4 cm. ¿Cuántos metros recorre un ciclis
cuando la rueda delantera de dicha bicicleta da 100 vueltas?
6. La rueda delantera de un tractor mide 0.80 m de diámetro. ¿Cuá
tas vueltas dará en un recorrido de 628 m?

6—14. AREA DE UN CIRCULO.— "El área de un círculo es
límite de las áreas de los polígonos regulares inscritos en la circu
ferencia correspondiente". (Fig. 6-24).

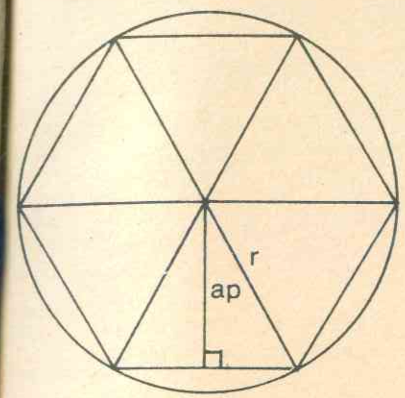


Fig. 6-24

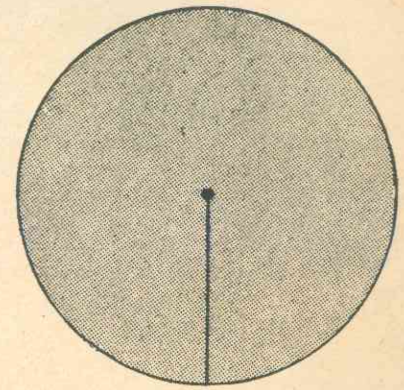


Fig. 6-25

Entonces, cuando el número de lados de un polígono regular se duplica indefinidamente, dicho polígono tiene como límite la circunferencia. De modo que, si A expresa el área del círculo de radio **r** y circunferencia C (Fig. 6-25), An el área del polígono regular de apotema **ap** y perímetro **p** donde se lee "se aproxima como límite", tenemos:

$$\begin{aligned} An &\longrightarrow A \\ ap &\longrightarrow r \\ p &\longrightarrow C \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\text{Si}\quad An = \frac{1}{2}\,p \times ap,$$

$$A = \frac{1}{2}\,C \times r$$

$$A = \frac{1}{2} \times 2\,\pi\,r \times r$$

$$A = \pi\,r^2. \qquad \textbf{Es la fórmula.}$$

Luego, podemos decir:

El área de un círculo de radio r es el producto $\pi\,r^2$.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6—9

A EJEMPLO.— El diámetro de una circunferencia mide 20 cm. Hallar área del círculo.

Solución: Tenemos: $d = 20$ cm

$$r = \frac{d}{2} = \frac{20 \text{ cm}}{2} = 10 \text{ cm}$$

$$A = \pi r^2$$

Luego: $A = 3.14 \times (10 \text{ cm})^2 = 3.14 \times 100 \text{ cm}^2 =$ 314 cm^2.

Respuesta.—El área del círculo es 314 cm^2.

B Resolver los problemas siguientes:

1. Hallar el área de un círculo que tiene 5 cm de radio.
2. ¿Cuál es el área de un círculo cuyo diámetro mide 18 cm?
3. El perímetro de un hexágono regular inscrito en una circunferenci mide 60 cm. Hallar el área del círculo correspondiente.
4. El perímetro de un cuadrado inscrito mide 5.64 dm. ¿Cuál es e área del círculo respectivo?
5. El escenario circular de un coliseo de gallos tiene 8 m de diámetro. Ha llar su área.
6. En el centro del patio de una casa de 15 m de largo por 10 m de anch hay una pileta cuya base circular tiene 2 m de radio. ¿Cuál es el áre de la superficie del patio que queda para el tránsito?

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE REPASO 6—1

1. ¿Qué idea tiene de superficie y qué de área?
2. ¿Qué es una unidad de área?
3. ¿Cuándo un triángulo es equilátero y cuándo es rectángulo?
4. ¿En qué se diferencia el rombo del romboide?
5. ¿Qué es un polígono regular?

6. Trace un polígono inscrito y otro circunscrito en una circunferencia.
7. En un circunferncia ¿qué relación existe entre la medida de un ángulo central y su arco correspondiente?
8. La circunferencia mide 360^c. Determine la medida de un ángulo central y construya los polígonos regulares inscritos siguientes: triángulo, cuadrado, pentágono y hexágono. (Use el transportador, el compás y la regla).
9. Construya un triángulo equilátero circunscrito en una circunferencia y obtenga un exágono regular circunscrito en la misma circunferencia como resultado de duplicar sus lados.
10. Construya un hexágono regular inscrito, trace un ángulo central y el apotema correspondiente a ese lado y responda:
    a) ¿Qué relación existe entre el lado del exágono y el radio de la circunferencia?
    b) ¿Qué relación existe entre el apotema del hexágono y el radio de la circunferencia?
11. La base de un rectángulo mide 100 m y su altura los $\frac{2}{5}$ de su base. Hallar su área.
12. El perímetro de un cuadrado mide 64 m. ¿Cuál es su área?
13. Un terreno de cultivo de 150 m de largo por 100 m de ancho se vendió a \$ 24 el m^2. ¿Cuál fue el precio del terreno?
14. Un terreno de forma cuadrada cuyo perímetro mide 80 m se compra a \$ 700 el m^2. ¿Cuánto cuesta el terreno?
15. La base de un triángulo mide 12 cm y su altura los $\frac{3}{4}$ de su base. Hallar su área.
16. El perímetro de un triángulo equilátero mide 240 m. Hallar su área.
17. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 24 cm y el otro los $\frac{3}{4}$ del anterior. Hallar su área.
18. La altura de un trapecio mide 8 m y su base mayor 50 m. ¿Cuál es el área del trapecio si su base menor mide los $\frac{3}{5}$ de la base mayor?
19. La diagonal mayor de un rombo mide 30 cm y la diagonal menor los $\frac{2}{5}$ de la diagonal mayor. Hallar el área del rombo.

20. Hallar el área de un romboide cuya diagonal menor mide 10 cm y divide la diagonal mayor en segmentos de 6 cm y 10 cm respectivamente.

21. Hallar la longitud de una circunferencia de 12 cm. de diámetro.

22. Hallar el área de un círculo de 10 cm de radio.

CONJUNTO DE EJERCICIOS OPCIONAL 6—1

1. Un huerto de naranjos tiene 90 m de largo por 50 m de ancho. Si cad naranjo ocupa una parcela cuadrada de 5 m de lado, ¿cuántas plantas hay

2. Dos hermanos heredan un terreno de 20 m de frente por 50 m de fondo y s lo reparten igualmente. Si uno de ellos vende la parte que le correspond a $ 800 el m², ¿cuánto recibe?

3. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado cuya área es igual a la de un triángul que tiene 20 cm de base y 10 cm de altura?

4. La base mayor de un trapecio es igual al diámetro de una circunferenci de 62.8 cm. Si la base menor del trapecio mide 12 cm y su altura los $\frac{2}{5}$ de la base mayor, ¿cuál es su área?

5. Las diagonales de un rombo están en la relación como $\frac{4}{5}$. Si la suma d dichas diagonales es, 18 cm, hallar el área del rombo.

6. Las diagonales de un romboide son entre sí como $\frac{4}{3}$. Si la diagonal menor divide a la diagonal mayor en segmentos de 8 cm y 16 cm respectivamente, ¿cuál es el área del romboide?

7. En la figura 6-26, M es punto medio de AB y los triángulos rectángulos son congruentes. Hallar el área del triángulo sombreado.

NOTA.—Dos regiones poligonales congruentes tienen igual área.

8. En la figura 6-27, M, P, Q y R son puntos medios de los lados del cuadrado y los cuatro triángulos rectángulos son congruentes. Hallar el área de la parte sombreada.

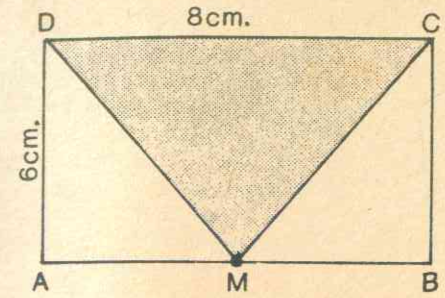


Fig. 6-26

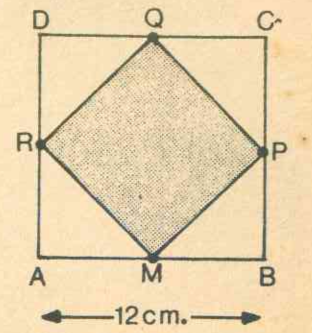


Fig. 6-27

9. Hallar el área de la figura 6-28.

10. Hallar el área de la parte sombreada de la figura 6-29.

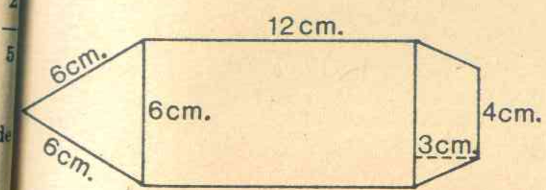


Fig. 6-28

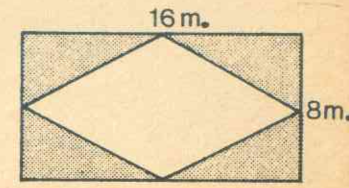


Fig. 6-29

11. Hallar el área de la figura 6-30.

12. Hallar el área de la parte sombreada de la figura 6-31.

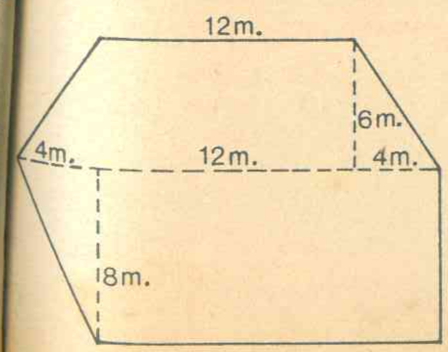


Fig. 6-30

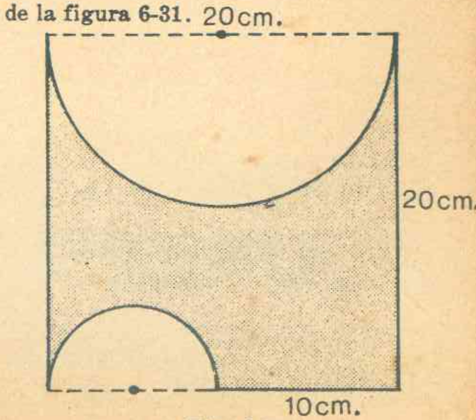


Fig. 6-31

A. EINSTEIN

(1879 - 1955)

Albert Einstein nació en Ulm (Alemania) y desde niño aprendió solo el cálculo y otras asignaturas de alta matemática; sin embargo, fue un mediano alumno en la escuela. Cuando sus padres se trasladaron a Milán, Albert se quedó en Zurich con el propósito de ingresar al Instituto Politécnico de esa ciudad, lo que no logró por sus deficientes conocimientos en ciencias naturales. Pero, después de completar su preparación, ingresó y se diplomó de profesor. Tuvo que trabajar durante 7 años en una Oficina de Patentes en Berna (Suiza), porque su profesión le ofrecía muy pocas ventajas económicas. En este tiempo escribió trabajos sobre Física y Matemática, y, en 1905, publicó un artículo acerca de la teoría de la relatividad, donde introdujo su famosa fórmula $E = m\,c^2$. Esta teoría condujo al descubrimiento de la energía nuclear.

Aprobado un aspecto de su teoría referente a los rayos luminosos en 1919, Einstein se convirtió en el foco de la atención mundial y su fama se extendió en forma extraordinaria. Su nombre se hizo tan corriente para el hombre del pueblo así como lo fueron los de Galileo o Newton. Las Universidades le otorgaron títulos, medallas, diplomas; y los industriales requirieron su fotografía para la propaganda de sus artículos.

Einstein fue un hombre pacifista, bondadoso. Con sus teorías revolucionó el concepto de universo y se complacía trabajar sólo en ideas nuevas. Su sueño fue encontrar una fórmula matemática que unificara todas las fuerzas de la naturaleza.

En 1933, Einstein se refugió en Estados Unidos debido a las privaciones sufridas a causa de los perjuicios religiosos y raciales practicados por el régimen nazi.

La mayor preocupación de este gran sabio fue el mal uso que podría hacerse de sus teorías, lo que constituiría la destrucción de la humanidad. Falleció en 1955 rodeado del respeto y la admiración del mundo.

Un lápiz y un borrador cuestan \$ 4.80; el lápiz cuesta \$ 4 más que el borrador. ¿Cuánto cuesta el lápiz? (La respuesta no es \$ 4. ¿Por qué?).

"Las matemáticas tienen invenciones muy sutiles y que pueden servir de mucho, tanto para contentar a los curiosos como para facilitar todas las artes y disminuir el trabajo de los hombres".

R. DESCARTES.

Unidad 7

VOLUMEN DE LOS SOLIDOS GEOMETRICOS
SOLIDOS GEOMETRICOS

7—1. CUERPO O SOLIDO GEOMETRICO.— Si observamos algunos cuerpos físicos que nos rodean, tales como: un libro, el tallo de un árbol, una naranja, etc., y prescindimos de su peso, color, materia, etc., para considerar sólo la forma y el tamaño, tendremos la idea de **cuerpo geométrico.**

Cuando la superficie de estos cuerpos geométricos está limitada por regiones poligonales, se llaman **poliedros;** y cuando la superficie es curvada, se denominan **cuerpos redondos.**

7—2. POLIEDROS. Consideremos:

a) El prisma.— Es un poliedro limitado por dos regiones poligonales congruentes y paralelas llamadas bases y por regiones paralelográmicas laterales llamadas caras laterales.

Así, la figura 7-1 es un prisma cuyas bases son ABCD y EFGH y cuyas caras laterales son ABEH, BEFC, etc.

El prisma se denota y se nombra por medio de las letras de sus vértices. Así, diremos "prisma ABCDEFGH".

Las intersecciones de las caras laterales se llaman **aristas**, tales como **a**.

La **altura** es la distancia entre los planos de las bases, tal como **h**.

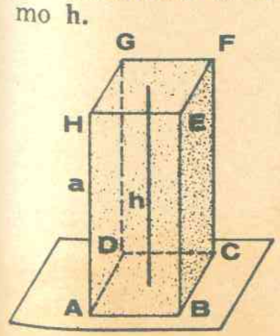


Fig. 7-1

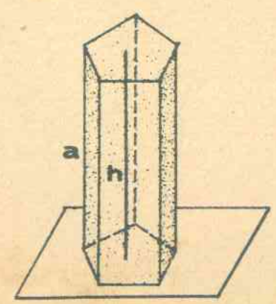


Fig. 7-2

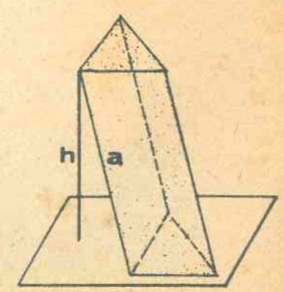


Fig. 7-3

Los prismas pueden ser rectos y oblícuos.

Un prisma es **recto** si las aristas laterales son perpendiculares al plano de la base (Figs. 7-1 y 7-2); un prisma es **oblicuo**, si las aristas laterales no son perpendiculares al plano de la base (Fig. 7-3).

Si las bases de un prisma recto son polígonos regulares, éste se denomina **prisma regular.** Las caras laterales de un prisma regular son rectángulos congruentes y las aristas laterales tienen la misma medida que la altura.

b) La pirámide.— Es un poliedro limitado por una región poligonal llamada base y por regiones triangulares llamadas caras laterales.

Así, la figura 7-4 es una pirámide cuya base es ABCDE y cuyas caras laterales son AVB, BVC, etc.

La pirámide se denota y se nombra por medio de sus letras. Así, diremos "pirámide V-ABCDE".

Las intersecciones de las caras laterales son las **aristas**, tales como **a** y el punto de intersección de las aristas es el **vértice** de la pirámide, tal como **V**.

La **altura** es la distancia del vértice al plano de la base, tales como **h.**

La altura de una de las caras laterales se llama **altura oblicua** o **apotema** de la pirámide, tal como $\overline{VM}$ (Fig. 7-5).

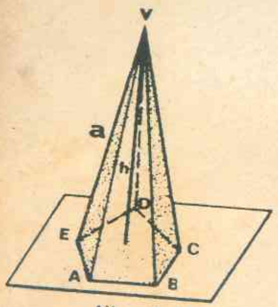


Fig. 7-4

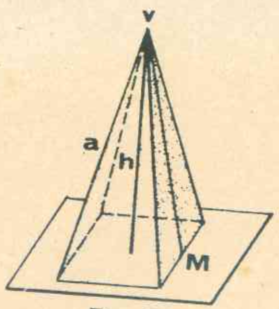


Fig. 7-5

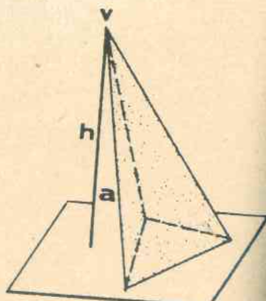


Fig. 7-6

Las pirámides pueden ser rectas y oblicuas.

Es **recta**, si el pie de su altura coincide con el centro de su base (Figs. 7-4 y 7-5); es **oblicua**, si el pie de su altura no coincide con el centro de su base (Fig. 7-6).

Una pirámide es **regular**, si su base es una región poligonal regular y su vértice equidista de los vértices de la base (Figs. 7-4 y 7-5). Toda pirámide regular es recta y sus caras laterales son triángulos isósceles congruentes.

7—3. CUERPOS REDONDOS.— Consideremos:

a) El cilindro.— Es un cuerpo geométrico limitado por dos regiones circulares llamadas bases y una superficie curvada llamada superficie lateral.

Así, la figura 7-7 es un cilindro cuyas bases son 0 y 0'. Generalmente se denota y se nombra por medio de una letra ubicada convenientemente. Así, diremos "cilindros C".

En un cilindro, la distancia entre las bases, tal como **h**, se llama **altura;** el segmento que une dos puntos de las circunferencias de las bases, tal como **g**, se llama **generatriz;** y el radio de la base, tal como **r**, es el **radio** del cilindro (Fig. 7-8).

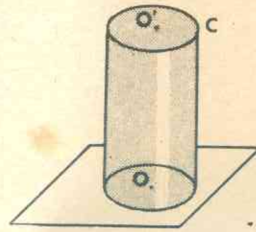


Fig. 7-7

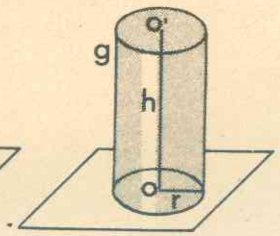


Fig. 7-8

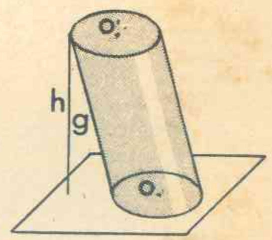


Fig. 7-9

Los cilindros pueden ser rectos y oblicuos.

Es **recto**, si la generatriz es perpendicular a la base (Fig. 7-8); y es **oblicuo**, si no es perpendicular (Fig. 7-9).

b) El cono.— Es un cuerpo geométrico limitado por una región circular llamada base y una superficie curvada llamada superficie lateral.

Así, la figura 7-10 es un cono cuya base es O. Generalmente se denota y se nombra por una letra ubicada convenientemente. Así, diremos "como C".

En un cono, la distancia del vértice a la base, tal como h, se llama altura; el segmento que une el vértice con un punto de la circunferencia de la base, tal como g, se llama generatriz; y el radio de la base, tal como r, es el radio del cono (Fig. 7-11).

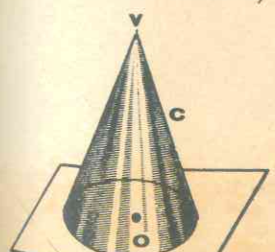


Fig. 7-10

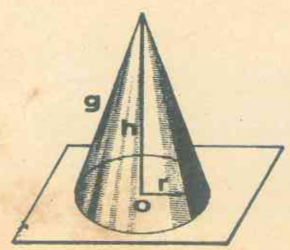


Fig. 7-11

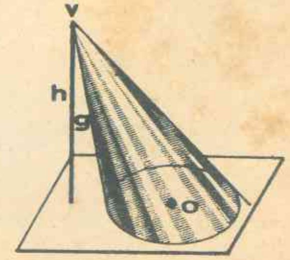


Fig. 7-12

Los conos pueden ser rectos y oblicuos.

Es **recto**, si el pie de la altura coincide con el centro de la bas (Fig. 7-11); y es **oblicuo**, si el pie de la altura no coincide con e centro de la base (Fig. 7-12).

c) **La esfera.**—Es un cuerpo geométrico cuyos puntos equi distan de otro punto llamado centro (Fig. 7-13).

Generalmente se denota y se nombra por medio de una letra Así, diremos "esfera E".

La distancia entre un punto de la esfera y su centro se llam **radio**, tal como **r** (Fig. 7-14).

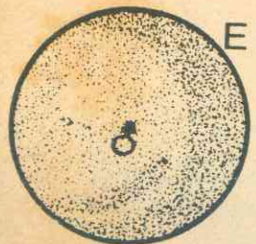


Fig. 7-13

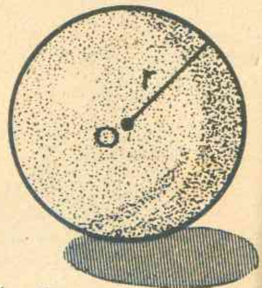


Fig. 7-14

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7—1

1. ¿Qué diferencia existe entre poliedros y cuerpos redondos?
2. Dibuje un prisma recto triangular e indique: las bases, dos caras laterales y dos aristas.
3. Dibuje un prisma recto y otro oblicuo, trace sus alturas y establezca la diferencia.
4. En un prisma regular, ¿cómo son las caras laterales?
5. Dibuje una pirámide regular e indique: su base, su vértice, dos caras laterales y dos aristas.
6. Dibuje una pirámide recta y otra oblicua, trace sus alturas y establezca la diferencia.
7. En una pirámide regular, ¿qué clase de regiones poligonales son sus caras laterales?
8. ¿Qué es el apotema de una pirámide?
9. Dibuje un cilindro recto y otro oblicuo y establezca la diferencia.
10. ¿Qué relación hay entre la altura y la generatriz de un cilindro recto?
11. Dibuje un cono recto y otro oblicuo y establezca la diferencia.
12. Dibuje una esfera y dé su idea.

7—4. CONCEPTO DE VOLUMEN DE UN SOLIDO GEOMETRICO.

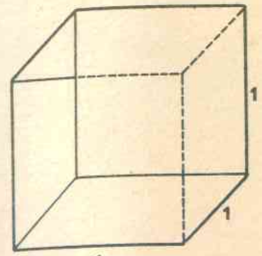


Fig. 1 7-15

7—4. CONCEPTO DE VOLUMEN DE UN SOLIDO GEOMETRICO.— Se entiende por volumen de un sólido geométrico a la medida de dicho sólido que es la reunión de la superficie y su interior.

Para determinar el volumen de los sólidos geométricos, se elige como unidad de volumen (unidad cúbica) un cubo (Fig. 7-15) cuya arista tiene longitud **uno.** (1 cm^3, 1 dm^3, 1 $pulg^3$, etc.).

7—5. VOLUMEN DE UN PRISMA.

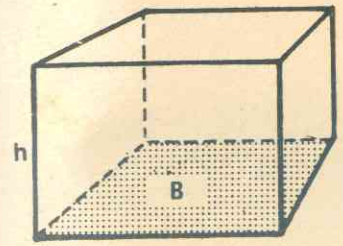


Fig. 7-16

7—5. VOLUMEN DE UN PRISMA.— Si V representa el volumen de un prisma, B el área de su base y **h** su altura (Fig. 7-16), la fórmula para hallar el volumen del prisma es

$$\boxed{V = B \times h}$$

NOTA.—El prisma que tiene 6 caras que son regiones cuadrangulares regulares congruentes se llama **cubo.**

Si V representa el volumen de un cubo y a su arista, la fórmula para hallar el volumen del cubo es

$$\boxed{V = a^3.}$$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7—2

A EJEMPLO 1.— Hallar el volumen de un prisma de 10 cm de altura y cuya base es un cuadrado de 5 cm de lado.

Solución: Tenemos: $h = 10$ cm

$l = 5$ cm

$V = B \times h$

Luego: $V = (5 \text{ cm})^2 \times 10 \text{ cm} =$

$25 \text{ cm}^2 \times 10 \text{ cm} = 250 \text{ cm}^3.$

Respuesta.—El volumen es de 250 cm^3.

B Resolver los problemas siguientes:

Hallar el volumen de un prisma cuadrangular regular de 8 cm de altura y cuya base tiene 5 cm de lado.

2. Hallar el volumen de un prisma de 18 cm de altura y cuya base es un triángulo de 8 cm de base y 6 cm de altura.

3. Una piscina tiene 25 m de largo, 10 m de ancho y 2.50 m de altura. ¿Cuántos metros cúbicos de agua hay en dicha piscina cuando está llena?

4. Un estanque de agua de forma cúbica tiene 2.40 m de arista. Hallar su volumen.

5. La suma de las aristas de un cubo es 60 cm. Hallar su volumen.

6. El área de una cara de un cubo es 16 m^2. Hallar su volumen.

7. Un depósito de agua de 2 m de largo, 1.50 m de ancho y 0.6 m de alto, se quiere desalojar con una cubeta que extrae cada vez 0.010 m^3 de agua. ¿Cuántas cubetas serán necesarias para desalojar el agua estando lleno el depósito?

8. Se quiere construir una pared de 20 m de largo por 3 m de alto y 0.3 m de espesor. ¿Cuántos ladrillos de 24 cm × 15 cm × 10 cm serán necesarios para dicha construcción?

7—6. VOLUMEN DE UN PIRAMIDE.—

Si **V** representa el volumen de una pirámide, B el área de su base y **h** su altura (Fig. 7-17), la fórmula para hallar el volumen de la pirámide es

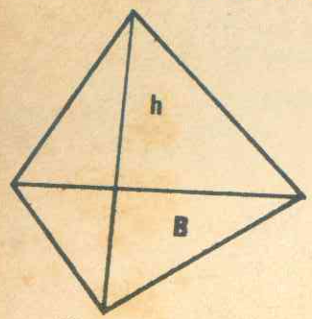


Fig. 7-17

$$V = \frac{1}{3} B \times h.$$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7—3

A

EJEMPLO 1.— La base de una pirámide es un triángulo equilátero de 6 cm de lado. Si la altura de la pirámide mide 18 cm, hallar su volumen.

Solución: Tenemos: $l = 6$ cm

$h = 18$ cm

$$V = \frac{1}{3} B \times h.$$

Luego: $B = \dfrac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \dfrac{(6 \text{ cm})^2 \times \sqrt{3}}{4} =$

$$\frac{36 \text{ cm}^2 \times \sqrt{3}}{4} = 15.57 \text{ cm}^2$$

Luego: $V = \dfrac{1}{3} \times 15.57 \text{ cm}^2 \times 18 \text{ cm} = 93.42 \text{ cm}^3.$

Respuesta.—El volumen mide 93.420 cm^3.

B Resolver los problemas siguientes:

1. Hallar el volumen de una pirámide cuadrangular regular de 10 cm de altura y cuya base tiene 3 cm de lado.

2. La carpa de un campamento tiene la forma de una pirámide cuadrangular regular. Si la altura de la carpa mide 3 m y el lado de la base 4 m, ¿cuál es su volumen?

3. La base de una pirámide es un triángulo equilátero de 12 cm de perímetro y su altura mide 3.5 veces el lado de la base. Hallar su volumen.

4. La base de una pirámide recta es un rectángulo de 6 m de largo y 4 m de ancho. Si la altura de la pirámide mide 10.5 m, ¿cuál es su volumen?

7—7. VOLUMEN DE UN CILINDRO.—

Si **V** representa el volumen de un cilindro, πr^2 el área de la base y **h** su altura (Fig. 7-18), la fórmula para hallar el volumen de un cilindro es

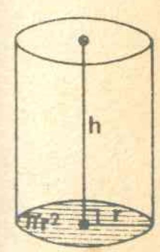


Fig. 7-18

$$\boxed{V = \pi r^2 \times h.}$$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7—4

A

EJEMPLO 1. Hallar el volumen de un cilindro cuya altura mide 12 cm y el diámetro de su base 10 cm.

Solución: Tenemos: $h = 12$ cm

$$r = \frac{d}{2} = \frac{10 \text{ cm}}{2} = 5 \text{ cm}$$

$$V = \pi r^2 \times h$$

Luego: $V = 3.14 \times (5 \text{ cm})^2 \times 12 \text{ cm} = 3.14 \times 25 \text{ cm}^2 \times 12 \text{ cm} = 942 \text{ cm}^3$

Respuesta.—El volumen es de 942 cm^3

B Resolver los problemas siguientes:

1. Hallar el volumen de un cilindro circular de 12 cm de altura y cuy base tiene 5 cm de radio.
2. Un pozo de forma cilíndrica tiene 4 m de profundidad y 2 m de diá metro. ¿Cuántos metros cúbicos de tierra se extrajeron al perforarlo
3. Hallar el volumen de un cilindro circular recto cuya base tiene 12 cm de diámetro y cuya altura mide el triple del radio.
4. Un tubo de desagüe tiene 3 m de longitud. Si el diámetro de la base mide 0.80 m, ¿cuál es su volumen?

7—8. VOLUMEN DE UN CONO.—

Si V representa el volumen de un cono, πr^2 el área de su base y h su altura (Fig. 7-19), la fórmula para hallar el volumen del cono es

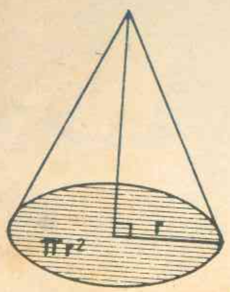


Fig. 7-19

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h.}$$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7—5

A EJEMPLO 1.—Hallar el volumen de un cono cuya altura mide 15 cm y el radio de su base $\frac{1}{3}$ de la altura.

Solución: Tenemos: $h = 15$ cm

$$r = \frac{1}{3} \times 15 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h.$$

Luego: $V = \frac{1}{3} \times 3.14 \times (5 \text{ cm})^2 \times 15 \text{ cm} =$

$$\frac{1}{3} \times 3.14 \times 25 \text{ cm}^2 \times 15 \text{ cm} =$$

$$392.500 \text{ cm}^3.$$

Respuesta.—El volumen mide 392.500 cm^3.

B Resolver los problemas siguientes:

1. Hallar el volumen de un cono de 12 cm de altura y cuya base tiene 4 cm de radio.
2. Un montículo de arena tiene la forma de un cono circular recto de 3 m de altura y 4 m de diámetro. ¿Cuántos metros cúbicos de arena hay?
3. Hallar el volumen de un cono cuya altura mide 12 cm y su diámetro es igual a su altura.
4. Hallar el volumen de un cono circular recto cuya altura mide 9 cm, si el radio de la base mide $\frac{1}{3}$ de la altura.

7—9. VOLUMEN DE UNA ESFERA.—

Si V es el volumen de una esfera de radio r (Fig. 7-20), la fórmula para hallar el volumen de la esfera es

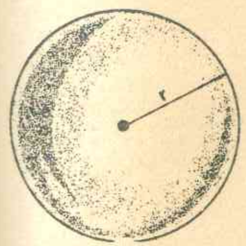


Fig. 7-20

$$\boxed{V = \frac{4}{3} \pi r^3.}$$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7—6

A EJEMPLO 1.— Hallar el volumen de una esfera de 6 cm de diámetro.

Solución: Tenemos: $r = \frac{d}{2} = \frac{6}{2} = 3$ cm

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Luego: $V = \frac{4}{3} \times 3.14 \times 27 \text{ cm}^3 = 113.04 \text{ cm}^3.$

Respuesta.—El volumen de la esfera es 113.04 cm^3.

B Resolver los problemas siguientes:

1. Hallar el volumen de una esfera de 2 dm de radio.
2. Una esfera tiene 20 cm de diámetro. ¿Cuál es su volumen?
3. Hallar el volumen de una esfera de 0.2 m de radio.
4. Hallar el volumen de una esfera de 0.10 m de diámetro.

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE REPASO 7—1

1. Dibuje un prisma recto triangular e indique su base, una cara lateral, una arista y su altura.
2. ¿Qué es un prisma regular?
3. Dibuje una pirámide recta cuadrangular e indique su base, una cara lateral, una arista y su altura.
4. ¿Qué clase de polígonos son las caras laterales de un prisma recto y las de una pirámide regular?
5. Dibuje un cilindro circular recto e indique su base, su altura y su generatriz.
6. ¿Cuándo un cilindro es recto y cuándo es oblicuo?
7. Dibuje un cono circular recto e indique su base, su altura y su generatriz.
8. ¿Un círculo es una esfera? ¿Por qué?
9. Hallar el volumen de un prisma cuadrangular regular cuyo perímetro en la base mide 20 cm y cuya altura mide los $\frac{2}{5}$ de dicho perímetro.
10. Hallar el volumen de una pirámide recta cuya base es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 cm y 8 cm, si la altura de la pirámide es igual a la semisuma de los catetos.
11. El radio de la base de un cilindro recto mide los $\frac{5}{6}$ de la altura del cilindro. Si dicha altura mide 12 cm, ¿cuál es su volumen?
12. La base de un cono circular recto tiene 0.12 dm de diámetro. Si la altura del cono mide 4 dm, hallar su volumen.
13. El radio de una esfera mide 0.2 m. Hallar su volumen.

CONJUNTO DE EJERCICIOS OPCIONAL 7—1

1. Hallar el volumen de una pirámide triangular regular si cada lado de la base es equivalente al lado de un cuadrado de 36 cm² de área, y cuya altura mide 9 cm.
2. Hallar el volumen de un cilindro circular recto cuya base está circunscrita a un exágono regular de 24 cm de perímetro y cuya altura mide el doble que el lado del exágono.
3. Hallar el volumen del sólido representado en la figura 7-21.
4. Hallar el volumen del sólido representado en la figura 7-22.

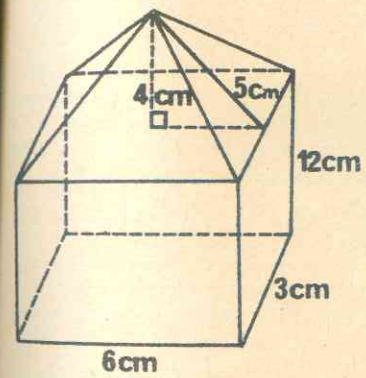


Fig. 7-21

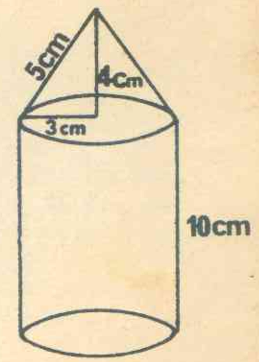


Fig. 7-22

RENE DESCARTES

(1596 - 1650)

Descartes nació en Lahaye, Francia. Procedía de una familia noble y acaudalada. Estudió en un colegio de jesuitas donde recibió una sólida formación en humanidades y matemática; luego se matriculó en la Facultad de Derecho de Poitiers, pero dos años después abrazó la carrera militar y se marchó a Holanda. Al estallar la guerra que había de llamarse de los Treinta Años, se alistó en el ejército del Duque de Baviera, y durante la campaña del Danubio, el 10 de noviembre de 1619 y a consecuencia de un sueño, según testimonio del mismo Descartes, nacieron sus ideas filosóficas y sus concepciones geométricas y decidió alejarse definitivamente de la carrera militar.

Después de recorrer varios países, en 1626 regresó a París donde vivió dos años dedicado a sus trabajos de Optica y luego se retiró a Holanda, y durante 20 años se dedicó por entero a la ciencia y la filosofía. En 1649, accediendo a los ruegos de la Reina Cristina de Suecia, se trasladó a Estocolmo para dictar lecciones de Filosofía a un auditorium presidido por la Reina y a las 5 de la mañana. A pocos meses de su permanencia en la Corte sueca, cayó enfermo de pulmonía y murió el 11 de febrero de 1650.

Descartes fue uno de los más grandes filósofos y matemáticos, y su aporte principal a la Matemática es la introducción del sistema de coordenadas y su aplicación a la Geometría, dando origen así a la Geometría Analítica. A este sistema se le conoce con el nombre de "Sistema de Coordenadas Cartesianas" en honor a su inventor.

El desarrollo del sistema de coordenadas sirvió de fundamento al Cálculo infinitesimal, inventado posteriormente por Newton y Leibniz.

Las obras completas de Descartes, tanto en el campo matemático como filosófico, fueron publicadas en 12 volúmenes y un suplemento, realizados por Charles Adan y Paul Tannery, bajo los auspicios del Ministerio de Instrucción Público de Francia entre 1897 y 1915.

* * *

¿Es $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\,(-1)} = \sqrt{1} = 1$? ¿Por qué?

* * *

Es una verdad cierta que, cuando no está en nuestra mano el determinar lo que es verdad, debemos seguir lo que es más probable.

RENE DESCARTES

Unidad 8

SIMETRIA

8—1. PUNTOS SIMETRICOS.— Dos puntos son simétricos con respecto a un tercero, si éste es el punto medio del segmento que une los puntos dados. Así, en la figura 8-1, A' es simétrico de A con respecto a O, llamado centro de simetría, si y sólo si, AO = OA'.

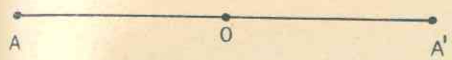


Fig. 8-1

8—2. SIMETRIA CON RESPECTO A UN PUNTO.— Dos figuras son simétricas con respecto a un punto, siempre que los puntos de dichas figuras son simétricos dos a dos con respecto al punto dado. Esta simetría se denomina **simetría central.** Así, por ejemplo:

L_1 es simétrica de L con respecto a O (Fig. 8-2), si y sólo si, AO = OA', BO = OB', CO = OC', etc. En este caso, $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L}$.

Asimismo, los triángulos ABC y A'B'C' de la figura 8-3 son simétricos con respecto a O, si y sólo si, AO = OA', BO = OB' y CO = OC'.

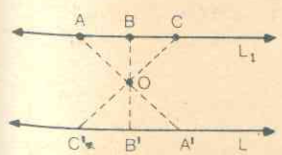


Fig. 8-2

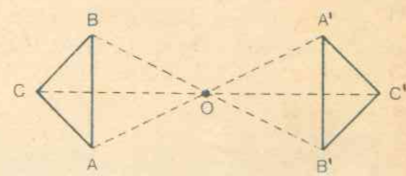


Fig. 8-3

8—3. SIMETRIA CON RESPECTO A UN EJE.— Dos figuras son simétricas con respecto a un eje, siempre que los puntos de dichas figuras sean simétricos con respecto a dicho eje. Esta simetría se denomina **simetría axial**.

Así, los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son simétricos con respecto a $\overleftrightarrow{L}$, si y sólo si $AM = MA'$ y $BR = RB'$, donde $\overline{AA'} \perp \overleftrightarrow{L}$ y $\overline{BB'} \perp \overleftrightarrow{L}$.

Análogamente, los triángulos ABC y A'B'C' son simétricos con respecto a $\overleftrightarrow{L}$ (Fig. 8-5), si y sólo si $AM = MA'$, $BR = RB'$ y $CS = SC'$

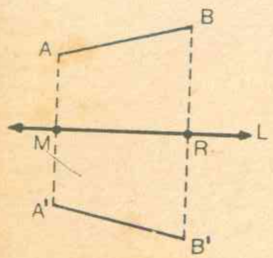


Fig. 8-4

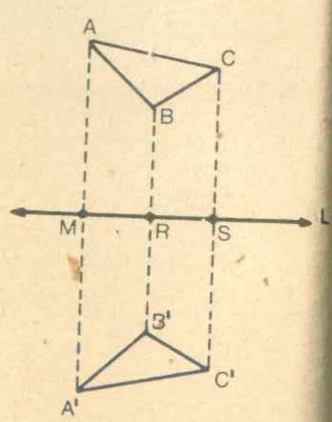


Fig. 8-5

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8—1

1. Dados un punto, un segmento y un triángulo, dibujar las figuras simétricas con respecto a:

   a) Un punto. b) Un eje.

2. Dado un ángulo ABC, dibujar los ángulos simétricos con respecto a:

   a) Un punto. b) Un eje.

3. Trazar las rectas de simetría posibles en las figuras siguientes:

Fig. 8-6

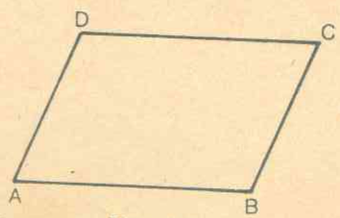


Fig. 8-7

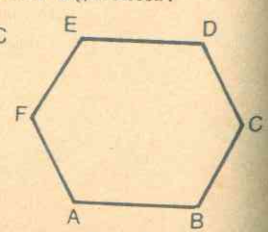


Fig. 8-8

4. Dibuje una circunferencia, indique el centro de simetría y afirme cuántos ejes de simetría existen en la circunferencia con respecto a dicho centro.

8—4. PROPIEDADES DE ALGUNAS FIGURAS GEOMETRICAS SIMETRICAS CON RESPECTO A UN EJE.—

Dada una figura geométrica, es posible que existan en ella otras dos figuras simétricas entre sí con respecto a un eje. Así, por ejemplo, en la figura 8-9, la recta $\overleftrightarrow{L}$ es el eje de simetría del $\triangle ABC$; pues, doblando el papel a través del eje de simetría, los puntos de $\overrightarrow{BA}$ coinciden con los de $\overrightarrow{BC}$. Aquí, el eje de simetría del ángulo es bisectriz de dicho ángulo, por tanto $\angle OBD \cong \angle CBD$.

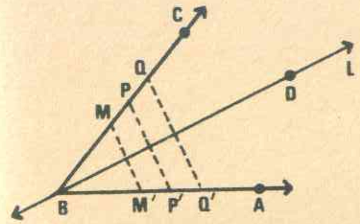


Fig. 8-9

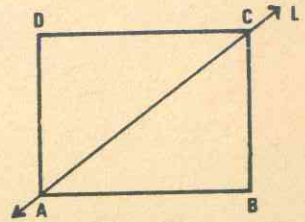


Fig. 8-10

Análogamente, en la figura 8-10, uno de los ejes de simetría es $\overleftrightarrow{L}$ y divide al rectángulo ABCD en dos triángulos simétricos. Aquí, el eje de simetría contiene a una diagonal del rectángulo; por tanto $\triangle ABC \cong \triangle ACD$.

Resulta así, el triángulo que tiene un sólo eje de simetría es isósceles (Fig. 8-11) y el triángulo con tres ejes de simetría es equilátero (Fig. 8-12).

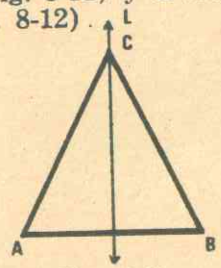


Fig. 8-11

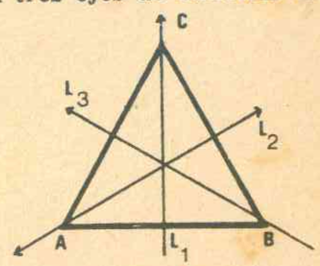


Fig. 8-12

En los paralelogramos debemos distinguir una **simetría diagonal** (Fig. 8-13) y una **simetría mediatriz** (Fig. 8-14).

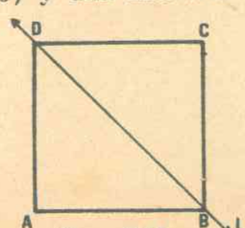


Fig. 8-13

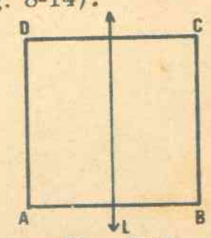


Fig. 8-14

Observamos que el eje de simetría del cuadrado de la figura 8-14 es mediatriz de un lado.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8—2

1. Dibuje un rombo y trace los ejes de simetría.
2. Dibuje un trapecio isósceles y trace todos los ejes de simetría.
3. ¿Cuántos ejes de simetría tiene el cuadrado? Ilústrelo gráficamente.
4. Trace todos los ejes de simetría de cada una de las figuras siguientes:

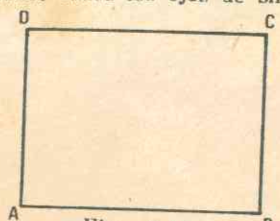


Fig. 8-15

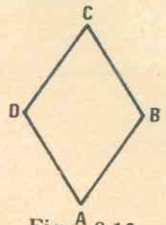


Fig. 8-16

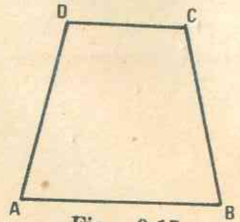


Fig. 8-17

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE REPASO 8—1

1. ¿Qué idea tiene de simetría de una figura:
   a) Con respecto a un punto? (Ilustre su respuesta.)
   b) Con respecto a un eje? (Ilustre su respuesta.)
2. ¿Cuántos ejes de simetría tiene un triángulo isósceles? (Ilustre su respuesta.)
3. ¿Qué letras mayúsculas tienen simetría con respecto a un eje? (Ilustre su respuesta.)
4. Trace todos los ejes de simetría de un romboide.

CONJUNTO DE EJERCICIOS OPCIONAL 8—1

1. Dibuje las figuras simétricas con respecto al punto O de:

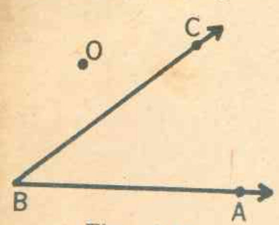


Fig. 8-18

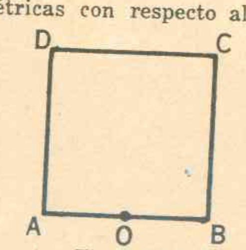


Fig. 8-19

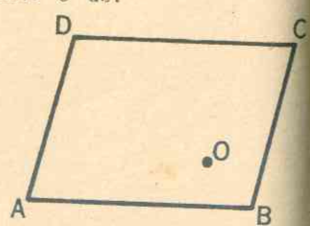


Fig. 8-20

Dibuje las figuras simétricas con respecto al eje L de:

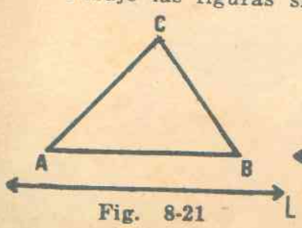


Fig. 8-21

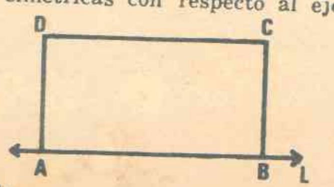


Fig. 8-22

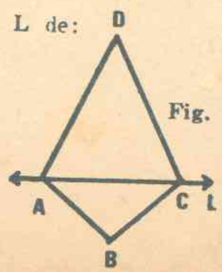


Fig. 8-23

APENDICE

PROPORCIONALIDAD

Directa: $f(kx) = kf(x)$

Inversa: $f(kx) = \frac{1}{k} f(x)$

PORCENTAJE

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(100)}{100}$$

INTERES

$$I = \frac{C \times r \times t}{100}$$

$$C = \frac{100 \times I}{r \times t}$$

$$r = \frac{100 \times I}{C \times t}$$

$$t = \frac{100 \times I}{C \times r}$$

DESCUENTO

$$D = Vn - Va$$

$$D = \frac{Vn \times r \times t}{100}$$

MEZCLA

Directa:

$$p = \frac{c_1 p_1 + c_2 p_2 + \ldots + c_n p_n}{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}$$

Inversa:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{p - p_1}{p_2 - p}$$

LEY DE LOS METALES FINOS

$$L = \frac{P_1}{P}$$

AREAS DE LAS REGIONES POLIGONALES

Rectángulo: $A = b \times h$

Cuadrado: $A = l^2$

Paralelogramo: $A = b \times h$

Triángulo: $A = \frac{1}{2} b \times h$

Triáng. equilátero: $A = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$

Trapecio: $A = \frac{1}{2} (b_1 + b_2) \cdot h$

Rombo: $A = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$

Romboide: $A = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$

Polígono regular: $A = \frac{1}{2} p \times ap$

Círculo: $A = \pi r^2$

LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

$$C = 2\pi r$$

VOLUMEN DE LOS SOLIDOS GEOMETRICOS

Prisma: $V = B \times h$

Cubo: $V = a^3$

Pirámide: $V = \frac{1}{3} B \times h$

Cilindro: $V = \pi r^2 . h$

Cono: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 . h$

VALOR DE PI (π)

$$\pi = 3.141592\ldots$$

ALGUNAS OPERACIONES

$$a \times 1 = a$$

$$a \times 0 = 0$$

$$a \div a = 1$$

$$a \div 1 = a$$

$$0 \div a = 0$$

$$b^1 = b$$

$$b^0 = 1 \text{ si } b \neq 0$$

$$\sqrt[1]{a} = a$$

$$\sqrt[n]{0} = 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ si } b \neq 0$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES

De $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, tenemos:

$$a \times d = b \times c$$

$$a = \frac{b \times c}{d}$$

$$b = \frac{a \times d}{c}$$

$$\frac{a + c}{b + d} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a - c}{b - d} = \frac{a}{b}$$

PESO DE UN CUERPO

$$P = m \times g$$

Densidad: $d = \frac{M}{V}$

Peso específico: $Pe = \frac{P}{V}$

GLOSARIO

Aleación es una mezcla de metales que se realiza por medio de la fundición.

Area de una región poligonal es la medida de dicha región.

Aval es un compromiso que una persona extraña a la letra de cambio adquiere para garantizar el pago de dicha letra en la fecha de su vencimiento.

Cambio es la operación de comprar o vender monedas o documentos valorados.

Cuerpos redondos son cuerpos geométricos cuya superficie es curvada.

Cheque es un documento bancario mediante el cual una persona o empresa que tiene dinero depositado en un Banco (cuenta corriente), ordena al Banco que pague a cierta persona o al portador una determinada suma de dinero.

Decimal es un nombre para un número racional.

Descuento es el interés que produce el valor nominal de una letra de cambio desde el día que se negocia hasta la fecha de su vencimiento.

Fracción es un elemento de una clase de equivalencia que expresa un número racional.

Fracción decimal es una fracción cuyo denominador es una potencia de 10.

Interés simple es toda proporcionalidad compuesta directa producida por un capital C en un tiempo t.

Ley de una aleación es la cantidad de metal fino que hay en cada unidad de peso de la aleación.

Letra de cambio es un documento suscrito en forma legal mediante el cual una persona ordena a otra que pague a una tercera persona cierta suma de dinero en el lugar y tiempo determinados.

Magnitud es la característica común que existe entre los objetos y que es capaz de compararse.

Medición es el procedimiento que se emplea para determinar las veces que la unidad elegida está contenida en la cantidad.

Medida es el número que se obtiene como resultado de la medición.

Moneda es un objeto mercantil con autorización y sello del gobierno de un País y que sirve para facilitar las transacciones comerciales.

Numeral es un nombre para un número.

Número entero es una clase de equivalencia de pares ordenados de números naturales.

Números enteros opuestos son dos números enteros que se diferencian en el signo.

Número denominado es la medida de una cantidad expresada en distintas unidades de una misma magnitud.

Número racional es una clase de equivalencia determinada por la relación R sobre $Z \times Z^*$ definida por $(a, b)\ R\ (c, d) \Longleftrightarrow a . d = b . c$.

Número racional decimal es aquel cuyo denominador de una de las fracciones que forman la clase de equivalencia es solamente múltiplo de 2 o de 5 o de ambos.

Poliedros son cuerpos geométricos cuya superficie está limitada por regiones poligonales.

Proporción geométrica es la igualdad de dos razones geométricas.

Proporcionalidad directa: Dados dos conjuntos A y B, la $f:A \longrightarrow B$ es una proporcionalidad directa si para cada número $x \in A$ y $Kx \in A$, se verifica $f(kx) = kf(x)$.

Proporcionalidad inversa: Dados dos conjuntos A y B, tales que $0 \notin A$, la $f:A \rightarrow B$ es una proporcionalidad inversa si para cada número $x \notin A$ y $kx \in A$, se verifica $f(kx) = \frac{1}{k} f(x)$.

Porcentaje: Si $f:A \rightarrow B$ es una proporcionalidad directa, tal que $100 \in A$, se llama porcentaje al valor de $f(100)$.

Razón geométrica es la comparación de dos números.

Regla de tres simple directa es aquella donde el problema nos plantea una proporcionalidad directa.

Regla de tres simple inversa es aquella donde el problema nos plantea una proporcionalidad inversa.

Regla de tres compuesta se da cuando en el problema intervienen tres o más variables.

Región poligonal es la reunión del polígono y su interior.

Tipo de cambio es el valor en que se cotiza una moneda extranjera en un determinado país.

RESPUESTAS DE ALGUNOS CONJUNTOS DE EJERCICIOS

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—13: 1. +6 2. 1 3. −2 4. +54 5. +4 6. +10 7. +24 8. +3 9. −20 10. −21 11. +28 12. +49 13. +20 14. −22 15. +11 16. +8.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—18: 5. $\left(\frac{31}{18}\right)$ 6. $\left(\frac{117}{40}\right)$ 7. $\left(\frac{-29}{15}\right)$ 8 $\left(\frac{27}{28}\right)$ 9 $\left(\frac{51}{36}\right)$ 10. $\left(\frac{-71}{130}\right)$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—20: 5. $\left(\frac{35}{216}\right)$ 6. $\left(\frac{3}{14}\right)$ 7. (0) 8. (0) 9. $\left(\frac{2}{35}\right)$ 10. $\left(\frac{-4}{35}\right)$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—21: 11. $\left(\frac{-51}{7}\right)$ 12 $\left(\frac{5}{2}\right)$ 13 $\left(\frac{15}{4}\right)$ 14. $\left(\frac{-23}{8}\right)$ 15 $\left(\frac{87}{10}\right)$ 16. $\left(\frac{-571}{90}\right)$ 17 $\left(\frac{59}{5}\right)$ 18 $\left(\frac{29}{7}\right)$ 19. $\left(\frac{-97}{30}\right)$ 20. $\left(\frac{-69}{10}\right)$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—22: 7 $\left(\frac{7}{18}\right)$ 8. $\left(\frac{123}{11}\right)$ 9. (5) 10. $\left(\frac{[illegible]}{3}\right)$ 11. (0) 12. (1)

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—25: 1. $\left(\frac{1}{3}\right)$ 2 $\left(\frac{20}{21}\right)$ 3. $\left(\frac{-25}{36}\right)$ 4. $\left(\frac{7}{8}\right)$ 5 $\left(\frac{1}{4}\right)$ 6 $\left(\frac{17}{120}\right)$ 7. $\left(\frac{121}{12}\right)$ 8. $\left(8\frac{5}{6}\right)$ 9. $\left(4\frac{19}{42}\right)$ 10 $\left(\frac{5}{16}\right)$ 11. $\left(-1\frac{1}{4}\right)$ 12. $\left(-1\frac{2}{9}\right)$ 13. $\left(1\frac{1}{12}\right)$ 14. $\left(-2\frac{1}{6}\right)$ 15. (2) 16. $\frac{-2}{9}$ 17. $\left(1\frac{7}{8}\right)$ 18. $\left(3\frac{1}{2}\right)$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—28: 9. 13.91671 10. 6.4448.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—29: 7. 3.854 8. 68.5256 9. 848.1 10. 8345.8.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—30: 9. 0.25 10. 0.027 11. 3.0625 12. 0.013824.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1—31: 1. 3.2 2. 0.201 3. 54 4. 1.220 5. 2057.61 6. 120 7. 0.714 8. 1.36 9. 8.0752 10. 0.004165.

CONJUNTO DE EJERCICIOS OPCIONAL 1—1: 4. a) 16 b) -69 c) (1) d) $\left(\frac{-101}{240}\right)$ e) 21.02 f) 50.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—3: 1. $ 62.38 2. $ 66.23 3. 5780 m 4. 839.03 mi 7. 740.8 Km 8. 60 mi/h.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—7: 1. 8 ret. 2. 4,000 pa. 3. 337.5 m 4. 2,000 v.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—13: 1. $ 400,000 2. $750. 3. 104 plantas 4. $ 640,000 5. $ 1,200 6. $ 320,000 7. $ 180 8. 700 bald.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—15: 1. 82,000 m² 2. $ 1,016,000 3. $ 24 4. $ 269,000 5. 17,000 m².

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—20: 1. 60 fr. 2. $ 28 3. 1 h 30 min 4. $ 0.40 5. $ 2.50 6. $4.80 7. 16,000 *l* 8. 2 h 25 min 9. 8 d 10. $ 17.78.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—22: 1. 300,000,000 *l* 2. 5,000 Kg 3. 16 *l* 4. 3,600 *l* 5. 3,500,000 cm³ 6. 6 h 40 min 7. 9 m³ 8. 0.144 *l*.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2—23: 5. 965 g 6. 1379.31 cm³ 7. 13.6 g/cm³ 8. 1,716 g.

CONJUNTO DE EJERCICIOS OPCIONAL 2—1: 1. 26,800 rie. 2. $ 10,600 3. 3,000 lad. 4. $ 244,800 5. $ 42 6. 180 cub. 7. 5,000 lad. 8. $ 50 9. 9.6 m³; 9,600 Kg 10. 228 m 11. $ 25 12. 483.01 parc. 13. $ 120,000 14. 400 bot.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3—7: 1. 12 h 16 min 15 seg 2. 9 h 59 min 56 seg 3. 17 h 51 min 20 seg 4. 12 h 13 min 53 seg 5. 21 h 22 min 44 seg 6. 17 h 7 min 42 seg 7. 10 h 30 min 39 seg 8. 9 h 56 min 37 seg.

CONJUNTO DE EJERCICIOS OPCIONAL 3—1: 1. 17 h 58 min 17 seg 2. 11 h 23 min 37 seg 3. 58°15′ 14″ long. oeste 4. 18°28′ long. este aprox. 5. Atrasado en 7 h 55 min 6. Adelantado en 4 h 55 min 53 seg.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—2: 7. 4 8. 5 9. 4 10. $\frac{-2}{15}$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—3: 1. $x = 3, y = 5$ 2. $x = 1, y = 3$. 3. $x = 20, y = 5$ 4. $x = 8, y = 6$ 5. $x = 12, y = 8$ 6. $x = 14, y = 22$ 7. 10 y 15 8. 12 y 9 9. 15 a, 45 a 10. R: 8, L: 6.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—4: 1. a) $x = 9, y = 3, z = 12$ b) $x = 1.8, y = 7.2, z = 21$ 2. 3, 6 y 12 3. 30°, 60° y 90° 4. 10, 14 y 18 5. 8, 6 y 10.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—6: 1 $ 1,440 2. $ 2,892 3. 16 d 4. 16 d 5. $ 85 6. 8 m 7. 6 ob. 8. 45 min 9. 1,250 *l* 10. 21 *l* 11. 75 d 12. 4 h 12 min.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—7: 1. 45 m 2. 15 d 3. 9 homb. 4. $ 10,080 5. 24 d 6. 16 homb. 7. 27 trab. 8. $ 1,200.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—8: 1. 40, 70 y 90 2. 400, 500 y 600 3. 12 y 16 4. 27, 36 y 45 5. 32, 40 y 12 6. 640, 560 y 2,400.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—9: 1. 16, 12 y 6 2. 180, 150 y 90 3. 30, 24 y 4 4. 100, 105 y 15 5. 9.5, 15.2 y 11.4 6. 133.8, 66.9 y 44.6.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—10: 1. El 1ro. $ 13,500 y el 2do. $ 22,500 2. A: $ 20,000, J: $ 32,500 y F: $ 17,500 3. Pierden: A: $ 48,000, B: $ 60,000 y C: $ 72,000 4. Ganan: P: $ 60,000, A: $ 60,000 y Ar.: $ 36,000 5. Reciben: el 1ro. $ 45,000, el 2do. $ 36,000 y el 3ro. $ 30,000 6. Reciben: el 1ro. $ 180,000, el 2do. $ 120,000, el 3ro. $ 300,000 y el 4to. $ 750,000 7. Pierden: A: $ 12,000, R: $ 28,000 y G: $ 36,000 8. Reciben: R: $ 192,000, V: $ 192,000, I: $ 144,000 y P: $ 72,000 9. Ganan: P: $ 30,000, L: $ 18,000 y J: $ 36,000 10. $ 108,000 $ 72,000.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—11: 1. Ganan: J: 30,000 pesos y P: $ 14,000 2. Ganan: A: $ 36,000, G: $ 20,000 y M: $ 27,000 3. Pierden: A: $ 36,000, G: $ 40,000 y C: $ 12,000 4. Pierden: el 1ro. $ 19,000 y el 2do. $ 12,000 5. Reciben: A: $ 200,000 B: $ 120,000 y O: $ 240,000.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—12: 1. 108 2. 90.10 3. 50 4. 15,750 5. 1.6 6. 50 7. 14% 8. 18% 9. 40% 10. 75% 11. 1,300 12. 7,860 13. 840.20 14. 20,585 15. 120 16. 150,000.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—13: 1. 42 al. 2. $ 9,424 3. 25% 4. 48 al. 5. $ 500 6. $ 672 7. $ 90,000 8. $ 216,000 9. 15% 10. $ 420 11. 20% 12. Perdí: $ 36,000.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—15: 1. $ 2,100 2. $ 74,250 3. $ 9,600 4. $ 4,650 5. $ 2,629.90 6. $ 4,836 7. $ 6.588 8. $ 144.44

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—16: 1. $ 1,250 2. $ 5,228.36 3. $ 1,050 4. $ 32,000 5. $ 1,530 6. $12,636.59

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—17: 1. 16% 2. 18% 3. 24% 4. 20% 5. 20% 6. 24%.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—18: 1. 4 me 2. 2 me 24 d 3. 1 a 3 me 4. 6 a 8 me 5. 2 a 8 me 6. 6 de Junio.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—19: 1. \$ 100 2. \$ 80 3. \$ 10,070 4. D = \$ 349.06; Va = \$ 8,050.94 5. \$ 75,000 6. Vn = \$ 3,787.13; Va = \$ 3,574.63 7. 20% 8. Va = \$ 2,452.80; 20% 9. 3 me 10. 60 d 11. 12 de Mayo 12. \$ 2,000 13. Vn = \$ 3,600; 16% 14. 18% y \$ 560 15. \$ 90 y 3 me 16. \$ 2,500 y 60 d.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—20: 1. \$ 5.16 2. \$ 13.8 c/lb. 3. \$ 52.28 c/*l* 4. \$ 17.45 c/Kg 5. \$ 26.96 c/bot.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—21: 1. 2 Kg de \$ 13 y 3 Kg de \$ 10 2. 3 bot. de \$ 24 y 4 bot. de \$ 20.50 3. 12 Kg de \$ 15 y 15 Kg de \$ 11.50 4. 22.50 c/lb. 5. 40 bot. de \$ 45 y 50 bot. de \$ 36 6. 60 Kg de \$ 16.50 y 75 Kg de \$ 12.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—22: 1. 0.750 2. 0.625 3. 11.14 g 4. 15 g 5. 50 g 6. 30 g.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4—23: 1. 0.7812 2. 0.9358 3. 12 g de 0.800 y 18 g de 0.850 4. 20 g de 14 Kilates y 40 g de 17 Kilates 5. 0.800 6. 40 g 7. 0.600 8. 0.850.

CONJUNTO DE EJERCICIOS OPCIONAL 4—1: 1. x = 8 2. b = 9 3. 30°, 60° y 90° 4. 28 d 5. \$ 200,000 6. 3 min 45 seg 7. 6 ob. 8. 36, 90 y 120 9. 120 patos, 480 gallinas y 2,400 pollos 10. \$ 24,000 y \$ 15,000 11. \$ 18.75 12. $33\frac{1}{3}$ % 13. \$ 90,000 14. \$ 10,650 15. \$ 366,666.66 16. 4% 17. 8 a 4 me 18. \$ 687.50 19. 15.5% 20. 12 lb y 6 lb.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6—1: 7. \$ 95,000 8. \$ 620 9. 1,200.50 cm^2 10. \$ 155,600.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6—2: 3. 48 cm^2 4. 60 cm^2 5. 25,000 m^2 6. k 44 cm^2.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6—3: 2. 540 cm^2 3. 720 cm^2 4. 15.57 dm^2 5. 115.32 cm^2 6. \$ 150,000.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6—4: 1. 216 cm^2 2. 592 m^2 3. 225 m^2 4. 756 m^2 5. 126 cm^2 6. 187.50 cm^2.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6—5: 3. 187.50 cm^2 4. 130 m^2 5. 24 cm^2 6. 720 dm^2.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6—6: 1. 100 cm^2 2. 364.32 m^2 3. 160 m^2 4. 432 cm^2 5. \$ 60,000 6. 80 cm^2.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6—7: 1. 16 cm^2 2. 46.71 cm^2 3. 6.92 cm^2 4. 70.5 cm^2 5. 20.76 cm^2 6. 49 cm^2.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6—8: 3. 15.072 cm 4. 62.8 cm 5. 188.40 m 6. 250 vuelt.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6—9 3. 314 cm^2 4. 706.50 dm^2 5. 50.24 m^2 6. 137.44 m^2.

CONJUNTO DE EJERCICIOS OPCIONAL 6—1: 1. 900 plantas 2. \$ 400,000 3. 10 cm 4. 128 cm^2 5. 40 cm^2 6. 216 cm^2 7. 24 cm^2 8. 72 cm^2 9. 102 cm^2 10. 64 m^2 11. 240 m^2 12. 203.75 cm^2.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7—2: 1. 200 cm^3 2. 432 cm^3 3. 625 cm^3 4. 13.824 m^3 5. 125 cm^3 6. 64 m^3 7. 180 cub. 8. 5,000 lad.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7—3: 1. 30 cm^3 2. 16 m^3 3. 32.29 cm^3 4. 48 m^2.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7—4: 1. 942 cm^3 2. 12.56 m^3 3. 2,034.72 cm^3 4. 1.5072 m^3.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7—5: 1. 200.960 cm^3 2. 12.560 m^3 3. 452.160 cm^3 4. 28.26 cm^3.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7—6: 1. 33.44 dm^3 2. 4,186 cm^3 3. 0.03344 m^3 4. 0.00052250 m^3.

CONJUNTO DE EJERCICIOS OPCIONAL 7—1: 1. 46.71 cm^3 2. 1,356.48 cm^3 3. 260 cm^3 4. 376,800 cm^3.

BIBLIOGRAFIA

SERIE DE MATEMATICA MODERNA	Fondo Educativo Interamericano S. A.
CICLO MEDIO DE MATEMATICA MODERNA (1er. y 2do. Cursos)	Trejo y Bosch.
CONCEPTOS BASICOS DE MATEMATICA MODERNA	Hernández, Rojo, Rabuffatti.
MATEMATICA PARA LA ESCUELA SECUNDARIA	Colección SMSG.
MATEMATICA MODERNA I y II . .	G. Papy.
MATEMATICA MODERNA 1 y 2 . .	Dolciani, Wooton y Beckenbach.
MATEMATICA	F. Vera.
MATEMATICA I y II	F. Miró Quesada.
ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS . .	Enzo Gentile (OEA).
ALGEBRA	C. Carranza.
ARITMETICA TEORICA	J. Ampuero.
ALGEBRA MODERNA	Frank Ayres Jr.
INTRODUCCION AL ALGEBRA . . .	Cotlar y Ratto de Sadosky
ALGEBRA MODERNA	Nichols, Heimer, Garland.
GEOMETRIA — UNA MODERNA INTRODUCCION	Keedy—Nelson.
GEOMETRIA MODERNA	Moise—Downs.
LECCIONES DE ARITMETICA . . .	Juan A. Viedma
GEOMETRIA MODERNA	Jurgensen—Donnelly
ARITMETICA TEORICA PRACTICA .	A. Baldor
ARITMETICA COMERCIAL Y PRINCIPIOS BASICOS DE CONTABILIDAD	Cuéllar — Morales.
A B C DE LA CONTABILIDAD . .	Demóstenes Rojas
LAS GRANDES CORRIENTES DEL PENSAMIENTO MATEMATICO . .	F. Le Lionnais
HISTORIA DE LA MATEMATICA 2, 3, 4	Hofman
BREVE HISTORIA DE LA MATEMATICA	F. Vera
PARADOJAS MATEMATICAS	Northrop
MATEMATICAS RECREATIVAS . .	Yakov Perelman
EL MUNDO DE LAS MATEMATICAS 1, 2, 3, 4 y 5	J. R. Newman.

INDICE GENERAL

UNIDAD 1. EL NUMERO ENTERO Y EL NUMERO RACIONAL

NUMERO ENTERO

OPERACIONES CON NUMEROS ENTEROS

NUMERO RACIONAL

OPERACIONES CON NUMEROS RACIONALES

Este libro se terminó
de imprimir en el mes de
febrero de 1983 en los
talleres gráficos de ITALGRAF.
Calle 16 No. 39B-60
Bogotá, D.E. - Colombia.