G. M. BRUÑO

# ELEMENTOS DE ÀLGEBRA

LIBRERÍA DE LA Vda DE CH. BOURET
PARÍS | MÉXICO

# ELEMENTOS
# DE ÁLGEBRA

PARA LA ENSEÑANZA SECUNDARIA
Y ESCUELAS PREPARATORIAS



POR

**G. M. BRUÑO**


LIBRERÍA DE LA V^DA DE CH. BOURET

PARÍS
23, Rue Visconti, 23

MEXICO
Sociedad de Edición y de Librería
Franco Americana
29, Avenida Cinco de Mayo

*Todo ejemplar que no vaya acompañado de la firma abajo estampada, será repulado como falso.*

G. M. Bruño

---

EN LA MISMA LIBRERÍA



---



# ELEMENTOS DE ÁLGEBRA

---

## INTRODUCCIÓN

### § I. — Definiciones preliminares.

**1.** La observación del conjunto de varios objetos materiales distintos ha proporcionado la idea de **número entero** que es una noción intuitiva.

**2.** La medida de ciertas cantidades continuas, como las longitudes, ha dado la noción de **número fraccionario,** o de **fracción.**

**3.** Los números enteros y los números fraccionarios constituyen los **números aritméticos.**

**4.** Los números aritméticos no bastan para determinar completamente ciertas cantidades. Para indicar, por ejemplo, que dos viajeros, partiendo de un mismo punto, han andado 20 km. cada uno, pero en direcciones opuestas, no se podrán distinguir estos caminos sólo por los números aritméticos.

**5.** Para obviar este inconveniente, se ha convenido en colocar un signo delante del número que mide cada cantidad, indicando este signo el sentido en el cual se ha considerado la cantidad.

Se podrá convenir en que $+20$, que se lee « más 20 », representa el camino recorrido hacia la derecha, y que $-20$, que se lee « menos 20 », representa el camino recorrido hacia la izquierda.

**6.** De un modo general, si unas cantidades pueden tomarse en dos sentidos opuestos, los signos $+$ y $-$, colocados delante de los números aritméticos que miden estas cantidades, indicarán el sentido en qué se han tomado.

**7.** El conjunto del signo y del número se llama **número algebraico.**

V. gr. : $+20$ y $-20$ son números algebraicos, y 20 es un número aritmético.

**8. Álgebra** *es la ciencia que estudia las propiedades de los números algebraicos.*

**9.** Su objeto es :

1° *Expresar las relaciones entre varios números algebraicos;*

2° *Dar medios para encontrar unos números cuyas relaciones con otros números dados sean conocidas.*

**10.** Realiza este doble objeto por medio :

1° *De signos convencionales;*

2° *De operaciones cuyo conjunto se llama **cálculo algebraico.***

## § II. — Números algebraicos.

**11.** Número algebraico. — *Número algebraico es una representación convencional que expresa a la vez la medida de una magnitud y el sentido en el cual se la considera.*

Expresa la medida de la magnitud por medio de un número aritmético, y su sentido por los signos $+$ y $-$.

**12. Módulo, ó valor absoluto.** — *Módulo o valor absoluto de un número algebraico es el número aritmético que entra en dicho número.*

V. gr. : 20 es el módulo de $+20$ y de $-20$.

El módulo de un número se expresa colocando este número entre dos rayitas verticales.

V. gr. : $|+20|$ y $|-20|$ se lee : módulo de más 20 y módulo de menos 20.

**13. Números positivos y números negativos.** — *Número positivo es un número algebraico cuyo signo es* $+$.

*Número negativo es un número algebraico cuyo signo es* $-$.

Importa notar que estos signos no indican una operación aritmética, sino el *sentido* o la *dirección* de la cantidad cuya medida se expresa por el valor absoluto.

**14. Representación de los números algebraicos.** — Con el fin de generalizar los problemas, se acostumbra, en



Álgebra, representar los números conocidos o desconocidos por letras.

V. gr. : se representará un camino recorrido por $x$.

Estas letras representan el signo junto con el módulo.*

**15. Observación.** — Esta representación de los números por unas letras se suele usar también en Aritmética; pero entonces la letra no encierra la idea de un signo. Importa pues notar que la esencia del Álgebra no consiste en la representación de los números por letras, sino en la distinción de dos especies de números : los números positivos y los negativos.

## § III. — Operaciones sobre los números algebraicos.

**16.** Se efectúan, sobre los números algebraicos, unas operaciones que llevan el mismo nombre que las operaciones aritméticas y se indican por el mismo signo :

1. La **adición**, que se indica por el signo $+$ (más);
2. La **sustracción**, que se indica por el signo $-$ (menos);
3. La **multiplicación**, que se indica por el signo $\times$ (multiplicado por), o más sencillamente por un punto colocado entre las letras, o únicamente por la yuxtaposición de las letras. V. gr. : el producto de $a$ por $b$ se indica por $a \times b$, ó $a.b$ ó $ab$;
4. La **división**, que se indica por el signo $\div$ (dividido por).

**17. Observación.** — Siendo los números algebraicos representaciones convencionales, las operaciones efectuadas con dichos números serán sometidas a reglas convencionales también y arbitrarias, pero no contradictorias.

Se escogerán de tal modo que, efectuadas las operaciones con números positivos todos, se confundan con las operaciones aritméticas del mismo nombre.

**18. Signos algebraicos.** — *Los cuatro signo* $+$, $-$, $\times$, $\div$, *que indican las operaciones que deben efectuarse con las cantidades algebraicas se llaman signos algebraicos.*

Además de estos signos se usan también :

$=$ (igual á); que indica la *igualdad* entre dos cantidades;

$\neq$ (diferente de); que indica la *desigualdad*;

y otros que se indicarán en su tiempo.

* Las primeras letras del alfabeto designan ordinariamente los *datos* o las *cantidades conocidas*, y las últimas las *incógnitas* o *cantidades desconocidas*.

19. **Coeficiente.** — *Coeficiente de una cantidad es todo número por el cual se multiplica dicha cantidad.* El coeficiente puede representarse por una letra.

V. gr. : En $2a$, 2 es el coeficiente de $a$.
En $2ax$, $2a$ es el coeficiente de $x$.

20. **Adición.** — *Adición de varios números algebraicos es una operación cuyo objeto es encontrar otro número, llamado* **suma** *de dichos números.*

En la suma de los números algebraicos se pueden distinguir tres casos.

21. Primer caso. — **Suma de varios números que tienen el mismo signo.**

Por **convención,** *la suma de varios números todos positivos o todos negativos es un número que tiene el signo de los sumandos, y cuyo módulo o valor absoluto es igual a la suma de los módulos de los sumandos.*

V. gr. : Sea :

$$(+3)+(+5)+(+7)=+15$$
$$(-3)+(-5)+(-7)=-15.$$

22. **Consecuencias.** — 1. *Se pueden reemplazar varios números todos positivos o todos negativos por la suma de ellos.*

2. *Se puede reemplazar un número por otros varios, cuya suma sea igual a este.*

V. gr. : Sea :

$$(+3)+(+15)+(+2)=+20.$$

Por ser

$$+15=(+10)+(+5)$$

tendremos :

$$+20=+3+(+10)+(+5)+(+2).$$

23. Segundo caso. — **Suma de un número positivo y de otro negativo.**

Por definición, **números opuestos** *son dos números, el uno positivo y el otro negativo, que tienen el mismo valor absoluto.*

V. gr. : $+2$ y $-2$.

24. Por **convención,** *la suma de dos números opuestos es nula.*

V. gr. : $(+2)+(-2)=0.$

25. **En virtud de esta convención :**



*La suma de un número positivo con otro negativo es igual a un número cuyo valor absoluto es la diferencia de los valores absolutos de los dos números dados, y cuyo signo es el del número de mayor valor absoluto.*

En efecto, sea

$$(+6)+(-4).$$

Tenemos (nº 22)

$$+6=(+2)+(+4)$$

luego

$$(+6)+(-4)=(+2)+(+4)+(-4)$$

y, según la convención anterior (nº 25),

$$(+4)+(-4)=0.$$

Luego

$$(+6)+(-4)=+2$$

resultado conforme a la regla anterior.

Sea también

$$(+2)+(-8)$$

tenemos

$$(+2)+(-8)=(+2)+(-2)+(-6)$$

o

$$(+2)+(-8)=-6.$$

26. Tercer caso. — **Suma de varios números positivos y negativos.** — Basta considerar la suma de un número positivo con otro negativo, porque, segun el nº 22, todos los números positivos pueden reemplazarse por su suma, asi como los números negativos.

Este caso se reduce, pues, al anterior.

27. **Sustracción.** — *Sustracción es una operación cuyo objeto es encontrar un número algebraico que, agregado á un número dado llamado* **substraendo,** *reproduzca otro número dado llamado* **minuendo.**

*El resultado de la sustracción se llama* **diferencia.**

1º Sean los números $+4$ y $+6$, y $x$ su diferencia.

Se tiene

$$(+4)+(x)=+6.$$

Agregando $-4$ a cada una de estas dos cantidades, que son iguales, se tiene

$$(+4)+(x)+(-4)=(+6)+(-4)$$

o

$$x=(+6)+(-4)=+2$$

2° Sean los números $+12$ y $-5$; $x$ su diferencia.
Se tiene

$$(+12)+(x)=-5$$

y

$$(+12)+(x)+(-12)=(-5)+(-12)$$

o

$$x=-17.$$

**28.** De estos ejemplos se infiere la regla siguiente : *Se obtiene la diferencia de dos números algebraicos, agregando al minuendo el número opuesto al substraendo.*

**29. Notación.** — Se indica la sustracción por el signo $-$ colocado entre el minuendo y el substraendo.

**V. gr.** : la diferencia entre $+6$ y $+4$ es

$$x=(+6)-(+4)$$

Se nota que

$$(+6)-(+4)=(+6)+(-4).$$

**30. Número mayor que otro,** — *Un número es mayor que otro número, si, restando el segundo del primero, la diferencia es positiva.*

V. gr. : Sean $+12$ y $+8$
la diferencia es

$$(+12)+(-8)=+4$$

luego, se dirá que $+12$ es mayor que $+8$.

Esta relación se indica por el signo $>$, que se lee *mayor que* : así

$$+12>+8$$

se lee : más 12, mayor que : más 8.

También se tiene :

$$+3>-10.$$

En efecto, la diferencia es

$$(+3)+(+10)=+13.$$

**31. Número menor que otro.** — *Un número es menor que otro número si, restando el segundo del primero, la diferencia es negativa.*

V. gr. : $+9$ es menor que $+16$.

En efecto, la diferencia es

$$(+9)-(+16)=(+9)+(-16)=-7.$$



Esta relación se indica por el signo $<$, que se lee *menor que* : así

$$+9<+16.$$

se lee : más 9, menor que : más 16

También

$$-10<-3.$$

En efecto

$$(-3)-(-10)=(-3)+(+10)=+7.$$

**32. Consecuencias.** — I. *Los números positivos aumentan cuando aumenta su valor absoluto.*

II. *Los números negativos aumentan cuando disminuye su valor absoluto.*

III. *Cero es menor que cualquier número positivo y mayor que cualquier número negativo.*

En efecto, 1° sea

0 y $+3$; la diferencia
$0-(+3)=0+(-3)=-3$, es negativa.

2° Sea

0 y $-5$; la diferencia
$0-(-5)=0+(+5)=+5$, es positiva.

**33. Multiplicación.** — *La multiplicación de varios números algebraicos es una operación cuyo objeto es encontrar otro número llamado* **producto** *de estos números.*

34. Primer Caso. — **Producto de dos números algebraicos.**

**Por convención,** *el valor absoluto del producto de dos números algebraicos es igual al producto de los valores absolutos de estos números; y el signo del producto es $+$ si los números tienen el mismo signo, y $-$ si tienen signos contrarios.*

*Los números que contribuyen así a la formación de un producto se llaman los* **factores** *de este producto.*

V. gr. : 1° Sean los factores $+3$ y $-7$; el producto es $-21$.

2° Se tiene también

$$(-5)\times(-4)=+20.$$

y

$$(+5)\times(+4)=+20.$$

35. Segundo Caso. — **Producto de varios factores.**

*Llámase producto de varios factores* a, b, c, *etc., el resultado obtenido multiplicando* a *por* b, *el producto* ab *por* c, *el nuevo producto por* d, *y así sucesivamente.*

36. **Teorema.** — *El producto de varios factores es independiente del orden de los factores.*

Sea el producto $abcd$. El valor absoluto $|abcd|$ es independiente del orden de los factores. (V. Aritmética, nº 167.) Por otra parte, el producto $abcd$ puede escribirse $(+1) \times abcd$. Si se multiplica $+1$ por un factor positivo, queda positivo el producto; si se multiplica por un factor negativo, el signo del producto cambia; y este signo cambia tantas veces cuantos factores negativos hay. El signo final será $+$ si el número de factores negativos es par, y $-$ si este número es impar. Luego tampoco este signo depende del orden de los factores.

37. **Producto de una suma por un número.** — *Para multiplicar una suma por un número se multiplican los sumandos por este número, y se suman estos varios productos.*

Sea
$$(a+b).c.$$
Se debe tener
$$(a+b).c = ac + bc.$$

I. Supongamos $c$ positivo :

1º Si $a$ y $b$ son positivos, el teorema está demostrado en Aritmética ;

2º Si $a$ es positivo y $b$ negativo, haciendo $b = -b'$, $b'$ es positivo.

Se puede suponer
$$|a| > |b| \quad \text{o} \quad |a| < |b|.$$
Si
$$|a| > |b|,$$
se tiene
$$(a+b)\,c = (a-b')\,c = ac - b'c = ac + (-b')\,c = ac + bc.$$
Si
$$|a| < |b|$$
$$(a+b)\,c = (a-b').c = -(b'-a).c = -b'c + ac$$
$$= (-b').c + ac = bc + ac.$$

II. Si $c$ es negativo, cambiando los signos, se encuentran los casos anteriores.

Luego, siempre,
$$(a+b)\,c = ac + bc.$$

38. Producto de una suma por una suma. — *El producto de una suma por una suma se obtiene multiplicando la primera por cada una de las partes de la segunda y sumando los resultados.*



V. gr. : Sea
$$(a+b+c) \times (d+f)$$
el producto es
$$ad + bd + cd + af + bf + cf.$$

39. **Potencia de un número algebraico. — Definición.** — *Potencia* **n** *de un número algebraico* **x** *es el producto de* **n** *factores iguales a* **x**.

Este producto se indica por $x^n$.

40. **Exponente.** — *El exponente de una potencia es el número que indica cuántos factores iguales deben tomarse para formar la potencia.*

V. gr. : En el ejemplo anterior, $n$ es el exponente.

41. **División.** — *División algebraica es una operación cuyo objeto es encontrar un número cuyo producto por un número dado, llamado* **divisor**, *reproduzca otro número dado llamado* **dividendo**.

El resultado de la división se llama **cociente**.

42. Regla. — *Según esta definición, y las propiedades de la multiplicación, el valor absoluto del cociente se obtiene dividiendo los valores absolutos, y el signo de este cociente es $+$ si el dividendo y el divisor tienen el mismo signo, y $-$, si tienen signos contrarios.*

## § IV. — Fracciones algebraicas.

43. *Toda fracción algebraica representa el cociente de su numerador por su denominador.*

Así las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{m-n}{3a}$ representan : la primera el cociente de $a$ por $b$ y la segunda el cociente de $m-n$ por $3a$.

Las propiedades de las fracciones aritméticas convienen también a las fracciones algebraicas, así :

44. *Se pueden multiplicar o dividir los dos términos de una fracción por una misma cantidad sin que el valor de esta fracción se altere.*

1° Sea $\frac{a}{b}$ una fracción. Designando por $q$ el cociente de $a$ por $b$, se tendrá :

$$\frac{a}{b} = q \qquad (1)$$

y, por consiguiente,

$$a = bq$$

Multiplicando los dos miembros de esta última igualdad por una misma cantidad $m$, queda

$$am = bmq$$

dividiendo los dos miembros por $bm$, se tiene

$$\frac{am}{bm} = q. \qquad (2)$$

Por lo que se ve que tanto $\frac{am}{bm}$ como $\frac{a}{b}$ son iguales a $q$;

2° Si en la igualdad (2) se supone que $m$ sea una fracción y valga $\frac{1}{n}$ por ejemplo, queda, substituyendo $\frac{1}{n}$ en lugar de $m$,

$$\frac{\frac{a}{n}}{\frac{b}{n}} = q.$$

Por lo que se ve que tanto $\frac{a \div n}{b \div n}$ como $\frac{a}{b}$ son iguales a $q$.

*Luego se pueden multiplicar o dividir los dos términos de una fracción algebraica por una misma cantidad sin que el valor de esta fracción se altere.*

Esta doble propiedad se aplica frecuentemente para simplificar las fracciones y para reducirlas a un común denominador.

# LIBRO PRIMERO

# CÁLCULO ALGEBRAICO

## CAPÍTULO PRIMERO

## ADICIÓN Y SUBSTRACCIÓN

### § I. — Definiciones y clasificación de las expresiones algebraicas.

**45. Expresión algebraica.** — *Se llama* **expresión algebraica** *la indicación de cierto número de operaciones que se tienen que efectuar :* $6a^2b$, $a + b$, $\sqrt{5ab}$, $\frac{(a+l)n}{2}$ son expresiones algebraicas.

*Expresión* **entera** *es la que no contiene denominador algebraico; expresión* **fraccionaria** *la que sí lo contiene.*

*Se llama* **expresión racional** *la que no contiene radical, e* **irracional** *la que sí lo contiene.*

Una expresión algebraica es racional y entera cuando no contiene radical ni denominador algebraico.

$6a^3b$ es una expresión entera y racional.

$\frac{8a^4b^2}{c}$ es una expresión fraccionaria y racional.

Por último $3a^2\sqrt{b}$ y $\frac{6a}{b}\sqrt{c}$ son expresiones irracionales.

*Se llama* **fórmula** *la expresión algebraica que indica las operaciones que deben efectuarse con ciertas cantidades para obtener otra.*

**46. Término.** — *Se llama* **término** *de una expresión alge-*

*braica toda cantidad separada de otra por los signos* $+$ o $-$. Así en $3a^2 + 5a^4b - \sqrt{ac}$ hay tres términos.

Delande de un término positivo que se halla sólo, o que es el primero de una serie de términos, se sobrentiende el signo $+$.

47. **Monomio, binomio, polinomio.** — **Monomio** *es la expresión algebraica que no consta más que de un solo término.* Ejemplo :

$$10ab^2c^3.$$

**Binomio** *es la expresión que consta de dos términos.* Ejemplo :

$$3ab - 4c^2.$$

**Trinomio** *es la expresión que consta de tres términos.* Ejemplo :

$$x^2 + px + 9.$$

*En general,* **polinomio** *es la expresión algebraica compuesta de varios términos.*

48. **Grado** *de un término entero es la suma de los exponentes de los factores algebraicos que lo forman;* si el término es fraccionario, el grado es la diferencia entre el grado del numerador y el del denominador; si el término contiene un radical, el grado de la parte irracional es el cociente del grado de la cantidad colocada debajo del radical, dividido por el índice del mismo : así los términos $3a^2b$, $\frac{5a^2b^3}{c^2}$ y $a\sqrt[3]{c^2b^4}$ son del tercer grado.

Se dice que un polinomio es *homogéneo* cuando todos sus términos son del mismo grado. Ejemplo :

$$6ab^3 - 4a^2b^2 + 5a^3b - b^4.$$

49. *Ordenar un polinomio,* es escribir todos sus términos en un orden tal que los exponentes de una letra elegida, llamada *letra ordenatriz,* vayan aumentando o bien disminuyendo.

Así el polimonio $4\,a^5 - 3\,a^4b - 2\,a^3b^2 + 8\,a^2b^3 + ab^4 - b^5$ está ordenado con respecto a las potencias decrecientes de $a$, y también con respecto a las potencias crecientes de $b$.

50. **Valor numérico de una expresión algebraica.** — *Valor numérico de una expresión algebraica es el resultado que se*



*obtiene reemplazando cada letra por el número que representa, y efectuando las operaciones indicadas.*

Así para $a = 2$, $b = 1$ y $c = 4$, el monomio $4a^3b^2c$ se convierte en $4 \times 2^3 \times 1^2 \times 4$, y su valor numérico será 128.

Del mismo modo el polinomio $5a^2 + \sqrt{c} - 3ab$ tiene por valor 5, si $a = 2$, $b = 3$ y $c = 9$.

51. **Observación.** — Cuando se quiere representar una expresión en la cual entra cierta letra, $x$, por ejemplo, sin determinar más esta expresión, se emplea a menudo una de las formas $P(x)$, $F(x)$, etc., que se leen : P de $x$, F de $x$, etc. Claro está que, en cada caso, se necesitará una convención para fijar la significación de estas expresiones.

V. gr. : Si se escribe :

$$P(x) = x^3 - ax^2 + a^3,$$

$P(x)$ representa el segundo miembro.

Si, después, se quiere indicar que se ha substituído $x$ por $a$, se escribirá $P(a)$. Entonces,

$$P(a) = a^3 - a.a^2 + a^3 = a^3.$$

Del mismo modo, si $F(x) = x^2$, se tiene, substituyendo $x$ por 2,

$$F(2) = 4.$$

52. **Expresiones equivalentes.** — Expresiones algebraicas equivalentes o identidades son aquellas cuyos valores numéricos son iguales, sean cuales fueren los valores particulares atribuídos á las literales.

V. g. :

$$(a + b)(a - b) \quad \text{y} \quad a^2 - b^2.$$

53. **Términos semejantes.** — *Se llaman* términos semejantes, *aquellos que tienen las mismas letras afectadas de los mismos exponentes, cualesquiera que sean sus coeficientes y sus signos.*

*Se llama* **reducción** *la operación que consiste en reemplazar varios términos semejantes por uno solo.*

Para reducir varios términos semejantes a uno solo, se suman por una parte los coeficientes de todos los términos positivos, y por otra los de los negativos; la diferencia de las dos sumas, afectada del signo de la mayor, es el coeficiente del único término que debe reemplazar a los demás.

Así el polinomio $6a^3 - 2a^3 + a^3$, se reduce a $5a^3$.

Del mismo modo,

$$5a^2b - 3ab^2 + 8a^2b + ab^2 - 7a^2b,$$

se reduce á $6a^2b - 2ab^2$.

## § II. — Adición.

54. **Definición.** — *Sumar varias expresiones algebraicas es encontrar una expresión algebraica cuyo valor numérico sea siempre igual a la suma de los valores numéricos de los sumandos, sean cuales fueren los valores particulares atribuidos a las letras.*

Se deben distinguir dos casos.

55. PRIMER CASO. — **Adición de los monomios.** — *Para sumar varios monomios, basta escribirlos unos a continuación de los otros, conservando sus signos.* Es una consecuencia inmediata de la adición de los números algebraicos.

V. gr. : Sea por sumar el monomio $3ab$ con el monomio $6ab^3$, se escribe :

$$6ab^3 + 3ab.$$

56. **Observación.** — Un polinomio puede considerarse como la suma de sus términos. V. gr. :

$6ab^3 + 3ab - 5b^2c$ es la suma de $6ab^3$, $3ab$ y $-5b^2c$.

57. SEGUNDO CASO. — **Adición de los polinomios.** — *Para sumar varios polinomios, basta escribirlos unos a continuación de los otros, conservando los signos de sus términos; se hace en seguida, si se puede, la reducción de los términos semejantes.*

Sea por sumar el polinomio

$$5a^2 - 3ab \quad \text{con} \quad 7ab - 2a^2;$$

se escribirá :

$$7ab - 2a^2 + 5a^2 - 3ab.$$

En efecto, sean cuales fueren los valores de $a$ y $b$, siempre la suma de los valores de $5a^2 - 3ab$ y de $7ab - 2a^2$ es igual al valor de

$$7ab - 2a^2 + 5a^2 - 3ab.$$

Después de las reducciones, la suma es

$$4\,ab + 3\,a^2.$$

**Observación.** — En general, la suma algebraica de varias cantidades es el conjunto de los términos que las componen, teniendo cada término su signo respectivo.



58. **Observación.** — Basta a menudo indicar la suma de varios polinomios sin efectuarla inmediatamente; para esto se encierra cada polinomio dentro de un paréntesis y se escriben estos paréntesis unos á continuación de los otros separados por el signo $+$.

Para indicar la adición de $a + b$ con $c + d - b$ y con $-a + d - c$, se escribirá :

$$(a + b) + (c + d - b) + (-a + d - c).$$

## § III. — Substracción.

59. **Definición.** — *Restar una expresión algebraica de otra, es encontrar una tercera, que agregada a la primera, reproduzca la segunda.*

Se deben distinguir dos casos.

60. PRIMER CASO. — **Substracción de dos monomios.** — *Para restar un monomio de otro, se lo escribe a continuación, cambiando su signo.*

Esta regla es una consecuencia inmediata de la sustracción de los números algebraicos.

V. gr. : 1º Si se trata de restar $3a^2$ de $8ab$.

Se escribe :

$$8ab - 3a^2.$$

2º Para restar $-2ab$ de $4ac$

se escribe :

$$4ac + 2ab.$$

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

61. SEGUNDO CASO. — **Sustracción de dos polinomios.** — *Para restar un polinomio de otro, se escribe el substraendo a continuación del minuendo cambiando los signos de los términos del substraendo.*

Sean

$$P = a + b - c \quad \text{y} \quad Q = e - f + h.$$

La diferencia será

$$D = P - Q = a + b - c - e + f - h.$$

En efecto, si, a esta diferencia se agrega Q, debe resultar P; pero

$$D + Q = a + b - c - e + f - h + e - f + h$$

resultado que siempre es igual a $a + b - c$, sean cuales fueren los valores de las letras.

**62. Observación.** — I. Frecuentemente se indica una substracción, sin efectuarla inmediatamente. Para esto se encierra el substraendo dentro de un paréntesis, y se escribe a continuación del minuendo, colocando el signo — delante del paréntesis. Para hacer desaparecer el paréntesis debe efectuarse la substracción indicada.

EJEMPLO. Si de

$$4a^2 + b^2$$

se quiere restar

$$5b^2 - 2a^2 + c^2,$$

se indica la substracción escribiendo :

$$4a^2 + b^2 - (5b^2 - 2a^2 + c^2).$$

Para efectuarla, se suprime el paréntesis y se cambian los signos de los términos que están dentro de él, recordando que el término $5b^2$ tiene el signo + sobreentendido.

Se tiene entonces

$$4a^2 + b^2 - 5b^2 + 2a^2 - c^2$$

y reduciendo :

$$6a^2 - 4b^2 - c^2$$

II. Siempre se pueden agrupar en un paréntesis varios términos de un polinomio; si el paréntesis debe ir precedido del signo +, los términos que contiene conservan sus signos; si debe ir precedido del signo —, los términos toman signos contrarios.

Así el polinomio

$$a + b - c + d + e - f + g$$

puede escribirse :

$$(a + b) + (-c + d + e) - (+f - g)$$

porque quitando los paréntesis se vuelve a encontrar el polinomio propuesto.

Estas agrupaciones son de un uso frecuente.



# CAPÍTULO II

## MULTIPLICACIÓN

**63. Definición.** — *Multiplicar dos expresiones algebraicas* es encontrar una tercera expresión cuyo valor numérico sea igual al producto de los valores numéricos de las expresiones dadas, **sean cuales fueren los valores particulares atribuidos a las letras.**

64. PRIMER CASO. — **Multiplicación de dos monomios.** — 1° Sean dos potencias de una misma letra :

Si se quiere multiplicar $a^2$ por $a^3$, se nota que $a^2$ es la abreviación de $aa$, y $a^3$ la de $aaa$.

Por consiguiente el producto de $a^2$ por $a^3$ será $aa \times aaa$, o $aaaaa$ o bien $a^5$.

Así,

$$a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5.$$

En general,

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

2° Sean dos monomios cualesquiera :

V. gr. : Sea la multiplicación de

$$5a^4b^2c \text{ por } -3a^2b.$$

Tendremos

$$5a^4b^2c \times (-3a^2b) = -5 \times a^4 \times b^2 \times c \times 3 \times a^2 \times b$$

o, invirtiendo el orden de los factores,

$$-5 \times 3 \times a^4 \times a^2 \times b^2 \times b \times c = -15a^6b^3c.$$

**Regla.** — *Para multiplicar un monomio por otro, se multiplican sus coeficientes y se escriben las diferentes letras con la suma de sus exponentes. Si una letra no se halla más que en uno de los factores, se la escribe con su exponente, y se aplica la regla de los signos, dada en la multiplicación de los números algebraicos* (n° 34).

65. SEGUNDO CASO. — **Producto de varios monomios.** — *Si se tiene más de dos factores, se efectúa el producto del primero por el segundo; se multiplica el resultado por el tercer factor, y así sucesivamente.*

V. gr. : Sea el producto

$$3a^2b \times (-5\,b^2c) \times (-2\,ac^2).$$

El producto es

$$+\,30\,a^3b^3c^3.$$

66. Tercer Caso. — **Multiplicación de un polinomio por un monomio.** — Siendo un polinomio la suma de los términos que lo componen, *para multiplicar un polinomio por un monomio, basta multiplicar los varios términos del polinomio por el monomio, y sumar los resultados* (nº 37).

V. gr. : Sea

$$(a^2b + bc^2 - ad) \times ab$$

el producto es

$$a^3b^2 + ab^2c^2 - a^2bd.$$

67. Cuarto Caso. — **Multiplicación de un polinomio por otro.** — Este caso se reduce a la multiplicación de dos sumas; luego, *se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, observando la regla de los signos, y se suman los resultados* (nº 38).

V. gr. : Sea

$$(a - b) \times (c - d).$$

El producto es

$$ac - bc - ad + bd.$$

He aquí cómo se dispone la operación :

$$\begin{array}{r}
a - b \\
c - d \\
\hline
ac - bc - ad + bd.
\end{array}$$

**68. Notación abreviada de los términos semejantes.** — Se puede escribir sólo una vez la parte literal de cada término, disponiendo los coeficientes en una columna vertical, como sigue :

$$\begin{array}{lrl|rl|rl|r}
3a^3 & -5a^2b & & +\ 4ab^2 & & & & \\
a^2 & +\ 2ab & & -\ 3b^2 & & & & \\
\hline
3a^5 & -5 & a^4b & +\ 4 & a^3b^2 & & & \\
 & +6 & & -10 & & +\ 8 & a^2b^3 & \\
 & & & -\ 9 & & +15 & & -12ab^4 \\
\hline
3a^5 & + & a^4b & -15 & a^3b^2 & +23 & a^2b^3 & -12ab^4
\end{array}$$



**69. Número de términos de un producto. — Teorema I.** — *Cuando no hay reducciones, el número de los términos del producto de dos polinomios es igual al producto del número de términos del multiplicando por el número de términos del multiplicador.*

En efecto, cada término de uno de los polinomios da tantos términos cuantos hay en el otro. Si pues consta el primero de $p$ términos, y de $q$ el segundo, y no se puede efectuar ninguna reducción, el producto constará de $pq$ términos.

**70. Teorema II.** — *El producto de dos polinomios contiene siempre a lo menos dos términos irreducibles.*

En efecto, estando ordenados los dos factores con relación a las potencias decrecientes de una misma letra, el primer término del producto será de un grado superior a todos los demás, con respecto a esta letra, y el último, de un grado inferior a todos los demás; estos dos términos no podrán reducirse con ningún otro.

**71. Fórmulas notables.** — Hay algunas multiplicaciones notables cuyo producto importa retener en la memoria; tales son las siguientes :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (1)$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \qquad (2)$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2, \qquad (3)$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad (4)$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \qquad (5)$$

He aquí su traducción al lenguaje ordinario :

72. *El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera, más dos veces el producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda.*

73. *El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera, menos el doble producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda.*

74. *El producto de la suma de dos cantidades por la diferencia de estas mismas cantidades es igual al cuadrado de la primera menos el cuadrado de la segunda.*

75. *El cubo de la suma de dos cantidades es igual al cubo de la primera, más tres veces el producto del cuadrado de la primera por la segunda, más tres veces el producto de la primera por el cuadrado de la segunda, más el cubo de la segunda.*

76. *El cubo de la diferencia de dos cantidades es igual al cubo de la primera, menos tres veces el producto del cuadrado de la primera por la segunda, más tres veces el producto de la primera por el cuadrado de la segunda, menos el cubo de la segunda.*

77. **Observación.** — En virtud de las fórmulas anteriores (1), (2) y (3), se puede reemplazar :

1° $a^2 + 2ab + b^2$ por $(a + b)(a + b)$
2° $x^2 - 2xy + y^2$ por $(x - y)(x - y)$
3° $m^2 - n^2$ por $(m + n)(m - n)$

También es útil advertir que se puede reemplazar :

$$(a - b)^2 \quad \text{por} \quad (b - a)^2$$

puesto que en ambos casos los productos son :

$$a^2 - 2ab + b^2$$

Estas transformaciones se emplean frecuentemente en el cálculo algebraico.

78. Si se eleva al cuadrado un polinomio cualquiera :

$$2a + b - c + d$$

se encuentra :

$$(2a + b - c + d)^2 = 4a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 4ab - 4ac + 4ad - 2bc + 2bd - 2cd.$$

De donde se infiere que el cuadrado de un polinomio se compone :

1° *De la suma de los cuadrados de cada uno de sus términos;* 2° *de la suma de dos veces el producto de sus términos tomados de dos en dos.*

---



# CAPÍTULO III

# DIVISIÓN

## § I. — Varios casos de división.

79. **Definición.** — *Dividir una expresión algebraica por otra es encontrar una tercera cuyo producto por la segunda reproduzca la primera.*

La expresión que se divide es el *dividendo*, aquella por la cual se divide, el *divisor*, el resultado de la operación se llama *cociente*.

80. Siendo el dividendo de una división un producto cuyos factores son el divisor y el cociente, las reglas de la división se deducen de las reglas correspondientes de la multiplicación.

Así, en particular, el cociente es *positivo* si el dividendo y el divisor tienen el mismo signo, y *negativo* cuando tienen signos contrarios.

81. 1er Caso. — **División de un monomio por otro.** — 1° Sean dos potencias de la misma letra.

Dividamos $a^5$ por $a^3$

Siendo el exponente del dividendo igual a la suma de los exponentes del divisor y cociente, *el exponente del cociente será igual a la diferencia de los exponentes del dividendo y del divisor.*

Así

$$a^5 \div a^3 \quad \text{da} \quad a^{5-3} \quad \text{o} \quad a^2$$

En general

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

2° Sean dos monomios cualesquiera.

Dividamos ahora $12a^6b^2c$ entre $4a^3b^2$.

Sabemos que $12a^6b^2c$ es el producto de $4a^3b^2$ por un factor tal que, multiplicado por $4a^3b^2$, dé por producto $12a^6b^2c$.

Pero, el factor que multiplicado por 4, da 12, es 3;
el factor que, multiplicado por $a^3$, da $a^6$, es $a^3$;
el factor que, multiplicado por $b^2$, da $b^2$, es 1,
y por último encontrándose el factor $c$ en el dividendo sin estar en el divisor, debe necesariamente encontrarse en el cociente.

El cociente es por lo mismo $3a^3c$.

En efecto, $3a^3c$ multiplicado por $4a^3b^2$, reproduce el dividendo $12a^6b^2c$.

Del mismo modo, $16a^3b^2$ dividido por $-8ab^2$, da $-2a^2$.

82. **Regla.** — Para encontrar el cociente de dos monomios:

1° *Se aplica la regla de los signos;*

2° *Se divide el coeficiente del dividendo por el del divisor;*

3° *Se escribe cada letra del dividendo dándole por exponente la diferencia entre el exponente del dividendo y el del divisor.* La letra que no se encuentra más que en el dividendo se conserva en el cociente con su exponente, y la letra que tiene el mismo exponente en los dos términos no figura en el cociente.

83. **Observación.** — Conforme a lo que antecede, la división de dos monomios es imposible; 1° si una literal del dividendo tiene un exponente menor que el de la misma literal en el divisor; 2° si el divisor contiene una literal que no se encuentra en el dividendo.

En estos dos casos, se indica no obstante la división poniendo los dos monomios en forma de quebrado.

84. 2° Caso. **División de un polinomio por un monomio.** — Se trata por ejemplo de dividir $6a^4 - 8a^3 + 4a^2$ por $2a^2$.

Para encontrar el cociente buscado, es preciso dividir cada término del dividendo por $2a^2$, puesto que para dividir una suma por una cantidad dada, basta dividir cada parte de esta suma por dicha cantidad y sumar los cocientes obtenidos; se tendrá pues:

$$\frac{6a^4 - 8a^3 + 4a^2}{2a^2} \quad \text{o} \quad \frac{6a^4}{2a^2} - \frac{8a^3}{2a^2} + \frac{4a^2}{2a^2}$$

Efectuando estas operaciones conforme a la regla dada para la división de dos monomios, se encuentra:

$$3a^2 - 4a + 2$$

Este resultado es el cociente que se busca, puesto que



multiplicándolo por $2a^2$, se vuelve á encontrar el dividendo.

85. **Observación.** — Cuando no es posible la división de un polinomio por un monomio, basta indicarla poniendo el dividendo y el divisor en forma de quebrado.

86. 3er Caso. — **División de un polinomio por otro.** — Dividir $15a^4 - 7a^3b - 6a^2b^2 + 7ab^3 - 3b^4$ por $5a^2 + ab - 3b^2$.

Ordenados los polinomios con respecto á las potencias *decrecientes* de una misma literal, lo cual siempre puede efectuarse, se observará que el primer término del dividendo es *el producto sin reducción* del primer término del divisor por el primer término del cociente (n° 70); se obtendrá pues el primer término del cociente dividiendo $15a^4$ por $5a^2$. Se multiplicará el divisor por este primer término del cociente y el producto se restará del dividendo; se obtendrá así *una resta ordenada* cuyo primer término será el *producto sin reducción* del primer término del divisor por el segundo término del cociente; se obtendrá pues este segundo término dividiendo el primer término de la resta por el primer término del divisor. Se multiplicará en seguida el divisor por este segundo término y el producto se restará de la primera resta. Así consecutivamente.

He aquí los detalles de la operación:

| | | |
|---|---|---|
| Dividendo | $15a^4 - 7a^3b - 6a^2b^2 + 7ab^3 - 3b^4$ | $5a^2 + ab - 3b^2$ |
| | $-15a^4 - 3a^3b + 9a^2b^2$ | $3a^2 - 2ab + b^2$ |
| 1.ª resta | $0 - 10a^3b + 3a^2b^2 + 7ab^3 - 3b^4$ | |
| | $+10a^3b + 2a^2b^2 - 6ab^3$ | |
| 2.ª resta | $0 \quad + 5a^2b^2 + ab^3 - 3b^4$ | |
| | $-5a^2b^2 - ab^3 + 3b^4$ | |
| 3.ª resta | $0$ | |

Ordenados el dividendo y el divisor con respecto á las potencias decrecientes de $a$, se procede como sigue:

$+15a^4$ dividido por $+5a^2$ da $3a^2$, que se escribe en el cociente.

$+5a^2$ multiplicado por $+3a^2$ da $+15a^4$, y á causa de la substracción, $-15a^4$, que se escribe debajo de $15a^4$.

$+ab$ multiplicado por $+3a^2$ da $+3a^3b$, y á causa de la substracción $-3a^3b$, que se escribe en seguida de $-15a^4$.

$-3b^2$ multiplicado por $+3a^2$ da $-9a^2b^2$, y á causa de la substracción, $+ 9a^2b^2$, que se escribe en seguida de $- 3a^3b$.

Efectuada la reducción de términos semejantes, queda :

$$- 10a^3b + 3a^2b^2 + 7ab^3 - 3b^4$$

Se dice en seguida $- 10a^3b$ dividido por $+ 5a^3$ da $- 2ab$ por cociente.

$+ 5a^2$ multiplicado por $- 2ab$ da $- 10a^3b$, y a causa de la substracción $+ 10a^3b$, que se escribe debajo de $- 10a^3b$.

$+ ab$ multiplicado por $- 2ab$ da $- 2a^2b^2$, y a causa de la substracción $+ 2a^2b^2$.

$- 3b^2$ multiplicado por $- 2ab$ da $+ 6ab^3$, y a causa de la substracción $- 6ab^3$.

Efectuada la reducción de los términos semejantes, queda:

$$5a^2b^2 + ab^3 - 3b^4.$$

Por último se dice : $+ 5a^2b^2$ dividido por $+ 5a^2$ da $+ b^2$.

$+ 5a^2$ multiplicado por $+ b^2$ da $+ 5a^2b^2$, y, a causa de la substracción, $- 5a^2b^2$.

$+ ab$ multiplicado por $+ b^2$ da $+ ab^3$, y, a causa de la substracción, $- ab^3$.

$- 3b^2$ multiplicado por $+ b^2$ da $- 3b^4$, y, a causa de la substracción, $+ 3b^4$.

Efectuada la reducción de los términos semejantes, se encuentra una resta nula; de donde se infiere que $3a^2 - 2ab + b^2$ es el cociente exacto de $15a^4 - 7a^3b - 6a^2b^2 + 7ab^3 - 3b^4$ dividido por $5a^2 + ab - 3b^2$.

**Observación.** — No es preciso después de cada división parcial, escribir al lado de la resta los términos del dividendo que no hayan sido reducidos.

87. **Casos de imposibilidad.** — La división de un polinomio por otro polinomio es imposible :

1° *Cuando, estando ordenados los dos polinomios con respecto a las potencias decrecientes de una misma literal, el primer término del dividendo no es divisible por el primer término del divisor.*

2° *Cuando el último término del dividendo no es divisible por el último término del divisor;*

3° *Cuando en el curso de la operación se obtiene una resta cuyo primer término no es divisible por el primer término del divisor.*



Conforme a esto, la división de $7a^4 + a^3b - 6a^2b^2$ por $5a^3 + a^4b$ no es posible, porque $7a^4$ no es divisible por $5a^5$.

Lo mismo sucede en la división de $8a^3b - 5a^2b^2 + 4ab^3$ por $4a^3 - 2a^2b$, porque el último término $4ab^3$ no es divisible por $- 2a^2b$.

Por último, la siguiente división es imposible, porque el exponente de $a$ en la resta, es inferior al de esta misma letra en el primer término del divisor :

$$\begin{array}{r|l} 8a^3 + 2a^2b - 6ab^2 + 2b^3 & 4a^2 + 3ab - b^2 \\ \cline{2-2} -8a^3 - 6a^2b + 2ab^2 \phantom{+ 2b^3} & 2a - b \\ \cline{1-1} 0 - 4a^2b - 4ab^2 + 2b^3 & \\ + 4a^2b + 3ab^2 - \phantom{a}b^3 & \\ \cline{1-1} 0 - \phantom{a}ab^2 + \phantom{a}b^3 & \end{array}$$

La operación indica, que si del dividendo propuesto se restara $- ab^2 + b^3$, se obtendría un polinomio divisible por $4a^2 + 3ab - b^2$.

88. **Observación.** — Cuando no se quiere efectuar una división, ya porque la división sea imposible, ya porque no haya necesidad de conocer el cociente, se indica la operación por un quebrado cuyo numerador es el dividendo y cuyo denominador es el divisor.

## § II. — Exponente cero y exponentes negativos.

89. — Si se aplica la regla del nº 82 a la división de $a^n$ por $a^n$ se obtiene por cociente $a^{n-n}$ o $a^0$. Esta expresión, en sí, no tiene significación; pero como una cantidad dividida por sí misma da 1 por cociente, se puede considerar a $a^0$ igual a 1. En general, *toda cantidad afectada del exponente cero puede ser reemplazada por* 1.

La misma regla del número 82 aplicada à la división de $a^3$ por $a^5$ da $a^{3-5}$ o $a^{-2}$, expresión que tampoco tiene significación. Pero $a^3$ dividido por $a^5$ puede ponerse bajo la forma :

$$\frac{a^3}{a^3 \times a^2}.$$

Si se dividen los dos términos de este quebrado por $a^3$ se encuentra $\frac{1}{a^2}$, y resulta que $a^{-2}$ equivale a $\frac{1}{a^2}$.

En general $a^{-n}$ equivale a $\frac{1}{a^n}$.

De aquí se infiere que *toda cantidad afectada de un exponente negativo representa un quebrado cuyo numerador es 1 y cuyo denominador es la misma cantidad con el mismo exponente con signo positivo.*

90. Esta notación permite reemplazar una expresión fraccionaria por otra entera. Pero esta ventaja sería ilusoria si no se pudieran aplicar a los exponentes negativos las reglas de cálculo ya establecidas. Esta aplicación es legítima:

1° *En la multiplicación.*

1° Sea multiplicar $a^m$ por $a^n$, siendo $n$ negativa é igual a $-n'$.

Se tiene :
$$a^n = a^{-n'} = \frac{1}{a^{n'}}$$
$$a^m \times a^n = \frac{a^m}{a^{n'}} = a^{m-n'}$$
pero
$$m - n' = m + n$$
y $a^m \times a^n$ resulta igual á $a^{m+n}$.

2° Sea $a^m \times a^n$, siendo $m$ y $n$ negativas;
$$m = -m' \quad \text{y} \quad n = -n'.$$
Se tiene
$$a^m = a^{-m'} = \frac{1}{a^{m'}}$$
$$a^n = a^{-n'} = \frac{1}{a^{n'}}$$
$$a^m \times a^n = \frac{1}{a^{m'}} \times \frac{1}{a^{n'}} = \frac{1}{a^{m'+n'}} = a^{-(m'+n')}$$
pero
$$-(m'+n') = m + n$$
y
$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

2° *En la división.*

1° Sea $a^m \div a^n$, siendo $m$ negativa e igual á $-m'$.

Se tiene
$$a^m = a^{-m'} = \frac{1}{a^{m'}}$$
$$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{m'}} \div a^n = \frac{1}{a^{m'} \times a^n} = \frac{1}{a^{m'+n}} = a^{-m'-n},$$



Pero
$$-m' - n = m - n$$
y
$$a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

2° Sea $a^m \div a^n$, siendo $m$ y $n$ negativas y
$$m = -m' \qquad n = -n'.$$
Se tiene
$$a^m = a^{-m'} = \frac{1}{a^{m'}}; \qquad a^n = a^{-n'} = \frac{1}{a^{n'}}$$
$$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{m'}} \div \frac{1}{a^{n'}} = \frac{a^{n'}}{a^{m'}} = a^{n'-m'}.$$
Pero
$$n' - m' = -n + m$$
y
$$a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

3° *En la elevación a las potencias.*

Sea la potencia $n^{ma}$ de $a^m$.

1° Supongamos
$$m < 0, \qquad n > 0; \qquad m = -m'$$
Se tiene
$$a^m = a^{-m'} = \frac{1}{a^{m'}}$$
$$[a^m]^n = \left[\frac{1}{a^{m'}}\right]^n = \frac{1}{a^{m'n}} = a^{-m'n}$$
pero
$$-m'n = mn$$
y
$$[a^m]^n = a^{mn}.$$

2° Sea $m > 0$, $n < 0$, con $n = -n'$.

Se tiene
$$[a^m]^n = [a^m]^{-n'} = \frac{1}{[a^m]^{n'}} = \frac{1}{a^{mn'}} = a^{-mn'} = a^{mn}$$

3° Sea $m < 0$ y $n < 0$, con $m = -m'$; $n = -n'$.

Se tiene
$$a^m = \frac{1}{a^{m'}}$$

y

$$[a^m]^n = \left[\frac{1}{a^{m'}}\right]^{-n'} = \frac{1}{\left[\frac{1}{a^{m'}}\right]} = \frac{1}{\frac{1}{a^{m'n'}}} = a^{m'n'}.$$

Pero

$$m'n' = mn$$

luego

$$[a^m]^n = a^{mn}.$$

## § III. — Divisibilidad por $x - a$.

**91. Definición.** — *Polinomio entero en* x *es un polinomio en el cual los exponentes de esta letra son positivos y enteros.*

92. Teorema. — *La resta de la división de un polinomio entero en* x *por un binomio de la forma* x — a *se obtiene reemplazando en este polinomio* x *por* a.

Divídase por $x - a$ un polinomio entero en $x$; por ejemplo : $x^3 + ax^2 - a^3$ que representaremos por P $(x)$.

El divisor $x - a$ es de primer grado en $x$; la resta será de un grado inferior, es decir que no contendrá $x$.

Siendo $Q(x)$ el cociente y R la resta, se tiene

$$P(x) = (x - a).Q(x) + R.$$

No se escribe $R(x)$, por no depender R de $x$.

Esta igualdad se verifica, sea cual fuere el valor de $x$; haciendo $x = a$, se tiene

$$P(a) = (a - a).Q(a) + R.$$

R no ha cambiado.

Permaneciendo finito el cociente $Q$, el producto $(a - a)$ por Q $(a)$ es nulo, porque $a - a = 0$, y la segunda parte de la fórmula se reduce a $R$.

Luego *la resta de la división de un polinomio en* x *por un binomio de la forma* x — a *se obtiene reemplazando en este polinomio* x *por* a. *Si el dividendo se anula por esta substitución, el polinomio dado será divisible por* x — a.

Así la división del polinomio $x^3 + ax^2 - a^3$ por $x - a$ dará una resta representada por $a^3 + a^3 - a^3$ o $a^3$, lo que fácilmente se puede verificar.

Pero la división de $x^3 - 3ax^2 + 2a^3$ por $x - a$ será exacta, porque la resta $a^3 - 3a^3 + 2a^3$ es igual a cero.



93. Si se tuviera que dividir un polinomio por $x + a$, se pondría este divisor en la forma

$$x - (-a)$$

entonces *se obtendría la resta de la división reemplazando en el polinomio :* x *por* (— a).

**94. Corolarios.** — I. *Un polinomio entero en* x *es divisible por* x — a *si se anula cuando se sustituye en él* x *por* a.

II. *Un polinomio entero en* x *es divisible por* x + a *si se anula cuando se substituye en él* x *por* — a.

III. *Un polinomio entero en* x *es divisible por varios factores* x ∓ a; x ∓ b; x ∓ c; *etc., si se anula cuando se substituye sucesivamente* x *por* ± a; ± b; ± c, *etc.*

IV. *El polinomio será divisible por el producto de estos factores si* a, b, c, ..., *tienen valores numéricos diferentes.*

V. gr. : El polinomio $x^4 - x^3 - 19x^2 - 11x + 30$ es divisible por $x - 1$, $x + 2$; $x + 3$; $x - 5$, y por el producto de estos factores, porque se anula cuando substituye $x$ por $1$, $-2$, $-3$, y por $5$.

95. Conforme a estas consideraciones, se encuentran fácilmente los resultados siguientes :

1° $x^m - a^m$ siempre es divisible por $x - a$, porque la resta de la división es $a^m - a^m$ o cero;

2° $x^m + a^m$ nunca es divisible por $x - a$, porque la resta de la división es $a^m + a^m$ o $2a^m$;

3° $x^m - a^m$ no será divisible por $x + a$ sino cuando $m$ sea par, porque la resta de la división $(-a)^m - a^m$ no tendrá su primer término positivo sino cuando $m$ sea par.

4° $x^m + a^m$ no es divisible por $x + a$ sino cuando $m$ sea impar, porque la resta de la división $(-a)^m + a^m$ no tendrá su primer término negativo sino cuando $m$ sea impar.

5° $x^m - a^m$ es divisible por $x^p - a^p$ si $m$ es un múltiplo de $p$;

6° $x^m - a^m$ es divisible por $x^p + a^p$ si $m$ es un múltiplo de $2p$;

7° $x^m + a^m$ es divisible por $x^p + a^p$ si el cociente $m \div p$ es un número positivo impar.

**96. Observación.** — Una división tal como $X^n \pm 1$ por $X \pm 1$ se reduce a los casos anteriores, porque $X^n \pm 1$ es igual a $X^n \pm 1^n$.

He aquí efectuadas algunas divisiones de un binomio por otro :

$$\frac{a^4 - b^4}{a - b} = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$$

$$\frac{x^5 - 1}{x + 1} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1}.$$

**97**. Por la inspección de este resultado se ve :

1º Que *todos los términos del cociente son positivos si el signo del segundo término del divisor es negativo,* y que son alternativamente *positivos y negativos si el signo del segundo término del divisor es positivo;*

2. Que *los exponentes de la primera letra van disminuyendo, y los de la segunda aumentando, siendo el exponente del primer término del cociente una unidad inferior al de la primera letra en el dividendo.*

Según esto, se encuentra inmediatamente :

$$\frac{x^5 - a^5}{x - a} = x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4$$

$$\frac{a^4 + 1}{a + 1} = a^3 - a^2 + a - 1 + \frac{2}{a + 1}$$

**97** *bis.* — **Cociente de la división de un polinomio entero en $x$ por $x - a$.** — Sea el cociente de la división siguiente :

$$\begin{array}{l|l}
Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + \ldots + Lx + M & x - a \\ \cline{2-2}
(Aa + B)x^{m-1} & Ax^{m-1} \\
(Aa^2 + Ba + C)x^{m-2} & + (Aa + B)\,x^{m-2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & + (Aa^2 + Ba + C)x^{m-3} \\
(Aa^{m-1} + Ba^{m-2} + \ldots + L)x & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Aa^m + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + \ldots + La + M & (Aa^{m-1} + Ba^{m-2} + \ldots + L)
\end{array}$$

Se obtiene el coeficiente de un término cualquiera multiplicando por $a$ el coeficiente del término anterior y añadiendo al producto el coeficiente del término del mismo orden del dividendo. El último coeficiente multiplicado por $a$ da el residuo.

Ejemplos :

I. Formar el cociente de :

$$x^5 - 4x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 30 \div x - 2$$



El 1er coeficiente es : 1.
El 2º — — : $(1 \times 2) + (-4) = -2.$
El 3er — — : $(-2 \times 2) + 1 = -3.$
El 4º — — : $(-3 \times 2) - 2 = -8.$
El 5º — — : $(-8 \times 2) + 1 = -15.$
Y el residuo es : $(-15 \times 2) + 30 = 0.$
El cociente será :

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 8x - 15.$$

II. Sea $3x^3 - 7x^2 + 6x - 20 \div x + 5.$

El 1er coeficiente es : 3.
El 2º — — : $(3 \times -5) - 7 = -22.$
El 3er — — : $(-22 \times -5) + 6 = 116.$
Y el residuo es : $(116 \times -5) - 20 = -600.$

III. Si el polinomio es *incompleto*, se interpolan los términos que faltan con el coeficiente cero.

Sea $x^5 - 22x^3 + 384 \div x - 4.$

Se considera :

$$x^5 + 0x^4 - 22x^3 + 0x^2 + 0x + 384 \div x - 4.$$

1er coeficiente : 1.
2º — : $(1 \times 4) + 0 = 4.$
3er — : $(4 \times 4) - 22 = -6.$
4º — : $(-6 \times 4) + 0 = -24.$
5º — : $(-24 \times 4) + 0 = -96.$
El residuo es : $(-96 \times 4) + 384 = 0.$
El cociente es : $x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 24\,x - 96.$

## § IV. — Descomposición en factores.

**98.** En muchos casos, particularmente en la simplificación de los quebrados y en la resolución de las ecuaciones, es ventajoso transformar una expresión en un producto de factores.

Esta operación no es siempre posible. Los procedimientos que a continuación indicamos permiten efectuarla, en casos determinados.

**99. 1° Por factores comunes.** — Cuando varios términos contienen un factor común, se puede evidenciarlo, es decir, *sacarlo como factor común.*

Para sacar un factor común, se dividen por este factor todos los términos que lo contienen, se escribe el cociente dentro de un paréntesis y se indica la multiplicación de este paréntesis por el factor común.

V. gr. : Sea

$$15a^2x^2 - 30a^2x^3 + 105a^2x^4 - 75a^2x^5$$

El factor $15a^2x^2$ es común a todos los términos; luego, se puede escribir

$$15a^2x^2(1 - 2x + 7x^2 - 5x^3)$$

Siempre se debe emplear desde luego este primer procedimiento, cuando es posible.

**100. 2° Por las identidades.** — Las identidades más empleadas son

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \quad (1)$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \quad (2)$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \quad (3)$$
$$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \quad (4)$$
$$(a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2 \quad (5)$$

Si el polinomio tiene una de estas formas, la descomposición es inmediata.

V. gr. : Sea

$$x^2 + y^2 + 2xy - z^2$$

se tiene

$$x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2 \quad \text{según} \quad (2)$$

y

$$(x+y)^2 - z^2 = (x+y+z)(x+y-z) \quad \text{según} \quad (1)$$

**101. 3° Por la formación de grupos.** — Se forman varios grupos; se descompone cada grupo, y si los productos así obtenidos tienen factores comunes, se los saca.

V. gr. : 1° Sea

$$x^2 + ax - bx - ab$$

se tiene

$$(x^2 + ax) - (bx + ab)$$

pero

$$x^2 + ax = x(x+a)$$
$$bx + ab = b(x+a)$$



y

$$(x^2 + ax) - (bx + ab) = x(x+a) - b(x+a) = (x+a)(x-b)$$

2° Sea

$$ac(a+c) + ab(a-b) - bc(b+c)$$

se tiene

$$a^2c + ac^2 + a^2b - ab^2 - b^2c - bc^2$$

ordenando con relación á $a$

$$a^2(b+c) - a(b^2 - c^2) - bc(b+c)$$

o

$$a^2(b+c) - a(b+c)(b-c) - bc(b+c)$$

o

$$(b+c)\left[a^2 - a(b-c) - bc\right]$$

o

$$(b+c)(a^2 - ab + ac - bc)$$

o

$$(b+c)\left[a^2 + ac - (ab + bc)\right]$$

o

$$(b+c)\left[a(a+c) - b(a+c)\right] = (b+c)(a+c)(a-b)$$

**102. 4° Por adición y sustracción.** — Se agregan y restan ciertos términos, de modo que aparezcan formas conocidas.

V. gr. : 1° Sea $\quad a^4 + b^4 + a^2b^2.$

Agregando y restando $a^2b^2$, se tiene

$$a^4 + b^4 + a^2b^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - a^2b^2 = (a^2+b^2)^2 - a^2b^2$$
$$= (a^2+b^2)^2 - (ab)^2 = (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab).$$

2° Sea

$$a^4 + b^4$$

se tiene

$$a^4 + b^4 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - 2a^2b^2$$
$$= (a^2 + b^2) - 2a^2b^2$$
$$= (a^2 + b^2)^2 - (ab\sqrt{2})^2$$
$$= (a^2 + b^2 + ab\sqrt{2})(a^2 + b^2 - ab\sqrt{2}).$$

**103. 5° Por la división por $x - a$.** — Se ordena el polinomio dado con respecto a una letra, v. gr. : $x$, y se le busca divisores de la forma $x - a$.

Se nota que $a$ debe dividir el término constante del polinomio dado.

V. gr. : Sea $P(x) = x^2 + x - 2.$

$a$ debe dividir $-2$; luego, no podrá ser sino $\pm 1$ o $\pm 2$

Se forman

$$P(1), \quad P(-1), \quad P(2) \quad \text{y} \quad P(-2)$$

$$P(1) = 0; \quad P(-1) = -2; \quad P(2) = 4; \quad P(-2) = 0$$

luego, los factores son

$$x - 1 \quad \text{y} \quad x + 2$$

se tiene

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2).$$

---

# CAPÍTULO IV

## FRACCIONES ALGEBRAICAS

### § I. — Simplificación.

**104.** Para simplificar una fracción, se descomponen el numerador y el denominador en productos de factores, y se suprimen los factores comunes, si existen.

V. gr. : 1° Sea

$$\frac{15a^4b^2c^3}{10a^3bc^4}$$

se tiene

$$\frac{15a^4b^2c^3}{10a^3bc^4} = \frac{5a^3bc^3 . 3ab}{5a^3bc^3 . 2c}.$$

Suprimiendo los factores $5a^3bc^3$ comunes al numerador y al denominador, se encuentra :

$$\frac{3ab}{2c}.$$

2° Sea todavía :

$$\frac{4a^3b^2 - 8a^4b}{6a^2b^3}.$$

Si observamos que $4a^3b$ es un factor común a los dos



términos del numerador, podremos sacarlo como factor común (núm. 52); tendremos :

$$\frac{4a^3b(b - 2a)}{6a^2b^3}.$$

Bajo esta forma, se ve que el numerador y el denominador tienen $2a^2b$ como factor común; suprimiendo este factor, se encuentra por expresión simplificada :

$$\frac{2a(b - 2a)}{3b^2}.$$

3° Sea por último :

$$\frac{3a^2b - 2abc}{15ac^2 - 10c^3}.$$

Si se saca como factor común $ab$ en el numerador, y $5c^2$ en el denominador, esta fracción se convierte en

$$\frac{ab(3a - 2c)}{5c^2(3a - 2c)}$$

y, suprimiendo el factor $3a - 2c$ común a los dos términos, se encuentra

$$\frac{ab}{5c^2}.$$

**105. Observación.** — Cuando todos los términos de una expresión fraccionaria tienen un factor común, se puede simplificar esta expresión suprimiendo el factor común.

Así la expresión :

$$\frac{4a^2b^3 - 8a^3b^3}{12a^2b^4 + 4a^4b^4}$$

se simplificará suprimiendo el factor $4a^2b^3$, común a todos los términos, resultando :

$$\frac{1 - 2a}{3b + a^2b}.$$

Habiéndose suprimido todos los factores del término $4a^2b^3$, este factor se ha reducido a 1, porque toda cantidad dividida por sí misma da 1 por cociente.

**106. Reducción de las fracciones a un común denominador.** — *Para reducir varias fracciones a un común denominador, se multiplican los dos términos de cada una por el producto de los denominadores de las demás.*

Se puede también, como en aritmética, tomar como denominador común el menor común múltiplo de los denominadores.

Así las fracciones

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{m}{n}$$

se convierten en

$$\frac{adn}{bdn}+\frac{bcn}{bdn}-\frac{bdm}{bdn}$$

No se ha alterado el valor de las fracciones, puesto que se han multiplicado por un mismo número los dos términos de cada una.

Del mismo modo las fracciones

$$\frac{a}{a+b}-\frac{b}{5(a-b)}+\frac{c^2}{a^2-b^2}$$

equivalen a

$$\frac{5a(a-b)}{5(a^2-b^2)}-\frac{b(a+b)}{5(a^2-b^2)}+\frac{5c^2}{5(a^2-b^2)}.$$

El menor común múltiplo de los denominadores, que viene a ser el denominador común, es $5(a^2-b^2)$, compuesto de los factores $5(a+b)(a-b)$. Se ve inmediatamente, sin necesidad de ejecutar la división de $5(a^2-b^2)$ por $(a+b)$, que los dos términos de la primera fracción $\frac{a}{a+b}$ deben multiplicarse por $5(a-b)$, que los de la segunda deben multiplicarse por $a+b$, y los de la tercera deben multiplicarse por 5.

## § II. — Operaciones sobre las fracciones.

**107. Adición y substracción de las fracciones.** — *Para sumar o para restar varias fracciones, se reducen a un común denominador, luego se suman ó restan los numeradores y al resultado se le da por denominador el denominador común.*

1° La suma de las tres fracciones

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}=\frac{a+b+c}{m}$$

porque multiplicando por $m$ los dos miembros de la igualdad, resulta $a+b+c$ tanto en uno como en otro.



2° La diferencia de las fracciones

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}$$

porque multiplicando por $m$ los dos miembros de la igualdad resulta $a-b$ tanto en uno como en el otro.

Del mismo modo las fracciones

$$\frac{a-b}{b},\quad \frac{a}{a+b},\quad -\frac{a+b}{a}$$

reducidas primeramente a un común denominador se convierten en :

$$\frac{a(a+b)(a+b)}{ab(a+b)},\quad \frac{a^2b}{ab(a+b)},\quad -\frac{b(a+b)(a+b)}{ab(a+b)}.$$

Si se suman estas fracciones se tiene :

$$\frac{a(a+b)(a-b)+a^2b-b(a+b)(a+b)}{ab(a+b)}$$

o efectuando las operaciones indicadas y simplificando :

$$\frac{a^3-3ab^2-b^3}{ab(a+b)}$$

Si de la primera de estas fracciones se restan las otras dos, se encuentra :

$$\frac{a(a+b)(a-b)-a^2b+b(a+b)(a+b)}{ab(a+b)}$$

o simplificando :

$$\frac{a^3+b^3+ab^2}{ab(a+b)}.$$

**108. Multiplicación de las fracciones.** — *Para multiplicar dos fracciones, basta formar el producto de los numeradores y el de los denominadores, e indicar la división del primer producto por el segundo.*

Sea la multiplicación de $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$.

Llamando $q$ al valor de $\frac{a}{b}$ y $q'$ al de $\frac{c}{d}$ se tendrá :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=qq'$$

pero de $\frac{a}{b}=q$ se saca $a=bq$, (1)

y de $\frac{c}{d}=q'$ se saca $c=dq'$; (2)

multiplicando miembro á miembro las igualdades (1) y (2), resulta :

$$ac=bd\,qq'$$

dividiendo los dos miembros por $bd$, se tiene :

$$\frac{ac}{bd}=qq'$$

donde se ve que tanto $\frac{ac}{bd}$ como $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ son iguales a $qq'$.

Luego :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

**109. División de las fracciones.** — *Para dividir dos fracciones, se multiplica la fracción dividendo por la fracción divisor invertida.*

Sea la división de $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$.

Llamando $q$ al valor de $\frac{a}{b}$ y $q'$ al de $\frac{c}{d}$ se tiene

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{q}{q'}$$

pero de $\frac{a}{b}$ se saca $a=bq$ (1)

y de $\frac{c}{d}$ se saca $dq'=c$. (2)

Multiplicando miembro a miembro estas dos igualdades :

$$adq'=bcq.$$

Dividiendo los dos miembros por $bcq'$ y simplificando :

$$\frac{ad}{bc}=\frac{q}{q'}$$

donde se ve que tanto $\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$ como $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$ son iguales a $\frac{q}{q'}$, luego

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}.$$



## § III. — Razones.

**110.** *Se llama* **razón geométrica**, *o simplemente razón, el resultado de la comparación, por división, de dos magnitudes de la misma naturaleza.*

Así la razón de $m$ a $n$ se escribe $\frac{m}{n}$.

Las razones se representan con dos términos como las fracciones; estos dos términos son las dos magnitudes que se comparan.

Todas las propiedades de las fracciones convienen a las razones.

**111. Proporción.** — *Se llama* **proporción** *la igualdad de dos razones.*

Si $\frac{a}{b}$ da el mismo cociente que $\frac{c}{d}$, se tendrá la siguiente igualdad o proporción :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

que también se escribe :

$$a:b::c:d$$

$a$ y $d$ son los extremos de la proporción y $b$ y $c$ los medios

Cada uno de los cuatro términos de una proporción es una *cuarta proporcional* con respecto a los otros tres.

Cuando el segundo y el tercer término de una proporción son iguales, cada uno de ellos es una *media proporcional*, y la proporción se llama *proporción continua*.

Si una proporción contiene una media proporcional, cada uno de los otros dos términos es una *tercera proporcional*.

He aquí las propiedades de las razones iguales, o proporciones.

**112. Propiedad fundamental.** — *Dos razones iguales pueden ponerse bajo la forma de dos productos iguales.*

En efecto, las razones iguales $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, multiplicadas cada una por $bd$, se convierten en

$$\frac{abd}{b}=\frac{bcd}{d}$$

y simplificando :

$$ad = bc.$$

Se enuncia ordinariamente esta *propiedad fundamental* diciendo que *el producto de los extremos es igual al producto de los medios.*

**113. Recíprocamente.** — *Dos productos iguales pueden ponerse bajo la forma de dos razones iguales y formar una proporción.*

En efecto, los productos iguales $ad = bc$ se convierten, dividiendo los dos miembros por $bd$ y simplificando, en

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \quad \text{o} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

**114.** En dos razones iguales se puede : 1° *invertir el orden de los extremos;* 2° *invertir el orden de los medios;* 3° *poner los extremos en lugar de los medios,* y en cada uno de estos casos, se tienen todavía dos razones iguales.

Sean las razones iguales

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Se puede escribir :

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \qquad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

porque, en todas estas formas, se tienen siempre dos productos iguales $ad = bc$, o una proporción (núm. 112).

La última forma, comparada con las razones dadas $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, prueba que, *cuando se tienen dos razones iguales, se pueden invertir y resultan todavía razones iguales.*

**115.** Cuando se tienen dos razones iguales, *se puede agregar o quitar a cada numerador su denominador, resultando todavía razones iguales.*

En efecto, si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

se obtiene, agregando o quitando 1 á los dos miembros :

$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1$$



o reduciendo a una sola expresión cada uno de los dos miembros :

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}.$$

**116.** *Dos razones iguales, multiplicadas o divididas respectivamente por otras dos razones iguales, dan todavía dos razones iguales.*

1° Sean $\quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad$ y $\quad \frac{m}{n} = \frac{r}{s}.$

Llamemos $q$ al valor común de cada una de las razones iguales $\frac{m}{n}$ y $\frac{r}{s}$, y hagamos

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} = q.$$

Siendo iguales las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, lo serán aun después de multiplicarlas por una misma cantidad $q$.

Luego

$$\frac{a}{b}q = \frac{c}{d}q$$

y substituyendo por $q$ su valor

$$\frac{am}{bn} = \frac{cr}{ds} \quad \text{o} \quad \frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \frac{c}{d} \times \frac{r}{s}.$$

2° Sean

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{y} \quad \frac{m}{n} = \frac{r}{s}.$$

Dividiendo miembro a miembro estas igualdades, resulta todavía una igualdad :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{m}{n}} = \frac{\frac{c}{d}}{\frac{r}{s}}.$$

**117.** *Cuando se tienen varias razones iguales, la suma o la diferencia de los numeradores y la suma o la diferencia de los denominadores forman una nueva razón igual a cada una de las primeras.*

En efecto, siendo iguales las razones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m}{n}$, se puede suponer que el valor de cada una de ellas sea $q$ y escribir :

$$\frac{a}{b}=q; \quad \frac{c}{d}=q; \quad \frac{m}{n}=q$$

de donde se saca :

$$a=bq$$
$$c=dq$$
$$m=nq$$

sumando miembro a miembro estas tres igualdades, se tiene :

$$a+c+m=bq+dq+nq \quad \text{o} \quad q(b+d+n)$$

dividiendo los dos miembros por $b+d+n$, queda :

$$\frac{a+c+m}{b+d+n}=q=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}.$$

Si en lugar de sumar miembro a miembro las tres igualdades se hubieran restado las dos últimas de la primera, se hubiera encontrado :

$$\frac{a-c-m}{b-d-m}=q=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}.$$

**118.** *Cuando se tienen dos razones iguales, la suma de los numeradores dividida por la suma de los denominadores es igual a la diferencia de los numeradores dividida por la diferencia de los denominadores.*

Si

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

se tiene (núm. 117)

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b} \quad \text{y} \quad \frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}.$$

Como dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí, se puede escribir :

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}.$$

**119.** *Cuando se tienen varias razones iguales, la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los numeradores y la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los denominadores forman una nueva razón igual a cada una de las primeras.*



Sean

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}.$$

Siendo iguales estas razones, sus cuadrados tambien lo serán, y se tendrá :

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}=\frac{m^2}{n^2}$$

aplicando a estas razones iguales la propiedad indicada en el número 117, queda

$$\frac{a^2+c^2+m^2}{b^2+d^2+n^2}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$$

de donde, extrayendo la raíz cuadrada,

$$\frac{\sqrt{a^2+c^2+m^2}}{\sqrt{b^2+d^2+n^2}}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

**120.** Conviene observar que se representa :

1° *Un número par por* $2n$, siendo $n$ un número entero;

2° *Un número impar por* $2n+1$;

3° *Una cantidad esencialmente positiva por* $+k^2$; porque, cualquiera que sea el valor de $k$, su cuadrado siempre será positivo;

4° *Una cantidad esencialmente negativa por* $-k^2$.

Una cantidad esencialmente positiva puede considerarse *como un cuadrado* porque se la puede siempre mirar como el cuadrado de su raíz.

Aplicaciones. — 1° *Dividir*

$$1+\frac{a^3}{x^3} \quad \text{por} \quad \frac{1}{x^2}+\frac{a}{x^3}.$$

Reduciendo estas fracciones a un común denominador, se tiene :

$$\frac{x^3+a^3}{x^3} \div \frac{x+a}{x^3}$$

multiplicando la fracción del dividendo por la fracción del divisor invertida :

$$\frac{(x^3+a^3)x^3}{x^3(x+a)}$$

suprimiendo el factor $x^3$, común a los dos términos :

$$\frac{x^3+a^3}{x+a}.$$

La resta de la división de $x^3+a^3$ por $x+a$ es $(-a)^3+a^3$, o cero (nº 95, 4º).

Efectuando la división se encuentra por cociente :

$$x^2-ax+a^2$$

2º *Simplificar la expresión :*

$$\frac{3a^3b^2-6a^2b^2+3ab^2}{a^3b^2-ab^2}.$$

Dividiendo todos los términos por $ab^2$:

$$\frac{3a^2-6a+3}{a^2-1}.$$

Sacando 3 como factor común en el numerador :

$$\frac{3(a^2-2a+1)}{a^2-1}.$$

Siendo el trinomio $a^2-2a+1$ el cuadrado de $a-1$, y el binomio $a^2-1$ el producto de $a+1$ por $a-1$ (nº 74), se puede escribir :

$$\frac{3(a-1)(a-1)}{(a+1)(a-1)}.$$

Dividiendo los dos términos por $a-1$, queda :

$$\frac{3(a-1)}{a+1}.$$

3º *Simplificar la expresión :*

$$\frac{b^3-2a^2b+ab^2}{(b-a)(b+2a)}.$$

Se puede escribir :

$$\frac{b^3-a^2b-a^2b+ab^2}{(b-a)(b+2a)}, \text{ porque } -2a^2b=-a^2b-a^2b.$$



Sacando $b$ como factor común en los dos primeros términos del numerador, y $ab$ en los dos últimos :

$$\frac{b(b^2-a^2)+ab(b-a)}{(b-a)(b+2a)}.$$

Substituyendo $b^2-a^2$ por $(b+a)(b-a)$ :

$$\frac{b(b+a)(b-a)+ab(b-a)}{(b-a)(b+2a)}.$$

Dividiendo el numerador y el denominador por $b-a$ :

$$\frac{b(b+a)+ab}{b+2a}.$$

Sacando $b$ como factor común en el numerador :

$$\frac{b(b+2a)}{b+2a}.$$

Dividiendo el numerador y el denominador por $b+2a$, se encuentra $b$ por solución.

4º *Demostrar que la expresión* $n^3-n$ *será divisible por 24 siempre que* n *sea un número impar.*

$$n^3-n \text{ es lo mismo que } n(n^2-1)$$

además :

$$n^2-1=(n+1)(n-1)$$

luego

$$n^3-n=n(n+1)(n-1).$$

Pero puesto que $n$ es impar, $n-1$, $n$ y $n+1$ representan tres números consecutivos de los cuales el primero y el último son pares; y se sabe que si se tienen tres números consecutivos de los cuales el de en medio es impar, uno de estos números siempre es divisible por 2, otro lo es por 4 y el número impar es divisible por 3, o, si no lo es, uno de los dos números pares es divisible por 6. Luego $n^3-n$ es divisible, cuando menos, por $2\times3\times4$ o por 24.

5º *Demostrar que si un número par es la suma de dos cuadrados, su mitad es también la suma de dos cuadrados.*

Siendo *par* el número dado, proviene necesariamente de la suma de los cuadrados de dos números pares o de dos números impares.

Sea pues $2n$ un número par. Sean también $m$ y $m+d$

dos números enteros cuya suma de los cuadrados $m^2 + (m+d)^2$ es igual a $2n$; se podrá escribir :

$$2n = m^2 + m^2 + d^2 + 2dm$$
$$2n = 2m^2 + 2dm + \frac{2d^2}{2}$$

tomando la mitad de los dos miembros :

$$n = m^2 + dm + \frac{2d^2}{4}$$

o

$$n = \left(m^2 + dm + \frac{d^2}{4}\right) + \frac{d^2}{4}$$

como $m^2 + dm + \frac{d^2}{4}$ es el cuadrado de $m + \frac{d}{2}$, y $\frac{d^2}{4}$ el de $\frac{d}{2}$, además $d$, diferencia de dos números pares o de dos números impares, es siempre divisible por 2,

$$n = \left(m + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

Así $n$, mitad de $2n$, es igual á la suma de dos cuadrados.

Se ve que $n$ es la suma de los cuadrados de dos números, de los cuales uno es la semidiferencia de los números cuyo cuadrado se ha dado, y el otro es igual al menor de estos mismos números, más su semidiferencia.

Ejemplo. 34 es la suma de los cuadrados $5^2$ y $3^2$;

17 será la suma de los cuadrados de $\frac{1}{2}(5-3)$ o 1, y de $3+1$ o 4.

---

## CAPÍTULO V

### FORMAS SINGULARES

**121. I. Forma $\frac{b}{0}$.** — Supongamos que se trate de encontrar el valor de $y = \frac{b}{3-x}$, cuando $x = 3$.



Se tiene materialmente $y = \frac{b}{0}$, expresión que no tiene significación, indicando la división de $b$ por cero, operación no sólo imposible sino incomprensible.

Pero, si, en vez de suponer $x = 3$, se da a $x$ varios valores que se acerquen a 3, v. gr. : 2; 2,5; 2,9; 2,99; 2,999; 2,9999 los valores correspondientes de $y$ son

$$y = \frac{b}{3-2} = b$$
$$y = \frac{b}{3-2,5} = 2b$$
$$y = \frac{b}{3-2,9} = 10b$$
$$y = \frac{b}{3-2,99} = 100b$$
$$y = \frac{b}{3-2,999} = 1\,000\,b$$
$$y = \frac{b}{3-2,9999} = 10\,000\,b.$$

Se nota que estos valores van aumentando siempre.

Podrían llegar á ser más grandes que cualquier número dado. Se expresa este hecho diciendo que el valor de $\frac{b}{3-x}$ es *infinito* cuando $x$ es igual a 3; lo que se representa por el signo $\frac{b}{0} = \infty$.

Pero, esta expresión : $\frac{b}{3-x}$ *es infinito* no indica que $\frac{b}{3-x}$ tenga un valor cuando $x = 3$, sino que, cuando el valor de $x$ se acerca a 3, $\frac{b}{3-x}$ se hace más y más grande.

**122. II. Forma $\frac{0}{0}$.** — Supongamos que se pida el valor de $y = \frac{(x-6)(x-4)}{(x-6)(x-2)}$, cuando $x = 6$.

Se tiene, sustituyendo

$$y = \frac{(6-6)(6-4)}{(6-6)(6-2)} = \frac{0}{0}.$$

Esta forma se llama *indeterminada*, porque, si se la considera como un cociente, lo que legítimamente no se puede hacer, parece que $y$ tiene un valor indeterminado.

En efecto, si
$$y=\frac{0}{0}$$
se tiene
$$y\times 0=0$$
$y$ puede tener cualquier valor; multiplicándolo por cero, el producto es siempre cero.

**123. Verdadero valor de las formas indeterminadas.** — Sea la expresión anterior
$$y=\frac{(x-6)(x-4)}{(x-6)(x-2)}.$$

Si $x\neq 6$, resulta $x-6\neq 0$ y podemos dividir el numerador y el denominador por $x-6$.

Se tiene
$$y=\frac{(x-6)(x-4)}{(x-6)(x-2)}=\frac{x-4}{x-2}.$$

Esta última expresión $\frac{x-4}{x-2}$ es siempre igual a $y$, si $x\neq 6$; si $x$ es igual a 6, la simplificación anterior no es legítima, porque esta simplificación consiste entonces en dividir el numerador y el denominador por cero.

No obstante, el valor $\frac{x-4}{x-2}$, cuando $x=6$, se llama, por definición, el *verdadero valor* de $y$.

Es una definición, porque nunca se podrá demostrar que $y$ tiene este valor si $x=6$. No obstante, esta definición es muy natural.

En efecto, $y$ y $\frac{x-4}{x-2}$ son iguales siempre que $x\neq 6$. Cuando $x=6$, no se puede averiguar si son iguales, por no poderse conocer el valor de $y$; luego, es natural suponer que aun cuando $x=6$, las dos cantidades son iguales.

El verdadero valor de
$$y=\frac{(x-6)(x-4)}{(x-6)(x-2)}$$
cuando $x=6$ es, pues,
$$y=\frac{6-4}{6-2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

# LIBRO II

# ECUACIONES É INECUACIONES DE PRIMER GRADO

## CAPÍTULO PRIMERO

## DEFINICIONES Y PRINCIPIOS

### § I. — Definiciones.

**124. Igualdad, identidad.** — Igualdad *es la expresión de dos cantidades que tienen el mismo valor.*

Ejemplo :
$$8=5+3.$$

Identidad *es una igualdad independiente del valor que se les dé a las letras.*

Así
$$m+n=m+n$$
y
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$
son identidades, porque, en los dos ejemplos subsiste la igualdad, cualquiera que sea el valor que se les dé a las letras $m$, $n$, $a$, $b$.

**125. Ecuación.** — Ecuación *es la igualdad en la cual se encuentran una o varias letras que representan cantidades desconocidas.* Tal igualdad no se verifica sino por algunos valores particulares de las incógnitas.

Las igualdades
$$3x+12=5x-8$$
$$y^2+5=6y-3$$

en las cuales $x$ e $y$ representan cantidades desconocidas, son ecuaciones; la primera no se verifica más que por un solo valor, $x=10$, la segunda se verifica por dos valores, $y=4$ e $y=2$.

**126.** *Una ecuación es* **literal** *cuando las cantidades conocidas que la forman están representadas por letras; se llama* **numérica** *cuando las cantidades conocidas están representadas por números.*

De las dos ecuaciones

$$5x+8=7x$$
$$ax-ab=bx$$

la primera es *numérica* y la segunda *literal.*

**127.** *Una ecuación es de* **una, dos, tres,** *etc., incógnitas según contenga* **una, dos, tres,** *etc., letras que representen cada una, una cantidad desconocida.*

*El* **grado** *de una ecuación se reconoce por la mayor suma de los exponentes de las incógnitas en un mismo término.*

Las ecuaciones

$$x+y=15$$
$$a^2-bx=x^2-ab$$
$$ab^2-ax^2=xy^2$$

son : la primera, de 1er grado con dos incógnitas; la segunda, de 2° grado con una incógnita; y la última, de 3er grado con dos incógnitas.

**128.** *Las* **raíces** *o* **soluciones** *de una ecuación son unos valores que, atribuidos a las incógnitas, hacen idénticos los dos miembros de la ecuación.*

V. gr. : 1° 2 es raíz de la ecuación

$$3x-4=5x-8$$

porque, substituyendo $x$ por 2, se tiene

$$6-4=10-8$$

2° $x=5$ é $y=2$ son raíces de la ecuación

$$2x-3y=4$$

porque substituyendo $x$ por 5 e $y$ por 2, se tiene

$$10-6=4$$



**129. Resolución de las ecuaciones.** — **Resolver** *una ecuación es encontrar sus raíces.*

**130. Ecuaciones equivalentes.** — *Ecuaciones equivalentes son aquellas que admiten las mismas raíces.*

Entre varias ecuaciones equivalentes, basta resolver una de ellas para conocer las raíces de todas estas ecuaciones.

Los procedimientos de resolución consisten precisamente en transformar una ecuación en otra equivalente, cuya forma sea más sencilla, y así sucesivamente, hasta que se tenga una ecuación de la forma $x=a$, en la cual la raíz evidentemente es $a$.

## § II. — Principios generales acerca de las ecuaciones.

**131.** Admitimos estos principios en el curso de Álgebra. Los que quisieren tener de ellos una demostración la encontrarán en la nota I.

**132. Primer principio.** — *Si se agrega o se quita una misma cantidad á los dos miembros de una ecuación, se obtiene una ecuación equivalente.*

**133. Segundo principio.** — *Si se multiplican o se dividen los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad que no sea nula ni infinita, y no contenga ninguna incógnita, se obtiene una ecuación equivalente.*

**134. Consecuencias** — 1° *Del primer principio resulta que para pasar un término cualquiera de un miembro a otro de una ecuación, basta suprimirlo en el miembro en que se encuentra y escribirlo en el otro con signo contrario.*

Sea la ecuación

$$5x-4=x+12.$$

Para pasar el término $-4$ del primer miembro al segundo, agreguemos 4 a los dos miembros, lo que da

$$5x-4+4=x+12+4$$

o

$$5x=x+12+4.$$

Comúnmente se pasan todos los términos de una ecuación al primer miembro, quedando el segundo reducido a cero.

La ecuación anterior se puede escribir :

$$5x - x - 12 - 4 = 0.$$

2° *Fundándose en el segundo principio se pueden hacer desaparecer los denominadores de una ecuación; para esto basta multiplicar sus dos miembros por el producto de todos los denominadores, o, más sencillamente, por su menor múltiplo común.*

Así la ecuación

$$\frac{3x}{2} - 7 = \frac{4x}{5}$$

se convierte en

$$\frac{3x \times 5 \times 2}{2} - 7 \times 5 \times 2 = \frac{4x \times 5 \times 2}{5}$$

cuando se multiplican sus dos miembros por $5 \times 2$, producto de los denominadores. Efectuados los cálculos, se encuentra :

$$15x - 70 = 8x$$

ecuación equivalente a la primera y que no tiene denominadores.

**135. Observaciones.** — I. Sea la ecuación

$$A - B = 0. \qquad (1)$$

Cuando la cantidad C contiene incógnita, las soluciones de la ecuación

$$C(A - B) = 0 \qquad (2)$$

no son siempre soluciones de la ecuacion (1); porque si C puede llegar a ser nulo sin que $A - B$ lo sea, la ecuación (2) tiene una o varias soluciones que no convienen á la ecuación (1).

Sea la ecuación

$$3x = 45$$

o

$$3x - 45 = 0.$$

Multiplicando sus dos miembros por $x - 4$, se obtiene una nueva ecuación

$$(x - 4)(3x - 45) = 0$$

que, independientemente de la raíz de la primera, contiene la solución $x = 4$; porque, para $x = 4$, siendo nulo el primer factor, el producto será nulo.

Del mismo modo si se dividieran los dos miembros de una ecuación por una cantidad que contenga la incógnita, se podrían suprimir una o varias soluciones de esta ecuación.

II. La elevación a una misma potencia de los dos miembros de una ecuación puede también introducir soluciones que no convengan a la ecuación primitiva.

Sea en efecto

$$x = A.$$

Elevando al cuadrado resulta :

$$x^2 = A^2$$

o

$$x^2 - A^2 = 0$$

o bien

$$(x + A)(x - A) = 0$$

donde se ve que la nueva ecuación contiene no solamente la solución $x = A$ de la primera, sino además la solución $x = -A$.

III. Cuando en la resolución de una ecuación ha sido preciso elevar al cuadrado sus dos miembros, es preciso verificar las soluciones obtenidas, a fin de rechazar aquellas que no convengan a la ecuación primitiva.

Esta observación es muy importante.

136. Fundándose *en el segundo* principio se pueden cambiar los signos de todos los términos de una ecuación, porque esto equivale a multiplicar por $-1$ los dos miembros de la ecuación.

---

# CAPÍTULO II

## ECUACIÓN CON UNA INCÓGNITA

### § I. — Resolución.

**137.** Una ecuación de primer grado con una incógnita puede siempre reducirse a la forma

$$ax + b = 0$$

o

$$ax = -b.$$

Suponiendo $a \neq 0$, podemos dividir los dos miembros por $a$, y resulta

$$x = -\frac{b}{a}$$

que es la raíz de la ecuación.

138. Para mayor claridad, aplicaremos este método a varios ejemplos, antes de enunciar la Regla práctica.

139. 1° *Propongámonos resolver la ecuación :*

$$\frac{3(x-8)}{2} = \frac{x}{5} + 1.$$

Quitemos los denominadores, multiplicando todos los términos por 10, producto de 2 por 5.

La ecuación se convierte en

$$\frac{30\,(x-8)}{2} = \frac{10x}{5} + 10$$

o

$$15\,(x-8) = 2x + 10.$$

Quitemos el paréntesis, multiplicando $x - 8$ por 15.

$$15x - 120 = 2x + 10.$$

Traslademos, es decir, hagamos pasar los términos desconocidos al primer miembro y los conocidos al segundo :

$$15x - 2x = 10 + 120.$$

Reduciendo los términos semejantes :

$$13x = 130$$

Dividiendo por 13 los dos miembros :

$$x = \frac{130}{13} = 10.$$

La solución buscada es 10, y este valor, puesto en lugar de $x$, hace los dos miembros de la ecuación propuesta iguales cada uno a 3.

2° *Sea resolver la ecuación.*

$$\frac{x+a-b}{b} = \frac{b-x}{a+b}.$$



Multiplicando todos los términos por $b(a+b)$, producto de los denominadores :

$$ax + a^2 - ab + bx + ab - b^2 = b^2 - bx.$$

Reduciendo y trasladando :

$$ax + 2bx = 2b^2 - a^2.$$

Sacando $x$ como factor común :

$$x(a + 2b) = 2b^2 - a^2.$$

Dividiendo los dos miembros por $a + 2b$, coeficiente de $x$ :

$$x = \frac{2b^2 - a^2}{a + 2b}$$

3° *Sea todavía la ecuación :*

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} - \frac{5x}{12} + \frac{5x}{6} = 5.$$

Quitemos los denominadores; para esto multiplicaremos todos los términos por 12, menor común múltiplo de todos los denominadores, y queda :

$$4x + 3x - 5x + 10x = 60.$$

Reduciendo los términos semejantes :

$$12x = 60$$

de donde

$$x = 5.$$

4° *Sea por último la ecuación*

$$\frac{a-x}{a-b} - \frac{x-b}{a+b} = \frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

Quitemos los denominadores, multiplicando todos los términos de la ecuación por $a^2 - b^2$, menor común múltiplo de los denominadores :

$$(a-x)(a+b) - (x-b)(a-b) = 2ab.$$

Suprimiendo los paréntesis :

$$a^2 + ab - ax - bx - ax + bx + ab - b^2 = 2ab.$$

Reduciendo y trasladando :

$$-2ax = b^2 - a^2.$$

Cambiando los signos de todos los términos :

$$2ax = a^2 - b^2$$

de donde

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2a}.$$

**140. Regla práctica.** — Conforme a estos ejemplos se ve, que para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita : 1° *Se quitan los denominadores y los paréntesis, si los hay;* 2° *Se trasladan a uno de los miembros todos los términos que contienen a la incógnita y al otro los que no la contienen;* 3° *Se reducen los términos semejantes y se saca la incógnita como factor común;* 4° *Se dividen los dos miembros por el coeficiente de la incógnita.*

## § II. — Discusión.

**141.** En la resolución de la ecuación $ax + b = 0$, hemos supuesto

$$a \neq 0.$$

Si $a$ es igual a cero, el primer miembro se reduce a $b$, y la ecuación a

$$b = 0 \qquad (1)$$

Si $b$ es diferente de cero, la igualdad (1) expresa **una imposibilidad**; no hay ningún valor de $x$ tal que $ax + b = 0$.

Si $b$ es igual a cero, la igualdad (1) expresa una **identidad**; y sea cual fuere el valor de $x$, $ax + b = 0$; se dice que hay indeterminación.

En resumen, en la resolución de la ecuación $ax + b = 0$, pueden presentarse tres casos :

1° $a \neq 0$; hay una raíz finita y determinada;
2° $a = 0$, $b \neq 0$; no hay ninguna raíz;
3° $a = 0$, $b = 0$; hay una infinidad de raíces.

---



# CAPÍTULO III

# ECUACIONES SIMULTÁNEAS

## § I. — Definiciones y principios.

**142. Ecuaciones simultáneas y sistemas de ecuaciones** — *Se llaman* **ecuaciones simultáneas,** *las ecuaciones que tienen una o varias soluciones comunes.*

**Sistema de ecuaciones** *es la reunión de cierto número de ecuaciones simultáneas.*

**143.** *Por* **soluciones** *de un sistema de ecuaciones se entienden los valores que satisfacen todas las ecuaciones del sistema.*

*Dos sistemas de ecuaciones son* **equivalentes** *cuando* cualquier solución del primer sistema es una solución del segundo, y recíprocamente.

**Principios relativos a las ecuaciones simultáneas.**

**144. Primer principio.** — *Cuando se tiene un sistema de ecuaciones simultáneas, se puede reemplazar cualquiera de ellas por la ecuación que resulte de sumar miembro a miembro esta ecuación con una o varias de las otras ecuaciones.*

**145.** Es evidente que en lugar de sumar miembro a miembro varias ecuaciones se pueden restar; como también antes de sumar o de restar las ecuaciones, se pueden multiplicar o dividir por un mismo número los dos miembros de estas ecuaciones o de algunas de ellas.

**146. Segundo principio.** — *Cuando se tiene un sistema de ecuaciones simultáneas, si se saca de una de las ecuaciones el valor de cualquier incógnita en función de las otras y se substituye en las otras ecuaciones esta incógnita por el valor encontrado, se forma un nuevo sistema equivalente al primero.*

## § II. — Resolución de dos ecuaciones de 1^er grado con dos incógnitas.

**147. Eliminación.** — En general, *eliminar* una incógnita entre varias ecuaciones, es reemplazar las ecuaciones propuestas por un sistema equivalente en el que todas las ecuaciones, *menos una*, no contengan ya esta incógnita.

### 1. — Eliminación por substitución.

**148.** La eliminación por substitución consiste en sacar el valor de una incógnita en una de las dos ecuaciones, y substituirlo en la otra ecuación (núm. 146). El sistema propuesto queda entonces reemplazado por un sistema equivalente de dos ecuaciones de las que una sola contiene la incógnita eliminada.

*Sea el sistema de dos ecuaciones :*

$$3x + y = 15 \qquad (1)$$
$$5x - 4y = 8 \qquad (2)$$

La ecuación (1) resuelta con relación a $x$ da :

$$x = \frac{15 - y}{3} \qquad (3)$$

Substituyendo este valor de $x$ en la ecuación (2) :

$$5\left(\frac{15 - y}{3}\right) - 4y = 8. \qquad (4)$$

Conforme al segundo principio (núm. 146), el sistema propuesto puede reemplazarse por el sistema equivalente :

$$x = \frac{15 - y}{3}. \qquad (5)$$
$$5\left(\frac{15 - y}{3}\right) - 4y = 8. \qquad (6)$$

Resolviendo la ecuación (6), encontramos sucesivamente :

$$75 - 5y - 12y = 24$$
$$-17y = -51$$

de donde

$$y = 3.$$

Si en la ecuación (5) reemplazamos $y$ por 3, queda :

$$x = \frac{15 - 3}{3} \quad \text{o} \quad x = 4.$$



Los valores de las incógnitas son pues :

$$x = 4; \qquad y = 3.$$

**149.** Apliquemos este método a la resolución del sistema :

$$x + y = s \qquad (1)$$
$$\frac{x}{y} = q. \qquad (2)$$

Si se despeja $y$, es decir, si se saca el valor de esta incógnita en la primera ecuación, se encuentra :

$$y = s - x. \qquad (3)$$

Substituyendo este valor en lugar de $y$ en la ecuación (2) :

$$\frac{x}{s - x} = q$$

o

$$x = sq - qx.$$

Esta última ecuación da :

$$x + qx = sq$$
$$x(1 + q) = sq$$

de donde

$$x = \frac{sq}{1 + q}.$$

Substituyendo este valor en lugar de $x$ en la ecuación (3) :

$$y = s - \frac{sq}{q + 1}.$$

Reduciendo los dos términos del segundo miembro a un común denominador :

$$y = \frac{sq + s - sq}{q + 1} \quad \text{o} \quad y = \frac{s}{q + 1}.$$

Los valores de las incógnitas son :

$$x = \frac{sq}{q + 1}; \qquad y = \frac{s}{q + 1}.$$

**150. Observación.** — El método por substitución se emplea ventajosamente cuando una de las ecuaciones da fácilmente el valor de la incógnita por eliminar, mientras que la otra ecuación es complicada.

### 2. — Eliminación por comparación.

**151**. La eliminación por comparación consiste en sacar el valor de una misma incógnita en las dos ecuaciones, e igualar estos valores.

*Sea el sistema de las dos ecuaciones :*

$$5x+2y=29 \qquad (1)$$
$$2x-3y=4 \qquad (2)$$

Despejando a $x$ en cada una de ellas :

$$x=\frac{29-2y}{5} \qquad (3)$$
$$x=\frac{4+3y}{2}. \qquad (4)$$

Como dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí, se puede escribir :

$$\frac{29-2y}{5}=\frac{4+3y}{2}. \qquad (5)$$

El sistema propuesto puede ahora reemplazarse por el sistema de las ecuaciones (3) y (5) o (4) y (5). Resuelta esta última ecuación da :

$$y=2.$$

Llevando el valor de $y$ a una de las ecuaciones (1) ó (4), se encuentra :

$$x=5.$$

Las incógnitas son pues :

$$x=5; \qquad y=2.$$

**152.** Apliquemos este método a la resolución del sistema siguiente :

$$x-2y=a \qquad (1)$$
$$\frac{2x}{y}=m. \qquad (2)$$

Despejando a $x$ en cada una de estas ecuaciones :

$$x=a+2y \qquad (3)$$
$$x=\frac{my}{2}. \qquad (4)$$



Igualando estos dos valores :

$$\frac{my}{2}=a+2y$$
$$my-4y=2a$$
$$(m-4)y=2a$$

de donde

$$y=\frac{2a}{m-4}.$$

Llevando este valor a la ecuación (3) :

$$x=a+\frac{4a}{m-4}.$$

Reduciendo los términos del segundo miembro a un común denominador :

$$x=\frac{am-4a+4a}{m-4}=\frac{am}{m-4}.$$

**153.** Si hubiera que resolver el sistema :

$$3x+2y=42 \qquad (1)$$
$$3x-4y=24. \qquad (2)$$

Se podría sacar inmediatamente el valor de $3x$ en las dos ecuaciones, y escribir :

$$3x=42-2y \qquad (3)$$
$$3x=24+4y. \qquad (4)$$

Igualando estos valores de $3x$ :

$$42-2y=24+4y$$
$$18=6y$$

de donde

$$y=3.$$

Este valor substituido en lugar de $y$ en la ecuación (3) da :

$$3x=42-6=36$$

de donde

$$x=12.$$

### 3. — Eliminación por reducción, llamada también eliminación por adición y por substracción.

**154.** La eliminación por reducción consiste primeramente en reducir al mismo coeficiente la misma incógnita en las dos ecuaciones; en seguida:

1° Si la incógnita elegida tiene *signos contrarios* en los dos términos que la contienen, se *suman* miembro a miembro las dos ecuaciones (núm. 144);

2° Si la incógnita tiene *signos iguales* se *resta* una ecuación de la otra, y el sistema obtenido es equivalente al primero (núm. 145).

Para hacer que una incógnita tenga el mismo coeficiente en las dos ecuaciones, se pueden multiplicar los dos miembros de cada ecuación por el coeficiente de esta incógnita en la otra ecuación.

Se puede multiplicar también cada ecuación por un número convenientemente elegido, de manera que se obtenga por coeficiente de la incógnita por eliminar el menor múltiplo común de los coeficientes de esta incógnita en las dos ecuaciones.

**155.** *Sea el sistema de las dos ecuaciones:*

$$5x - y = 5 \qquad (1)$$
$$3y - 2x = 11. \qquad (2)$$

Para eliminar a $x$, multipliquemos los dos miembros de la primera ecuación por 2 y los de la segunda por 5; estas ecuaciones se convierten en:

$$10x - 2y = 10 \qquad (3)$$
$$15y - 10x = 55. \qquad (4)$$

Teniendo signos contrarios los términos que contienen a $x$, sumamos miembro á miembro estas dos ecuaciones, y queda:

$$13y = 65. \qquad (5)$$

El sistema propuesto puede ahora reemplazarse por el sistema equivalente:

$$13y = 65 \qquad (6)$$
$$5x - y = 5 \qquad (7)$$

formado de la ecuación (5) y de una de las ecuaciones (1) y (2).



De la ecuación (6) se saca:

$$y = 5.$$

Este valor substituido en la ecuación (7) da

$$5x - 5 = 5$$

de donde

$$x = 2.$$

**156.** Apliquemos este método a la resolución de las ecuaciones siguientes:

1° *Sea el sistema de dos ecuaciones:*

$$10x + 17y = 97 \qquad (1)$$
$$15x + 8y = 128. \qquad (2)$$

Para eliminar a $x$, multipliquemos la primera ecuación por 3 y la segunda por $-2$, resulta:

$$30x + 51y = 291$$
$$-30x - 16y = -256.$$

Sumando estas dos ecuaciones:

$$35y = 35$$

de donde

$$y = 1.$$

Este valor, substituido en lugar de $y$ en una de las ecuaciones (1) o (2) da:

$$x = 8.$$

2° *Sea el sistema de dos ecuaciones:*

$$5x - 4y = 30$$
$$8y + 5x = 90.$$

Restando la primera de la segunda se encuentra inmediatamente:

$$12y = 60$$
$$y = 5.$$

Este valor substituido en lugar de $y$ en la primera ecuación da:

$$x = 10.$$

3° *Sean las ecuaciones:*

$$6x - 5y = 8 \qquad (1)$$
$$7y - 2x = 8. \qquad (2)$$

Multiplicando los dos miembros de la segunda por 3:

$$21y - 6x = 24. \qquad (3)$$

Sumando las ecuaciones (1) y (3) desaparecen los términos en $x$, y se tiene:

$$16y = 32$$

de donde $\qquad y = 2$

y por consiguiente $\qquad x = 3.$

**157. Observación.** — El método por reducción es más rápido que los anteriores, sobre todo cuando los coeficientes de una incógnita son los mismos en las dos ecuaciones, o cuando se puede, por una sola operación, hacer esos coeficientes iguales; en todos casos ofrece la ventaja de no introducir denominadores.

## § III. — Discusión de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

**158.** Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas puede reducirse siempre a la forma:

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \qquad (1) \\ a'x + b'y &= c'. \qquad (2) \end{aligned}\right\}$$

Resolvámoslo por el método de reducción, multiplicando los dos miembros de (1) por $b'$, y los dos miembros de (2) por $-b$; se tiene:

$$\begin{aligned} ab'x + bb'y &= b'c \\ -a'bx - bb'y &= -bc' \end{aligned}$$

y sumando ordenadamente

$$x(ab' - a'b) = b'c - bc'$$

ó, suponiendo

$$ab' - a'b \neq 0$$

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - ba'}. \qquad (3)$$

Del mismo modo se obtiene

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}. \qquad (4)$$

I. Si $ab' - ba' \neq 0$, siempre tienen $x$ e $y$ valores finitos y determinados.



II. Si $ab' - ba' = 0$, no se puede dividir por esta cantidad. Las dos ecuaciones (1) y (2) se pueden escribir:

$$\begin{aligned} ax + by - c &= 0 \\ a'x + b'y - c' &= 0 \end{aligned}$$

y se tiene, multiplicando la primera por $a'$ y la segunda por $a$:

$$\begin{aligned} aa'x + ba'y - ca' &= 0 \\ aa'x + ab'y - ac' &= 0. \end{aligned}$$

Restando la primera de la segunda, se tiene:

$$y(ab' - ba') - ac' + ca' = 0$$

o

$$ca' - ac' = 0$$

y el sistema (1), (2), se puede reemplazar por el sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= c \qquad (1) \\ ca' - ac' &= 0 \qquad (2)' \end{aligned}$$

Se deben distinguir dos casos.

1° $ac' - ca' \neq 0$; en este caso la ecuación (2)′ expresa una imposibilidad. En efecto $ac' - ca'$ sería igual a cero y a la vez diferente de cero, lo que es imposible. No existe ninguna solución y se dice que las ecuaciones (1) y (2) son *incompatibles*.

2° $ac' - ca' = 0$; entonces la relación (2)′ es una identidad por tener $ac' - ca' = a'c - ac'$ o $o = 0$. La ecuación (2) se verifica siempre; basta pues que los valores de $x$ e $y$ verifiquen la ecuación (1). El sistema (1) y (2) se reduce luego *a una ecuación* con 2 incógnitas y se llama ***sistema indeterminado***.

III. Si $a = b = a' = b' = 0$, las ecuaciones (1) y (2) se reducen a

$$c = 0 \qquad c' = 0$$

1° Si $a = c' = 0$, el sistema es indeterminado.

2° $c$ o $c'$ no es nula, el sistema es imposible.

**159. Observaciones.** — I. Si $ab' - ba' = 0$ y $ac' - ca' \neq 0$, se puede averiguar directamente que las ecuaciones son incompatibles. En efecto, se tiene $ab' = ba'$; $ac' \neq ca'$ o

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad \text{y} \quad \frac{a}{a'} \neq \frac{c}{c'}.$$

Haciendo

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k \quad \text{y} \quad \frac{c}{c'} = k'$$

resulta

$$a = ka', \qquad b = kb', \qquad c = k'c'$$

y la ecuación (1) se hace

$$ka'x + kb'y = k'c'.$$

La ecuación (2) puede escribirse

$$ka'x + kb'y = kc'$$

y es evidente que el primer miembro no puede ser igual a la vez a $k'c'$ y á $kc'$.

II. Si $ab' = a'b$ y $ac' = a'c$, se puede averiguar directamente que el sistema es indeterminado.

Se tiene

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Haciendo

$$\frac{a}{a'} = \frac{b'}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

resulta

$$a = ka'; \qquad b = kb'; \qquad c = kc'$$

y la ecuación (1) se hace

$$ka'x + kb'y = kc'$$

o

$$a'x + b'y = c'.$$

Esta ecuación se confunde con la ecuación (2). Luego sólo se tiene una ecuación; no basta para determinar las dos incógnitas.

## § IV. — Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

**160.** Todavía se pueden aplicar los tres procedimientos anteriores para eliminar una incógnita entre una ecuación y cada una de las otras dos; resultan dos nuevas ecuaciones con dos incógnitas, que se podrán resolver como queda dicho. Después, substituyendo en la que quedó con tres incógnitas, se encuentra el valor de la tercera incógnita.

V. gr. : *Sea por resolver el sistema de tres ecuaciones* :

$$\begin{aligned} 5x - y + 2z &= 2 \\ 3y - x + z &= 15 \\ 3x + 2y - z &= -2. \end{aligned}$$

Saquemos el valor de $x$ en una de las ecuaciones, la segunda por ejemplo, en donde esta incógnita tiene por coeficiente $-1$. Se tiene :

$$x = -15 + 3y + z.$$



Substituyendo este valor en lugar de $x$ en las otras dos ecuaciones, se obtiene el sistema :

$$\begin{aligned} 5(-15 + 3y + z) - y + 2z &= 2 \\ 3(-15 + 3y + z) + 2y - z &= -2. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones simplificadas se convierten en :

$$\begin{aligned} 2y + z &= 11 \\ 11y + 2z &= 43. \end{aligned}$$

Resolviéndolas por uno de los métodos conocidos, se encuentra :

$$y = 3 \quad \text{y} \quad z = 5.$$

Estos valores de $y$ y de $z$ substituidos en una de las ecuaciones (1), (2) o (3) dan :

$$x = -1.$$

## § V. — Sistema de $n$ ecuaciones con $n$ incógnitas.

**161. Regla.** — *Para resolver un sistema de* n *ecuaciones con* n *incógnitas*, 1° *se elimina una de las incógnitas entre una de estas ecuaciones y las* n — 1 *restantes. Se tiene entonces un nuevo sistema de* n *ecuaciones en el cual una ecuación solamente contiene todas las incógnitas, las* n — 1 *restantes no contienen más que* n — 1 *incógnitas.*

2° *Se elimina una de las incógnitas entre una de las ecuaciones del segundo sistema y las* n — 2 *restantes. Se tiene entonces un nuevo sistema de* n *ecuaciones en el cual una ecuación encierra todas las incógnitas; otra,* n — 1 *incógnitas, y* n — 2 *ecuaciones contienen* n — 2 *incógnitas.*

*Procediendo de la misma manera se llega á un sistema de* n *ecuaciones en el cual la primera contiene todas las incógnitas, la segunda contiene* n — 1, *la tercera* n — 2, *etc., de tal manera que la* nª *ecuación no contiene más que una incógnita.*

3° *Se resuelve esta última ecuación y se encuentra para la incógnita* un valor único. *Este valor, substituido en lugar de la incógnita en la penúltima ecuación, da una ecuación con una incógnita que no tiene también más que* una sola raíz. *Los valores encontrados, puestos en lugar de las incógnitas en la ecuación con tres incógnitas, transforman ésta en una ecuación equivalente que no tiene más que una sola incógnita, y, por consiguiente,* una sola raíz, *etc.*

*Se llegan así a encontrar los valores de todas las incógnitas*, y el sistema tiene tantas raíces como ecuaciones.

**162.** Apliquemos esta regla a la resolución de algunos sistemas de ecuaciones.

1° *Sea el sistema de las tres ecuaciones :*

$$2x + 3y + 4z = 20 \qquad (1)$$
$$3x + 2z + 4y = 17 \qquad (2)$$
$$4x + 3z + 2y = 17 \qquad (3)$$

Despejando a $x$ en las tres ecuaciones :

$$x = \frac{20 - 3y - 4z}{2}$$
$$x = \frac{17 - 2z - 4y}{3}$$
$$x = \frac{17 - 3z - 2y}{4}.$$

Igualando el primero de estos valores, primero con el segundo y luego con el tercero :

$$\frac{20 - 3y - 4z}{2} = \frac{17 - 2z - 4y}{3}$$
$$\frac{20 - 3y - 4z}{2} = \frac{17 - 3z - 2y}{4}.$$

Estas ecuaciones simplificadas se reducen á

$$y + 8z = 26$$
$$4y + 5z = 23.$$

Resolviéndolas se encuentra :

$$y = 2 \quad \text{y} \quad z = 3.$$

Estos valores substituidos en lugar de $y$ y de $z$ en cualquiera de las ecuaciones (1), (2) o (3), dan :

$$x = 1.$$

3° *Sea el sistema de 4 ecuaciones :*

$$x + 2y - 3z + 4v = 31 \qquad (1)$$
$$3x - 4z + 3y - v = 8 \qquad (2)$$
$$2x + 3v - 5z - y = 13 \qquad (3)$$
$$2x + v - z + 2y = 17. \qquad (4)$$



Multiplicando la primera ecuación por 6, la segunda por 2, la tercera y la cuarta por 3, queda :

$$6x + 12y - 18z + 24v = 186$$
$$6x - 8z + 6y - 2v = 16$$
$$6x + 9v - 15z - 3y = 39$$
$$6x + 3v - 3z + 6y = 51.$$

Restando de la primera cada una de las otras tres, se tiene :

$$6y - 10z + 26v = 170$$
$$15y - 3z + 15v = 147$$
$$6y - 15z + 21v = 135.$$

Resolviendo estas tres ecuaciones, resulta :

$$y = 4, \quad z = 1 \quad \text{y} \quad v = 6.$$

Substituyendo estos valores en lugar de $y$, de $z$ y de $v$ en cualquiera de las ecuaciones (1), (2), (3) o (4), resulta :

$$x = 2.$$

---

# CAPÍTULO IV

## ECUACIONES INDETERMINADAS

**163. Definición. — Sistema indeterminado** *es aquel que tiene más incógnitas que ecuaciones.*

V. gr. : Sea la ecuación :

$$ax + by = c.$$

que contiene dos incógnitas.

Se puede dar a $y$, por ejemplo, un valor cualquiera; resulta :

$$x = \frac{c - by}{a}$$

y esta ecuación tiene una infinidad de raíces.

Un valor de $y$ y el valor de $x$ que le corresponde forman un sistema de raíces.

V. gr. : Sea la ecuación :

$$2x - 4y = 50.$$

Haciendo

$$y = 4,$$

se tiene :

$$2x = 50 + 16 = 66$$
$$x = 33.$$

Los valores $x = 33$, $y = 4$, forman un sistema de raíces.

Cada valor distinto que se dé a $y$ y el valor correspondiente de $x$ forman otro sistema de raíces.

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 27 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = 29 \end{cases}; \quad \begin{matrix} y = 3 \\ x = 31 \end{matrix}; \quad \ldots; \quad \begin{cases} y = -1 \\ x = 23 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = -2 \\ x = 21 \end{cases}; \text{ etc.}$$

II. Sea el sistema :

$$ax + by + cz = d$$
$$a'x + b'y + c'z = d'$$

Se puede dar a $z$ un valor calquiera; después quedan dos ecuaciones con dos incógnitas que se pueden resolver.

Por cada valor que se dé a $z$ se tiene un sistema distinto de raíces.

**164. Resolución de la ecuación $ay + by = c$ en números enteros. Definición.** — **Resolver en números enteros** *la ecuación* $ax + by = c$, *es encontrar entre todas sus raíces los sistemas formados de números enteros.*

Siempre se pueden suponer $a$, $b$, $c$ primos entre sí en su conjunto; si no lo fueren se dividirán por su máximo común divisor.

Para que existan raíces o soluciones enteras de la ecuación $ax + by = c$ es preciso que los coeficientes $a$ y $b$ sean primos entre sí. Esto se deduce del teorema siguiente.

**Teorema** — *Si* a *y* b *no son primos entre sí, la resolución es imposible.*

En efecto, si $a$ y $b$ no son primos entre sí, tienen un divisor común; sea $\alpha$ este divisor. Se tiene :

$$a = k\alpha, \qquad b = h\alpha$$

luego, siendo $x_1$ e $y_1$ las raíces enteras, se tiene :

$$k\alpha x_1 + h\alpha y_1 = c$$

o

$$\alpha(kx_1 + hy_1) = c.$$

Pero, $kx_1 + hy_1$, es un número entero; y $c$ sería divisible por $\alpha$, lo que es contrario a la hipótesis, que $a$, $b$, $c$ son primos en su conjunto. Luego, no pueden existir $x_1$ e $y_1$ enteros.



**1er caso de la resolución.** — El coeficiente de una de las incógnitas es la unidad.

V. gr : la ecuación tiene la forma :

$$x + by = c \tag{1}$$

Se tiene inmediatamente la solución :

$$x = c, \qquad y = 0.$$

Se puede dar a $y$ un valor entero calquiera $p$, y las fórmulas :

$$x = c - pb \quad (2) \qquad y = p \quad (3)$$

dan todas las soluciones.

**2° caso.** — Los coeficientes $a$ y $b$ son cualesquiera.

I. Sea la ecuación :

$$\frac{x}{5} - \frac{y}{4} = \frac{7}{4}$$

quitando los denominadores, se tiene :

$$4x - 5y = 35 \tag{1)'$$

de donde :

$$x = \frac{5y + 35}{4} = \frac{4y}{4} + \frac{y}{4} + \frac{32}{4} + \frac{3}{4}$$

ó

$$x = y + 8 + \frac{y + 3}{4}$$

Haciendo

$$\frac{y + 3}{4} = p$$

se tiene :

$$x = y + 8 + p \tag{2)'$$
$$y = 4p - 3 \tag{3)$$

y sustituyendo en (2)' este último valor de $y$ :

$$x = 4p - 3 + 8 + p = 5p + 5 \tag{4)'.$$

La ecuación (3)' nos da :

$$y = -3 \qquad p = 0$$

sustituyendo en (4)', se tiene :

$$x = 5 \qquad y = -3$$

que forman un sistema de soluciones.

Los otros sistemas se obtienen haciendo en (3)' y (4)'

$p=1, \ldots 2, \ldots 3, \ldots -1, \ldots -2, \ldots -3, \ldots$, etc.

se tiene

$$\begin{cases} x=10 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=15 \\ y=5 \end{cases}; \ldots \begin{cases} x=0 \\ y=-7 \end{cases}; \begin{cases} x=-5 \\ y=-11 \end{cases}; \begin{cases} x=-10 \\ y=-15 \end{cases} \ldots$$

**165.** Una vez ya vistos estos ejemplos, podemos ahora demostrar el teorema general.

**Teorema.** — *Si la ecuación* $ax+by=c$ *tiene un sistema de soluciones enteras, tiene una infinidad de estos sistemas.*

Sea $x=m$, $y=n$ un sistema de raíces enteras. Se tiene.

$$ax+by=c$$
$$am+bn=c$$

Restando ordenadamente y sacando $a$ y $b$ como factores comunes, se tiene :

$$a(x-m)+b(y-n)=0$$

de donde

$$\frac{x-m}{y-n}=-\frac{b}{a}$$

Para que se verifique esta igualdad, siendo $a$ y $b$ números enteros primos entre sí, es preciso y basta que $x-m$ é $y-n$ sean equimúltiplos de $-b$ y de $a$, o que

$$x-m=-pb$$
$$y-n=pa$$

siendó $p$ un entero cualquiera.

Despejando a $x$ y a $y$, se tendrá :

$$x=m-pb \quad (4) \qquad y=n+pa \qquad (5).$$

A cada valor distinto de $p$ corresponde un valor de $x$ y un valor de $y$. El número de soluciones es infinito, y las fórmulas (4), y (5) dan todas las soluciones.

**166** Regla. — *Para resolver, en números enteros, una ecuación indeterminada de la forma* $ax+by=c$.

1° *Se despeja la incógnita que tiene el menor coeficiente, ejecutando la división en la parte posible; se obtiene así el valor de la primera incógnita expresado en una parte entera y otra fraccionaria;*

2° *La parte fraccionaria se iguala con otra indeterminada* p, *y en esta nueva ecuación se despeja de la misma manera la segunda incógnita.*



3° *Se repite la misma operación con el nuevo quebrado restante, igualándolo a* q, *el siguiente á* r, *etc , y se despejan, de la misma manera las indeterminadas auxiliares* p, q, r, *etc., hasta que resulte una ecuación de la forma* $x+by=c$, *que da* $x=c$ *e* $y=0$.

4° *Se sustituyen sucesivamente, en las ecuaciones anteriores, las indeterminadas auxiliares,* r, q, p, *por sus valores enteros respectivos; se obtiene así un sistema de raíces enteras de la ecuación* $ax+by=c$;

5° *Los otros sistemas se obtienen por las fórmulas*

$$x=m-pb \qquad y=n+pa.$$

**167. Ejemplos.**

I. *Sea la ecuación :*

$$27x+19y=222.$$

Despejando á $y$ que tiene el menor coeficiente, se tiene :

$$y=\frac{222-27x}{91}=11-x+\frac{13-8x}{19} \qquad (1).$$

Haciendo

$$\frac{13-8x}{19}=p$$

se tiene, despejando a $x$ :

$$x=\frac{13-19p}{8}=1-2p+\frac{5-3p}{8}. \qquad (2)$$

Haciendo

$$\frac{5-3p}{8}=q$$

y despejando á $p$, se tiene :

$$p=\frac{5-8q}{3}=1-2q+\frac{2-2q}{3}. \qquad (3)$$

Haciendo

$$\frac{2-2q}{3}=r$$

y despejando a $q$, se tiene :

$$q=\frac{2-3r}{2}=1-\frac{3}{2}r.$$

Esta última ecuación da :

$$q=1, \qquad r=0,$$

sustituyendo en (3), se tiene :

$$p = 1 - 2 + \frac{2-2}{3} = -1$$

sustituyendo en (2), se tiene :

$$x = 1 + 2 + \frac{5+3}{8} = 4$$

sustituyendo en (1), se tiene :

$$y = 11 - 4 + \frac{13-32}{19} = 6.$$

Los valores $x=4$, $y=6$, forman un sistema de raíces; los dos sistemas se encuentran por las fórmulas

$$x = 4 + 19p \qquad y = 6 - 27p.$$

Haciendo $p$ igual a

$$-1, \ -2, \ -3, \ \ldots, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3 \ldots$$

se tienen los sistemas de raíces :

$$\begin{array}{llllll} x = -15 & -34, -53\ldots, & 4, & 23, & 42\ldots \\ y = \ \ 33 & \ \ 60, \ \ 87\ldots, & 6, & -21, & -48\ldots \end{array}$$

II. *Formar la suma de \$ 10 con monedas de a \$ 0,50 y de a \$ 0,20.*

Se trata de encontrar las soluciones enteras y positivas de la ecuación :

$$0{,}5x + 0{,}2y = 10$$

o

$$5x + 2y = 100. \qquad (1)$$

Despejando a $y$, se tiene :

$$y = \frac{100-5x}{2} = 50 - 2x - \frac{x}{2}. \qquad (2)$$

Haciendo

$$\frac{x}{2} = p$$

se tiene :

$$x = 2p$$

y sustituyendo en (2),

$$y = 50 - 4p - p = 50 - 5p.$$

Por otra parte, como $x$ e $y$ deben ser enteros, se tiene :

$$\begin{array}{llll} x & \text{o} & 2p > 0 & \text{de donde} \quad p > 0 \\ y & \text{o} & 50 - 5p > 0 & \text{de donde} \quad p < 10. \end{array}$$



Luego $p$ está comprendido entre 0 y 10; haciendo $p = 1$, 2, 3, 4, ..., 8, 9, se tiene 9 soluciones :

$$\begin{array}{llllllllll} x = & 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12, & 14, & 16, & 18. \\ y = & 45, & 40, & 35, & 30, & 25, & 20, & 15, & 10, & 5. \end{array}$$

III. *Un comerciante tiene vino de a \$ 60, \$ 80 y \$ 100 el hectolitro. ¿Cuantos litros de a \$ 0,80 y de a \$ 1 debe mezclar con 100 litros de a \$ 0,60 para que la mezcla resulte a \$ 0,66 el litro?*

Se trata de encontrar las raíces enteras y positivas de la ecuación :

$$0{,}8x + y + 60 = (100 + x + y)\,0{,}66$$

o

$$80x + 100y + 6\,000 = 6\,600 + 66x + 66y$$

o

$$14x + 34y = 600$$

o

$$7x + 17y = 300.$$

Despejando a $x$, se tiene

$$x = \frac{300-17y}{7} = 42 - 2y + \frac{6-3y}{7}. \qquad (1)$$

Haciendo

$$\frac{6-3y}{7} = p$$

se tiene :

$$y = \frac{6-7p}{3} = 2 - \frac{7}{3}p. \qquad (2)$$

que admite las raíces :

$$p = 0 \qquad y = 2$$

y sustituyendo en (1), se tiene :

$$x = 42 - 4 + \frac{6-6}{7} = 38.$$

Las fórmulas (4) y (5) dan :

$$x = 38 - 17p \qquad y = 2 + 7p.$$

Debiendo ser :

$$x > 0, \quad \text{e} \quad y > 0,$$

se tiene

$$38 - 17p > 0 \quad \text{de donde} \quad p < \frac{38}{17} \quad \text{o} \quad 2\frac{4}{17}$$

$$2 + 7p > 0 \quad \text{de donde} \quad p > -\frac{2}{7}.$$

Las soluciones enteras y positivas se obtienen haciendo

$$p = 0,\ 1,\ 2$$

son :

$$\begin{matrix} x = 38 \\ y = 2 \end{matrix} \qquad \left\{ \begin{matrix} x = 21 \\ y = 9 \end{matrix} \right. \qquad \left\{ \begin{matrix} x = 4 \\ y = 16 \end{matrix} \right.$$

IV. *Hallar los números enteros y positivos menores que 1 000 que divididos por 12 den por resta 7, y divididos por 7 den por resta 5.*

Sea $n$ uno de estos números.
se tiene :

$$12x + 7 = 7y + 5 = n$$

o

$$12x - 7y = -2$$

o

$$7y - 12x = +2.$$

Despejando a $y$, se tiene :

$$y = \frac{12x + 2}{7} = x + \frac{5x + 2}{7}. \qquad (1)$$

Haciendo

$$\frac{5x + 2}{7} = p$$

se tiene :

$$x = \frac{7p - 2}{5} = p + \frac{2p - 2}{5} \qquad (2)$$

Haciendo

$$\frac{2p - 2}{5} = q$$

se tiene :

$$p = \frac{5q + 2}{2} = \frac{5}{2}q + 1$$

que admite las soluciones :

$$p = +1, \qquad q = 0.$$



Sustituyendo en (2) a $p$ por 1, se tiene

$$x = 1$$

y sustituyendo en (1), se tiene

$$y = 1 + \frac{5 + 2}{7} = 2.$$

Los otros valores de $x$ y de $y$ se sacan de las fórmulas

$$x = 1 + 7p \qquad y = 2 + 12p.$$

Debiendo ser :

$$0 < n < 1\,000$$

se debe tener :

$$7(2 + 12p) + 5 > 0 \qquad \text{de donde} \quad p > -\frac{19}{84}$$

y

$$7(2 + 12p) + 5 < 1\,000, \qquad \text{de donde} \quad p < \frac{981}{84} \quad \text{ó} \quad 11\frac{19}{28}.$$

Haciendo

$$p = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,$$

se tiene las soluciones :

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x =$ 1, | 8, | 15, | 22, | 29, | 36, | 43, | 50, | 57, | 64, | 71, | 78, |
| $y =$ 2, | 14, | 26, | 38, | 50, | 62, | 74, | 86, | 98, | 110, | 122, | 134, |
| $n =$ 19, | 103, | 187, | 271, | 355, | 439, | 523, | 607, | 691, | 775, | 859, | 943. |

# CAPÍTULO V

## ARTIFICIOS DE CÁLCULO

**168. Artificios de cálculo.** — Cuando hay que resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con varias incógnitas, se pueden frecuentemente omitir las reglas que hemos dado para la eliminación y llegar más rápidamente al resultado. Para esto se emplean ciertos artificios de cálculo que consisten, sea en la elección conveniente de las incógnitas por eliminar, sea en la combinación entre sí de varias ecuaciones, sea en otros medios que una larga práctica puede sugerir.

He aquí algunos ejemplos de estas simplificaciones :

1° *Resolver el sistema de las dos ecuaciones :*

$$x + y = 210$$
$$\frac{x}{40} = \frac{y}{30}.$$

Estando formada la segunda ecuación de dos razones iguales, se pueden sumar los numeradores entre sí, lo mismo que los denominadores, resultando una nueva razón igual a cada una de las primeras (núm. 117) :

$$\frac{x+y}{70} = \frac{x}{40} = \frac{y}{30}$$

siendo

$$x + y = 210$$

resulta :

$$\frac{210}{70} = \frac{x}{40} = \frac{y}{30}.$$

Igualando la primera razón con cada una de las otras dos, se encuentra inmediatamente :

$$x = 120 \quad \text{e} \quad y = 90.$$

2° *Sea el sistema de tres ecuaciones :*

$$x + y = a \qquad (1)$$
$$x + z = b \qquad (2)$$
$$y + z = c. \qquad (3)$$

De la suma de las dos primeras ecuaciones, restemos la tercera, y se tendrá :

$$2x + y + z - y - z = a + b - c$$

de donde

$$2x = a + b - c$$
$$x = \frac{a+b-c}{2}.$$

Substituyendo este valor en las ecuaciones (1) y (2), se tiene :

$$y = \frac{a+c-b}{2}.$$
$$z = \frac{b+c-a}{2}.$$

3° *Resolver el sistema de tres ecuaciones :*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a$$



$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b$$
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = c.$$

Representando $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, respectivamente por $x'$, $y'$, $z'$, las ecuaciones propuestas se convierten en :

$$x' + y' = a$$
$$x' + z' = b$$
$$y' + z' = c$$

y encontramos el sistema del núm. 2°; se tiene pues :

$$x' = \frac{a+b-c}{2}; \quad y' = \frac{a+c-b}{2}; \quad z' = \frac{b+c-a}{2}.$$

Es preciso ahora resolver las tres ecuaciones :

$$\frac{1}{x} = \frac{a+b-c}{2}, \quad \frac{1}{y} = \frac{a+c-b}{2}, \quad \frac{1}{z} = \frac{b+c-a}{2}$$

y se obtiene inmediatamente :

$$x = \frac{2}{a+b-c}$$
$$y = \frac{2}{a+c-b}$$
$$z = \frac{2}{b+c-a}.$$

4° *Resolver el siguiente sistema :*

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \qquad (1)$$
$$mx + ny + pz = s. \qquad (2)$$

Las razones iguales (1) pueden escribirse :

$$\frac{mx}{ma} = \frac{ny}{nb} = \frac{pz}{pc}. \qquad (3)$$

Aplicando a estas razones iguales la propiedad del número 117 :

$$\frac{mx+ny+pz}{ma+nb+pc} = \frac{mx}{ma} = \frac{ny}{nb} = \frac{pz}{pc}$$

o, reemplazando $mx + ny + pz$ por $s$,

$$\frac{s}{ma + nb + pc} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Por consiguiente :

$$x = \frac{as}{ma + nb + pc}$$

$$y = \frac{bs}{ma + nb + pc}$$

$$z = \frac{cs}{ma + nb + pc}.$$

5° *Resolver el sistema siguiente :*

$$x - y = a \qquad (1)$$

$$x^2 - y^2 = b \qquad (2)$$

La segunda ecuación puede escribirse :

$$(x + y)(x - y) = b \qquad (3)$$

Dividiendo miembro a miembro las ecuaciones (3) y (1) :

$$\frac{(x + y)(x - y)}{x - y} = \frac{b}{a}.$$

Suprimiendo el factor $x - y$ común a los dos términos del primer miembro :

$$x + y = \frac{b}{a}. \qquad (4)$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (1) y (4) :

$$2x = a + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b}{a}$$

de donde

$$x = \frac{a^2 + b}{2a}.$$

Restando la ecuación (1) de la ecuación (4) :

$$2y = \frac{b}{a} - a = \frac{b - a^2}{a}$$

de donde

$$y = \frac{b - a^2}{2a}.$$

---



# CAPÍTULO VI

## RESOLUCIÓN Y DISCUSIÓN DE LOS PROBLEMAS DE PRIMER GRADO

### § I. — Resolución.

169. En la resolución de los problemas, el método general es el siguiente :

1° encontrar las incógnitas.

2° plantear el problema, es decir encontrar las ecuaciones que proporcionan los datos.

3° resolver estas ecuaciones.

4° a menudo, discutir los resultados. De esta discusión se hablará más detenidamente por ofrecer mayores dificultades a los principiantes.

170. Un problema es *determinado* cuando su enunciado conduce a tantas *ecuaciones diferentes* como incógnitas.

Se llama *indeterminado* cuando conduce a menos ecuaciones que incógnitas.

Si el número de ecuaciones es mayor que el de incógnitas, las ecuaciones sobrantes se llaman *ecuaciones de condición*.

171. **Plantear el problema.** — No hay regla general para encontrar inmediatamente la ecuación única o las ecuaciones que respondan al enunciado de un problema. Sin embargo, se puede, en ciertos casos, adoptar la siguiente práctica. *Se supone conocida la solución, y se indican, con ayuda de los signos algebraicos, las operaciones que deben efectuarse para verificar la exactitud de esta solución.*

172. **Problema I.** — *¿Cuál es el número que agregándole 16, se convierte en el triple de lo que era antes?*

Sea $x$ el número.

Conforme al enunciado, agregando 16 a $x$ se debe encontrar 3 veces al número $x$ o $3x$, de donde resulta la ecuación :

$$x + 16 = 3x$$

$$16 = 2x$$

$$x = 8.$$

**173. Problema II.** — *Repartir 100 pesos entre tres personas, de manera que la segunda reciba 10 pesos más que la primera, y la tercera 20 pesos más que la segunda.*

La parte de la segunda será

$$x + 10$$

y la de la tercera

$$x + 10 + 20.$$

Las tres partes sumadas deben dar 100 por suma, luego

$$x + x + 10 + x + 10 + 20 = 100.$$

Transladando :

$$x + x + x = 100 - 10 - 10 - 20.$$

Reduciendo :

$$3x = 60.$$

Despejando :

$$x = 20.$$

Así, la parte de la primera persona es $ 20, la de la segunda 20 + 10 o 30, y la de la tercera 30 + 20 o 50 pesos.

**174. Problema III.** — *Un obrero no tiene más que $ 2,40 cuando se le pagan 6 días de trabajo; compra entonces un vestido que le cuesta los $\frac{2}{3}$ de su haber; pero después de 8 días de trabajo le pagan, y se encuentra poseedor de $ 9,80. ¿Cuál es el precio de su jornal?*

Sea $x$ el precio del jornal.

Después del primer pago, el obrero tiene : $2,40 + 6x$.

Gasta los $\frac{2}{3}$ de esta suma, le queda por consiguiente el $\frac{1}{3}$ de $2,40 + 6x$, o

$$\frac{2,40 + 6x}{3}.$$

Después del segundo pago tiene :

$$\frac{2,40 + 6x}{3} + 8x.$$

Como entonces posee $ 9,80, resulta la ecuación :

$$\frac{2,40 + 6x}{3} + 8x = 9,80$$



En vez de quitar los denominadores por el procedimiento ordinario, se puede, en este caso, dividir los dos términos del quebrado $\frac{2,40 + 6x}{3}$ por 3, lo que no altera su valor y se tiene :

$$0,80 + 2x + 8x = 9,80$$
$$0,80 + 10x = 9,80$$
$$10x = 9,80 - 0,80$$
$$x = \frac{9}{10} = \$\,0,90.$$

**175. Problema IV.** — *Una fuente está alimentada por dos llaves; la una puede llenarla en 5 horas, y la otra en 3; si se abren las dos llaves ¿en qué tiempo se llenará la fuente?*

Representemos por $x$ el tiempo buscado y por 1 la capacidad de la fuente.

En 1 hora la primera llave llenará $\frac{1}{5}$ de la fuente; en el mismo tiempo la segunda llenará $\frac{1}{3}$ de la fuente.

Las dos llaves llenarán por consiguiente en una hora $\frac{1}{5} + \frac{1}{3}$ de la fuente, y en $x$ horas llenarán $x$ veces más o $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) x$, quedando entonces la fuente llena, luego :

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) x = 1$$
$$\frac{x}{5} + \frac{x}{3} = 1$$
$$3x + 5x = 15$$
$$8x = 15$$
$$x = \frac{15}{8} = 1 \text{ hora } \frac{7}{8}.$$

**176.** Generalicemos esta cuestión, es decir, hagámosla independiente de los números 3 y 5. Para esto enunciemos el problema como sigue :

**Problema V.** — *Una fuente está alimentada por dos llaves; la una puede llenarla en $t$ horas, la otra en $t'$ horas; si se abren las dos llaves ¿en qué tiempo se llenará la fuente?*

En 1 hora, la primera llave llenará $\frac{1}{t}$ de la fuente, y la segunda $\frac{1}{t'}$; las dos $\frac{1}{t}+\frac{1}{t'}$; en $x$ horas llenarán $x$ veces $\frac{1}{t}+\frac{1}{t'}$, quedando entonces la fuente llena, luego

$$\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t'}\right)x=1$$
$$\frac{x}{t}+\frac{x}{t'}=1$$
$$t'x+tx=tt'$$
$$x(t+t')=tt'$$
$$x=\frac{tt'}{t+t'}.$$

La expresión $x=\frac{tt'}{t+t'}$ es una fórmula que se puede aplicar a todos los problemas análogos al que acabamos de resolver.

Si se aplica al problema anterior, reemplazando $t$ por 5 y $t'$ por 3.

$$x=\frac{3\times 5}{5+3}=1 \text{ hora}, \frac{7}{8}, \text{ como antes.}$$

## § II. — Discusión de los problemas.

**177.** Discutir un problema, es reconocer los casos de posibilidad de este problema, determinar los limites entre los cuales pueden variar los datos del enunciado, y distinguir los casos notables que puedan presentarse.

### 1. — Problemas imposibles.

**178. Casos en que un problema es imposible.** — Un problema es imposible :

1º Cuando las soluciones son negativas, debiendo ser esencialmente positivas.

2º Cuando las soluciones son fraccionarias, exigiendo la naturaleza de la cuestión que sean enteras.

3º Cuando una de las soluciones toma la forma $\frac{m}{0}$.

4º Por último, cuando los valores encontrados para las



incógnitas no satisfacen las ecuaciones de condición. Ejemplos :

**179. Problema I.** — *Sabiendo que 7 metros de tela valen tanto como 3 metros de paño, se desea saber cuál es el precio de cada uno de estos géneros, sabiendo que 9 metros de paño cuestan 12 pesos más que 24 metros de tela.*

Representando por $x$ el precio del metro de tela y por $y$ el del paño, resultan las ecuaciones :

$$7x=3y$$
$$9y-24x=12.$$

El valor de $y=\frac{7x}{3}$ sacado de la primera y llevado a la segunda da :

$$\frac{9\times 7x}{3}-24x=12$$

de donde

$$x=-4 \text{ pesos.}$$

Exigiendo la naturaleza de la cuestión que el valor de $x$ sea positivo, el problema es imposible.

**180. Problema II.** — *Doce oficiales, capitanes y tenientes, comen juntos y hacen un gasto total de 45 pesos. ¿Cuántos capitanes y cuántos tenientes son, sabiendo que los primeros han gastado 5 pesos cada uno y los segundos 3 pesos cada uno?*

Sean $x$ los capitanes e $y$ los tenientes, tenemos las ecuaciones :

$$x+y=12$$
$$5x+3y=45.$$

De la primera se saca

$$y=12-x.$$

Este valor, substituído en la segunda ecuación da

$$5x+3(12-x)=45$$

de donde

$$x=4,5$$

por consiguiente

$$y=7,5$$

Exigiendo la naturaleza de la cuestión que los valores de $x$ y de $y$ sean enteros, el problema es imposible.

**181. Problema III.** — *Hallar un número tal que su mitad, más 6, sea igual a dos veces su cuarta parte más 4.*

Sea $x$ este número; conforme al enunciado se tiene :

$$\frac{x}{2}+6=2\left(\frac{x}{4}+4\right) \qquad (1)$$

$$\frac{x}{2}+6=\frac{x}{2}+8 \qquad (2)$$

$$x+12=x+16$$

$$x-x=4 \quad \text{ó} \quad x(1-1)=4$$

$$x\times 0=4$$

$$x=\frac{4}{0}.$$

Presentándose el valor de $x$ bajo la forma singular $\frac{4}{0}$ el problema es imposible. La ecuación (2) mostraba ya esta imposibilidad, porque en ella se ve fácilmente que los dos miembros no pueden ser iguales.

**182 Problema IV.** — *Hallar dos números cuya diferencia sea 15, y tales que 3 veces el primero menos 4 veces el segundo den 20 por diferencia, y que el primero más 2 veces el segundo den 100 por suma.*

Se tienen las ecuaciones :

$$x-y=15 \qquad (1)$$
$$3x-4y=20 \qquad (2)$$
$$x+2y=100. \qquad (3)$$

Conduciendo el enunciado del problema a 3 ecuaciones con dos incógnitas, una de las ecuaciones, la tercera por ejemplo, deberá considerarse como ecuación de condición (núm. 170).

Resolviendo las dos primeras, se encuentra :

$$x=40, \qquad y=25.$$

No satisfaciendo estos valores de $x$ y de $y$ la ecuación (3), el problema es imposible.

## 2. — Problemas indeterminados.

**183.** — Hemos dicho (núm. 170) que un problema es indeterminado cuando su enunciado conduce a menos ecuaciones distintas que incógnitas; en ciertos casos puede tener lugar la indeterminación, aun cuando parezca que se han encontrado tantas ecuaciones como incógnitas tiene el enunciado.



**184. Ejemplos I.** — *¿Cuál es el número tal que restándole su mitad 8, es igual a cuatro veces su octava parte menos 2?*

Se tiene, conforme al enunciado :

$$x-\frac{x}{2}-8=4\left(\frac{x}{8}-2\right) \qquad (1)$$

$$8x-4x-64=4x-64 \qquad (2)$$

$$8x-8x=64-64$$

$$0\times x=0$$

$$x=\frac{0}{0}.$$

El problema es indeterminado y tiene una infinidad de soluciones. Se podía prever este resultado notando que la ecuación á la cual el enunciado conduce es *una identidad* (núm. 124), como lo indica de un modo evidente la ecuación (2).

II. — *Hallar dos números tales que 2 veces el primero, menos 3 veces el segundo, den 5 por diferencia, y que 10 veces el primero, menos 25, sea igual a 15 veces el segundo.*

Se tiene :

$$2x-3y=5$$
$$10x-25=15y.$$

Despejando a $x$ en la primera ecuación :

$$x=\frac{5+3y}{2}.$$

Substituído este valor de $x$ en la segunda ecuación da :

$$\frac{10(5+3y)}{2}-25=15y$$

$$50+30y-50=30y$$

$$0\times y=0 \quad \text{o} \quad y=\frac{0}{0}.$$

Hay todavía indeterminación, y esta vez la indeterminación proviene de que las dos ecuaciones del problema *no son distintas* : una está incluída en la otra. En efecto, la segunda puede escribirse :

$$10x - 15y = 25$$

o

$$5(2x - 3y) = 5 \times 5.$$

**La cual es la primera multiplicada por 5.**

### 3. — Interpretación de los valores negativos encontrados en la resolución de un problema.

**185.** La resolución de un problema conduce á menudo á una solución negativa; tal solución indica a veces una imposibilidad; sin embargo, en gran número de casos, el valor negativo puede ser interpretado si se tiene en cuenta el siguiente principio, formulado por Descartes.

**186. Principio de Descartes.** — *Cuando se puede contar una magnitud en dos sentidos opuestos, si se conviene en considerar como positivas las magnitudes contadas en un sentido, deberán considerarse como negativas las magnitudes contadas en sentido contrario.*

**187.** Conforme á este principio, que no ofrece sino muy pocas excepciones, las soluciones negativas encontradas en los problemas sobre la duración, el espacio, los grados de temperatura, etc., podrán recibir generalmente una interpretación.

1° Si se trata de la duración, la solución negativa indicará que debe tomarse el tiempo *antes de la época adoptada como origen* y no después.

2° Si se trata de grados deberán tomarse los grados del termómetro *abajo de cero* y no arriba.

3° Si se trata del espacio y que se hayan considerado


como positivas las magnitudes tomadas sobre una línea $xy$ á la derecha de un punto $o$, una solución negativa indicará que la longitud encontrada deberá tomarse *a la izquierda* de este punto.

**188. Introducción de los números negativos en los datos de un problema.** — El principio de Descartes no solamente proporciona el medio de interpretar las soluciones negativas, sino que permite además introducir números negativos en los datos de un problema, y tratar ciertas cuestiones de una manera del todo general.

**189.** Ejemplo. — Propongámonos determinar la diferencia



de temperatura de dos cuerpos cuyas temperaturas respectivas son $t$ y $t'$, siendo $t$ una temperatura más elevada que $t'$.

1° Las dos temperaturas están arriba del cero del termómetro.

En este caso la diferencia buscada será :

$$x = t - t'. \qquad (1)$$

2° La temperatura $t'$ está bajo cero. Esta vez la diferencia buscada será $t + t'$, porque es evidente que faltan al cuerpo más frío, primero $t'$ grados para llegar a cero, luego $t$ grados para alcanzar la temperatura del cuerpo más caliente.

Este es el resultado que da la fórmula (1) si en ella se considera $t'$ como negativa. Se convierte entonces en

$$x = t - (-t') = t + t'. \qquad (2)$$

3° Si las dos temperaturas están bajo cero, la diferencia buscada será $t' - t$, porque siendo $t'$ más fría que $t$, el número que representa su temperatura será mayor, en valor absoluto, que el que da la temperatura de $t$. Este es aún el resultado que indica la fórmula (1) cuando en ella se consideran como negativas las cantidades $t$ y $t'$. Se convierte en efecto en

$$x = -t - (-t') \quad \text{o} \quad -t + t'$$

ó por último

$$x = t' - t.$$

**190.** Se ve que una misma fórmula contesta a los tres casos que se pueden presentar, con tal que, en esta fórmula, se consideren como negativas las temperaturas tomadas bajo cero.

**191. Problema I.** — *Un padre tiene* 39 *años y su hijo* 15. *¿Dentro de cuántos años la edad del padre será triple de la del hijo?*

Sea $x$ el tiempo buscado; dentro de $x$ años la edad del padre será $39 + x$, y la del hijo será $15 + x$.

Luego

$$39 + x = 3(15 + x)$$
$$39 + x = 45 + 3x$$
$$-6 = 2x$$
$$x = -3 \text{ años.}$$

Aquí la solución negativa — 3, indica que la condición pedida se realizó hace tres años; en efecto, en esa época el padre tenía 36 años y su hijo 12.

Modificando el enunciado de la manera siguiente, conduce a una solución positiva.

*Un padre tiene 39 años y su hijo 15. ¿Qué tiempo hace que la edad del primero era triple de la del segundo?*

Se tiene

$$39 - x = 3(15 - x)$$

esta es la ecuación primitiva en la cual se ha substituído $x$ por $-x$ (núm. 188).

Resolviéndola se encuentra $x = 3$ años.

**192. Problema II.** — *Dos viajeros de los cuales uno camina 18 kilómetros por hora, y el otro 12, parten al mismo tiempo, el primero de París, el segundo de Orleans dirigiendose a Tolosa. ¿A qué distancia de Limoges se encontrarán, sabiendo que de París á Orleans hay 120 kilómetros, y que de Orleans a Limoges hay 280 kilómetros?*

Representemos por $x$ esta distancia que supondremos situada más allá de Limoges, sobre el camino de Tolosa, y sea R el punto de encuentro.


El viajero que parte de París recorrerá

$$(120 + 280 + x) \text{ kilómetros.}$$

el que parte de Orleans recorrerá

$$(280 + x) \text{ kilómetros :}$$

El tiempo empleado por el primer viajero será :

$$\frac{120 + 280 + x}{18}$$

y el tiempo empleado por el segundo,

$$\frac{280 + x}{12}.$$

Como estos tiempos son iguales, puesto que los dos viajeros parten a la misma hora, se tendrá la ecuación :



$$\frac{120 + 280 + x}{18} = \frac{280 + x}{12}$$

de donde $x = -40$ kilómetros.

Esta solución negativa puede interpretarse fácilmente; indica que los viajeros se encontrarán 40 kilómetros más acá de Limoges y no más allá (núm. 187).

El enunciado del problema, modificado como sigue, dará una solución positiva.

*Dos viajeros, de los cuales uno camina 18 kilómetros por hora y el otro 12, parten al mismo tiempo, el primero de París, el segundo de Orleans, dirigiéndose a Tolosa. ¿A qué distancia antes de Limoges se encontrarán, sabiendo que de París a Orleans hay 120 kilómetros, y de Orleans a Limoges 280?*

La ecuación será :

$$\frac{120 + 280 - x}{18} = \frac{280 - x}{12}$$

es la ecuación primitiva en la cual se ha reemplazado $x$ por $-x$.

Resolviéndola se encuentra :

$$x = 40 \text{ kilómetros.}$$

**193. Problema III.** — *Un tanque está provisto de tres llaves; la primera, abierta sola, lo llenaría en 8 horas, la segunda lo llenaría en 12 horas, pero la tercera lo vaciaría en 3 horas. ¿En qué tiempo se llenará el tanque abriendo las tres llaves simultáneamente?*

Representemos por $x$ el tiempo buscado.

La 1ª llave llenará en 1 hora $\frac{1}{8}$ del tanque.

La 2ª llenará en el mismo tiempo $\frac{1}{12}$ del tanque.

La 3ª vaciará en 1 hora $\frac{1}{3}$ del tanque.

Restando la tercera fracción de la suma de las otras dos, se tendrá :

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{12} - \frac{1}{3}$$

que será la parte de la fuente que se llenará en 1 hora.

Multiplicando este resultado por $x$ se obtendrá la ecuación:

$$\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\right)x=1.$$
$$(3+2-8)x=24$$
$$-3x=24$$
$$x=\frac{24}{-3}=-8 \text{ horas.}$$

Esta solución negativa indica que el problema es imposible. Existe, en efecto, una incompatibilidad en las condiciones del enunciado, porque la suma de las dos fracciones $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}$ o $\frac{5}{24}$ es menor que $\frac{1}{3}$ u $\frac{8}{24}$: así es que el tanque no se llenará nunca, dando las dos primeras llaves menos líquido que el que deja salir la tercera.

El problema podrá ser posible si se modifica su enunciado de la manera siguiente:

*Un tanque está provisto de tres llaves; la primera lo llenaría en 8 horas, la segunda lo llenaría en 12 horas, pero la tercera lo vaciaría en 3 horas. ¿En qué tiempo quedará vacío el tanque, suponiéndolo lleno?*

La ecuación es entonces:

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\right)x=1$$

de donde se saca

$$x=8 \text{ horas.}$$

**194. Observación.** — En general, cuando la resolución de un problema ha conducido a una solución negativa, es preciso:

1° *Ver si el enunciado no contiene ninguna incompatibilidad en el sentido de las condiciones propuestas;*

2° *Asegurarse que no se ha hecho ninguna hipótesis contraria a los datos del problema;*

3° *Examinar si la magnitud encontrada puede contarse en sentido contrario a aquel en el cual se la ha considerado al plantear el problema.*

En este último caso, se cambia el signo de la incógnita en esta ecuación, y se modifica el enunciado del problema para que convenga a la ecuación así transformada.



### 4. — Ejemplos de discusión.

**195. Problema I.** — *Se tiene un lingote de plata con peso de* n *gramos y una ley* t*; se quiere saber cuántos gramos será preciso agregarle de un segundo lingote de una ley* t'*, para que la liga obtenida sea de una ley* t''.

Llamemos $x$ el peso buscado; $t'x$ será la plata pura contenida en los $x$ gramos quitados al segundo lingote, $nt$ será la plata pura contenida en el primer lingote, $n+x$ representará el peso total del lingote obtenido, y la plata pura de este lingote será $(n+x)t''$.

Como esta plata debe igualar a la que está contenida en el primer lingote, más la que está contenida en la parte quitada del segundo, se tendrá la ecuación:

$$t'x+nt=(n+x)t''$$

Resolviéndola se encuentra

$$x=\frac{(t-t'')n}{t''-t'}.$$

**196. Discusión.** — El problema no será posible sino cuando el valor de $x$ sea positivo, lo que exige que la ley nueva $t''$ sea intermediaria entre las leyes $t$ y $t'$ de los lingotes. Estando satisfecha esta condición, $t$ puede ser mayor o menor que $t'$. En el primer caso, el numerador y el denominador son positivos; en el segundo, el numerador y el denominador son negativos, pero el cociente es siempre positivo.

Si se tiene $t=t'$, siendo $t''$ intermediaria entre las dos leyes, valdrá $t$ o $t'$; siendo nulos el numerador y el denominador, el valor de $x$ tomará la forma $x=\frac{0}{0}$; habrá indeterminación.

Este resultado era fácil de prever, porque si las leyes son las mismas, se puede tomar la fracción que se quiera de cada uno de los dos lingotes, y la liga obtenida tendrá siempre la misma ley.

Si se tiene $t''=t$, el valor de $x$ es $\frac{0}{t''-t'}$ o 0; lo que indica que no se necesita tomar nada del segundo lingote.

Por último, si se tiene $t'' = t'$, $x = \frac{(t - t'')n}{0} = \infty$ el problema es imposible.

**197. Problema II.** — *Dividir un número* a *en dos partes tales que, si se divide la primera por* m *y la segunda por* n, *la suma de los cocientes sea* b. a, b, m *y* n *son números positivos.*

Sean $x$ y $a - x$ estas partes.

La ecuación es

$$\frac{x}{m} + \frac{a - x}{n} = b$$

o

$$nx + m(a - x) = mnb$$

o

$$x(n - m) = m(nb - a) \qquad (1)$$

**198. Discusión.** — 1° Sea

$$n - m \neq 0$$

se tiene

$$x = \frac{m(nb - a)}{n - m}$$

$$a - x = a - \frac{m(nb - a)}{n - m} = \frac{n(mb - a)}{m - n}$$

Estas dos partes deben ser positivas; luego, se necesita

$$m - n > 0, \quad a - bn > 0 \quad bm - a > 0 \qquad (2)$$

o

$$m - n < 0, \quad a - bn < 0 \quad bm - a < 0. \qquad (3)$$

De (2) se saca

$$m > n \quad \frac{a}{b} > n \quad \frac{a}{b} < m$$

o

$$m > \frac{a}{b} > n.$$

De (3) se saca

$$m < n \quad \frac{a}{b} < n \quad \frac{a}{b} > m$$

o

$$n > \frac{a}{b} > m.$$

Luego, si $m \neq n$, hay una solución si $\frac{a}{b}$ está comprendido entre $m$ y $n$.



2° Si

$$m - n = 0$$

La ecuación (1) toma la forma

$$m(a - bn) = 0.$$

Si $a - bn \neq 0$, el problema es imposible.

Si $a - bn = 0$, el problema es indeterminado.

La indeterminación es absoluta. En efecto, se tiene, con

$$m = n$$

$$\frac{x}{n} + \frac{a - x}{n} = b$$

o.

$$\frac{a}{n} = b$$

pero $a = nb$, según la hipótesis; luego, la igualdad (1) se verifica, sea cual fuere $x$.

---

# CAPÍTULO VII

## DESIGUALDADES

### § I. — Definiciones.

**199.** Definición. — **Desigualdad** *es la expresión que indica que una cantidad es mayor que otra.*

Ejemplo :

$$5x + 4 > 4x + 2.$$

El *primer miembro* de una desigualdad es la cantidad colocada a la izquierda del signo $>$ o $<$; el *segundo*, la cantidad colocada a la derecha.

Hemo visto que existen dos clases de igualdades : las *identidades*, en las cuales la igualdad de los dos miembros no depende del valor numérico de las letras;

Y las *ecuaciones*, en las cuales esta igualdad depende del valor de las letras

Del mismo modo, ciertas desigualdades se verifican sea cual fuere el valor de las letras;

V. gr. :

$$(a+b)^2 > 0$$

y otras no se verifican sino por valores particulares atribuidos a las letras.

**200. Desigualdades condicionales o inecuaciones.** — *Son desigualdades que sólo se verifican por ciertos valores de las letras que representan cantidades desconocidas.*

**Soluciones** *de las inecuaciones son los valores de las incógnitas por las cuales se verifican estas inecuaciones.*

**Desigualdades condicionales equivalentes.** — *Son aquellas que admiten las mismas soluciones.*

## § II. — Propiedades de las desigualdades numéricas.

**201. Primera propiedad.** — *Se puede, sin cambiar el sentido de una desigualdad, agregar o quitar a cada miembro una misma cantidad.*

Sea $A > B$, (1)

y $m$ un número cualquiera. Digo que

$$A + m > B + m.$$

En efecto, la desigualdad (1) significa que la diferencia

$$A - B = d$$

es positiva. (Nº 30.)

Se tiene también

$$A + m - B - m = d$$

o

$$(A + m) - (B + m) = d$$

y siendo positiva la diferencia

$$(A + m) - (B + m)$$

resulta

$$A + m > B + m.$$

Del mismo modo se ve que

$$A - m > B - m.$$

**202. Segunda propiedad.** — *Se puede, sin alterar la*



*desigualdad, multiplicar o dividir todos sus términos por un mismo número positivo; pero si se multiplican o se dividen todos sus términos por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido.*

En efecto, si se tiene

$$A > B$$

se puede escribir

$$A - B > 0$$

Multipliquemos los dos miembros por $m$.

Si $m$ es positivo, el primer miembro es mayor que cero, y se tiene

$$mA - mB > 0$$

de donde

$$mA > mB.$$

Si $m$ es negativo, el primer miembro es menor que cero, y deberá escribirse :

$$mA - mB < 0$$

de donde

$$mA < mB.$$

**203. Consecuencias.** — I. Si se cambian los signos de todos los términos de una desigualdad, se cambia el sentido de la desigualdad, porque esto equivale a multiplicar los dos miembros por $-1$.

II. Se quitan los denominadores de una desigualdad multiplicando los dos miembros de la desigualdad por el producto de los denominadores. Si este producto es negativo, es preciso cambiar el sentido de la desigualdad.

Sea

$$\frac{a}{b-h} > \frac{c}{d}.$$

Si se tiene $d(b-h) > 0$, se escribirá

$$ad > c(b-h)$$

Si $d(b-h) < 0$, se deberá escribir :

$$ad < c(b-h).$$

**204.** No se pueden quitar los denominadores de una desigualdad sino cuando se conoce el signo del denominador común por el cual se multiplican los dos miembros de la desigualdad.

**205. Tercera propiedad.** — *Se pueden elevar al cuadrado los dos miembros de una desigualdad o extraerles la raíz cuadrada cuando estos miembros son esencialmente positivos, resultando siempre una desigualdad del mismo sentido*, porque si el primer miembro es mayor que el segundo, su cuadrado será también mayor que el del segundo, sucediendo lo mismo con su raíz cuadrada. Pero si los dos miembros no son positivos, la elevación al cuadrado puede cambiar el sentido de la desigualdad.

EJEMPLO. — Si se tiene :

$$-a > -b$$

se deberá escribir, elevando al cuadrado :

$$a^2 < b^2.$$

**206. Cuarta propiedad.** — *Se pueden sumar miembro a miembro varias desigualdades del mismo sentido, resultando una desigualdad del mismo sentido que las primeras*, porque siendo los miembros de la izquierda, por ejemplo, mayores que los miembros de la derecha, la suma de los primeros será todavía mayor que la de los últimos.

Pero si se suman desigualdades de sentido contrario, no se puede saber cual será el sentido de la desigualdad resultante, ni tampoco si el resultado expresará una desigualdad.

**207. Quinta propiedad.** — *Se puede, de una desigualdad, restar otra desigualdad de sentido contrario, y el resultado será una desigualdad del mismo sentido que la primera.*

*Pero no se pueden restar miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido, porque no se sabe cuál será el resultado de la substracción.*

EJEMPLOS. — Las desigualdades :

$$8 > 5$$
$$6 > 1$$

restadas una de otra dan $2 < 4$, mientras que las desigualdades :

$$6 < 15$$
$$4 < 13$$

dan $2 = 2$ si se les resta miembro a miembro. En el primer caso hemos obtenido una desigualdad cuyo sentido es diferente del de las primeras, y en el segundo hemos obtenido una igualdad.



## § III. — Principios acerca de las inecuaciones

**208.** Admitimos en el curso estos principios, cuyas demostraciones se encuentran en la nota I. Nos 456, 457 y 458.

**209. Primer principio.** — *Si se agrega o se quita una misma cantidad a los dos miembros de una inecuación, se tiene una inecuación equivalente.*

**210. Segundo principio.** — *Si se multiplican o se dividen los dos miembros de una inecuación por una cantidad positiva, resulta una inecuación equivalente; pero, si se multiplican o se dividen por una cantidad negativa, es preciso cambiar el sentido de la nueva inecuación para que sea equivalente a la inecuación dada.*

**211. Tercer principio.** — *Si los dos miembros de una inecuación son positivos, se les puede elevar al cuadrado, y resulta una inecuación equivalente.*

*Si son negativos, es preciso, además, cambiar el sentido de la nueva inecuación.*

*Si no se conoce su signo, tampoco se puede conocer el sentido del resultado.*

**212. Consecuencias.** — I. Se puede pasar un término de un miembro a otro de una desigualdad, teniendo cuidado de cambiarle su signo.

II. Se puede quitar un denominador común a los dos miembros, si es positivo; si es negativo, es preciso además, cambiar el sentido de la desigualdad.

## § IV. — Desigualdades simultáneas.

**213. Definición.** — *Llámase* **sistema de inecuaciones** *de primer grado con una incógnita, o inecuaciones simultáneas varias inecuaciones que deben tener soluciones comunes.*

**Resolver** *un sistema de inecuaciones simultáneas es encontrar las soluciones comunes.*

Con este fin, se transforma el sistema dado en otro, en el cual la incógnita está despejada en cada inecuación.

Tres casos pueden ocurrir :

1° Sean
$$3x - 2 > 4 \quad (1)$$
$$7x - 5 > 3x + 11 \quad (2)$$

La primera da

$$3x > 6 \quad \text{o} \quad x > 2$$

y la segunda

$$4x > 16 \quad \text{o} \quad x > 4.$$

Basta tomar $x > 4$; a fortiori $x$ será mayor que 2. Se dice que 4 es el *límite inferior* de las soluciones.

2º Sean

$$5x + 3 < 18 \qquad (1)$$
$$9x < 6x + 21 \qquad (2)$$

La primera da

$$5x < 15 \quad \text{o} \quad x < 3$$

y la segunda

$$3x < 21 \quad \text{o} \quad x < 7.$$

Basta tomar $x < 3$; a fortiori será menor que 7. Se dice que 3 es el *límite superior* de las soluciones.

3º Sean

$$4x - 6 > 18 \qquad (1)$$
$$7x - 21 < 5x + 9 \qquad (2)$$

La primera da

$$4x > 24 \quad \text{o} \quad x > 6$$

y la segunda

$$2x < 30 \quad \text{o} \quad x < 15.$$

**Basta dar a $x$ un valor comprendido entre 6 y 15; se tiene $6 < x < 15$.**

6 es el *límite inferior* y 15 el *límite superior* de las soluciones.

**214. Observación.** — Si el límite superior fuera menor que el límite inferior, las inecuaciones serían incompatibles.

**215. Inecuaciones simultáneas con varias incógnitas.** — *Son inecuaciones que deben tener soluciones comunes.*

**Resolver** *estas inecuaciones es encontrar las soluciones.*

En general la resolución de tales inecuaciones sólo es posible en algunos casos particulares.

**216. Ejercicio I.** — *Hallar un número entero tal que sus $\frac{3}{5}$ menos 12, sean mayores que su mitad más 2.*

Sea $x$ este número. Se tendrá conforme al enunciado:

$$\frac{3x}{5} - 12 > \frac{x}{2} + 2.$$



Quitando los denominadores:

$$6x - 120 > 5x + 20$$

o

$$x > 140.$$

Así es que todos los números enteros mayores que 140 satisfarán el enunciado.

**217. Ejercicio II.** — *¿Cuáles son los números enteros, positivos o negativos, que pueden satisfacer a las dos desigualdades siguientes?*

$$5x - 6 > 3x - 14$$
$$\frac{7x + 6}{2} < x + 12.$$

De la primera se saca:

$$x > -4$$

y de la segunda,

$$x < \frac{18}{5} \quad \text{o} \quad 3 + \frac{3}{5}.$$

Los números pedidos serán pues:

$$-3; -2; -1. 0. 1. 2. 3.$$

porque todos están comprendidos entre $-4$ y $3 + \frac{3}{5}$.

# LIBRO III

# RADICALES Y ECUACIONES DE 2° GRADO

## CAPÍTULO I

## RADICALES ARITMÉTICOS

### § I. — Propiedades de los radicales.

218. **Raíz cuadrada de una cantidad.** — *Raíz cuadrada de una cantidad es otra cantidad que multiplicada por sí misma reproduce la primera.*

La raíz cuadrada de $4a^2b^4$ es $2ab^2$, porque esta última cantidad multiplicada por sí misma, da $4a^2b^4$.

Así *la raíz cuadrada de un monomio se obtiene extrayendo la raíz cuadrada de su coeficiente y dividiendo por 2 los exponentes de todas sus letras.*

219. **Raíz $m^{ma}$ de una cantidad.** — *Raíz $m^{ma}$ de una cantidad es otra cantidad que, elevada a la potencia m, reproduce la primera.*

En general, se encuentra la raíz $m^{ma}$ de un monomio extrayendo la raíz $m^{ma}$ de su coeficiente y dividiendo por $m$ los exponentes de todas sus letras.

220. **Notación.** — Por convención, la raíz cuadrada de una cantidad cualquiera $a$, se representa por $\sqrt{a}$. De ahí se infiere que el cuadrado de $\sqrt{a}$ es $a$.

Por convención también, la raíz $m^{ma}$ de una cantidad cualquiera $a$ se representa por $\sqrt[m]{a}$. De ahí se infiere que la $m^{ma}$ potencia de $\sqrt[m]{a}$ es $a$.



El signo $\sqrt{\ }$, que es una deformación de la letra $r$, inicial de raíz, se llama *radical*; $m$ es el *índice* del radical. El índice 2 se subentiende siempre.

221. **Teorema.** — *Dos números positivos, que tienen sus potencias $m^{as}$ iguales, son iguales.*

Sean $a$ y $b$ tales que

$$a^m = b^m$$

Se tiene

$$a^m - b^m = 0.$$

Por división se obtiene

$$a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots + b^{m-1}) = 0.$$

El segundo factor es diferente de cero; luego, el primero debe ser nulo, y $a - b = 0$ ó $a = b$.

222. Todas las operaciones que pueden efectuarse con los radicales se deducen de los teoremas siguientes.

223. **Teorema I.** — *El producto de dos radicales de mismo índice es igual a la raíz aritmética de mismo índice del producto de las cantidades colocadas dentro de los radicales.*

Sea

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}.$$

Se tiene

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}. \qquad (1)$$

En efecto, elevando los dos miembros á la potencia $n^a$, se tiene

$$a \times b = ab.$$

Siendo iguales las potencias $n^{as}$ de los dos miembros de (1), estos dos miembros son iguales.

224. **Teorema II** — *Para elevar un radical a una cierta potencia, basta elevar a esta potencia la cantidad que está dentro del radical.*

Sea

$$x = \sqrt[n]{a}.$$

Digo que

$$x^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

En efecto, $x^m$ es el producto de $m$ factores iguales a $x$, o $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}\ldots.$

Sea, según el teorema I,

$$\sqrt[n]{a.a.a\ldots.} \quad \text{o} \quad \sqrt[n]{a^m}.$$

**225. Teorema III.** — *El cociente de dos radicales de mismo indice es igual a la raíz de mismo indice del cociente de las cantidades que están dentro de los radicales.*

Sea $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; digo que

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Multiplicando los dos miembros por $\sqrt[n]{b}$, se tiene, según el teorema I

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a \cdot b}{b}} = \sqrt[n]{a}.$$

**226. Teorema IV.** — *Para extraer la raíz* m^a *de un radical basta multiplicar su indice por* m.

Sea

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$$

Digo que

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}. \qquad (1)$$

Elevando los dos miembros a la potencia $mn^a$, se tiene

$$a = a.$$

Luego, la igualdad (1) se verifica.

**227. Teorema V.** — *No se altera el valor de un radical multiplicando o dividiendo por un mismo número el indice del radical y el exponente de la cantidad que está dentro del radical.*

Sea

$$\sqrt[n]{a}.$$

Digo que

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}. \qquad (1$$

En efecto, elevando los dos miembros a la potencia $mn^a$, se tiene

$$a^m = a^m.$$

**228. Observación.** — Cuando los dos miembros de una igualdad están formados cada uno de una parte racional y de una parte irracional, las partes racionales son necesariamente iguales entre sí, sucediendo lo mismo con las partes irracionales.



Sea la igualdad

$$a + \sqrt{m} = b + \sqrt{n}$$

en la cual $a$, $b$, $m$ y $n$ representan cantidades racionales, no siendo $m$ y $n$ cuadrados.

Se puede escribir, trasladando :

$$\sqrt{m} = b - a + \sqrt{n}$$

elevemos los dos miembros al cuadrado :

$$m = (b - a)^2 + 2(b - a)\sqrt{n} + n \qquad (1)$$

siendo racional el primer miembro, es preciso que el segundo miembro también lo sea, y no lo será sino en tanto que el término irracional $2(b - a)\sqrt{n}$ valga cero, lo que no se verifica más que para

$$b = a$$

La igualdad (1) se reduce entonces a $m = n$.

## § II. — Operaciones con los radicales.

**229. 1° Introducir un número dentro de un radical.** — *Se multiplica la cantidad que está dentro del radical por el número, multiplicando el exponente de este por el indice del radical.*

Sea $\quad a\sqrt{b}.$

Se tiene

$$a = \sqrt{a^2};$$

y

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b}$$

o, según el teorema I,

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}.$$

En general

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

**230. 2° Sacar un factor fuera de un radical.** — *Se extrae la raíz de este factor, y se escribe esta raíz delante del radical.*

Sea la expresión

$$\sqrt{a^2 b}$$

se tiene :

$$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$$

porque la raíz cuadrada del producto $a^2b$ es $\sqrt{a^2}\sqrt{b}$ o $a\sqrt{b}$.

Del mismo modo la expresión

$$\sqrt{c(a-b)^2}$$

puede escribirse .

$$(a-b)\sqrt{c}.$$

En general,

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}.$$

**231.** 3° **Reducción al mismo índice.** — *Se multiplican el índice de cada radical y el exponente de la cantidad que está dentro por el producto de los índices de los demás.* Se puede también escoger por índice común el m. m. c. de todos los índices.

V. gr. : Sea $\sqrt[3]{a}, \quad \sqrt[4]{b}, \quad \sqrt[6]{c}$

se tiene

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[72]{a^{24}}$$
$$\sqrt[4]{b} = \sqrt[72]{b^{18}}$$
$$\sqrt[6]{c} = \sqrt[72]{c^{12}}$$

o

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[12]{a^4}$$
$$\sqrt[4]{b} = \sqrt[12]{b^3}$$
$$\sqrt{c} = \sqrt[12]{c^2}.$$

**132.** 4° **Simplificación de un radical.** — *Se suprimen los factores comunes al índice y al exponente de la cantidad colocada dentro del radical.*

V. gr. : Sea

$$\sqrt[6]{a^3b^9}$$

se tiene

$$\sqrt[3.2]{a^3 . b^{3\cdot3}} = \sqrt{ab^3} = b\sqrt{ab}.$$

**233. Radicales semejantes.** — Los radicales son semejantes cuando tienen el mismo índice y que las cantidades que están dentro del radical son las mismas; tales son los radicales :



$$6\sqrt{a}, \quad -b\sqrt{a}, \quad -bc\sqrt{a}, \quad +\sqrt{a}.$$

Siendo semejantes estos radicales, se puede sacar a $\sqrt{a}$ como factor común y escribir :

$$6\sqrt{a} - b\sqrt{a} - bc\sqrt{a} + \sqrt{a} = (7 - b - bc)\sqrt{a}.$$

En ciertos casos, es necesario simplificar los radicales ara ver si son semejantes.

Así los radicales :

$$a\sqrt{48}, \quad -b\sqrt{27}, \quad +\sqrt{12}$$

se convierten en

$$a\sqrt{16 \times 3} - b\sqrt{9 \times 3} + \sqrt{4 \times 3}$$

o

$$4a\sqrt{3} - 3b\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$

que son semejantes.

**234. Adición.** — Para sumar los radicales

$$5\sqrt{b}, \quad -8\sqrt{2}, \quad +2\sqrt{b}$$

con

$$5\sqrt{2} \quad \text{y} \quad -\sqrt{b},$$

se escribe :

$$5\sqrt{b} - 8\sqrt{2} + 2\sqrt{b} + 5\sqrt{2} - \sqrt{b}.$$

Efectuada la reducción se encuentra :

$$6\sqrt{b} - 3\sqrt{2}.$$

Del mismo modo para sumar

$$a\sqrt{a+b} + b\sqrt{a-b}$$

con

$$2a\sqrt{a+b} - 5b\sqrt{a-b}$$

se escribe :

$$2a\sqrt{a+b} - 5b\sqrt{a-b} + a\sqrt{a+b} + b\sqrt{a-b}$$

o

$$3a\sqrt{a+b} - 4b\sqrt{a-b}.$$

**235. Substracción.** — Para restar

$$5\sqrt{2} - \sqrt{b} \quad \text{de} \quad 3\sqrt{2} + 2\sqrt{b} - \sqrt{a}$$

se escribe .

$$3\sqrt{2}+2\sqrt{b}-\sqrt{a}-5\sqrt{2}+\sqrt{b}$$

efectuada la reducción se encuentra :

$$-2\sqrt{2}+3\sqrt{b}-\sqrt{a}.$$

Del mismo modo la expresión $a\sqrt{3b}-b\sqrt{cd}$ restada de $(a-b)\sqrt{3b}-2b\sqrt{cd}$, da :

$$(a-b)\sqrt{3b}-2b\sqrt{cd}-a\sqrt{3b}+b\sqrt{cd}$$

o

$$-b\sqrt{3b}-b\sqrt{cd}$$

o todavía

$$-b\left(\sqrt{3b}+\sqrt{cd}\right).$$

**236. Multiplicación.** — El producto de $\sqrt{a}$ por $\sqrt{b}$ y por $\sqrt{cd}$ es $\sqrt{abcd}$, según el nº 223.

Del mismo modo el producto de

$$3a\sqrt{a-b} \text{ por } 5b\sqrt{a+b} \text{ es } 15ab\sqrt{(a-b)(a+b)}$$

o

$$15ab\sqrt{a^2-b^2}.$$

De una manera general

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{abc}.$$

**237. División.** — El cociente de $\sqrt{a}$ por $\sqrt{b}$ es $\sqrt{\frac{a}{b}}$, según el nº 225.

**238. Aplicación.** — *Hacer racional el denominador de una expresión.* Es algunas veces más ventajoso, para la sencillez de los cálculos, hacer racional el denominador de una fracción.

1º *Sea por ejemplo calcular el valor de* $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Es preciso dividir 2 por 2,236067977......, operación larga y que da un resultado muy poco satisfactorio, en atención a que el número tomado por divisor no es más que el valor aproximado de $\sqrt{5}$.

Pero si se multiplican los dos términos de la fracción $\frac{2}{\sqrt{5}}$ por $\sqrt{5}$, el valor de la fracción no se habrá alterado y el divisor será exacto y racional.



Se puede por consiguiente escribir :

$$\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

y el cociente buscado será la quinta parte de $2\times 2{,}236067977$.. .... resultado fácil de encontrar.

2º *Hacer racional el denominador de la expresión*

$$\frac{a}{2-\sqrt{2}}.$$

Se multiplican el numerador y el denominador por $2+\sqrt{2}$, y se tiene :

$$\frac{a\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}=\frac{a\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}.$$

Sea la siguiente expresión : $2-\sqrt{2}$

$$\frac{d\sqrt{h'}}{\sqrt{h}-\sqrt{h'}}.$$

Se multiplican el numerador y el denominador por $\sqrt{h}+\sqrt{h'}$, y se tiene :

$$\frac{d\sqrt{h'}\left(\sqrt{h}+\sqrt{h'}\right)}{\left(\sqrt{h}-\sqrt{h'}\right)\left(\sqrt{h}+\sqrt{h'}\right)}=\frac{d\left(h'+\sqrt{hh'}\right)}{h-h'}.$$

3º *Sea por fin la expresión :*

$$\frac{a\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}-\sqrt{a}}.$$

Se considera $a-\sqrt{b}$ como un solo término, y se multiplican el numerador y el denominador por $(a-\sqrt{b})+\sqrt{a}$.

$$\frac{a\sqrt{b}\left(a-\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}{\left(a-\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(a-\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}$$

$$=\frac{a\sqrt{b}\left(a-\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}{a^2+b-2a\sqrt{b}-a}.$$

Basta ahora multiplicar los dos términos de esta fracción por $(a^2+b-a)+2a\sqrt{b}$.

$$\frac{a\sqrt{b}\,(a-\sqrt{b}+\sqrt{a})\,(a^2+b-a+2a\sqrt{b})}{a^4+b^2+a^2+2a^2b-2a^3-2ab-4a^2b}.$$

**239.** En estos ejercicios y en otros análogos, *se procede de manera que quede en el denominador el producto de la suma de dos cantidades por su diferencia*, porque se sabe que este producto es igual a la diferencia de los cuadrados de las dos cantidades. Así queda racional el denominador de la expresión.

## § III. — Cantidades imaginarias y complexas.

**240. Definición.** — *Se llama* **unidad imaginaria** *cierta cantidad* i, *cuyo cuadrado, por definición, es igual a* — 1.

Esta cantidad no representa ningún número positivo ni negativo; porque el cuadrado de un número negativo, como el de un número positivo, es positivo. No obstante, se ha convenido aplicar a esta cantidad las reglas ordinarias de cálculo, con la convención $i^2=-1$,

**241. Número imaginario** *es el producto de* i *por cualquier número positivo o negativo.*

V. gr. :

$$+3i; \qquad -5i.$$

Por oposición, los números positivos y negativos se llaman *reales*.

**242. Observación.** — Los números imaginarios tienen, en las teorías algebraicas, una utilidad muy grande, y de la cual más tarde se dará cuenta; pero, no representan, en sí, ninguna magnitud, ni se pueden comparar con los números reales.

**243. Cálculo de las cantidades imaginarias. Potencias sucesivas de** $i$. — Aplicando las reglas ordinarias de cálculo, con la convención $i^2=-1$, se tiene :

| | | |
|---|---|---|
| primera potencia | | $i$ |
| segunda — | $i^2=$ | $-1$ |
| tercera — | $i^3=i\times i^2=$ | $-i$ |
| cuarta — | $i^4=i^2\times i^2=$ | $1$ |
| quinta — | $i^5=i\times i^4=$ | $i.$ |



**244. Raíz cuadrada de un número negativo.** — Los números imaginarios permiten una representación de la raíz cuadrada de un número negativo.

Sea

$$x=\sqrt{-9}$$

se tiene

$$-9=9\times(-1)=9i^2$$

y

$$x=\sqrt{9i^2}=3i$$

sea todavía

$$x=\sqrt{-3}$$

se tiene

$$x=\sqrt{3i^2}=i\sqrt{3}=1{,}73205\ldots\times i.$$

**245. Multiplicación o división de los números imaginarios.**

1° Sea $a\times bi$; se tiene $a\times bi=abi$.

2° Sea $ai\times bi$; se tiene $ai\times bi=abi^2=-ab$.

3° Sea $\frac{ai}{bi}$; el cociente es $\frac{a}{b}$.

4° Sea $\frac{a}{bi}$; para hacer real el denominador, se multiplican el numerador y el denominador por $i$, se tiene

$$\frac{a}{bi}=\frac{ai}{bi^2}=-\frac{ai}{b}.$$

**246. Cantidades complexas.** — *Son cantidades formadas de una parte imaginaria unida por adición o sustracción, a una parte real.*

V. gr : $x=a+bi$; siendo $a$ y $b$ dos números algebraicos, $i$, la unidad imaginaria, $x$ es una cantidad complexa.

La utilidad de las cantidades imaginarias y complexas podrá notarse cuando se estudie la ecuación de segundo grado.

---

# CAPÍTULO II

## EXPONENTES FRACCIONARIOS

**247.** Cuando el exponente de una cantidad que está dentro de un radical es un múltiplo del índice, se puede simplificar, quitando el radical y tomando por exponente de la cantidad el cociente de su primer exponente por el índice.

V. gr.:

$$\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2.$$

En general, $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, siendo $\frac{m}{n}$ entero.

Si $\frac{m}{n}$ es fraccionario, la expresión $a^{\frac{m}{n}}$, en sí, no tiene ninguna significación. Pero se ha convenido que $a^{\frac{m}{n}}$ representa $\sqrt[n]{a^m}$, aun cuando $\frac{m}{n}$ es fraccionario.

V. gr.: $a^{\frac{3}{4}}$ representa $\sqrt[4]{a^3}$.

**248.** Esta notación permite reemplazar los radicales por formas racionales; y no es una ventaja ilusoria, porque se puede aplicar á estos exponentes fraccionarios las reglas ordinarias de cálculo, como lo demuestra el teorema siguiente.

**249. Teorema.** — *Se pueden aplicar a los exponentes fraccionarios las reglas de cálculo de los exponentes enteros*

1° *En la multiplicación.* — Sea

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}}.$$

Digo que

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

En efecto,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

y

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} &= \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[q]{a^p} \\ &= \sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{pn}} \\ &= \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} \\ &= a^{\frac{mq+pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

V. gr.: Sea

$$\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[4]{a^3};$$



se tiene

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}; \qquad \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$$

y

$$a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}} = a^{\frac{8+9}{12}} = a^{\frac{17}{12}}. = \sqrt[12]{a^{17}}$$

2° *En la división.* — Sea

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}};$$

digo que

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$$

se tiene

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{mq}}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{pn}}$$

y

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{pn}}} = \sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{pn}}} = \sqrt[nq]{a^{mq-pn}}$$

$$= a^{\frac{mq-pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$

3° *En la elcvación a las potencias.* — Sea

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Digo que

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$$

se tiene

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

y

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{p}{q}} &= \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} \\ &= \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} \\ &= \sqrt[qn]{a^{mp}} \\ &= a^{\frac{mp}{nq}}. \end{aligned}$$

4° *En la extracción de las raices.* — Sea

$$x = \sqrt[\frac{m}{n}]{a^{\frac{p}{q}}}.$$

Digo que

$$x = a^{\frac{p}{q}:\frac{m}{n}} = a^{\frac{pn}{qm}}.$$

En efecto

$$x^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$$

o

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[q]{a^p}$$

y elevando á la $n^a$ potencia

$$x^m = \sqrt[q]{a^{pn}}$$

de donde

$$x = \sqrt[mq]{a^{pn}} = a^{\frac{pn}{mq}}$$

---

## CAPÍTULO III

## ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

### § I. — Forma de la ecuación de 2° grado.

**250. Ecuación de segundo grado.** — *La ecuación de segundo grado con una incógnita es una ecuación en la cual el mayor exponente de la incógnita es 2.*

La ecuación es *completa* si después de efectuadas todas las reducciones, contiene : 1° la segunda potencia de la incógnita; 2° la primera potencia de la incógnita; 3° un término conocido.

Es *incompleta* si no contiene la primera potencia de la incógnita o bien el término conocido.

V. gr. : $$3x^2 - 16x = 12$$

es una ecuación completa;

$$3x^2 = 75$$



es una ecuación incompleta, lo mismo que

$$ax^2 + bx = 0$$

La *ecuación completa* siempre se reduce a la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La *ecuación incompleta* siempre se reduce a una de las formas

$$ax^2 + bx = 0$$

o

$$ax^2 + c = 0$$

### § II. — Resolución.

**251. Ecuación incompleta.** — 1° En el primer caso $ax^2 + bx = 0$, se tiene, sacando a $x$ como factor común

$$x(ax + b) = 0$$

como para que un producto sea nulo, basta que uno de los factores lo sea, deberá tenerse :

$$x = 0$$

ó bien

$$ax + b = 0$$

De esta última ecuación se saca :

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Se ve que una de las raíces es cero, y la otra es igual al coeficiente de $x$ tomado con signo contrario, dividido por el coeficiente de $x^2$.

2° En el segundo caso, $ax^2 + c = 0$, sacando $a$ como factor común, se tiene

$$a\left[x^2 + \frac{c}{a}\right] = 0$$

o

$$a\left[x^2 - \left(-\frac{c}{a}\right)\right] = 0$$

$-\frac{c}{a}$ puede considerarse como siendo el cuadrado de

$\sqrt{-\frac{c}{a}}$, cantidad real si $-\frac{c}{a}$ es positivo, e imaginaria si $-\frac{c}{a}$ es negativo. Se tiene, pues

$$a\left[x^2-\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2\right]=0.$$

La cantidad que está dentro del corchete es una diferencia de cuadrados; luego, se puede descomponer en un producto, y se tiene

$$a\left[\left(x+\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x-\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\right]=0.$$

Tenemos un producto de tres factores que debe ser nulo; basta que uno de los factores lo sea; por ser $a \neq 0$, se tiene

$$x+\sqrt{-\frac{c}{a}}=0 \quad \text{o} \quad x-\sqrt{-\frac{c}{a}}=0.$$

La primera ecuación da

$$x=-\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

La segunda

$$x=\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Las dos soluciones juntas se escriben

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

**252.** Ejemplos. — 1° *Sea la ecuación*:

$$(x-1)(x+6)=17x-6$$

Se tiene:

$$x^2+6x-x-6=17x-6$$
$$x^2-12x=0$$
$$x(x-12)=0$$

Igualando a cero cada uno de los dos factores, se encuentra:

$$x=0 \quad \text{y} \quad x=12.$$



2° *Sea por resolver la ecuación:*

$$\frac{x}{2}\times\frac{3x}{4}=150.$$

Se tiene sucesivamente:

$$\frac{3x^2}{8}=150$$
$$3x^2=1200$$
$$x^2=400$$
$$x=\pm\sqrt{400}=\pm 20.$$

3° *Sea todavia la ecuación:*

$$\frac{2x}{3}\times\frac{x}{4}=-1.$$

Se tiene

$$2x^2=-12$$
$$x^2=-6$$
$$x=\pm\sqrt{-6}=\pm i\sqrt{6}.$$

Las dos raíces son imaginarias.

**253. Consecuencia.** — *Todo número algebraico tiene dos raíces cuadradas algebraicas o imaginarias.*

Sea $a$ un numero algebraico, $x$ su raíz cuadrada. Se tiene:

$$x^2=a$$
$$x^2-a=0$$

y, siendo

$$a=(\sqrt{a})^2,$$

se tiene

$$x^2-(\sqrt{a})^2=0$$

o

$$(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})=0$$

que da

$$x=\pm\sqrt{a}$$

Si $a$ es *positivo*, las dos raíces cuadradas son *dos números reales opuestos*; si $a$ es *negativo*, las dos raíces cuadradas son *dos números imaginarios opuestos.*

**254. Ecuación completa.** — La ecuación completa de segundo grado con una incógnita, siempre se puede reducir a la forma

$$ax^2+bx+c=0$$

Sacando $a$ como factor común se tiene

$$a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=0 \qquad (1)'$$

Los dos términos $x^2+\frac{b}{a}x$ recuerdan el cuadrado de $x+\frac{b}{2a}$, que es

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2};$$

se tiene, pues,

$$x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}$$

substituyendo en (1)′ á $x^2+\frac{b}{a}x$ por este valor, se tiene

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=0$$

o

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0. \qquad (2)'$$

La cantidad $b^2-4ac$ puede siempre considerarse como siendo el cuadrado de su raíz cuadrada $\sqrt{b^2-4ac}$; esta raíz es real si $b^2-4ac>0$, é imaginaria si $b^2-4ac<0$.

Se tiene, pues, en (2)′

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]=0.$$

La cantidad que está dentro del corchete es una diferencia de cuadrados; descomponiéndola en un producto se tiene

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]=0$$

o

$$a\left[x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]=0.$$

Basta que uno de estos factores sea nulo para que el producto sea igual a cero; por ser $a\neq 0$, se tendrá, pues



$$x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0 \quad \text{o} \quad x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0.$$

De la primera igualdad, se saca

$$x'=-\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

y de la segunda

$$x''=-\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Las dos raíces juntas se expresan por

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (1)$$

**255. Observaciones.** — I. Cuando el coeficiente de $x$ es par, la fórmula (1) se simplifica.

Supongamos $b=2b'$, y substituyamos este valor en la fórmula; quedará :

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}.$$

Sacando a 4 fuera del radical y simplificando, se encuentra :

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}. \qquad (2)$$

**256.** II. Cuando el coeficiente de $x^2$ es 1, la ecuación completa puede escribirse, representando por $p$ el coeficiente de $x$ y por $q$ el término conocido,

$$x^2+px+q=0.$$

Aplicando la fórmula (1), se encuentra :

$$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2} \quad \text{ó} \quad x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}. \qquad (3)$$

Se ve que las raíces de la ecuación completa de segundo grado de la forma $x^2+px+q=0$ son iguales a *la mitad del coeficiente de* x *tomado con signo contrario, más o menos la raíz cuadrada del cuadrado de esta mitad del cual se resta el término conocido.*

**257.** III. Se llega más rápidamente á la fórmula general (1) procediendo como sigue :

Sea la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Multipliquemos todos sus términos por $4a$, de modo que el primer término sea un cuadrado; se tiene :

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac.$$

Agregando $b^2$ á los dos miembros :

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac.$$

Extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros, y observando que el primero es el cuadrado de $2ax + b$;

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Despejando $x$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

fórmula idéntica a la del núm. 254.

**258. Aplicaciones.** — Apliquemos las fórmulas encontradas a la resolución de las ecuaciones siguientes :

1ª $$4x^2 - 7x - 2 = 0.$$

La fórmula (1) da inmediatamente :

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{8}$$

$$x = \frac{7 \pm 9}{8}$$

de donde

$$x' = 2 \quad \text{y} \quad x'' = -\frac{1}{4}.$$

2ª $$2x^2 + 5x + 2 = 0.$$

La fórmula (1) da :

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4}$$

$$x = \frac{-5 \pm 3}{4}.$$

de donde

$$x' = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad x'' = -2$$



3ª $$8x^2 - 2x - 3 = 0$$

Siendo par el coeficiente de $x$, la fórmula (2) da:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{8}$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{8}$$

de donde

$$x' = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad x'' = -\frac{1}{2}$$

4ª $$x^2 - 12x + 34 = 0$$

Siendo igual a 1 el coeficiente de $x^2$, la formula (2) da :

$$x = 6 \pm \sqrt{36 - 34}$$

$$x = 6 \pm \sqrt{2}$$

de donde

$$x' = 7{,}414\ldots \quad \text{y} \quad x'' = 4{,}586\ldots$$

5ª $$x^2 + \frac{x}{12} - \frac{1}{2} = 0$$

La fórmula (3) da:

$$x = -\frac{1}{24} \pm \sqrt{\frac{1}{576} + \frac{1}{2}}$$

$$x = -\frac{1}{24} \pm \sqrt{\frac{289}{576}}$$

$$x = -\frac{1}{24} \pm \frac{17}{24}$$

de donde

$$x' = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad x'' = -\frac{3}{4}$$

## § III. — Discusión.

**259.** Para discutir la fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ se consideran ordinariamente los tres casos siguientes:

1° $b^2 - 4ac > 0$; 2° $b^2 - 4ac = 0$; 3° $b^2 - 4ac < 0$.

**260.** $b^2 - 4ac > 0$. **Raíces reales y desiguales.** — *Cuando* $b^2 - 4ac$ *es mayor que cero, las dos raíces son reales y desiguales.*

Pero con $b^2 - 4ac > 0$ se puede aún tener:

$$ac > 0, \quad ac < 0 \quad \text{o} \quad ac = 0.$$

1° Si se tiene $ac > 0$, $-4ac$ es negativo; por consiguiente la raíz cuadrada de $b^2 - 4ac$ es menor en valor absoluto que $-b$, y esta raíz sumada con $-b$ o restada de $-b$ no cambia el signo de esta cantidad. $-b$ da pues su signo al numerador.

*Así cuando* ac *es positivo las dos raíces tienen el mismo signo, y este signo es diferente del de* b.

2° Si tiene $ac < 0$, $-4ac$ es positivo; por consiguiente la raíz cuadrada de $b^2 - 4ac$ es mayor en valor absoluto que $-b$, y esta raíz sumada con $-b$ cambia el signo de esta cantidad, mientras que restada de $-b$ no cambia el signo. El radical da pues su signo al numerador.

*Así cuando* ac *es negativo, las dos raíces son de signos contrarios, y la mayor en valor absoluto tiene un signo diferente del de* b.

3° Si se tiene $ac = 0$, la raíz cuadrada de $b^2 - 4ac$ es $b$; esta raíz sumada con $-b$ da 0, y restada de $-b$ da $-\frac{2b}{2a}$ o $-\frac{b}{a}$. Este es el caso estudiado en el núm. 251, (1°).

**261.** $b^2 - 4ac = 0$. **Raíces reales e iguales.** — *Cuando* b² — 4ac *es igual a cero, las dos raíces son reales e iguales.*

En efecto, el valor del radical es nulo, y se tiene:

$$x' = \frac{-b+0}{2a} = -\frac{b}{2a}$$

$$x'' = \frac{-b-0}{2a} = -\frac{b}{2a}$$

El signo de las raíces es diferente del de $b$.

En realidad no se encuentra más que un solo valor que pueda verificar la ecuación; no obstante se dice que tiene dos raíces; porque si $b^2 - 4ac$ es muy pequeño, las raíces difieren poco una de la otra, y $-\frac{b}{2a}$ es el límite común hacia el cual tienden los dos valores de $x$ cuando $b^2 - 4ac$ tiende hacia cero.

**262.** $b^2 - 4ac < 0$. **Raíces complexas.** — *Cuando* b² — 4ac *es menor que cero, las dos raíces son complexas.*

En efecto, la cantidad colocada dentro del radical es negativa; las dos raíces son complexas y no hay ningún valor real que pueda verificar la ecuación.



**263. Resumen de la discusión.**

$$\begin{array}{l} 1^\circ \\ b^2 - 4ac > 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{c} \text{Dos raíces} \\ \text{reales} \\ \text{y desiguales} \end{array} \right\{ \begin{array}{ll} ac > 0 & \left\{ \begin{array}{l} \text{Las raíces tienen el} \\ \text{mismo signo, y este} \\ \text{signo es diferente} \\ \text{del de } b. \end{array} \right. \\ ac < 0 & \left\{ \begin{array}{l} \text{Las raíces tienen sig-} \\ \text{nos contrarios, y el} \\ \text{signo de la mayor es} \\ \text{diferente del de } b. \end{array} \right. \\ ac = 0 & \left\{ \begin{array}{l} \text{Una de las raíces es} \\ -\frac{b}{a} \text{ y la otra es } 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

2° $b^2 - 4ac = 0$. Dos raíces reales e iguales.
3° $b^2 - 4ac < 0$. Dos raíces complexas.

## § IV. — Caso de $a = 0$.

**264.** Aun cuando la fórmula:

$$x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

se haya establecido con la condición de que $a$ no es nula, se puede investigar lo que sucederá cuando se suponga $a = 0$.

Si $a = 0$, la ecuación es $bx + c = 0$, de 1er grado, y tiene una raíz $x = -\frac{c}{b}$; pero aplicando materialmente las fórmulas

Si $a = 0$, se tiene $\quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{0}$

de donde

$$x' = \frac{-b+b}{0} = \frac{0}{0}$$

$$x'' = \frac{-b-b}{0} = \frac{-2b}{0} = -\infty.$$

Una de las raíces es infinita y la otra toma la forma de la indeterminación. Pero esta indeterminación no es sino aparente, porque multiplicando por $-b-\sqrt{b^2-4ac}$ el numerador y el denominador de $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, se encuentra :

$$x=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}$$

de donde, efectuando las operaciones indicadas en el numerador,

$$x=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}$$

Si se hace ahora $a=0$, esta última fórmula se convierte en :

$$x=-\frac{2c}{2b}=-\frac{c}{b}$$

**265. Observación.** — Á fin de mejor darnos cuenta de lo que antecede, notemos que los valores de las raíces dependen de $a$. Si $a\neq 0$, las raíces son

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

si $a$ cambia después y se acerca á cero, $x''$ aumenta siempre, y $x'$ se acerca a $-\frac{c}{b}$.

Es la significación de los resultados anteriores, y no se debe creer que, siendo $a=0$, existen dos raíces de las cuales una es infinita. Si $a=0$, la ecuación es de 1er grado, y sólo tiene una raíz :

$$x=-\frac{c}{b}.$$

## § V. — Propiedades de las raíces.

**266.** Sabemos que las raíces de la ecuación

$$ax^2+bx+c=0$$



son

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Sumando las dos raíces

$$x'+x''=-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a}.$$

Luego *la suma de las dos raíces es igual al cociente del coeficiente de* x *por el de* $x^2$, *tomado con signo contrario.*

**267.** Formemos el producto de las dos raíces $x'x''$, observando que en los numeradores hay que multiplicar la suma de dos cantidades por su diferencia :

$$x'x''=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

Así *el producto de las raíces es igual al cociente del término conocido por el coeficiente de* $x^2$.

Luego cuando se han dividido por $a$ todos los términos de la ecuación :

$$ax^2+bx+c=0$$

y se ha convertido esta ecuación en

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

o

$$x^2+px+q=0$$

se puede poner bajo la forma

$$x^2-(x'+x'')x+x'x''=0.$$

Así, cuando la ecuación se ha reducido á la forma

$$x^2+px+q=0$$

las propiedades de las raíces se enuncian como sigue :

**268.** *La suma de las raíces es igual al coeficiente de* x *tomado con signo contrario.*

*El producto de las raíces es igual al término conocido.*

**269. Consecuencia.** — Estas propiedades permiten determinar los signos de las raíces de una ecuación sin necesidad de resolverla. Se asegura uno primeramente de que las raíces son reales, es decir que $b^2-4ac$ es mayor que cero : si $\frac{c}{a}$ es positiva, las dos raíces son del mismo signo, porque su producto es positivo, y su signo es diferente del de $\frac{b}{a}$; si $\frac{c}{a}$ es negativa, las raíces son de signos contrarios, y la mayor en valor absoluto tiene un signo diferente del de $\frac{b}{a}$.

**270. Otra consecuencia.** — Las propiedades de las raíces permiten también formar una ecuación de segundo grado que tenga por raíces dos cantidades dadas. Para esto se escribe una ecuación que tenga $x^2$ por primer término, la suma de las raíces tomada con signo contrario por coeficiente de $x$, y el producto de las raíces por término conocido; el segundo miembro de la ecuación es cero.

**271.** Ejemplos. — 1° *Formar una ecuación que tenga por raíces 4 y 10.*

Se tiene : $x' + x'' = 14 = -p$

de donde

$$p = -14$$

y

$$x'x'' = 40 = q.$$

La ecuación será :

$$x^2 - 14x + 40 = 0.$$

2° *Hallar dos números cuya suma sea $\frac{7}{2}$ y el producto* $-2$.

Se tiene inmediatamente

$$p = -\frac{7}{2} \quad \text{y} \quad q = -2$$

la ecuación será :

$$x^2 - \frac{7x}{2} - 2 = 0$$

o

$$2x^2 - 7x - 4 = 0.$$

3° *Formar una ecuación que tenga por raíces* $\mathrm{m} + \mathrm{ni}$ *y* $\mathrm{m} - \mathrm{ni}$.

Se tiene :

$$x' + x'' = m + ni + m - ni = 2m = -p$$
$$x'x'' = (m + ni)(m - ni) = m^2 + n^2 = q$$



la ecuación será :

$$x^2 - 2mx + m^2 + n^2 = 0.$$

4° *Hallar una ecuación de segundo grado que tenga por raíces las inversas de las raíces de la ecuación*

$$\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = 0.$$

En la ecuación dada basta reemplazar $x$ por $\frac{1}{x}$ y se tiene :

$$a\left(\frac{1}{x}\right)^2 + b\frac{1}{x} + c = 0$$

o

$$cx^2 + bx + a = 0.$$

**272. Aplicación.** — *Discusión de la ecuación*

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{px} + \mathrm{q} = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son

$$x = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

El producto de las raíces es $q$, y la suma $-p$.

1° $p^2 - 4q > 0$. *Hay dos raíces reales y desiguales.*

Si $q > 0$, el producto de las raíces es positivo; luego las dos raíces tienen el mismo signo, y este signo es el de la suma $-p$.

Si $q < 0$, el producto de las dos raíces es negativo; las dos raíces tienen signos diferentes; la raíz cuyo valor absoluto es mayor, tiene el signo de la suma $-p$.

Si $q = 0$, el producto de las raíces es nulo; luego, una de ellas es igual a cero; la otra es igual a la suma $-p$.

2° $p^2 - 4q = 0$. *Hay dos raíces iguales.*

Cada una de ellas es igual a la semisuma $\frac{p}{2}$.

3° $p^2 - 4q < 0$; *Hay dos raíces complexas.*

## CAPÍTULO IV

## ECUACIONES REDUCIBLES A 2° GRADO

**273.** Ciertas ecuaciones que parecen de un grado superior se resuelven por medio de ecuaciones de segundo grado, como sucede en los ejemplos que siguen.

## § I. — Ecuaciones bicuadradas.

**274.** Ecuación *bicuadrada* es una ecuación de cuarto grado que no contiene más que potencias pares de la incógnita, y es de la forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Supongamos $x^2 = z$, de donde $x^4 = z^2$; la ecuación se transforma en

$$az^2 + bz + c = 0.$$

de donde

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (1)$$

y por consiguiente

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}. \qquad (2)$$

Las cuatro raíces son :

$$x' = +\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad x''' = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x'' = +\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad x'''' = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Se ve que estas raíces son dos a dos iguales y de signos contrarios. Este resultado era fácil de prever, porque no conteniendo la ecuación más que las potencias pares de la incógnita, queda la misma cuando se cambia $x$ en $-x$.

**275. Discusión.** — Cuando los valores de $z$ son reales y positivos, los cuatro valores de $x$ son reales, iguales dos a dos, pero de signos contrarios.

Cuando los valores de $z$ son reales y de signos contrarios, $x$ tiene dos valores reales, iguales y de signos contrarios, y dos valores imaginarios, también iguales y de signos contrarios.

En fin, cuando los valores de $z$ son negativos o imaginarios, los cuatro valores de $x$ son imaginarios.

**276. Observación.** — Para que las cuatro raíces sean reales, es preciso que se tenga en la ecuación $b^2 - 4ac > 0$, y además que $\frac{b}{a}$ sea negativa y $\frac{c}{a}$ positiva.

**277. Aplicaciones.** — *Sea por resolver las ecuaciones siguientes :*



1ª
$$x^4 - 25x^2 + 144 = 0.$$

Se tiene inmediatamente, conforme a la fórmula (2) :

$$x = \pm\sqrt{\frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{25 \pm 7}{2}}$$

de donde

$$x' = 4; \quad x'' = 3; \quad x''' = -4; \quad x'''' = -3.$$

2ª
$$4x^4 + 17x^2 - 15 = 0.$$

Se tiene

$$x = \pm\sqrt{\frac{-17 \pm \sqrt{289 + 240}}{8}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-17 \pm 23}{8}} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \quad \text{y} \quad \pm\sqrt{-5}$$

de donde

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x'' = \sqrt{-5}; \quad x''' = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x'''' = -\sqrt{-5}.$$

3ª
$$x^4 - 6x^2 + 10 = 0.$$

Se tiene

$$x = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{9 - 10}}$$
$$x = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{-1}}.$$

Las cuatro raíces son imaginarias.

**278. Transformación de las expresiones de la forma**

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}.$$

La resolución de una ecuación bicuadrada conduce ordinariamente a una expresión de la forma $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$; es útil, cuando esto es posible, transformar esta expresión en una suma de dos radicales simples, tales como $\sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Supongamos $\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, siendo $x$ e $y$ cantidades racionales, elevemos al cuadrado los dos miembros.

$$A + \sqrt{B} = x + y + \sqrt{4xy}.$$

Ahora conforme al núm. 228, $x + y = A$

$$4xy = B, \quad \text{de donde} \quad xy = \frac{B}{4}.$$

Se conoce la suma y el producto de las incógnitas, luego (núm. 270), estas son las raíces de la ecuación

$$x^2 - Ax + \frac{B}{4} = 0$$

y se tiene :

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2}.$$

Así *los valores de* x *y de* y *serán conmensurables cuando la expresión* $A^2 - B$ *que está dentro del radical sea un cuadrado perfecto.*

Llamando $C^2$ este cuadrado, se tendrá :

$$x = \frac{A+C}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{A-C}{2}.$$

279. Ejemplo. — La expresión $\sqrt{11+\sqrt{21}}$, en la cual $11^2 - 21$ o 100 es un cuadrado, se convierte en

$$\sqrt{\frac{11+10}{2}} + \sqrt{\frac{11-10}{2}} = \sqrt{\frac{21}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

La condición de transformación de las expresiones de la forma $\sqrt{A - \sqrt{B}}$ es la misma que para $\sqrt{A+\sqrt{B}}$.

## § II. — Ecuaciones recíprocas.

**280. Definición.** — Se llama ecuación recíproca la que no cambia cuando en ella se substituye $x$ por $\frac{1}{x}$. Por consiguiente si esta ecuación tiene por raíz $a$, tiene también por raíz $\frac{1}{a}$.

**281**. *Sea por resolver la ecuación recíproca de cuarto grado.*

$$4x^4 - 9x^3 - 26x^2 - 9x + 4 = 0.$$

Si se agrupan los términos que tienen el mismo coeficiente, la ecuación propuesta puede escribirse :

$$4(x^4+1) - 9(x^3+x) - 26x^2 = 0$$

Dividamos por $x^2$, a fin de hacer desaparecer $x$ del último término, queda :

$$4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x+\frac{1}{x}\right) - 26 = 0. \qquad (2)$$



Supongamos $z = x + \frac{1}{x}$, de donde $z^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ por consiguiente

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$$

a ecuación (2) se reduce entonces a

$$4(z^2-2) - 9z - 26 = 0$$
$$4z^2 - 9z - 34 = 0$$

de donde

$$z = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 16 \times 34}}{8}$$

$$z' = \frac{17}{4} \quad \text{y} \quad z'' = -2.$$

En la ecuación $x + \frac{1}{x} = z$, substituímos por $z$ sus valores

$$x + \frac{1}{x} = \frac{17}{4} \qquad (3)$$

$$x + \frac{1}{x} = -2. \qquad (4)$$

De la ecuación (3) resulta sucesivamente :

$$4x^2 - 17x + 4 = 0$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{8}$$

$$x' = 4 \quad \text{y} \quad x'' = \frac{1}{4}.$$

La ecuación (4) da sucesivamente :

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$x = -1 \pm \sqrt{1-1}$$
$$x' = -1 \quad \text{y} \quad x'' = -1.$$

Las raíces de la ecuación propuesta son pues :

$$x' = 4; \quad x'' = \frac{1}{4}; \quad x''' = -1; \quad x'''' = -1.$$

*Sea todavia por resolver la ecuación recíproca de cuarto grado*

$$3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$$

en la cual el término en $x^2$ no existe.

Agrupemos los términos que tienen el mismo coeficiente

$$3(x^4-1)-10x(x^2-1)=0$$

Por ser

$$x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)$$

se puede escribir, sacando $x^2-1$ como factor común :

$$(x^2-1)[3(x^2+1)-10x]=0.$$

Se tendrán las cuatro raíces de esta ecuación resolviendo las dos ecuaciones :

$$x^2-1=0$$
$$3(x^2+1)-10x=0$$

la primera da

$$x=\pm 1$$

y la segunda

$$x'=3 \quad \text{y} \quad x''=\frac{1}{3}.$$

## § III. — Ecuaciones binomias.

**282.** Ecuación binomia es la que consta de dos términos de los cuales uno es conocido. Siempre puede reducirse a la forma

$$x^m \pm A=0.$$

llagamos $\sqrt[m]{A}=a$, de donde $a^m=A$, y la ecuación se convierte en :

$$x^m \pm a^m=0.$$

Si suponemos que $x=ay$, siendo $y$ una incógnita auxiliar, $x^m=a^my^m$, y se tendrá :

$$a^my^m \pm a^m=0$$
$$a^m(y^m \pm 1)=0$$

de donde, suprimiendo el factor común $a^m$,

$$y^m \pm 1=0.$$

Tal es la forma á la cual se puede reducir una ecuación binomia, la cual permite calcular $y$. Encontrados los valores de $y$, se les multiplica por $a$ y se obtienen los de $x$.

**283. Aplicaciones.** — 1° *Sea por resolver la ecuación :*

$$x^4-81=0.$$



Observemos que $\sqrt[4]{81}=3$; se tendrá pues que resolver la ecuación :

$$y^4-1=0.$$

Esta ecuación puede escribirse :

$$y^4-1=(y^2+1)(y^2-1).$$

Las raíces se encuentran por medio de las ecuaciones .

$$y^2+1=0; \quad \text{de donde} \quad y=\pm i$$
$$y^2-1=0, \quad \text{de donde} \quad y=\pm 1.$$

Multiplicando estas raíces por 3, resultan como raíces de $x$ :

$$x'=3i \qquad x'''=3$$
$$x''=-3i \qquad x''''=-3.$$

2° *Sea por resolver la ecuación :*

$$x^3-1=0.$$

Siendo $x^3-1$ divisible por $x-1$ (núm. 95), se puede escribir :

$$x^3-1=(x^2+x+1)(x-1).$$

Las raíces se encuentran por medio de las ecuaciones

$$x^2+x+1=0$$
$$x-1=0.$$

Resolviéndolas se tiene :

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \quad \text{y} \quad x=1.$$

3° *Resolver la ecuación :*

$$x^3+1=0.$$

Siendo $x^3+1$ divisible por $x+1$ (núm. 95), se puede escribir :

$$x^3+1=(x-1)(x^2-x+1).$$

Las raíces se obtienen por medio de las ecuaciones

$$x+1=0$$
$$x^2-x+1=0.$$

Resolviéndolas se encuentra

$$x = -1$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Estas son las raíces, con signos cambiados, de la ecuación $x^3 - 1 = 0$. Se hubieran podido deducir directamente de esta ecuación, porque cambiando el signo de $x$ en la ecuación $x^3 + 1 = 0$, se encuentra

$$-x^3 + 1 = 0$$

o

$$x^3 - 1 = 0.$$

## § IV. — Ecuaciones trinomias.

**284.** Ecuación trinomia es la que consta de tres términos de la forma :

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0.$$

Para resolverla se supone

$$x^n = z, \quad \text{de donde} \quad x^{2n} = z^2$$

y la ecuación se convierte en :

$$az^2 + bz + c = 0$$

de donde

$$z \quad \text{o} \quad x^n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

lo que se reduce a resolver las dos ecuaciones binomias.

$$x^n = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y

$$x^n = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

**285. Observación.** — La ecuación bicuadrada resuelta en el núm. 274 no es más que un caso particular de la ecuación general que acabamos de tratar; es una ecuación trinomia en la cual $n = 2$.

**286. Aplicación.** — *Sea por resolver la ecuación :*

$$x^6 - 72x^3 + 512 = 0.$$



Suponiendo $x^3 = z$, de donde $x^6 = z^2$, resulta

$$z^2 - 72z + 512 = 0$$

de donde

$$x^3 = 36 \pm \sqrt{1296 - 512}$$

$$x'^3 = 64 \quad \text{y} \quad x''^3 = 8.$$

Se tienen ahora las dos ecuaciones binomias :

$$x^3 - 64 = 0$$

$$x^3 - 8 = 0.$$

Es preciso resolver $y^3 - 1 = 0$ y multiplicar las raíces encontradas, primero por $\sqrt[3]{64}$ o 4 y luego por $\sqrt[3]{8}$ o 2.

Siendo las raíces de $y^3 - 1$

$$y' = 1$$

$$y'' = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

$$y''' = \frac{-1 - 1\sqrt{-3}}{2}$$

las de la ecuación $x^6 - 72x^3 + 512 = 0$ serán :

$$x_1 = 4, \qquad x_4 = 2$$

$$x_2 = 2(-1 + \sqrt{-3}), \qquad x_5 = -1 + \sqrt{-3}$$

$$x_3 = 2(-1 - \sqrt{-3}), \qquad x_6 = -1 - \sqrt{-3}.$$

---

# CAPÍTULO V

## ECUACIONES CON VARIAS INCÓGNITAS

**287.** Cuando se quiere resolver un sistema de varias incógnitas en el cual algunas de las ecuaciones son de segundo grado, se llega, por eliminaciones sucesivas a una ecuación que no contiene más que una sola incógnita. Si esta ecuación es de segundo grado, o aun bicuadrada, se la resuelve por los procedimientos ordinarios; pero si es de un grado superior al segundo, no se la puede resolver por el algebra elemental, excepto, sin embargo, en casos particulares empleando *artificios de cálculo.*

Un sistema de dos ecuaciones, una de primero y otra de segundo grado, no da nunca una ecuación final de un grado superior al segundo.

**288. Artificios de cálculo.** — He aquí los artificios más generalmente usados.

1° *Sea el sistema de dos ecuaciones :*

$$x + y = 12$$
$$xy = 35$$

Se conoce la suma y el producto de las incógnitas; estas incógnitas serán pues (núm. 270) las raíces de la ecuación :

$$X^2 - 12X + 35 = 0$$
$$x' \text{ o } x = 6 + \sqrt{36 - 35} = 7$$
$$x'' \text{ o } y = 6 - \sqrt{36 - 35} = 5.$$

**289.** 2° *Sea el sistema de dos ecuaciones :*

$$x - y = 5$$
$$xy = -4.$$

Haciendo $z = -y$, el sistema propuesto se cambia en :

$$x + z = 5$$
$$xz = 4.$$

Las incógnitas serán las raíces de la ecuación :

$$X^2 - 5X + 4 = 0$$

de donde

$$x' = \frac{5 + \sqrt{25 - 16}}{2} = 4$$

y

$$x'' = \frac{5 - \sqrt{25 - 16}}{2} = 1$$

$$x = 4; \quad z = 1, \quad \text{de donde} \quad y = -1.$$

**Otro procedimiento.** — Si a la primera ecuación elevada al cuadrado $x^2 + y^2 - 2xy = 25$, se agrega 4 veces la segunda, o $4xy = -16$, se encuentra :

$$x^2 + y^2 + 2xy = 9,$$



Extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros

$$x + y = 3$$

conociendo la suma y la diferencia de las incógnitas, se tendrá

$$x = \frac{3 + 5}{2} = 4$$
$$y = \frac{3 - 5}{2} = -1.$$

**290.** 3° *Sea el sistema de dos ecuaciones :*

$$x + y = a$$
$$x^2 + y^2 = b^2.$$

Si de la primera, elevada al cuadrado, se resta la segunda, se encuentra :

$$2xy = a^2 - b^2$$

de donde

$$xy = \frac{a^2 - b^2}{2}.$$

Se conoce ahora la suma $a$ y el producto $\frac{a^2 - b^2}{2}$ de las incógnitas, por consiguiente se puede escribir :

$$X^2 - aX + \frac{a^2 - b^2}{2} = 0$$
$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2(a^2 - b^2)}}{2}$$
$$x = \frac{a + \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$$
$$y = \frac{a - \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$$

**291.** 4° *Sea el sistema de dos ecuaciones :*

$$x^2 + y^2 = a^2$$
$$xy = b^2.$$

El doble de la segunda ecuación sumado con la primera, o restado de la primera da sucesivamente

$$x^2 + y^2 + 2xy = a^2 + 2b^2$$
$$x^2 + y^2 - 2xy = a^2 - 2b^2.$$

Extrayendo la raíz cuadrada de cada una de estas ecuaciones:

$$x+y=\pm\sqrt{a^2+2b^2}$$
$$x-y=\pm\sqrt{a^2-2b^2}.$$

Conocida la suma y la diferencia de las incógnitas se tiene:

$$x=\pm\frac{\sqrt{a^2+2b^2}\pm\sqrt{a^2-2b^2}}{2}$$
$$y=\pm\frac{\sqrt{a^2+2b^2}\mp\sqrt{a^2-2b^2}}{2}.$$

**Otro procedimiento.** — La segunda ecuación elevada al cuadrado da $x^2y^2=b^4$. Si se toman $x^2$ e $y^2$ por incógnitas, se conoce la suma y el producto de estas incógnitas, y se tiene:

$$X^2-a^2X+b^4=0$$
$$\left.\begin{matrix}x^2\\y^2\end{matrix}\right\}=\frac{a^2\pm\sqrt{a^4-4b^4}}{2}$$

de donde

$$x=\pm\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{a^4-4b^4}}{2}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{a^2-\sqrt{a^4-4b^4}}{2}}$$

**292.** 5° *Sea el sistema de dos ecuaciones:*

$$x-y=2$$
$$x^3-y^3=98.$$

La primera elevada al cubo da:

$$x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=8$$

o

$$x^3-y^3-3xy(x-y)=8$$

substituyendo $x^3-y^3$ por 98 y $x-y$ por 2, se encuentra:

$$98-6xy=8$$

o

$$xy=15.$$

Se conoce la diferencia 2 y el producto 15 de las incóg nitas, y se vuelve a encontrar el caso del núm. 289. Las ecuaciones resueltas dan:

$$x=5,\ y=3$$



De una manera análoga se resolvería el sistema:

$$x+y=6 \qquad (1)$$
$$x^3+y^3=126 \qquad (2)$$

Sin embargo, se puede emplear el siguiente método:

Dividiendo miembro a miembro la ecuación (2) por la ecuación (1), queda:

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}=\frac{126}{6}=21$$

o

$$x^2-xy+y^2=21 \qquad (3)$$

La ecuación (3) restada de la ecuación (1) elevada al cuadrado da $xy=5$. Conocida la suma 6 y el producto 5 de las incógnitas, se puede escribir:

$$X^2-6X+5=0$$

de donde

$$x'=5$$
$$x''=1$$

Estos valores substituídos en lugar de $x$ en la ecuación (1) dan:

$$y=1 \quad \text{e} \quad y=5$$

**293.** 6° *Sea por resolver el sistema de dos ecuaciones:*

$$xy(x+y)=a$$
$$x+y=b$$

Dividiendo miembro a miembro las dos ecuaciones se tiene:

$$xy=\frac{a}{b}$$

Conociendo ahora la suma y el producto, es fácil obtener el valor de las incógnitas.

294. 7° *Sea todavía por resolver el sistema de dos ecuaciones:*

$$x+y=2a \qquad (1)$$
$$x^4+y^4=2b^4 \qquad (2)$$

Tomemos por incógnita auxiliar la semidiferencia de las incógnitas y supongamos:

$$\frac{x-y}{2}=z$$

de donde

$$x - y = 2z \qquad (3)$$

Las ecuaciones (1) y (3) dan :

$$x = a + z \quad \text{e} \quad y = a - z \qquad (4)$$

Substituyendo estos valores de $x$ y de $y$ en la ecuación (2), se encuentra :

$$(a+z)^4 + (a-z)^4 = 2b^4$$

$$a^4 + 4a^3z + 6a^2z^2 + 4az^3 + z^4 + a^4 - 4a^3z + 6a^2z^2 - 4az^3 + z^4 = b^4$$

$$z^4 + 6a^2z^2 + a^4 - b^4 = 0$$

$$z = \pm\sqrt{-3a^2 \pm \sqrt{8a^4 + b^4}}$$

Substituído este valor de $z$ en las ecuaciones (4) da

$$x = a + \sqrt{-3a^2 \pm \sqrt{8a^4 + b^4}}$$

$$y = a - \sqrt{-3a^2 \pm \sqrt{8a^4 + b^4}}$$

**295.** 8° *Sea por último resolver el sistema de dos ecuaciones :*

$$9x^2 + 9y^2 - 5(y - x) = 502 \qquad (1)$$

$$3xy + 7(x - y) = 77 \qquad (2)$$

Restando de la primera 6 veces la segunda :

$$9x^2 + 9y^2 - 5(y - x) - 18xy - 42(x - y) = 502 - 462$$

$$9(x^2 + y^2 - 2xy) + 5(x - y) - 42(x - y) = 40$$

$$9(x - y)^2 - 37(x - y) = 40$$

haciendo $z = x - y$, la ecuación se convierte en

$$9z^2 - 37z - 40 = 0$$

de donde

$$z = \frac{37 \pm \sqrt{37^2 + 36 \times 40}}{18} = 5 \quad \text{y} \quad -\frac{8}{9}.$$

Así

$$x - y = 5 \quad \text{y} \quad x - y = -\frac{8}{9}.$$

Estos valores substituídos en lugar de $x - y$ en la ecuación (2) dan :

$$xy = 14 \quad \text{y} \quad \frac{749}{27}.$$



Conociendo ahora la diferencia y el producto de las incógnitas, es fácil obtener los valores de $x$ y de $y$.

Se encuentra

$$x = 7 \quad \text{y} \quad \frac{-4 + \sqrt{2263}}{9}$$

$$y = 2 \quad \text{y} \quad \frac{4 + \sqrt{2263}}{9}.$$

**296. Observación I.** — Se ve que la mayor parte de los artificios de cálculo consisten en encontrar la suma y el producto de las dos incógnitas, y resolver en seguida una ecuación de segundo grado cuyas raíces son precisamente los valores de cada una de las incógnitas.

**297. Observación II.** — El sistema de las dos ecuaciones del núm. 291, nos ha dado para $x$ y para $y$ valores de forma diferente, á saber, por una parte

$$x = \pm\frac{\sqrt{a^2 + 2b^2} \pm \sqrt{a^2 - 2b^2}}{2} \qquad (1)$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{a^2 + 2b^2} \mp \sqrt{a^2 - 2b^2}}{2}$$

por otra parte,

$$x = \pm\sqrt{\frac{a^2 + \sqrt{a^4 - 4b^4}}{2}} \qquad (2)$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{a^2 - \sqrt{a^4 - 4b^4}}{2}}$$

es necesario, pues, que los dos valores de cada incógnita, los de $x$ por ejemplo, sean equivalentes; para verificarlo, elevemos ai cuadrado la fórmula (1).

$$x^2 = \frac{a^2 + 2b^2}{4} + \frac{a^2 - 2b^2}{4} \pm \frac{2}{4}\sqrt{(a^2 + 2b^2)(a^2 - 2b^2)}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{2} \pm \frac{\sqrt{a^4 - 4b^4}}{2}$$

de donde

$$x = \pm\sqrt{\frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4b^4}}{2}}$$

valor idéntico a la fórmula (2).

Asimismo, de la fórmula (2) se puede pasar a la fórmula (1) por medio de la transformación indicada en el núm. 278. En efecto, se tiene aquí $A = a^2$, $B = a^4 - 4b^4$; luego $A^2 - B = a^4 - a^4 + 4b^4 = 4b^4$; por consiguiente $C = 2b^2$. de donde

$$x = \frac{\sqrt{a^2 + 2b^2} + \sqrt{a^2 - 2b^2}}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{a^2 + 2b^2} - \sqrt{a^2 - 2b^2}}{2}$$

---

# CAPITULO VI

## PROBLEMAS DE 2° GRADO

298. En la resolución y la discusión de los problemas de 2° grado, se siguen las mismas reglas que en los problemas de 1er grado, como se ve en los ejemplos que siguen.

299. **Problema I.** — *¿Cuántos metros de paño se han comprado con 240 pesos, sabiendo que si el metro hubiera costado 3 pesos menos, se hubieran comprado 4 metros más?*

Sea $x$ el número de metros.

$\frac{240}{x}$ será el precio del metro, y $\frac{240}{x+4}$, el precio del metro en el segundo caso; pero entonces el metro cuesta 3 pesos menos, faltan pues 3 pesos al cociente $\frac{240}{x+4}$ para igualar a $\frac{240}{x}$; de ahí la ecuación :

$$\frac{240}{x} = \frac{240}{x+4} + 3.$$

Multiplicando todos los términos por $x(x+4)$, se tiene :

$$240x + 960 = 240x + 3x^2 + 12x$$
$$x^2 + 4x - 320 = 0$$

de donde

$$x' = 16 \quad \text{y} \quad x'' = -20.$$

Se han comprado, pues, 16 metros. La segunda solución no es admisible; sin embargo, si se le cambia su signo,



indica que se hubieran comprado 20 metros si el precio del metro hubiera disminuído 3 pesos.

300. **Problema II.** — *Dos socios han retirado de su comercio 2 500 pesos por puesta y ganancia; el primero recibió 300 pesos de ganancia; se sabe además que el segundo había puesto 800 pesos. Encontrar la puesta del primero y la ganancia del segundo.*

Llamando $x$ la puesta del primero e $y$ la ganancia del segundo, se tiene desde luego :

$$x + y = 2\,500 - 300 - 800 = 1\,400.$$

Siendo las ganancias proporcionales a las puestas, se tiene todavía

$$\frac{x}{300} = \frac{800}{y}$$

de donde

$$xy = 240\,000.$$

Conociendo la suma y el producto de las incógnitas, se puede escribir :

$$X^2 - 1\,400X + 240\,000 = 0$$

de donde

$$x = 1\,200 \quad \text{e} \quad y = 200.$$

301. **Problema III.** — *Un particular impone a un cierto tanto un capital de 8 000 pesos; después de un año, retira este capital y los intereses producidos, e impone todo a un tanto superior 1 peso al primero; entonces obtiene una renta anual de 416 pesos. ¿Cuál era el primer tanto?*

Sea $x$ este tanto; $\frac{x \times 8\,000}{100}$ u $80x$ expresa el interés de 8 000 pesos en un año. El nuevo capital es entonces

$$8\,000 + 80x.$$

Este capital al $(x+1)$ °/₀ produce

$$\frac{(8\,000 + 80x)(x+1)}{100}.$$

Resulta la ecuación :

$$\frac{(8\,000 + 80x)(x+1)}{100} = 416$$

que se reduce a

$$x^2 - 101x - 420 = 0$$

de donde

$$x' = 4\,^0/_0 \quad \text{y} \quad x'' = -105.$$

La primera raíz es la única admisible. El tanto era, pues, el $4\,^0/_0$.

**302. Problema IV.** — *¿Cuál es el número que restándole su raíz cuadrada da 110 por diferencia?*

Sea $x$ el número pedido; se tendrá :

$$x - \sqrt{x} = 110.$$

Para resolver esta ecuación es preciso hacer desaparecer la parte irracional; esto se consigue despejando el radical y elevando en seguida los dos miembros al cuadrado.

Resulta, pues :

$$-\sqrt{x} = 110 - x$$
$$x = 12\,100 + x^2 - 220x$$
$$x^2 - 221x + 12\,100 = 0$$

de donde

$$x' = 121 \quad \text{y} \quad x'' = 100.$$

La raíz cuadrada de 121 es $\pm 11$; la de 100 es $\pm 10$.

121 menos su raíz positiva da 110.

100 menos su raíz negativa da también 110.

**Observación.** — Llamando $x^2$ el número buscado, se tiene inmediatamente :

$$x^2 - x = 110$$

de donde

$$x' = 11 \quad \text{y} \quad x'' = -10.$$

Siendo 11 y $-10$ las raíces cuadradas del número buscado, este número es, pues, 121 ó 100.

**303. Problema V.** — *Hallar dos números consecutivos tales que la raíz cuadrada de su producto, aumentado 37, sea igual a los $\frac{7}{25}$ de la suma de sus cuadrados.*

Sean $x$ y $x+1$ los números pedidos; tendremos la ecuación :

$$\sqrt{x(x+1)+37} = \frac{7}{25}[x^2 + (x+1)^2]$$

o

$$25\sqrt{x^2+x+37} = 7(2x^2+2x+1). \qquad (1)$$

Si elevamos al cuadrado los dos miembros de esta ecua-



ción haremos desaparecer el radical, pero tendremos una ecuación completa de cuarto grado que el álgebra elemental no enseña a resolver. Vale más proceder como sigue :

El segundo miembro de la ecuación (1) puede escribirse :

$$7(2x^2 + 2x + 74 - 73)$$

o

$$7[2(x^2 + x + 37) - 73].$$

Desde luego la ecuación queda

$$25\sqrt{x^2+x+37} = 7[2(x^2+x+37) - 73] \qquad (2)$$

Hagamos

$$y = \sqrt{x^2+x+37}, \text{ de donde } y^2 = x^2 + x + 37. \qquad (3)$$

La ecuación (2) se convierte entonces en

$$25y = 7(2y^2 - 73)$$

o

$$14y^2 - 25y - 511 = 0.$$
$$y' = 7 \quad \text{e} \quad y'' = -\frac{73}{14}.$$

Substituyendo este valor de $y' = 7$, en lugar de $y$ en la ecuación (3)

$$49 = x^2 + x + 37$$
$$x^2 + x - 12 = 0$$
$$x' = 3$$
$$x'' = -4.$$

Los números pedidos son 3 y 4, o $-4$ y $-3$.

El valor da $y'' = -\frac{73}{14}$ substituído en lugar de $y$ en la ecuación (3) da para $x$ raíces imaginarias.

---

## CAPÍTULO VII

### TRINOMIO DE 2° GRADO

**304. Definición.** — Un *trinomio de segundo grado* contiene un término en $x^2$, un término en $x$ y un término independiente de $x$; es de la forma

$$ax^2 + bx + c$$

las letras $a$, $b$, $c$ representan cantidades conocidas, positivas o negativas, mientras que $x$ es una magnitud variable que puede tomar todos los valores desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

**305.** Se llaman raíces de un trinomio los valores que lo anulan. Son las raíces de la ecuación que se obtiene igualando este trinomio a cero.

## § I. — Descomposición del trinomio.

306. Consideremos el trinomio

$$ax^2 + bx + c$$

y escribamos la identidad

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Agreguemos y quitemos al segundo miembro la misma cantidad $\frac{b^2}{4a^2}$, y la identidad no sufrirá alteración.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

o

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]$$

o

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right].$$

Es preciso ahora distinguir tres casos.

307. I. $b^2 - 4ac > 0$. *El trinomio tiene dos raíces reales y desiguales.*

Se puede considerar $b^2 - 4ac$ como siendo el cuadrado de su raíz cuadrada $\sqrt{b^2 - 4ac}$; y se escribe

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right].$$

Siendo el paréntesis la diferencia de dos cuadrados, se puede escribir

$$ax^2 + bx + c$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right]$$

$$ax^2 + bx + c$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right] \quad (1)$$

Siendo las raíces del trinomio propuesto

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

si de $x$ restamos sucesivamente cada una de las dos raíces, queda:

$$x - x' = x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x - x'' = x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y se ve que el primer paréntesis del segundo miembro de la identidad (1) es igual a $x - x''$, mientras el segundo es igual a $x - x'$.

Se puede pues escribir:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'').$$

Luego *el trinomio de segundo grado de la forma* $ax^2 + bx + c$, *es igual al producto por* a *de dos factores de primer grado que se obtienen restando de* x *cada una de las dos raíces del trinomio.*

308. II. $b^2 - 4ac = 0$. *El trinomio tiene dos raíces iguales o una raíz doble.*

Siendo $\qquad b^2 - 4ac = 0, \quad b^2 = 4ac$

se tiene $\qquad ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

y siendo las raíces

$$x'' = x' = -\frac{b}{2a}$$

se tiene

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')^2$$

*El trinomio es igual al producto por* a *del cuadrado del factor obtenido restando de* x *el valor común de las raíces.*

**309.** III. $b^2 - 4ac < 0$. *El trinomio tiene dos raíces complexas* (núm. 262).

Siendo $b^2 - 4ac < 0$, $-(b^2 - 4ac)$ es positivo y puede considerarse como siendo el cuadrado de $\sqrt{4ac - b^2}$ se tiene

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)^2\right]$$

*El trinomio es igual al producto por* a *de la suma de dos cuadrados.*

## § II. — Variaciones del trinomio.

**310.** Llamemos $y$ el valor del trinomio $ax^2 + bx + c$ tendremos:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Cuando se hace variar a $x$ de $-\infty$ a $+\infty$, el valor $y$ del trinomio varía. Estas variaciones son las que vamos á estudiar.

**311. Teorema.** — *El valor del trinomio de segundo grado varía de una manera continua cuando* **x** *varía de una manera continua.*

Sea todavía $y$ el valor del trinomio, se tiene:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

Demos a $x$ un incremento $h$, y llamemos $k$ el incremento del valor del trinomio, tendremos:

$$y + k = a(x + h)^2 + b(x + h) + c$$
$$y + k = ax^2 + ah^2 + 2ahx + bx + bh + c \qquad (2)$$

Para obtener el valor del incremento $k$, restemos la ecuación (1) de la ecuación (2); queda:

$$k = h(2ax + b + ah)$$

Para un valor determinado de $x$, si el factor $h$ es muy pequeño y tiende hacia cero, el producto $h(2ax + b + ah)$, y, por consiguiente, el incremento $k$ tenderán hacia cero. Haciéndose el incremento por grados insensibles, el **trinomio varía de una manera continua.**



### 1. — Variaciones de los signos del trinomio de segundo grado.

Hay tres casos que considerar en el estudio de las variaciones de los signos del trinomio.

**312.** 1er Caso. — **El trinomio tiene sus raíces reales y desiguales.** — *Cuando el trinomio* $ax^2 + bx + c$ *tiene sus raíces reales y desiguales, conserva el signo de su primer término para todo valor de* **x** *no comprendido entre sus dos raíces; y toma el signo contrario al de su primer término para todo valor de* **x** *comprendido entre sus dos raíces.*

Llamando $x'$ y $x''$ las dos raíces, y siendo $x'$ mayor que $x''$, se tiene (núm. 307):

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x - x')(x - x'')$$

1° Para todo valor de $x$ no comprendido entre las raíces, es decir, mayor que $x'$ o menor que $x''$, el producto $(x - x')(x - x'')$ será positivo.

En efecto, si se tiene $x > x'$, siendo positivas las diferencias $x - x'$ y $x - x''$, su producto será positivo, y el trinomio será del mismo signo que $a$.

Del mismo modo, si se tiene $x < x''$, siendo negativas las diferencias $x - x'$ y $x - x''$, su producto será positivo, y el trinomio será del mismo signo que $a$.

2° Para todo valor de $x$ comprendido entre las dos raíces, el producto $(x - x')(x - x'')$ será negativo, porque siendo de signos contrarios las diferencias $(x - x')$ y $(x - x'')$, su producto será negativo, y el trinomio tendrá el signo contrario al de $a$.

Se sabe por otra parte que el trinomio se anula cuando se da a $x$ un valor igual a una de las dos raíces, y se deduce que el trinomio cambia dos veces de signo pasando por cero.

**313.** 2° Caso. — **El trinomio tiene sus raíces reales e iguales.** — *Cuando el trinomio tiene sus raíces reales e iguales, conserva siempre el signo de su primer término.*

Puesto que las raíces son iguales, se tiene (núm. 308):

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x - x')^2$$

Siendo positivo el cuadrado $(x-x')^2$ calquiera que sea el valor de $x$, el trinomio tendrá siempre el signo de $a$. Además, el trinomio se anula para $x=x'$, y pasa por cero sin cambiar de signo.

**314.** 3er Caso. — **El trinomio tiene sus raíces imaginarias.** — *Cuando el trinomio tiene sus raíces imaginarias, conserva siempre el signo de su primer término.*

Puesto que las raíces son imaginarias, se puede esc... bir (núm. 309) :

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

o

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2\right]$$

El trinomio es el producto por $a$ de la suma de dos cuadrados; y como el segundo factor es esencialmente positivo, el trinomio será siempre del mismo signo que $a$, y no se anulará nunca.

**315. Resumen.** — El siguiente enunciado resume todo lo que acabamos de decir sobre las variaciones de los signos del trinomio.

*El trinomio* $ax^2+bx+c$ *tiene siempre el signo de su primer término, excepto para los valores de* x *comprendidos entre las dos raíces.*

**316.** Las consecuencias que acabamos de sacar con relación a los signos del trinomio permanecen ciertas cuando el término en $x$ no existe, y también cuando el término conocido es nulo; porque en estos dos casos particulares, el trinomio igualado a cero tiene siempre dos raíces.

## 2. — Variaciones del valor del trinomio.

**317.** Sea el trinomio

$$y=ax^2+bx+c.$$

Puede escribirse (nº 306) :

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

o

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$



Haciendo

$$z=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$$

se tiene

$$y=az.$$

Las variaciones de $y$ dependen de las de $z$.

$z$ tiene su menor valor cuando $x=-\frac{b}{2a}$. En efecto, en este caso

$$z=\left(-\frac{b}{2a}+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=\frac{4ac-b^2}{4a^2}. \quad (1)$$

Cuando $x$ tiene otro valor, V. gr. : $x=-\frac{b}{2a}+\alpha$.

$$z=\left(-\frac{b}{2a}+\alpha+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=\alpha^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}. \quad (2)$$

La diferencia entre los valores (2) y (1) es $\alpha^2$ y no depende del signo de $\alpha$; luego, queda la misma si $x$ se aparta de $-\frac{b}{2a}$ de cantidades iguales, sea creciendo $\left(-\frac{b}{2a}+\alpha\right)$, sea decreciendo $\left(-\frac{b}{2a}-\alpha\right)$.

Por otra parte, cuando $x$ se aleja más y más de $-\frac{b}{2a}$, la diferencia $\alpha^2$ va creciendo siempre y llega a ser mayor que cualquier número.

Conocidos estos resultados, fácilmente se estudian las variaciones de $y$.

Cuando $\quad x=-\frac{b}{2a}, \qquad y=az=\frac{4ac-b^2}{4a}$

cuando

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\alpha, \qquad y=\frac{4ac-b^2}{4a}+a\alpha^2.$$

La diferencia entre estos valores es $a\alpha^2$.

1° Si $a>0$, esta diferencia es siempre positiva; luego, el menor valor que tenga $y$ es $\frac{4ac-b^2}{4a}$, que corresponde a $x=-\frac{b}{2a}$. Este valor se llama el *mínimo* del trinomio. Cuando $x$ se aleja más y más de $-\frac{b}{2a}$, el valor de $y$ crece siempre.

2° Si $a < 0$, la diferencia $ax^2$ es siempre negativa. Luego, el mayor valor que tenga $y$ es $\frac{4ac - b^2}{4a}$, que corresponde a $x = -\frac{b}{2a}$. Este valor se llama el *máximo* del trinomio. Cuando $x$ se aleja más y más de $-\frac{b}{2a}$, el valor de $y$ disminuye siempre.

**318.** En resumen

Si $a > 0$, el trinomio tiene un *mínimo*.

Si $a < 0$, el trinomio tiene un *máximo*.

El máximo o el mínimo corresponde a $x = -\frac{b}{2a}$ y es igual a $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

**319. V. gr.** : 1° Sea $y = x^2 - 4x + 5$.

Este trinomio tiene un *mínimo* que corresponde a $x = -\frac{-4}{2} = 2$, y es igual a $\frac{4 \times 5 - 16}{4} = 1$.

En efecto cuando

| | | |
|---|---|---|
| | $x = -1$ | $y = 10$ |
| | $x = 0$ | $y = 5$ |
| | $x = 1$ | $y = 2$ |
| | $x = 2$ | $y = 1$ |
| | $x = 3$ | $y = 2$ |
| | $x = 4$ | $y = 5$ |
| | $x = 5$ | $y = 10.$ |

2° Sea $y = -x^2 + 6x + 10.$

Este trinomio tiene un *máximo*, que corresponde a $x = -\frac{6}{-2} = 3$ y es igual a $\frac{-4 \times 10 - 36}{-4} = 19.$

En efecto cuando

| | | |
|---|---|---|
| | $x = 0$ | $y = 10$ |
| | $x = 1$ | $y = 15$ |
| | $x = 2$ | $y = 18$ |
| | $x = 3$ | $y = 19$ |
| | $x = 4$ | $y = 18$ |
| | $x = 5$ | $y = 15$ |
| | $x = 6$ | $y = 10.$ |



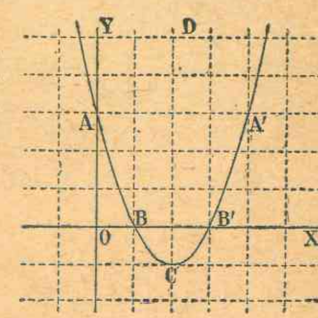
### 3. — Representación gráfica de las variaciones del trinomio de 2° grado.

**320.** Para representar gráficamente las variaciones del trinomio $y = ax^2 + bx + c$, se emplean dos rectas perpendiculares OX, OY, que se llaman *ejes*.

Los valores de $x$ se representan por unas longitudes tomadas con cierta escala sobre OX, desde O; hacia la derecha, si son positivos, y hacia la izquierda, si son negativos. El valor correspondiente de $y$ se representa por un segmento de recta paralelo a OY, que sale del punto que representa $x$, hacia arriba, cuando $y$ es positiva, y hacia abajo, cuando es negativa.

**321.** V. gr : Consideremos el trinomio de segundo grado :

$$x^2 - 4x + 3$$




Llamemos $y$ su valor, y tratemos de representar por una curva las variaciones de este trinomio, cuando se dan a $x$ valores arbitrarios.

Supongamos

$$y = x^2 - 4x + 3$$

Si hacemos $x = 0$, el valor del trinomio será $y = +3$. Llevando pues sobre OY el valor positivo 3, marquemos el punto A.

Hagamos $x = +1$, el valor del trinomio será $y = 0$. Marquemos todavía el punto B situado sobre OX y en el cual $x = 1$ e $y = 0$.

Hagamos $x = +2$, de donde $y = -1$, y marquemos el punto C en el cual $x = 2$ e $y = -1$.

Hagamos todavía $x = 3$, de donde $y = 0$, y marquemos el punto B′ en el cual $x = 3$ e $y = 0$.

Para $x = 4$, se encuentra $y = +3$, lo que da el **punto A′**.
Para $x = +5$, » $y = +8$
Para $x = -1$, » $y = +8$

**y así sucesivamente.**

**322.** Uniendo los diferentes puntos A, B, C, B'. A'... por una línea continua, se obtiene una curva cuyas ramas son infinitas, y que representa las variaciones del trinomio propuesto.

Esta curva demuestra :

1° Que el trinomio se anula para $x = 1$ y $x = 3$; en efecto, 1 y 3 son las raíces del trinomio $x^2 - 4x + 3$;

2° Que el trinomio permanece positivo para cualquier valor de $x$ mayor que 3 y menor que 1. Se sabe, en efecto, que el trinomio conserva el signo de su primer término para todo valor de $x$ no comprendido entre las dos raíces;

3° Que el trinomio es negativo para $x = 2$ y en general para cualquier valor de $x$ mayor que 1, pero menor que 3. Se sabe, en efecto, que el trinomio toma el signo contrario al de su primer término para todo valor de $x$ comprendido entre las dos raíces;

4° Que el valor mínimo del trinomio corresponde a $x = 2$;

5° Finalmente se ve que para valores de $x$ equidistanses de C D, el trinomio toma también valores iguales.

**323.** El trinomio

$$ax^2 + bx + c$$

tiene por raíces

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si las raíces son reales, la curva que representa sus varia-

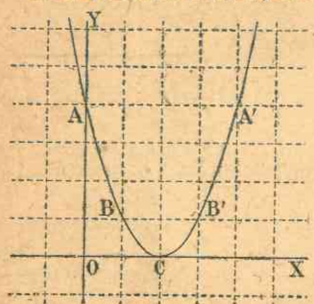



Fig. 1.

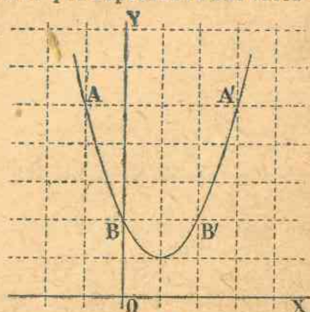



Fig. 2.

ciones afecta la forma de la figura anterior, y encuentra al eje de las $x$ en dos puntos que marcan las raíces de este trinomio.



Si las raíces son iguales, la curva que representa el trinomio es tangente al eje de las $x$. La curva de la figura 1 corresponde al trinomio $x^2 - 4x + 4$.

Por último si las raíces son imaginarias, la curva no encuentra al eje de las $x$ (fig. 2), y esto es lo que se verifica con el trinomio $x^2 - 2x + 2$.

En estas dos últimas curvas se ve que el trinomio conserva siempre el signo de su primer término, sea cual fuere el valor que se le dé a $x$.

**324.** Si las raíces del trinomio fueran negativas, la curva

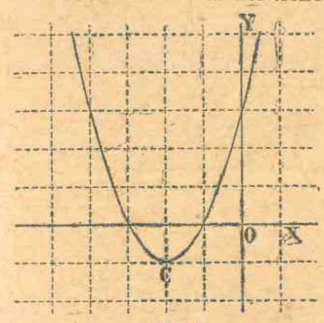



Fig. 3.

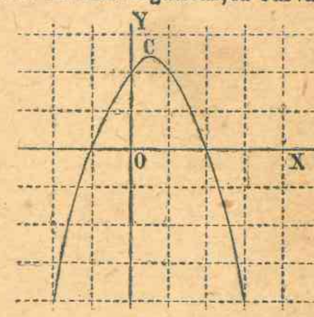



Fig. 4.

tendría la forma de la fig. 3, la cual representa las variaciones del trinomio.

$$x^2 + 4x + 3$$

Por último, si el primer término del trinomio fuera negativo, la curva afectaría la forma de la figura 4, la cual representa las variaciones del trinomio

$$-x^2 + x + 2$$

**325.** Se puede observar, en todas estas curvas, que la paralela al eje de las $y$, pasando por el vértice C, representa el valor expresado por $x = -\frac{b}{2a}$, y que la curva es simétrica con relación a esta recta.

**326. Aplicaciones.** — 1° *Descomponer en factores del primer grado el trinomio* $x^2 + 4x - 32$.

Siendo 4 y $-8$ las raíces de la ecuación $x^2 + 4x - 32 = 0$ se tendrá :

$$x^2 + 4x - 32 = (x - 4)(x + 8).$$

Se puede comprobar, en efecto, que el producto $(x-4)(x+8)$ da efectivamente $x^2+4x-32$.

2° *Descomponer en factores el trinomio*

$$10x^2-7x+1.$$

Siendo $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{5}$ las raíces de la ecuación

$$10x^2-7x+1=0$$

se tendrá

$$10x^2-7x+1=10\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)=(2x-1)(5x-1).$$

3° *Simplificar la expresión* $\frac{x^2-1}{x^2+3x-4}$.

El numerador puede escribirse $(x+1)(x-1)$, y el denominador igualado a cero tiene por raíces $1$ y $-4$; la expresión se convierte pues en :

$$\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+4)}.$$

Suprimiendo el factor $x-1$ común al numerador y al denominador, se tiene por valor simplificado de la expresión dada :

$$\frac{x+1}{x+4}.$$

4° *Determinar entre qué límites se puede hacer variar el valor de* x *para que el trinomio* $x^2-2x-8$ *sea negativo.*

Llamemos $y$ el valor de este trinomio, y escribamos :

$$y=x^2-2x-8$$

El trinomio propuesto tiene por raíces $x'=4$, $x''=-2$.

Luego para que el trinomio sea negativo, es decir, para que $y$ tenga el signo contrario al del primer término, se necesita que $x$ tenga un valor menor que 4 y mayor que $-2$ (núm. 312).

Los valores enteros de $x$ serán pues : 3.2 1,0 y - - 1; el trinomio se anula además para $x=4$ y $x=-2$.

5° *Determinar entre qué límites se puede hacer variar el valor de* x *para que el trinomio* $-3x^2-12x+36$ *sea negativo.*

Escribamos :

$$y=-3x^2-12x+36$$



o $$y=-3(x^2+4x-12).$$

Siendo las raíces del trinomio $x^2+4x+12$, $x'=2$ y $x''=-6$, se ve que el trinomio será negativo, es decir tendrá el mismo signo que su primer término, para todo valor de $x$ no comprendido entre sus dos raíces.

$x$ puede por consiguiente variar entre 2 y $+\infty$, y entre $-6$ y $-\infty$; además el trinomio se anula para $x=2$ y $x=-6$.

6° *Determinar entre qué límites se puede hacer variar* x *para que el trinomio* $x^2-4x+6$ *sea positivo.*

Igualándolo a cero :

$$x^2-4x+6=0$$

Siendo el término conocido 6 mayor que el cuadrado de la mitad de 4, las raíces del trinomio son imaginarias (núm. 272).

El trinomio será siempre positivo, sea cual fuere el valor que se le dé a $x$ (núm. 309)

7° *¿Se puede establecer la desigualdad* $x^2-6x+12<0$?

No, porque las raíces del trinomio propuesto son imaginarias; desde luego el valor del trinomio tiene el signo de su primer término; y el trinomio nunca será negativo.

---

# CAPÍTULO VIII

## DESIGUALDADES

### § I. — Resolución de las desigualdades.

**327. Definición.** — *Toda expresión de la forma*

$$ax^2+bx+c>0$$

*en la que* a, b, c *son cantidades conocidas, es una desigualdad de 2° grado.*

**Resolverla**, *es encontrar entre qué límites puede variar* x *para que la desigualdad se verifique.*

Esta resolución estriba sobre el estudio de las variaciones del trinomio de 2° grado.

**328. Problema I.** — *Resolver la desigualdad*

$$ax^2 + bx + c > 0$$

se deben distinguir dos casos :

1° $b^2 - 4ac > 0$; las raíces del trinomio son reales y desiguales;

Si $a > 0$, $x$ debe encontrarse fuera de las raíces.

Si $a < 0$, $x$ debe estar comprendida entre las raíces.

2° $b^2 - 4ac \leqslant 0$; las raíces son iguales o complexas.

Si $a > 0$, la desigualdad se verifica siempre.

Si $a < 0$, la desigualdad no se verifica nunca.

Ejemplos : 1° sea

$$x^2 - 6x + 5 > 0.$$

Las raíces son 1 y 5; luego, se debe tener

$$x < 1 \quad \text{o} \quad x > 5$$

2° $$x^2 - 7x + 12 < 0.$$

Las raíces son 3 y 4; luego, se debe tener

$$3 < x < 4.$$

**329. Problema II.** — *Resolver la desigualdad*

$$ax^2 + bx + c > k$$

Pasando $k$ al primer miembro, resulta

$$ax^2 + bx + c - k > 0$$

y el problema se reduce al anterior.

**330. Problema III.** — *Encontrar la condición para que*

$$ax^2 + bx + c > 0$$

*se verifique sea cual fuere $x$.*

El signo del trinomio debe ser invariable y positivo. Para que sea invariable, se necesita

$$b^2 - 4ac \leqslant 0$$

y para que sea entonces positivo

$$a > 0$$



## § II. — Desigualdades simultáneas.

**331.** Se resuelven como queda dicho acerca del primer grado.

V. gr : $$3x - 15 > 0$$

y

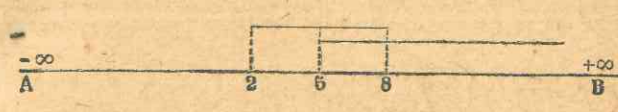
$$x^2 - 10x + 16 < 0.$$

**La primera exige**

$$3x > 15 \quad \text{ó} \quad x > 5.$$

**La segunda exige**

$$2 < x < 8.$$




Se indican los valores de $x$ por orden de magnitud en una recta AB. La primera desigualdad se verifica en el intervalo $5, +\infty$; la segunda, en el intervalo 2,8; las dos se verifican en el intervalo 5,8; luego, las soluciones son

$$5 < x < 8$$

# LIBRO IV

# NOCIONES DE ANÁLISIS COMBINATORIO

---

## CAPÍTULO I

## ORDENACIONES, PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

### § I. — Definiciones.

**332.** *Llámanse* **ordenaciones** *de* n *en* n, *los diversos grupos que pueden formarse de* m *letras u objetos distintos tomándolos de* n *en* n, *de manera que dos grupos se distingan por el orden o el nombre de sus factores.*

V. gr. : Las ordenaciones de 2 en 2 que pueden formarse con $a$, $b$, $c$ son

$$ab, \quad ac, \quad bc, \quad cb, \quad ca, \quad ba.$$

**333.** *Llámanse* **permutaciones** *de* m *letras u objetos distintos los diversos grupos que pueden formarse de ellos, de manera que dos grupos se distingan por el orden de sus factores.*

*Observación.* — Se ve que las permutaciones son las ordenaciones de $m$ objetos de $m$ en $m$.

V. gr. : Las permutaciones que pueden formarse con $a$, $b$, $c$ son

$$abc, \quad acb, \quad bac, \quad bca, \quad cab, \quad cba.$$

**334.** *Llámanse* **combinaciones** *de* n *en* n, *los diversos grupos*



*que pueden formarse de* m *letras u objetos distintos, tomándolos de* n *en* n, *de manera que dos grupos se distingan a lo menos por un objeto.*

V. gr. : Las combinaciones de 2 en 2 que pueden formarse con $a$, $b$, $c$ son

$$ab, \quad ac, \quad bc.$$

Son los *productos diferentes* que se obtienen con tres factores tomados de dos en dos.

### § II. — Cálculo del número de ordenaciones.

**335.** Sea por encontrar el número de las ordenaciones posibles entre las $m$ primeras letras del alfabeto, tomadas de una en una, de dos en dos, de tres en tres... de $m$ en $m$.

Es evidente que las ordenaciones de las $m$ letras de una en una son :

$$a, b, c, d, e \ldots . \, l$$

su número es $m$.

Luego, representando por $O_m^1$ el número de ordenaciones de las $m$ letras de una en una, se tendrá :

$$O_m^1 = m.$$

**336.** Para obtener las ordenaciones de las $m$ letras tomadas de dos en dos, se necesita escribir sucesivamente a continuación de cada letra $a$, $b$, $c \ldots . \, l$, de la primera ordenación las $m - 1$ letras que quedan. Se tiene así :

$$\begin{array}{l} ab, ba, ca, da \ldots ., la \\ ac, bc, cb, db \ldots ., lb \\ ad, bd, cd, dc \ldots ., lc \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \\ al, bl, cl, dl \ldots ., lk \end{array}$$

Todas las ordenaciones de dos en dos que cada letra ha formado con las $m - 1$ letras restantes, se encuentran en una misma columna vertical.

En la formación de la tabla anterior, no se ha omitido ninguna ordenación de dos en dos; porque de la manera que hemos procedido, se ha escrito sucesivamente a continuación de cada letra las $m - 1$ letras restantes; no se ha repetido ninguna ordenación, porque las ordenaciones que se encuentran sobre una misma columna horizontal difieren todas en la primera letra, y las que están sobre una misma columna vertical difieren todas en la última letra.

Pero cada ordenación de una en una ha producido $m-1$ ordenaciones nuevas; las $m$ ordenaciones de una en una han producido, pues, un número de ordenaciones de dos en dos marcado por $m\,(m-1)$.

Representando por $O_m^2$ el número de las ordenaciones de dos en dos, se tendrá :

$$O_m^2 = m\,(m-1).$$

**337.** Para obtener las ordenaciones de $m$ letras de tres en tres, se necesita escribir sucesivamente a continuación de cada ordenación de dos en dos cada una de las $m-2$ letras que no entran en esta ordenación; se tiene así :

*abc*, *acb*, *adb*...., *bac*, *bca*...., *cab*, *cba*....
*abd*, *acd*, *adc*...., *bad*, *bcd*...., *cad*, *cbd*....
*abc*, *ace*, *ade*...., *bae*, *bce*...., *cae*, *cbe*....
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
*abl*, *acl*, *adl*...., *bal*, *bcl*...., *cal*, *cbl*....

Las ordenaciones de tres en tres que cada ordenación de dos en dos ha formado con las $m-2$ letras restantes, se encuentran todas en una misma columna vertical.

Probaríamos como antes que, en la formación de la tabla anterior, no se ha omitido ninguna ordenación, ni tampoco se ha repetido. Pero cada ordenación de dos en dos ha producido $m-2$ ordenaciones nuevas; las $m(m-1)$ ordenaciones de dos en dos habrán producido un número de ordenaciones de tres en tres marcado por $m(m-1)(m-2)$.

Representando por $O_m^3$ el número de las ordenaciones de las $m$ letras de tres en tres, se tendrá :

$$O_m^3 = m\,(m-1)\,(m-2).$$

De donde se infiere la siguiente ley :

**338.** *El número de ordenaciones de* m *objetos de* n *en* n *es igual al producto de* n *factores, de los cuales el primero es* m, *y los otros disminuyen sucesivamente* 1.

Así el número de ordenaciones de 8 objetos de 5 en 5, será :

$$O_8^5 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720.$$



En general :

$$O_m^n = m(m-1)\,(m-2)\,(m-3)....\,[m-(n-1)].$$

## § III. — Cálculo del número de permutaciones.

**339.** Si se quiere obtener el número de permutaciones, debe calcularse el de ordenaciones de las $m$ letras de $m$ en $m$ (nº 333).

Llamando $P_m$ este número de permutaciones se tendrá :

$$P_m = O_m^m = m(m-1)\,(m-2)\,(m-3)....\,3 \times 2 \times 1$$

ó bien, invirtiendo el orden de los factores :

$$P_m = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times ....\, m.$$

Es el producto de los $m$ primeros números enteros, se designa por $m!$ que se lee *factorial m*.

Así el número de permutaciones que pueden hacerse con cinco letras es :

$$P_5 = 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

## § IV. — Cálculo del número de combinaciones.

**340.** La fórmula que sirve para encontrar el número de combinaciones de $m$ objetos de $n$ en $n$ se deduce de la fórmula de las ordenaciones y de la de las permutaciones.

Representemos por $C_m^n$ el número, que supondremos conocido, de las combinaciones de $m$ objetos de $n$ en $n$. Permutando los $n$ objetos que entran en cada una de estas combinaciones se tendrán todas las ordenaciones de $m$ objetos de $n$ en $n$; no se habrá omitido ninguna ordenación, puesto que formamos sucesivamente todas las que una misma combinación puede producir; además, no se habrá repetido ninguna ordenación, porque cada una de las combinaciones contiene cuando menos un objeto que no se encuentra en las otras.

Ahora bien, conteniendo cada combinación $n$ objetos, producirá entre estos $n$ objetos un número de permutaciones representado por $P_n$. Luego el número de ordenaciones de los $m$ objetos de $n$ en $n$ se obtendrá haciendo el producto de las combinaciones de $n$ en $n$ de los $m$ objetos, por las permutaciones de $n$ objetos.

Así

$$O_m^n = C_m^n \times P_n$$

de donde

$$C_m^n = \frac{O_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\dots[m-(n-1)]}{n!}$$

**341. Observación.** — *El número de las combinaciones de* m *objetos de* n *en* n *es el mismo que el de las combinaciones de* m *objetos tomados de* m — n *en* m — n.

En efecto, supongamos los $m$ objetos reunidos en un mismo lugar, cada vez que se tomen $n$ se tendrá una combinación de $n$ en $n$ entre los $m$ objetos; pero también cada vez los $m-n$ objetos restantes formarán entre sí una combinación.

Luego, si hay $C_m^n$ combinaciones de los $m$ objetos de $n$ en $n$, habrá un número igual de combinaciones de los $m$ objetos tomados de $m-n$ en $m-n$.

---

## CAPÍTULO II

## BINOMIO DE NEWTON

**342.** Hemos visto que para formar el producto de un polinomio por otro polinomio, se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador.

Según esto, el producto de un binomio por otro binomio se compondrá de los productos de dos en dos de los términos del multiplicando y del multiplicador; es decir, que *en cada término del producto entrará un término del primer factor y un término del segundo.*

V. gr. : Sea el producto $(a+b)(c+d)$ se tiene :

$$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$$

y se nota facilmente que en cada término del producto entra un término del primer factor y uno del segundo.

Si se multiplica este producto por un tercer binomio,



se obtendrá un polinomio cuyos términos serán los productos de tres en tres de los términos de los tres binomios y *en cada término entrará un término del primer factor, uno del segundo y uno del tercero.*

Este se nota facilmente en el ejemplo siguiente :

$$(a+b)(c+d)(e+f) = ace + ade + bce + bde + acf + adf + bef + bdf.$$

En general, si se tienen que multiplicar $n$ binomios entre sí, los términos del producto serán los productos de $n$ en $n$ de los términos de los $n$ binomios; y *en cada término del producto entrará un término del primer factor, uno del segundo, uno del tercero.... uno del* $n^{mo}$.

**343.** Sea pues por efectuar el producto de $m$ factores binomios :

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+a)\dots(x+l)$$

Este producto, que supondremos ordenado con respecto a las potencias decrecientes de $x$, será la suma de los productos obtenidos de tomar de $m$ en $m$ los términos de los $m$ binomios, es decir, que cada término del producto contendrá un término de cada uno de los $m$ factores.

Se tendrá el primer término del producto tomando el primer término de cada uno de los $m$ factores binomios, lo que dará

$$x \times x \times x \times x \dots \text{ ó } x^m$$

Tomando el segundo término $a$ en el primer factor y el primero en los $m-1$ factores restantes, se tendrá $ax^{m-1}$.

Tomando el segundo término $b$ en el segundo factor y el primero en todos los otros, se tendrá $bx^{m-1}$.

Tomando el segundo término $c$ en el tercer factor y el primero en todos los otros, se tendrá $cx^{m-1}$.

Y así consecutivamente.

El segundo término del producto será del grado $m-1$ con respecto a $x$ y tendrá por expresión :

$$(a + b + c + d + \dots l)\, x^{m-1}$$

Si se representa por $S_1$ la suma de los $m$ términos contenidos en el paréntesis, se tiene : $S_1x^{m-1}$.

**344.** Tomando el segundo término en dos factores cualesquiera y el primero en los $m-2$ restantes, se tendrán productos tales como

$$\begin{matrix} abx^{m-2}, & acx^{m-2}, & adx^{m-2}, & aex^{m-2} \ldots. & afx^{m-2} \\ bcx^{m-2}, & bdx^{m-2}, & bex^{m-2}, & bfx^{m-2} \ldots. & \\ cdx^{m-2}, & cex^{m-2}, & cfx^{m-2} \ldots. & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \end{matrix}$$

Formando la suma de todos estos términos del grado $m-2$ con respecto a $x$, el segundo término del producto, tendrá por expresión :

$$(ab + ac + ad .. + bc + bd + be \ldots + cd + ce + cf \ldots.) x^{m-2}.$$

Se ve que el coeficiente de $x^{m-2}$ es la suma de los productos diferentes o combinaciones, de dos en dos de los $m$ términos $a, b, c, \ldots l$.

Si se designa por $S_2$ la suma de estas combinaciones, el tercer término del producto será $S_2x^{m-2}$.

**345.** Tomando el segundo término en tres factores cualesquiera y el primer término en los $m-3$ restantes, se tendrán productos tales como :

$$\begin{matrix} abcx^{m-3}, & abdx^{m-3}, & abex^{m-3} \ldots \\ acdx^{m-3}, & acex^{m-3}, & acfx^{m-3} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ bcdx^{m-3}, & bcex^{m-3}, & bcfx^{m-3} \ldots. \\ bdex^{m-3}, & bdfx^{m-3}, & bdgx^{m-3} \ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ cdex^{m-3}, & cdfx^{m-3}, & cdgx^{m-3} \ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

Formando la suma de todos estos términos del grado $m-3$ en $x$, el cuarto término del producto, tendrá por expresión :

$$(abc + abd \ldots. + acd + ace \ldots. + bcd + bce \ldots.) x^{m-3}.$$

Se ve que el coeficiente de $x^{m-3}$ es la suma de los productos diferentes o combinaciones de tres en tres de los $m$ términos $a, b, c \ldots. l$.

Si se representa por $S_3$ la suma de estas combinaciones, el cuarto término del producto será $S_3x^{m-3}$.

**346.** En general, si se toma el segundo término en $n$ cualesquiera de los factores y el primero en los $m-n$ restantes, se formará el término $(n+1)^{mo}$ del producto; este término será del grado $m-n$ en $x$ y tendrá por coeficiente la suma de las combinaciones de los $m$ términos $a, b, c \ldots. l$, de $n$ en $n$.



Si se representa por $S_n$ la suma de estas combinaciones, el $(n+1)^{mo}$ término del producto, será $S_nx^{m-n}$.

Tomando el primer término en uno de los factores y el segundo en los $m-1$ restantes, se tendrán productos tales como :

$$(b \times c \times d \ldots. l)\, x, (a \times c \times d \ldots. l)\, x, (a \times b \times d \ldots. l)\, x \ldots.$$

Formando la suma de todos estos términos del grado 1 en $x$; el $n^{mo}$ término, o el penúltimo del producto, tendrá por expresión :

$$(b \times c \times d \ldots. + a \times c \times d \ldots. + a \times b \times d \ldots.)\, x.$$

Se ve que el coeficiente de $x$ es la suma de las combinaciones de los $m$ términos $a, b, c \ldots. l$ de $m-1$ en $m-1$.

Si se representa por $S_{m-1}$ la suma de estas combinaciones, el $m^{mo}$ término del producto será $S_{m-1}x$.

Finalmente, se tendrá el último término del producto tomando el último término de cada uno de los $m$ factores, lo que dará $abcd \ldots. m$.

Este término del grado cero en $x$ se representa por $S_m$.

**347.** El producto de $m$ factores binomios se desarrolla, pues, como sigue :

$$x^m + S_1x^{m-1} + S_2x^{m-2} \ldots. S_nx^{m-n} \ldots. S_{m-1}x + S_m \quad (1)$$

El término general, es decir, el $n+1^{mo}$ del desarrollo, es :

$$S_nx^{m-n}.$$

**348.** Supongamos ahora que los segundos términos de los $m$ factores binomios sean los mismos en todos estos factores.

El producto $(x+a)(x+b)(x+c) \ldots. (x+l)$ será $(x+a)^m$.

Veamos ahora en lo que se convertirá el desarrollo anterior (1), si

$$a = b = c = d \ldots. = l.$$

La suma $S_1$ cuyo valor es $a + b + c \ldots. + l$ se convertirá en $ma$.

$S_2$ designará siempre la suma de las combinaciones de dos en dos de $m$ cantidades; habrá $\dfrac{m(m-1)}{1 \times 2}$ combinaciones, y valiendo cada una de ellas $a^2$, $S_2$ valdrá

$$\frac{m(m-1)}{1 \times 2} a^2.$$

$S_3$ designará la suma de las combinaciones de $m$ cantidades de tres en tres; habrá $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \times 2 \times 3}$ combinaciones y valiendo cada una de ellas $a^3$, $S_3$ valdrá :

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \times 2 \times 3} a^3.$$

**349**. En general, designando $S_n$ la suma de las combinaciones de $m$ cantidades de $n$ en $n$, habrá

$$\frac{m(m-1)(m-2) \ldots [m-(n-1)]}{n!}$$

combinaciones, y valiendo cada una de ellas $a^n$, $S_n$ valdrá :

$$\frac{m(m-1)(m-2) \ldots [m-(n-1)]}{n!} a^n.$$

Designando $S_{m-1}$ la suma de las combinaciones de $m$ cantidades de $m-1$ en $m-1$, habrá $m$ combinaciones, y valiendo cada una de ellas $a^{m-1}$, $S_{m-1}$ valdrá :

$$\frac{m}{1} a^{m-1}.$$

Designando $S_m$ el producto $abcd \ldots l$, se convertirá en $a^m$. Se tendrá pues :

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \times 2} a^2 x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \times 2 \times 3} a^3 x^{m-3}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3) \ldots [m-(n-1)]}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots n} a^n x^{m-n} \ldots \frac{m}{1} a^{m-1} x + a^m.$$

**350**. Tal es la fórmula descubierta por Newton y que se conoce con el nombre de *fórmula del binomio*, la cual permite escribir inmediatamente una potencia cualquiera de un binomio dado sin pasar por las potencias inferiores.

Esta fórmula contiene $m+1$ términos, siendo $m$ el exponente de la potencia que se trata de obtener; su término general es el $(n+1)^{mo}$ del desarrollo; tiene por expresión

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3) \ldots [m-(n-1)] a^n x^{m-n}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times n}.$$

Se ve que el coeficiente de un término cualquiera se obtiene dividiendo el producto de los exponentes de $x$, en los $n$ términos que anteceden, por el producto de los $n$ primeros números.



V. gr. : el coeficiente del sexto término del desarrollo de $(x+a)^{20}$ es :

$$\frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 15.504.$$

**351. — Observaciones : I.** Los términos extremos $x^m$ y $a^m$ del desarrollo tienen por exponente el índice de la potencia del binomio. En los otros términos los exponentes de $x$ disminuyen gradualmente en una unidad, mientras que los de $a$ aumentan, pero la suma de los exponentes de $x$ y de $a$ en un mismo término es siempre igual a $m$.

II. — Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales, porque el término que tiene $n$ términos antes de él tiene por coeficiente $S^n$ o $C_m^n$, y el término que tiene $n$ términos después de él, es decir $m-n$ antes de él, tiene por coeficiente $S_{m-n}$ o $C_m^{m-n}$.

Como (núm. 341)

$$C_m^n = C^{m-n}$$

queda demostrada la proposición.

V. gr. : En el desarrollo de $(x+a)^{10}$, que tiene 11 términos, el coeficiente del 4º termino es $\frac{10 \times 9 \times 8}{1.2.3} = 120$; es igual al coeficiente del 8º término :

$$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7} = 120.$$

Basta pues con calcular los coeficientes de la mitad de los términos del desarrollo.

III. — Para encontrar el coeficiente de un término cualquiera, se multiplica el exponente de $x$ en el término que precede, por el coeficiente de este término, y se divide el producto por el lugar que ocupa este mismo término.

V. gr. : el desarrollo del binomio $(x+a)^6$ será :

$$(x+a)^6 = x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6.$$

El coeficiente de un término cualquiera, el cuarto, por ejemplo, se ha obtenido multiplicando 4, exponente de $x$, por 15, coeficiente de $a$ en el tercer término, y este producto se ha dividido por 3.

**352.** Si el binomio cuyo desarrollo se busca es una diferencia, se recordará que las potencias pares de una cantidad negativa son positivas, y las potencias impares negativas.

V. gr. : El desarrollo de $(x-a)^5$ será :

$$(x-a)^5 = x^5 - 5ax^4 + 10a^2x^3 - 10a^3x^2 + 5a^4x - a^5.$$

Se ve que los términos de orden impar son positivos y los de orden par negativos, porque $-a$ entra en ellos con exponente impar.

**353.** Si en la expresión $(x+a)^m$ se hace $x=1$ y $a=1$, el desarrollo se reduce a los coeficientes de los términos, y se tiene :

$$(1+1)^m = 2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1\times 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\times 2\times 3} \ldots \frac{m}{1} + 1.$$

Así la suma de los coeficientes de los términos del desarrollo de la potencia $m^{ma}$ de un binomio es $2^m$.

**354.** Restemos de los dos miembros el primer coeficiente 1 que no representa una combinación, queda :

$$2^m - 1 = C_m^1 + C_m^2 + C_m^3 \ldots . C_m^n \ldots . C_m^{m-1} + C_m^m.$$

Así la suma de todas las combinaciones que se pueden hacer con $m$ objetos tomándolos de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres.... de $m$ en $m$, es igual a $2^m - 1$.

Finalmente si en el binomio $(x-a)^m$ se hacen $a=1$ y $x=1$, el desarrollo se reduce a coeficientes alternativamente positivos y negativos (número 356), y su suma algebraica es $(1-1)^m$ o cero.

**355. Triángulo de Pascal.** — Se pueden encontrar inmediatamente los coeficientes de las potencias sucesivas de un binomio consultando la siguiente tabla, llamada triángulo aritmético o de Pascal.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | | | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | | | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | | | |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | | | |
| 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | | | |
| 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | | |
| 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 | |
| 1 | 11 | 55 | 165 | 330 | 462 | 462 | 330 | 165 | 55 | 11 | 1 |



La primera columna horizontal contiene los coeficientes de la primera potencia del binomio;

La segunda, los coeficientes de la segunda potencia;

La tercera, los coeficientes de la tercera potencia;

La $n^{ma}$, los coeficientes de la $n^{ma}$ potencia;

**356.** Para formar esta tabla, se escribe cierto número de veces 1 sobre una columna vertical.

Se forma una segunda columna, escribiendo la serie de los números naturales 1, 2, 3, 4...

Para formar la tercera columna, se escribe 1 frente al número 2, luego se suma cada uno de los números de la segunda columna con el número que está a la misma altura en la columna siguiente, y se dice :

| | | |
|---|---|---|
| $2 + 1 = 3$, | que se escribe debajo de | 1 |
| $3 + 3 = 6$, | — — | 3 |
| $4 + 6 = 10$, | — — | 6 |
| $5 + 10 = 15$, | — — | 10 |
| . . . . . . . . | . . . . . . . . | . . |

Para formar las otras columnas, se procede de la misma manera : así, para la cuarta se escribe 1 frente al 3, y se dice :

| | | |
|---|---|---|
| $3 + 1 = 4$, | que se escribe debajo de | 1 |
| $6 + 4 = 10$, | — — | 4 |
| $10 + 10 = 20$, | — — | 10 |
| $15 + 20 = 35$, | — — | 20 |
| . . . . . . . . | . . . . . . . . | . . |

**357. Fórmula del binomio en el caso de un exponente cualquiera.** — La fórmula ha sido establecida en el caso de $m$ entero y positivo. Pero todavía es exacta en el caso de $m$ fraccionario, negativo o inconmensurable. Admitiremos este teorema, cuya desmostración elemental es demasiado complicada. Se encontrará más tarde una demostración sencilla en nuestros *Elementos de Geometría analítica y de Cálculo infinitesimal.*

V. gr : Sea

$$(1+x)^{\frac{1}{2}};$$

se tiene

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{x^3}{3!} + \ldots$$

o
$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} \cdots$$

Se ve que, en estos casos, el desarrollo no tiene fin. **Los** términos que lo componen forman una serie.

Estos desarrollos en serie permiten á veces simplificar mucho los cálculos en la extracción de ciertas raíces.

V. gr. : Sea
$$\sqrt[3]{1,01}.$$

Haciendo $0,01 = x$, se tiene $\sqrt[3]{1+x}$ ó $[1+x]^{\frac{1}{3}}$.

Pero
$$[1+x]^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\frac{x^3}{3!} + \cdots$$
o
$$[1+x]^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} + \cdots$$

siendo $x^3 = 0,000001$, ya se puede prescindir del 4º término y de los que siguen, y, con $\frac{1}{1.000.000}$ de aproximación,
$$\sqrt[3]{1,01} = 1 + \frac{0,01}{3} - \frac{0,0001}{9} = 1,003322.$$

**358. Elevar un polinomio á una potencia dada.**

Sea
$$(a+b-c+d)^6.$$

Haciendo
$$a+b = a' \quad \text{y} \quad c-d = c'$$
se tiene
$$a+b-c+d = a'-c'$$
y
$$(a+b-c+d)^6 = (a'-c')^6$$
o
$$(a+b-c+d)^6 =$$
$$a'^6 - 6a'^5c' + 15a'^4c'2 - 20a'^3c'^3 + 15a'^2c'^4 - 6a'c'^5 + c'^6$$
o
$$(a+b)^6 - 6(a+b)^5(c-d) + 15(a+b)^4$$
$$(c-d)^2 - 20(a+b)^3(c-d)^3 + 15(a+b)^2(c-d)^4 - \ldots + (c-d)^6.$$

Después se desarrollan las potencias sucesivas de $(a+b)$



y de $(c-d)$, y se efectuan los cálculos. El desarrollo completo tendrá :
$$7 + 6\times 2 + 5\times 3 + 4\times 4 + 3\times 5 + 2\times 6 + 7 = 84 \text{ términos.}$$

**359. Extracción de la raíz cuadrada de un polinomio entero en $x$.**

El cuadrado de un polinomio
$$P = a + b + c + d + \ldots + k + l$$
puede escribirse
$$\begin{aligned} P^2 = a^2 &+ 2ab + b^2 \\ &+ 2(a+b)c + c^2 \\ &+ 2(a+b+c)d + d^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ 2(a+b+c+d+\ldots+k)l + l^2. \end{aligned}$$

En efecto, el segundo miembro de la igualdad contiene la suma de los cuadrados de todos los términos más el doble producto de los términos del polinomio tomados de dos en dos.

Sea el polinomio :
$$4x^6 - 12x^5 + 13x^4 - 22x^3 + 25x^2 - 8x + 16$$
que supondremos ser un cuadrado perfecto, y ordenado con respecto a las potencias decrecientes de $x$.

Si representamos por $P^2$ este polinomio, y su raíz cuadrada por $P = a + b + c + d$, las letras $a$, $b$, $c$, $d$ representan los términos desconocidos de esta raíz, ordenados con respecto a las potencias decrecientes de $x$. Tendremos pues la identidad :
$$\begin{aligned} P^2 &= 4x^6 - 12x^5 + 13x^4 - 22x^3 + 25x^2 - 8x + 16 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2. \end{aligned}$$

De donde
$$4x^6 = a^2 \quad \text{y} \quad a = \pm 2x^3.$$

Tomenos solo $a = +2x^3$ y restemos su cuadrado $a^2 = 4x^6$ del polinomio $P^2$.

Dividiendo ahora el primer término de la resta $-12x^5 = 2ab$ por $2a = 4x^3$, encontraremos el segundo término de la raíz $b = -3x^2$.

Multipliquemos $2a + b = 4x^3 - 3x^2$ por $b = -3x^2$ y restemos el producto $-12x^5 + 9x^4$ de la primera resta.

Dividiendo ahora el primer término de la segunda resta

$4x^4 = 2ac$ por el duplo del primer término de la raíz $4x^3 = 2a$, encontraremos el tercer término $x = c$.

Añadamos el tercer término $x$ al duplo de los dos primeros; multipliquemos la suma $4x^3 - 6x^2 + x = 2(a + b) + c$ por $x = c$, y restemos el producto $4x^4 - 6x^3 + x^2$ de la segunda resta.

Dividiendo el primer término de la tercera resta $-16x^3 = 2ad$ por el duplo del primer término de la raíz, $4x^3 = 2a$, encontraremos el cuarto término de la raíz : $-4 = d$.

Multipliquemos por $-4$ la suma $4x^3 - 6x^2 + 2x - 4 = 2(a + b + c) + d$ y restemos de la tercera resta el producto obtenido. Siendo nula la nueva resta, la raíz cuadrada del polinomio $P^2$ es $2x^3 - 3x^2 + x - 4$. Si hubiéramos tomado $-2x^3$ como valor del primer término, tendríamos otra raíz cuadrada de $P^2$, igual a $-(2x^3 - 3x^2 + x - 4)$.

**360. Regla.** — ***Para extraer la raíz cuadrada de un polinomio :***

1° ***Se ordena el polinomio con respecto á las potencias decrecientes de una misma letra;***

2° *Se extrae la raíz cuadrada del primer término; se obtiene así el primer **término de la raíz**, cuyo cuadrado se resta del polinomio;*

3° *Se divide el segundo término del polinomio por el duplo de la raíz cuadrada del primero, y el cociente, que es el segundo término de **la raíz**, se escribe con su signo a la derecha del duplo del primero;*

4° *Se multiplica la suma obtenida por el segundo término de la raíz, y el producto obtenido se resta de la primera resta;*

5° *Se divide el primer término de la segunda resta por el duplo del primer término de la raíz, y el cociente, que es el tercer término de la raíz, se escribe a la derecha del duplo de los dos primeros;*

6° *Se multiplica la suma obtenida por el tercer término, y el producto se resta de la segunda resta;*

7° *Se continúa de la misma manera hasta que la resta resulte nula.*

**Observaciones.** — Para que un polinomio ordenado con respecto a las potencias decrecientes de una misma letra sea un cuadrado perfecto, es indispensable;

1° que el primer término y el último sean positivos y cuadrados perfectos;

2° que el primer término de cada resta que se obtiene al



efectuar la operación sea divisible por el duplo del primer término de la raíz;

3° que la última resta sea nula.

Disposición de la operación :

$$
\begin{array}{l|l}
4x^6 - 12x^5 + 13x^4 - 22x^3 + 25x^2 - 8x + 16 & 2x^3 - 3x^2 + x - 4 \\
\hline
-4x^6 & (4x^3 - 3x^2)(-3x^2) = -12x^5 + 9x^4 \\
0 - 12x^5 + 13x^4 - 22x^3 + 25x^2 - 8x + 16 & (4x^3 - 6x^2 + x)\,x = 4x^4 - 6x^3 + x^2 \\
\phantom{0 -} 12x^5 - 9x^4 & (4x^3 - 6x^2 + 2x - 4)(-4) = \\
\qquad 4x^4 - 22x^3 + 25x^2 - 8x + 16 & -16x^3 + 24x^2 - 8x + 16. \\
\qquad -4x^4 + 6x^3 - x^2 & \\
\qquad\qquad -16x^3 + 24x^2 - 8x + 16 & \\
\qquad\qquad 16x^3 - 24x^2 + 8x - 16 & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

**361. Extracción de la raíz $m^a$ de un polinomio.**

**Regla.** — La raíz $m^a$ de un polinomio que sea la potencia

$m^a$ exacta de otro polinomio, se extrae del modo siguiente :

1° *Se obtiene el primer término de la raíz extrayendo la raíz* $m^a$ *del primer término del polinomio ordenado con respecto a las potencias decrecientes de una misma letra;*

2° *El segundo término de la raíz se obtiene dividiendo el segundo término del polinomio así ordenado por* m *veces la potencia* m — 1 *del primer término;*

3° *Para obtener el tercer término, se eleva á la potencia* $m^a$ *el binomio formado por los dos primeros términos; el resultado se resta del polinomio dado, y el primer término de la resta se divide por* m *veces la potencia* m — 1 *del primer término de la raíz;*

4° *Para obtener un término cualquiera, el* $n^{mo}$, *se eleva a la potencia* $m^a$ *el polinomio formado por los* n — 1 *términos ya encontrados; el resultado se resta del polinomio dado, y el primer término de la resta se divide por* m *veces la potencia* m — 1 *del primer término de la raíz.*

Sea

$$\sqrt[3]{27x^6 + 54ax^5 + 9a^2x^4 - 28a^3x^3 - 3a^4x^2 + 6a^5x - a^6}$$

Tenemos :

$$\sqrt[3]{27x^6} = 3x^2;$$

es el primer término de la raíz.

El segundo término será :

$$54ax^5 \div 3(3x^2)^2 = 2ax.$$

Restando del polinomio dado el cubo

$$(3x^2 + 2ax)^3$$

o

$$27x^6 + 54ax^5 + 36a^2x^4 + 8a^3x^3$$

tendremos la resta

$$-27a^2x^4 - 36a^3x^3 - 3a^4x^2 + 6a^5x - a^6.$$

Dividiendo $-27a^2x^4$ por $3(3x^2)^2$, tendremos el tercer término $-a^2$ de la raíz.

Elevando al cubo la raíz encontrada

$$3x^2 + 2ax - a^2$$

obtenemos precisamente el polinomio dado : luego la raíz encontrada es exacta.

# LIBRO V

# PROGRESIONES

362. Progresión *es una sucesión de números o términos tales que la relación entre dos términos consecutivos es constante.*

Así como hay dos clases de razones, hay también dos clases de progresiones : las *progresiones aritméticas* y las *progresiones geométricas.*

## CAPÍTULO I

## PROGRESIONES ARITMÉTICAS

### § I. — Definiciones y propiedades.

**363. Definición.** — **Progresión aritmética** *es una serie de términos tales que cada uno de ellos es igual al que le antecede aumentado con una cantidad constante llamada* razón *de la progresión.*

La progresión aritmética es *creciente* cuando la razón es positiva; es *decreciente* cuando la razón es negativa.

Ejemplos :

$$\div 2.4.6.8.10.12.14.16.18......$$
$$\div 96.92.88.84.80.76.72.68......$$

La primera progresión es creciente, y su razón es $+2$.

La segunda es decreciente y su razón es $-4$.

**364. Teorema.** — *En toda progresión aritmética, un término cualquiera es igual al primero, más tantas veces la razón como términos hay antes de él.*

Sea la progresión :

$$\div a.b.c.d.e.f.g.h......l.$$

Conforme a la definición, el segundo término $b$ es igual al primero más la razón que llamaremos $r$, esto es :

$$b = a + r$$

Conforme a la misma definición, el tercer término $c$ es igual al segundo $b$, más la razón; pero como $b = a + r$.

$$c = a + 2r$$

Del mismo modo, el cuarto término $d$ es igual al tercero $c$, más la razón; pero como $c = a + 2r$,

$$d = a + 3r$$

y así sucesivamente.

Se ve que el segundo término es igual al primero más una vez la razón; el tercero es igual al primero más dos veces la razón; el cuarto es igual al primero más tres veces la razón, etc.

En general, si se designa por $l$ un término de un orden cualquiera $n$, y por $a$ el primer término de la progresión, se tiene :

$$l = a + (n - 1)r. \qquad (1)$$

De esta propiedad resulta que una progresión aritmética

$$\div a . b . c . d . e . f ...... l$$

puede escribirse :

$$\div a . a + r . a + 2r . a + 3r ...... a + (n - 1)r.$$

De la fórmula $l = a + (n - 1)r$ se saca :

$$a = l - (n - 1)r$$

$$n = \frac{l - a}{r} + 1$$

$$r = \frac{l - a}{n - 1}.$$

**365. Teorema.** — *En toda progresión aritmética, la suma de dos términos equidistantes de los extremos es constante e igual a la suma de los extremos.*

Sea la progresión :

$$\div a . b . c . d ...... h . i . k . l$$

Consideremos los términos $c$ e $i$, que están a igual distancia de los extremos :

Se tiene (núm. 364) :

$$c = a + 2r. \qquad (1)$$

Se tiene también :

$$l = i + 2r, \quad \text{de donde} \quad i = l - 2r. \qquad (2)$$



Sumemos miembro á miembro las igualdades (1) y (2) y resulta :

$$c + i = a + l.$$

En general, sean $d$ y $h$ dos términos de *órdenes* tales, que haya $m$ términos antes de $d$ y $m$ términos después de $h$, siendo $a$ y $l$ los extremos, se tendrá :

$$d = a + mr \qquad (1)$$

y

$$l = h + mr; \quad \text{de donde} \quad h = l - mr. \qquad (2)$$

Sumando las igualdades (1) y (2), se encuentra, después de la reducción :

$$d + h = a + l.$$

**Observación.** — Cuando el número de términos de la progresión es impar, *el término de enmedio es igual á la semisuma de los términos extremos.*

**366. Problema.** — *Encontrar la suma de los términos de una progresión aritmética.*

Sea una progresión de $n$ términos,

$$\div a . b . c ...... h . k . l$$

se tendrá por expresión de la suma :

$$S = a + b + c + ...... h + k + l$$

o

$$S = l + k + h + ...... c + b + a.$$

Sumando miembro a miembro :

$$2S = (a + l) + (b + k) + (c + h) ......$$
$$+ (h + c) + (k + b) + (l + a).$$

Cada paréntesis contiene : sea la suma de los dos extremos, sea la de dos términos equidistantes de los extremos; los valores de estos paréntesis son por lo mismo iguales. Y como hay tantos paréntesis como términos tiene la progresión, se puede escribir :

$$2S = (a + l)n$$

de donde

$$S = \frac{(a + l)n}{2}. \qquad (1)$$

Así *la suma de los términos de una progresión aritmética se obtiene multiplicando la semisuma de los extremos por el número de términos.*

**367. Observación.** — Si en esta fórmula se reemplaza el $n^{mo}$ término $l$ por su valor $a+(n-1)r$, se encuentra :

$$S=\frac{[a+a+(n-1)r]n}{2}=\frac{n}{2}[2a+(n-1)r]. \qquad (2)$$

Esta segunda fórmula permite calcular la suma de los términos de una progresión en función de $a$, $n$ y $r$.

**368. Definición.** — *Se llaman* **medios aritméticos**, *ó diferenciales, los números que forman con dos números dados una progresión aritmética en la cual los números dados son los extremos.*

Así los números 5, 7, 9, que forman con 3 y 11 una progresión aritmética cuyos extremos son 3 y 11, son medios aritméticos.

**369. Problema.** — *Interpolar entre* a *y* b, m *medios aritméticos.*

Busquemos la razón de la progresión.

Esta progresión tendrá $m+2$ términos; a saber, los $m$ medios, más los dos términos dados.

Luego (núm. 364)

$$b=a+(m+1)r$$

de donde

$$r=\frac{b-a}{m+1}. \qquad (3)$$

Así *la razón de la progresión se obtiene dividiendo la diferencia entre el último término y el primero, por el número de medios por interpolar más uno.*

Conocida ya la razón, se suma con el primer término, y se obtiene el primer medio; se suma en seguida con el primer medio, y se obtiene el segundo, etc.

**370 Observación.** — Si entre los términos consecutivos de una progresión aritmética se interpola un mismo número de medios, las progresiones parciales así obtenidas forman una sola y única progresión.

En efecto, la razón de estas progresiones es la misma, puesto que se ha obtenido dividiendo la *diferencia constante* de dos términos consecutivos por el *número de medios por interpolar más uno*. **Además**, el último término de la primera progresión es el primero de la segunda, el último de la segunda es el primero de la tercera, y así consecutivamente. Luego todas estas progresiones parciales forman una sola y única progresión.



## § II. — Aplicaciones.

**371.** 1° *Encontrar el 30° número impar.*

Los números impares forman una progresión ÷ 1.3.5.7.9 cuya razón es 2.

Se tendrá (núm. 364) $l=a+(n-1)r$;

El 30° término $=1+29\times 2=59$.

2° *Encontrar el 21° término de la progresión*

÷ 80.75.70.65.60....

El 21° término $=80+20\times(-5)=-20$.

3° *Encontrar la suma de los términos de la progresión* ÷ 3.8.13.18... *compuesta de 40 términos.*

El 40° término $=3+5\times 39=198$.

$$S=\frac{(3+198)\,40}{2}=4\,020.$$

La fórmula (2) da inmediatamente :

$$S=\frac{40}{2}(6+39\times 5)=4\,020.$$

4° *Encontrar la suma de los* n *primeros números impares.*

1.3.5.7.9.11.13......

La fórmula (2) da inmediatamente :

$$S=\frac{n}{2}[2+(n-1)2]=n^2.$$

Así la suma de los $n$ primeros números impares es igual al cuadrado de $n$.

Según esto, los 20 primeros números impares tienen por suma 400.

5° *Interpolar 10 medios aritméticos entre 2 y 24.*

Se tiene conforme a la fórmula (3) :

$$r=\frac{24-2}{11}=2.$$

La progresión será :

$$\div 2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.22.24.$$

6º *Interpolar* 5 *medios aritméticos entre* 80 *y* 50.

Se tiene :

$$r = \frac{50 - 80}{6} = -5.$$

La progresión será :

$$\div 80.75.70.65.60.55.50.$$

7º *Interpolar* 3 *medios aritméticos entre los términos consecutivos de la progresión* ÷ 5.13.21.29.37.

La razón de las progresiones parciales será :

$$\frac{13-5}{4}, \quad \frac{21-13}{4}, \quad \frac{29-21}{4}, \quad \frac{37-29}{4}$$

es decir $\frac{8}{4}$ o 2.

Se tendrá sucesivamente :

$$\begin{array}{l} \div\ 5.\ 7.\ 9.11.13 \\ :13.15.17.19.21 \\ :21.23.25.27.29 \\ :29.31.33.35.37 \end{array}$$

que se puede escribir :

$$\div 5.7.9.11.13.15.17.19.21.23.25....$$

y no hay más que una sola y única progresión.

---

# CAPÍTULO II

## PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

### § I. — Definiciones y propiedades.

**372. Definición.** — **Progresión geométrica** *es una serie de términos tales que cada uno de ellos es igual al que le precede*



*multiplicado por un número constante llamado* **razón** *de la progresión.*

La progresión geométrica es *creciente* cuando la razón es mayor que 1; es *decreciente* cuando la razón es una fracción.

EJEMPLOS :

$$\because\!\!\because 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : ......$$

$$\because\!\!\because 81 : 27 : 9 : 3 : 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : ......$$

La primera progresión es creciente y su razón es 2.

La segunda es decreciente y su razón es $\frac{1}{3}$.

**373. Teorema.** — *En toda progresión geométrica un término cualquiera es igual al primero multiplicado por la razón elevada a una potencia indicada por el número de términos que le preceden.*

Sea la progresión :

$$\because\!\!\because a : b : c : d : e : f : g : ...... l$$

Conforme a la definición, el segundo término $b$ es igual al primero $a$, multiplicado por la razón, que designaremos por $q$, o sea

$$b = aq.$$

Conforme a la definición también,

$$c = bq$$

de donde

$$c = aq^2.$$

Del mismo modo

$$d = aq^3$$

y así consecutivamente.

Se ve que el segundo término es igual al primero multiplicado por la razón; que el tercero es igual al primero multiplicado por la segunda potencia de la razón, etc.

En general, si se representa por $l$ un término de un orden cualquiera $n$ y por $a$ el primer término de la progresión, se tiene :

$$l = aq^{n-1}. \qquad (1)$$

De esta propiedad resulta que la progresión

$$\because\!\!\because a : b : c : d : e : ...... l$$

puede escribirse

$$\div\!\div\ a : aq : aq^2 : aq^3 : \ldots\ldots aq^{n-1}.$$

De la fórmula $l = aq^{n-1}$, se saca

$$a = \frac{l}{q^{n-1}}$$

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}\ ^*$$

374. **Observación.** — *En toda progresión geométrica creciente, los términos aumentan constantemente y acaban por exceder a cualquiera cantidad dada, y en toda progresión decreciente los términos disminuyen sin cesar y llegan á ser menores que cualquiera cantidad dada.*

Para demostrar esta propiedad basta establecer el siguiente teorema :

375. **Teorema.** — *Las potencias sucesivas de un número mayor que 1 crecen al mismo tiempo que sus exponentes.*

Sea $q$ una cantidad mayor que 1.

Se tiene

$$q > 1$$

de donde, multiplicando los dos miembros por $q^{n-1}$,

$$q^n > q^{n-1}.$$

Así, una potencia cualquiera es mayor que la potencia inmediatamente inferior.

Llamando $\alpha$ el exceso de $q$ sobre 1, siendo $\alpha$ una cantidad positiva, se tiene :

$$q - 1 = \alpha.$$

Ahora, si se multiplica el primer miembro sucesivamente por $q$, $q^2$, $q^3$......, sin tocar el segundo, se tendrá una serie de desigualdades :

$$\begin{aligned} q - 1 &= \alpha \\ q^2 - q &> \alpha \\ q^3 - q^2 &> \alpha \\ &\ldots\ldots \\ q^n - q^{n-1} &> \alpha. \end{aligned}$$

* Más tarde se dirá (núm. 431) el modo de despejar $a$ $n$.



Sumando miembro a miembro la primera igualdad y las desigualdades que siguen, los términos intermediarios se destruyen, y queda :

$$q^n - 1 > n\alpha$$

y por consiguiente $q^n > n\alpha + 1$.

Ahora bien, para que $q^n$ sea mayor que una cantidad dada A, basta que se tenga :

$$n\alpha + 1 > A$$

de donde

$$n > \frac{A-1}{\alpha}.$$

Así, cuando el exponente $n$ de la potencia es mayor que $\frac{A-1}{\alpha}$, sucede que $q^n$ también es mayor que A.

376. 1° Consideremos ahora una progresión geométrica creciente

$$\div\!\div : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : \ldots\ldots aq^n.$$

En el término $aq^n$, el factor $q^n$ puede llegar a ser mayor que cualquier cantidad dada; luego lo mismo sucederá con el producto $aq^n$. Luego (núm. 374)......

2° Sea la progresión decreciente

$$\div\!\div\ aq' : aq'^2 : aq'^3 : \ldots\ldots aq'^n.$$

Siendo la razón $q'$ menor que 1, es una fracción que podemos representar por $\frac{1}{q}$, y la progresión se convierte en

$$\div\!\div\ \frac{a}{q} : \frac{a}{q^2} : \frac{a}{q^3} : \ldots\ldots \frac{a}{q^n}.$$

Como se ha visto en el número anterior, el denominador $q^n$ del término $\frac{a}{q^n}$, puede llegar a ser mayor que cualquier cantidad dada; el numerador permanece invariable; luego la fracción $\frac{a}{q^n}$ decrece más y más.

377. **Teorema.** — *En toda progresión geométrica, el producto de dos términos equidistantes de los extremos es constante e igual al producto de los extremos.*

Sea la progresión :

$$\div\div\, a : b : c : d \ldots\ldots : h : i : k : l.$$

Consideremos los términos $c$ e $i$, que están á igual distancia de los extremos.

Se tiene (núm. 373) : $c = aq^2$. (1)

Se tiene también $l = iq^2$, de donde $i = \frac{l}{q^2}$. (2)

Multiplicando miembro a miembro las igualdades (1) y (2), queda :

$$ci = \frac{aq^2 l}{q^2} = al.$$

En general, sean $d$ y $h$ dos términos de órdenes tales que haya $m$ términos antes que $d$ y $m$ términos después de $h$, siendo $a$ y $l$ los dos extremos, se tendrá :

$$d = aq^m \qquad (1)$$

y $l = hq^m$, de donde

$$h = \frac{l}{q^m}. \qquad (2)$$

Multiplicando las igualdades (1) y (2)

$$dh = \frac{aq^m l}{q^m} = al.$$

**378. Observación.** — Cuando el número de términos de la progresión es impar, *el término medio es igual a la raiz cuadrada del producto de los extremos.*

**379. Teorema.** — *El producto de los términos de una progresión geométrica es igual a la raiz cuadrada del producto de los extremos elevado a una potencia marcada por el número de términos.*

Sea la progresión

$$\div\div\, a : b : c : \ldots\ldots h : k : l.$$

Llamando P el producto y $n$ el número de términos, se tiene

$$P = abc \ldots\ldots hkl$$

o

$$P = lkh \ldots\ldots cba.$$

Multiplicando miembro a miembro estas igualdades, queda :



$$P^2 = al \times bk \times ch \ldots\ldots hc \times kb \times la.$$

Pero (núm. 377) $al = bk = ch \ldots\ldots$; y hay en el segundo miembro $n$ productos tales como $al$, $bk$, $ch \ldots\ldots$; se tiene pues :

$$P^2 = (al)^n = a^n l^n$$

de donde

$$P = \sqrt{a^n l^n}.$$

**380. Observación.** — Substituyendo por $l$ su valor $aq^{n-1}$, esta fórmula se convierte en :

$$P = \sqrt{a^n a^n q^{n(n-1)}} = \sqrt{a^{2n} \times q^{n(n-1)}}.$$

Por otra parte, ya sea $n$ par o ya sea impar, el producto $n(n-1)$ de dos números enteros consecutivos siempre es divisible por 2, y la extracción de la raíz es posible; luego

$$P = a^n \times q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

**381. Problema.** — *Encontrar la suma de los términos de una progresión geométrica.*

Sea una progresión de $n$ términos

$$\div\div\, a : b : c \ldots\ldots : h : k : l.$$

Se tiene

$$S = a + b + c + \ldots\ldots h + k + l. \qquad (1)$$

Multiplicando por $q$ los dos miembros de esta igualdad :

$$Sq = aq + bq + cq + \ldots\ldots hq + kq + lq. \qquad (2)$$

Restando miembro a miembro la primera igualdad de la segunda, observando que $aq = b$, $bq = c \ldots\ldots hq = k$, $kq = l$.

$$Sq - S = b + c + \ldots\ldots, + k + l + lq - a - b - c \ldots\ldots, - k - l$$

$$S(q-1) = lq - a$$

$$S = \frac{lq - a}{q - 1}. \qquad (3)$$

Así, *la suma de los términos de una progresión geométrica es igual al último término multiplicado por la razón, menos el primero, y todo dividido por la razón menos 1.*

Si substituimos por $l$ su valor $aq^{n-1}$, la fórmula (3) se convierte en

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}. \qquad (4)$$

**382.** Cuando se quiere calcular la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente, se pueden cambiar los signos de las fórmulas (3) y (4) a fin de hacer los términos positivos; se tiene entonces :

$$S = \frac{a - aq^n}{1 - q} \quad y \quad S = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}. \qquad (5)$$

**383. Observación.** — Se llega más fácilmente a la fórmula (4) procediendo como sigue :

La progresión geométrica :

$$\dot{\dot{\div}}\, a : b : c : d : ...... l$$

puede escribirse (núm. 373).

$$\dot{\dot{\div}}\, a : aq : aq^2 : aq^3 : ...... aq^{n-1}$$

y se tiene.

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + ...... aq^{n-1}$$
$$S = a(1 + q + q^2 + q^3 + ...... q^{n-1}).$$

Como el paréntesis es el cociente de $q^n - 1$ por $q - 1$, resulta (núm. 95) :

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

**384. Discusión.** — 1° La suma S será siempre del mismo signo que $a$, porque si se tiene $q > 1$, los dos términos $q^n - 1$ y $q - 1$ son ambos positivos; si se tiene $q < 1$, $q^n - 1$ y $q - 1$ son negativos, y el cociente $\frac{q^n - 1}{q - 1}$ permanece positivo.

2° Cuando $q = 1$, la fórmula se convierte en $S = \frac{0}{0}$. Para quitar la indeterminación, basta observar que $q^n - 1$ es divisible por $q - 1$.

Efectuada la división, se encuentra :

$$S = a(q^{n-1} + q^{n-2} + ...... q^2 + q + 1).$$

Si se hace ahora $q = 1$, cada uno de los términos del paréntesis se reduce a 1; y como hay $n$ términos, se tiene :

$$S = an$$

resultado fácil de prever, porque cuando la razón es 1, todos los términos de la progresión son iguales



**385.** Busquemos el *límite*, es decir, el valor fijo al cual se va acercando la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente.

Se tiene (5) :

$$S = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}.$$

Bajo esta forma se ve que la suma S se compone de una parte fija $\frac{a}{1 - q}$ y de una parte variable $-\frac{aq^n}{1 - q}$, la cual tiende hacia cero, cuando $n$ crece indefinidamente; porque la razón $q$ es una fracción, y el factor $q^n$ es tanto menor cuanto mayor es $n$ (núm. 376, 2°).

Luego la suma de los términos tiende hacia $\frac{a}{1 - q}$, y se tiene :

$$\text{límite } S = \frac{a}{1 - q}.$$

Así *el límite de la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente es igual al primer término dividido por 1 menos la razón.*

**386.** Se llaman *medios geométricos* o *proporcionales* los números que forman con otros dos números dados una progresión geométrica, en la cual los números dados son los extremos.

**387. Problema.** — *Interpolar* m *medios geométricos entre* a *y* b.

Busquemos la razón de la progresión.

Esta progresión tendrá $m + 2$ términos, a saber los $m$ medios y los dos términos dados.

Según esto $b = aq^{m+1}$ (núm. 373).

de donde

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}.$$

Luego, *se encuentra la razón extrayendo del cociente del último término por el primero, una raíz marcada por el número de medios por interpolar, más 1.*

Obtenida así la razón, se multiplica ésta por el primer término y se obtiene el primer medio; se multiplica este primer medio por la razón, y se obtiene el segundo, etc., etc.

**388. Observación.** — Si entre los términos consecutivos de una progresión geométrica se interpola un mismo número de medios, las progresiones parciales así obtenidas forman una sola y única progresión.

En efecto, la razón de estas progresiones es la misma, puesto que para cada una de ellas, se la obtiene *extrayendo del cociente constante* de dos términos consecutivos *una raíz marcada por el número de medios por interpolar más* 1. Además, el último término de la primera progresión es el primero de la segunda, el último de la segunda es el primero de la tercera y así consecutivamente. Luego todas estas progresiones parciales formarán una sola y única progresión.

## § II. — Aplicaciones.

**389.** 1° *Encontrar el* 11° *término de la progresión :*

$$∺ 1 : 2 : 4 : 8 : \ldots.$$

El 11° término $= 1 \times 2^{10}$, o 1 024.

2° *Encontrar el* 9° *término de la progresión* $∺ 9 : 3 : 1 : \frac{1}{3} : \ldots.$

El 9° término $= 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^8 = \frac{1}{729}$.

3° *Encontrar la suma de los diez primeros términos de la progresión :*

$$∺ 2 : 4 : 8 : 16 : \ldots.$$

La fórmula (4) del núm. 381 da :

$$S = \frac{2(2^{10}-1)}{2-1} = 2\,046.$$

4° *Encontrar la suma de los ocho primeros términos de la progresión :*

$$∺ 27 : 9 : 3 \ldots.$$

La fórmula $\frac{a(1-q^n)}{1-q}$ da :

$$= \frac{27\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^8\right]}{1-\frac{1}{3}} = \frac{27}{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{1}{6\,561}\right) = \frac{27 \times 6\,560 \times 3}{2 \times 6\,561} = \frac{3\,280}{81}$$



5° *Encontrar el límite de la suma de los términos de la progresión :*

$$∺ \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \ldots.$$

Se tiene (núm. 385) :

$$\text{límite} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

6° *Encontrar el límite de la fracción periódica simple* 0,54545454 ....

Esta fracción puede ponerse bajo la forma :

$$\frac{54}{100} + \frac{54}{(100)^2} + \frac{54}{(100)^3} + \frac{54}{(100)^4} \ldots.$$

Esta es una progresión geométrica decreciente cuya razón es $\frac{1}{100}$. Se tendrá pues :

$$\text{límite} = \frac{\frac{54}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{54}{99}.$$

7° *Interpolar tres medios geométricos entre* 2 *y* 162.

Se tiene (núm. 387)

$$q = \sqrt[4]{\frac{162}{2}} = \sqrt[4]{81} = 3.$$

La progresión es

$$∺ 2 : 6 : 18 : 54 : 162.$$

8° *Interpolar dos medios geométricos entre* 1 024 *y* 16

Se tiene

$$q = \sqrt[3]{\frac{16}{1\,024}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}.$$

La progresión es

$$∺ 1\,024 : 256 : 64 : 16.$$

9° *Interpolar tres medios geométricos entre los términos consecutivos de la progresión*

$$∺ 2 : 32 : 512 : 8\,192 : 131\,072.$$

La razón de las progresiones parciales será (núm. 387) :

$$\sqrt[4]{\frac{32}{2}},\quad \sqrt[4]{\frac{512}{32}},\quad \sqrt[4]{\frac{8\,192}{512}},\quad \sqrt[4]{\frac{131\,072}{8\,192}}$$

es decir $\sqrt[4]{16} = 2$.

Se tendrá sucesivamente :

÷ 2 : 4 : 8 : 16 : 32
÷ 3 : 64 : 128 : 256 : 512
÷ 512 : 1 024 : 2 048 : 4 096 : 8 192
÷ 8 192 : 16 384 ....

que se puede escribir :

2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1 024 : 2 048 ....

y no resulta más que una sola y única progresión.

# LIBRO VI

# LOGARITMOS Y ECUACIONES EXPONENCIALES

## CAPÍTULO I

## LOGARITMOS

### § I. — Definiciones y propiedades.

390. — **Definición.** — *Se llama logaritmo de un número el exponente de la potencia a que es preciso elevar otro número llamado base para reproducir el número dado.*

Cuando se tiene $a^x = b$, se dice que $x$ es el logaritmo de $b$ en el sistema cuya base es $a$, y se escribe $x = \log b$.

391. **Números que tienen un logaritmo.** — Notemos que $a$ es siempre un número positivo; todas sus potencias son positivas: luego, *sólo los números positivos tienen un logaritmo.*

Pero, no se sabe a priori si siempre se podrá encontrar $x$ tal que $a^x = b$, siendo conocidos $a$ y $b$. Demostraremos en el teorema siguiente que no sólo las potencias enteras ó fraccionarias de $a$ tienen logaritmos, sino también los números intermedios.

392. **Teorema.** — *En cualquier sistema, todo número positivo tiene su logaritmo.*

Sea $a$ la base; digo que siempre se puede encontrar $x$ tal que $a^x = b$, siendo $b$ un número positivo.

Supongamos $a > 1$.

1º *Sus potencias positivas crecen al mismo tiempo que sus exponentes y llegan a ser mayores que cualquier número* (nº 375).

2º *Sus potencias negativas pueden considerarse como siendo* *las potencias de $\frac{1}{a}$ que es menor que 1; luego, disminuyen sin cesar y llegan a ser menores que cualquiera cantidad dada* (nº 374).

3º *La cantidad* $a^x$ *crece por grados insensibles, cuando* $x$ *crece por grados insensibles.*

Para demostrarlo basta mostrar que se puede dar a $x$ un incremento $h$ bastante pequeño para que la cantidad $a^x$ crezca tan poco como se quiera.

Sea $m$ un valor conmensurable de $x$; si se le da a $m$ un incremento $h$ suficientemente pequeño, la diferencia

$$a^{m+h} - a^m$$

será tan pequeña como se quiera.

En efecto, esta diferencia puede escribirse

$$a^{m+h} - a^m = a^m(a^h - 1) \qquad (1)$$

como $a^m$ es una cantidad determinada que no tiende ni hacia cero, ni hacia el infinito, la expresión (1) tenderá hacia cero al mismo tiempo que $(a^h - 1)$.

Por hipótesis, siendo $h$ muy pequeña, se puede poner $h = \frac{1}{n}$, y basta demostrar que se tiene

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \delta$$

siendo la cantidad $\delta$ tan pequeña como se quiera.

De $\qquad a^{\frac{1}{n}} - 1 < \delta$

se saca $\qquad a^{\frac{1}{n}} < 1 + \delta$

$$a < (1 + \delta)^n$$

Como $1 + \delta$ es mayor que 1, $(1 + \delta)^n$ crecerá indefinidamente (número 375) con $n$; la desigualdad anterior puede, pues, verificarse siempre, y como $h$ tiende hacia cero cuando $n$ aumenta indefinidamente, el aumento se hace por grados insensibles, y queda demostrado el teorema.

4º *La cantidad* $a^x$ *no toma más que una sola vez el mismo valor.*

Acabamos de ver que la cantidad $a^x$ es continua; es decir, que si se hace crecer $x$ de un valor $\delta$ á un valor $\beta$, esta cantidad tomará todos los valores intermedios entre $a^\delta$ y



$a^\beta$, de manera que si se supone $a > 0$ y se hace variar $x$ de una manera continua de 0 a $+\infty$, $a^x$ tomará todos los valores desde 1 hasta $+\infty$; y si se le dan a $x$ todos los valores desde 0 hasta $-\infty$, la función $a^x$ tomará todos los valores desde 1 hasta 0, porque

$$a^0 = 1 \quad \text{y} \quad a^{-\infty} = \frac{1}{a^\infty} = 0.$$

Luego si $x$ varía de $-\infty$ a $+\infty$, la función $a^x$ toma todos los valores desde 0 hasta $+\infty$; pero esta función no puede pasar más que una sola vez por cada valor.

En efecto, supongamos que $a^x$ haya tomado dos valores iguales para $x = \delta$ y $x = \delta'$, de manera que se tenga $a^\delta = a^{\delta'}$.

Podremos hacer $\frac{a^\delta}{a^{\delta'}} = 1 = a^{\delta - \delta'}$; como esta última expresión no puede valer 1 sino cuando el exponente de $a$ es nulo, es decir, cuando se tiene $\delta = \delta'$; la función no toma más que una vez el mismo valor.

**393.** Cuando $a < 1$, sus potencias positivas disminuyen sin cesar y llegan a ser menores que cualquier número positivo dado; sus potencias negativas pueden considerarse como siendo las potencias de $\frac{1}{a}$, que es mayor que 1; luego crecen y llegan a ser mayores que cualquier número.

En todos los casos, $a^x$ toma todos los valores positivos.

**394. Propiedades de los logaritmos.**

1º *El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.*

Sean $a^x = b$, $a^y = c$, $a^z = d$; se tiene $a^{x+y+z} = bcd$, y conforme á la definición, $x + y + z$ será el logaritmo de $bcd$.

2º *El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos del dividendo y del divisor.*

Sean $a^x = b$, $a^y = c$; se tiene $\frac{a^x}{a^y} = \frac{b}{c} = a^{x-y}$, y conforme á la definición $x - y$ será el logaritmo de $\frac{b}{c}$.

3º *El logaritmo de la* n*ma* *potencia de un número es igual a* n *veces el logaritmo de este número.*

Sea $a^x = b$; se tendrá $a^{nx} = b^n$, y $nx$ será el logaritmo de $b^n$.

4º *El logaritmo de una raiz es igual al logaritmo del número dividido por el índice de la raiz.*

Sea $a^x = b$, $\sqrt[m]{b} = b^{\frac{1}{m}}$; en consecuencia $a^{\frac{x}{m}} = b^{\frac{1}{m}}$, y $\frac{x}{m}$ será el logaritmo de $\sqrt[m]{b}$.

5° *En un sistema cualquiera de logaritmos, el logaritmo de 1 es cero, y el logaritmo de la base del sistema es 1.*

En efecto, sea cual fuere $a$, se tiene $a^0 = 1$; luego $\log 1 = 0$ y $a^1 = a = a$; luego $\log a = 1$. Se puede también deducir que $\log. 0 = -\infty$; porque $a^{-\infty} = 0$.

**395. Diferentes sistemas de logaritmos.** — Puede tomarse un número positivo cualquiera como base de un sistema de logaritmos. Se pueden concebir así una infinidad de sistemas. Los dos sistemas generalmente usados son :

1° Los *logaritmos vulgares* o de Briggs, cuya base es 10;

2° Los *logaritmos neperianos*, llamados también *naturales* o *hiperbólicos*, y cuyo inventor fué el escosés Juan Néper. La base de los logaritmos neperianos es un número inconmensurable 2 718 28 1 82 845 9 . . ., que se llama el número $e$ y cuya importancia es grande en las Matemáticas superiores[1].

**396. Conversión de los logaritmos de un sistema en otro.** — Conociendo el logaritmo de un número en un sistema, es fácil encontrar el logaritmo del mismo número en otro sistema; basta con aplicar el teorema siguiente :

**397. Teorema.** *La relación entre los logaritmos de un mismo número en dos sistemas es constante.*

Sea $x$ el logaritmo de $b$ en un sistema cuya base es $a$; designaremos los logaritmos de este sistema por $\log_a$ tenemos :

$$x = \log_a b \quad \text{o} \quad b = a^x$$

si $x'$ es el logaritmo del mismo número en el sistema de base $a'$, tendremos :

$$x' = \log_{a'} b \quad \text{o} \quad b = a'^{x'}.$$

se puede escribir :

$$a^x = a'^{x'}.$$

Tomando los $\log_a$ de los dos miembros, se tiene :

$$x \log_a a = x' \log_a a'.$$

Pero

$$\log_a a = 1.$$

1. Véase en nuestros *Elementos de Geometría analítica y Cálculo infinitesimal* el origen de este número.



Luego

$$x = x' \log_a a'$$

y la relación entre los logaritmos de $b$ en el sistema de base $a'$ y en el sistema de base $a$ es

$$\frac{x'}{x} = \frac{1}{\log_a a'}$$

Esta relación es constante, como lo queriamos demostrar.

**398 Consecuencia.** La relación anterior da $x' = x \frac{1}{\log_a a'}$; luego, conociendo el logaritmo de $b$ en el primer sistema, se obtiene el logaritmo del mismo número en el segundo sistema multiplicando el primer logaritmo por $\frac{1}{\log_a a'}$. Esta última cantidad se llama el **módulo** del segundo sistema. Es el inverso del logaritmo de la base del segundo sistema tomado en el primero.

**399. Aplicaciones.**

I. *Transformar los logaritmos vulgares en logaritmos neperianos.*

Los logaritmos vulgares se designan por log y los logaritmos neperianos por L.

Si se trata de un número $x$, sus logaritmos son $\mathrm{L}x$ y $\log x$, y tenemos

$$x = e^{\mathrm{L}x} = 10^{\log x}$$

o

$$e^{\mathrm{L}x} = 10^{\log x} \qquad (1)$$

Tomando los L de ambos miembros, tenemos

$$\mathrm{L}x \times \mathrm{L}e = \log x.\ \mathrm{L}\,10$$

Pero

$$\mathrm{L}e = 1; \text{ luego}$$

$$\mathrm{L}x = \log x.\ \mathrm{L}\,10$$

y

$$\log x = \mathrm{L}x.\ \frac{1}{\mathrm{L}\,10}$$

La cantidad $\frac{1}{\mathrm{L}\,10}$ es el módulo de los logaritmos vulgares; su valor es 0,434294482.

II. *Transformar los logaritmos neperianos en logaritmos vulgares.*

En la ecuación (1), tomemos los log. de ambos miembros, tenemos

$$\mathrm{L}x.\ \log e = \log x.\ \log 10$$

dero $\log 10 = 1$; luego
$$L x . \log e = \log x$$
y
$$L x = \log x \frac{1}{\log e}$$
$\frac{1}{\log e}$ es el módulo de los logaritmos neparianos; su valor es 2,302 585 093.

III. *Buscar el log. vulgar de 5.*
$$\log 5 = \log.\ \text{nep.}\ 5 \times \text{módulo}$$
$$\log 5 = 1{,}6094379 \times 0{,}4342944482 = 0{,}698\ 97\ 000.$$

IV. *Encontrar el log. neperiano de 100.*

Basta multiplicar el log. vulgar por el módulo :
$$\log.\ \text{nep.}\ 100 = 2 \times 2{,}302\ 585\ 093 = 4{,}605170186.$$

## § II. — De los logaritmos vulgares.

**400.** Los *logaritmos vulgares* o de *Briggs*, más cómodos para los cálculos prácticos que los logaritmos neperianos, tienen por base el número 10.

Por ser
$$100 = 10^2$$
$$1\ 000 = 10^3 \ldots \text{ etc};$$
se ve en este sistema : 1° que el logaritmo de 10 es 1, el de 100 es 2, el de 1 000 es 3......; en general el de $10^n$ es $n$.

2° Que todo número comprendido entre 1 y 10 tiene su logaritmo mayor que cero y menor que 1; que todo número comprendido entre 10 y 100 tiene su logaritmo mayor que 1 y menor que 2; que todo número comprendido entre 100 y 1000 tiene su logaritmo mayor que 2 y menor que 3, y así sucesivamente; de donde resulta que el logaritmo de un número mayor que 10 se compone de una parte entera llamada *característica*, y de una parte decimal llamada *mantisa*. Se ve además, que la característica contiene tantas unidades como cifras tiene el número en su parte entera, menos 1.

**401. Teorema.** — *El logaritmo de un número diez, cien, mil veces, etc., mayor ó menor que otro, tiene la misma mantisa que éste, y no difiere más que en la característica.*

En efecto,
$$\log(a \times 10^n) = \log a + \log 10^n = \log a + n$$
y $n$ es un número entero (núm. 400).



Igualmente, $\log \frac{a}{10^n} = \log a - \log 10^n = \log a - n.$

Del mismo modo,
$$\frac{1}{10} = 10^{-1}$$
$$\frac{1}{100} = 10^{-2}$$
$$\frac{1}{1\ 000} = 10^{-3} \ldots$$
y se ve que

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $+1$ es el log de | 10, | y que | $-1$ | es el de | $\frac{1}{10}$ |
| $+2$ » | 100, | » | $-2$ | » | $\frac{1}{100}$ |
| $+3$ » | 1 000, | » | $-3$ | » | $\frac{1}{1\ 000}$ |

y así sucesivamente

Del mismo modo,

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| si 0,69897 es el log de | 5, | $-0{,}69897$ | será el de | $\frac{1}{5}$ |
| y si 2,26600 » | 184,5, | $-2{,}26600$ | » | $\frac{1}{184{,}5}$. |

Así, cuando se cambia el signo del logaritmo de un número dado, se obtiene el logaritmo de la inversa de este número; y un *logaritmo negativo* puede considerarse como el logaritmo de una fracción que tiene 1 por numerador, y por denominador el número a que corresponde el mismo logaritmo considerado como positivo.

**402.** Estas mismas igualdades demuestran que un número comprendido entre 1 y 0,1 tiene un logaritmo comprendido entre 0 y $-1$;

Que un número comprendido entre 0,1 y 0,01 tiene un logaritmo comprendido entre $-1$ y $-2$, y así sucesivamente.

**403.** La introducción, en los cálculos, de logaritmos enteramente negativos sería casi siempre una complicación; para evitarla, se hace positiva la parte decimal del logaritmo, quedando únicamente negativa la característica.

Sea el logaritmo negativo $-2{,}69897$.

Se puede escribir, agregando y quitando 1,
$$-2{,}69897 = -3 + (1 - 0{,}69897).$$
Efectuando la substracción indicada en el paréntesis
$$-2{,}69897 = -3, +0{,}30103 \quad \text{o} \quad \bar{3},30103.$$

Igualmente el logaritmo negativo — 0,48674 puede escribirse :

$$-0{,}48674 = -1 + (1 - 0{,}48674) \quad \text{o} \quad \bar{1}{,}51326.$$

**404. Regla.** — Luego, *para transformar un logaritmo negativo en otro logaritmo que no tenga más que la característica negativa se resta de 1 la parte decimal y se añade — 1 a la característica.* El signo *menos* que afecta a la característica únicamente, se escribe encima de dicha característica.

**405.** De ahí y de lo que se ha dicho en el núm. 401, resulta que el logaritmo de un número menor que 1 tiene una característica negativa *cuyo valor absoluto indica el lugar que ocupan, después de las unidades simples, las unidades superiores del número propuesto.*

**406. Observación.** — En la confección de las tablas no se han calculado los logaritmos de los números menores que 1, ni los de los números fraccionarios, porque se pueden obtener estos logaritmos de una manera indirecta.

Así, para obtener el logaritmo de 0,625, se multiplica y se divide este número por 1 000, y se tiene $\frac{625}{1\,000}$.

De donde (394) $\log\frac{625}{1\,000} = \log 625 - \log 1\,000$

$$\log 625 = 2{,}795\,88$$
$$\log 1\,000 = 3{,}000\,00$$

Luego $\log 0{,}625 = \bar{1}{,}795\,88$

**407. Cologaritmo.** — *Se llama cologaritmo de un número el logaritmo de la inversa de este número.*

**408. Regla.** — *Para obtener el cologaritmo de un número, se resta de 0 el logaritmo de este número, lo que equivale a añadir + 1 á la característica, a cambiarla de signo, luego a tomar el complemento a 1 de la parte decimal.*

Este complemento a 1 se obtiene *restando de 9 cada una de las cifras de la parte decimal, excepto la primera cifra significativa de la derecha, que se resta de 10.*

EJEMPLOS :

$$\text{Log}\,8 = 0{,}903\,09; \qquad \text{colog}\,8 = \bar{1}{,}096\,91$$
$$\log 639 = 2{,}805\,50; \qquad \text{colog}\,639 = \bar{3}{,}194\,50$$
$$\log 0{,}005 = \bar{3}{,}698\,97; \qquad \text{colog}\,0{,}005 = 2{,}301\,03.$$



## § III. — De las tablas de logaritmos.

**409.** Existen diferentes tablas de logaritmos; las unas, llamadas grandes tablas, dan los logaritmos de los 100 000 o de los 108 000 primeros números, con 7 cifras decimales; se usan ordinariamente las de Callet, de Dupuis o de Schrön. Las otras, llamadas pequeñas tablas, contienen los logaritmos de los 10 000 primeros números con 5 decimales; y, aun cuando estas últimas dan una aproximación menor en los cálculos, son, sin embargo, más usuales que las primeras.

En todas estas tablas, hay columnas especiales que contienen las diferencias que existen entre los logaritmos de dos números consecutivos. Hay tablas que no dan las características, lo cual es una simplificación, porque la simple inspección de un número hace conocer la parte entera de su logaritmo.

**410.** Para servirse ventajosamente de una tabla de logaritmos, es preciso saber resolver las dos cuestiones siguientes :

1º Encontrar el logaritmo de un número dado.

2º Encontrar el número que corresponde á un logaritmo dado.

### 1. — Pequeñas Tablas.

**411. Encontrar el logaritmo de un número dado.** — Suponemos a la vista las pequeñas tablas con 5 decimales.

1er CASO. — *El número se encuentra en las tablas.* Basta leer inmediatamente el logaritmo correspondiente.

Así se ve que el log. de 6 843 es 3,83525.

Del mismo modo el log. de 6,843 es 0,83525, porque no difiere de el de 6843 sino en la característica (núm. 401).

2º CASO. — *El número no se encuentra en las tablas.* Se determina primero la característica (núm. 400 y 405), luego se divide este número por 10 o por 100, o por 1000, etc., de manera que se tenga un número entero, y el mayor posible, comprendido en la tabla; por último, se busca la mantisa del logaritmo del número así dividido, teniendo en cuenta las diferencias tabulares.

Sea por calcular el logaritmo de 24647.

Teniendo este número cinco cifras, la característica de su logaritmo es 4.

Dividamos 24647 por 10, lo que da 2464,7.

Busquemos en las tablas la parte decimal del logaritmo de 2464, se encuentra 0,39164.

Siendo 18 unidades del quinto orden la diferencia tabular entre los logaritmos de 2464 y de 2465, se dirá, *considerando los aumentos de los logaritmos como proporcionales a los aumentos de los números* :

Si por un entero de diferencia en los números hay un aumento de 18 en los logaritmos, por una diferencia de 0, 7 en los números habrá un aumento de $x$ en los logaritmos : o

$$\frac{1}{18}=\frac{0,7}{x}$$

de donde $x=13$, con una unidad del quinto orden de aproximación. Se agregan estos 13 cienmilésimos a... 4,39164 y se tiene :

$$\log.\ 24647=4,39177$$

Sea todavía por encontrar el logaritmo de 0,0478533.

La característica del logaritmo será $\bar{2}$.

Coloquemos la coma después de la cifra 5, se tiene : 4785,33.

El logaritmo de 4785 tiene por mantisa 0,67988.

La diferencia entre los logaritmos de los núms. 4785 y 4786 siendo 9 unidades del quinto orden, se dirá :

Si por 1 entero de diferencia en los números hay un aumento de 9 en los logaritmos, por una diferencia de 0,33 en los números, habrá un aumento de $x$ en los logaritmos, o

$$\frac{1}{9}=\frac{0,33}{x}$$

se encuentra, con aproximación de una unidad del quinto orden, $x=3$,

y el logaritmo de 0,0478533 es $\bar{2}$,67991.

En algunas tablas, el cálculo de las partes proporcionales está efectuado y se encuentra indicado en una columna especial.

**412. Encontrar el número que corresponde a un logaritmo dado.** — 1$^{er}$ Caso. — *La mantisa se encuentra exactamente en las tablas.*



En este caso se lee inmediatamente el número correspondiente á esta mantisa, *que se busca generalmente como si estuviera precedida de la característica* 3.

Así, se ve que el número correspondiente al logaritmo 2,88395 es 7655. La característica 2 del logaritmo propuesto indica que el número pedido tiene tres cifras en su parte entera : este número es por lo mismo.... 765,5.

Del mismo modo, el número correspondiente a la mantisa del logaritmo $\bar{2}$,18808 es 1542 : la característica $\bar{2}$ indica que la primera cifra significativa del número pedido ocupa el segundo lugar después de la coma (número 405), este número es por lo mismo 0,01542.

2° Caso. *La mantisa no se encuentra en las tablas.*

Sea por encontrar el número que corresponde al log. 4,55575.

Se busca en las tablas la mantisa del logaritmo como si estuviera precedida de la característica 3. Se ve que está comprendida entre 3,55570, log. de 3595, y 3,55582, log. de 3596.

La diferencia tabular es 12, y la que existe entre el log. dado 55575 y el log. inmediatamente inferior 55570 es 5.

Se dirá : Si cuando el log. 55570 aumenta 12 unidades del quinto orden, el número 3595 crece 1 ; cuando el logaritmo aumente 5 unidades, el número crecerá $x$, o

$$\frac{12}{1}=\frac{5}{x}.$$

Se encuentra, con un centésimo de aproximación, $x=0,41$ que se añade a 3595, lo que da 359541.

La característica 4 indica que el número pedido tiene 5 cifras en su parte entera; este número es pues 35954,1.

## 2. — Uso de las grandes tablas.

**413.** Suponemos que están a la vista las tablas de Calle ó las de Dupuis, o bien las de Schrön. En estas tablas, los logaritmos de los números menores que 1000 o que 1200 contienen 8 decimales; los de los números mayores, contienen 7 decimales.

Los 1200 primeros números y sus logaritmos se leen inmediatamente; en cuanto a los números mayores que

1200 y sus logaritmos, se leen en dos partes. En efecto, en una columna intitulada N, se ven las decenas del número; sus unidades se encuentran arriba y abajo de la página, sobre una línea horizontal que comprende las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. La primera parte del logaritmo, compuesta de las cifras comunes a los logaritmos de varios números, se lee en la columna 0, y la segunda parte se encuentra en la columna de la cifra de las unidades y en la línea horizontal correspondiente a las decenas.

Así, para encontrar el logaritmo del número 19206, se escribe primero la característica 4, que no está en las tablas, luego se leen a continuación de 1920, en la columna 0, las tres primeras cifras decimales 283; por último, en la columna 6, se encuentran las cuatro últimas, 4369; el logaritmo de 19206 es pues 4,2834369.

Del mismo modo, el log. de 19450, cuya característica es 4, se compone de 288, que se encuentra en la columna 0, un poco arriba de la línea horizontal correspondiente a las decenas 1945, y de las cuatro últimas cifras 9196, que se encuentran en la misma columna vertical y sobre la misma línea horizontal correspondiente a las decenas; por consiguiente el logaritmo de 19450 es 4,2889196.

Para encontrar el logaritmo del número 348,567, cuya característica es 2, se corre la coma después del 6, y se busca el logaritmo de 34 856, que es 542 2775; la diferencia entre los log. de los números 34 856 y 34 857 es 125; en vez de calcular el aumento por 0,7 estableciendo la proporción $\frac{1}{125}=\frac{0,7}{x}$, se encuentra inmediatamente el resultado del cálculo en una pequeña tabla encabezada con 125; en efecto, en esta tabla, enfrente del 7, se lee el número 88, que representa las unidades de séptimo orden que es preciso añadir al logaritmo de 34 856.

El logaritmo del número 348,567 es pues 2,5422863.

Para el log. de 3743595, se encuentra primeramente 6,5732778. La diferencia entre los log. de 37435 y 37436 es 116; falta calcular el aumento que sufre el log. por 0,96.

| | |
|---|---|
| La tabla encabezada con 116 da por 0,9. . . . . . | 104 |
| y por 0,6 da 70; de donde por 0,06. . . . . . . . . | 7 |
| luego por 0,96 al aumento será. . . . . . . . . . . | 111 |

que debe agregarse a 6,5732778.



Por consiguiente, el log. del número 3743596 será : 6,5732889.

414. Sea ahora por encontrar el número correspondiente al log. 4,6804624.

Se busca primeramente 680 entre los números aislados de la columna 0, luego 4624 en las líneas horizontales comprendidas entre 680 y 681, y se ve que 4624 está en la columna 4, cuya cifra es la cifra de las unidades; siguiendo hacia la izquierda la línea horizontal que contiene 4624, se llega al número 4791 que representa las decenas del número buscado : este número es pues 47914.

Sea aun por encontrar el número correspondiente al log. 0,0597809.

Buscamos primeramente 059 entre los números aislados de la columna 0; luego, en las líneas horizontales comprendidas entre 059 y 060, buscamos el número que se aproxime más por defecto, a 7809; este número es 7527, el cual está en la columna 5, cuya cifra es la cifra de las unidades; siguiendo hacia la izquierda la línea horizontal que contiene 7527, se llega al número 1147, que representa las decenas. El número pedido es pues 11475, con aproximación de una unidad. Si se quiere una aproximación mayor, se busca la diferencia que existe entre 7527 y 7905, y la que existe entre 7527 y 7809; la primera es 378 y la segunda 282. Se ve en seguida en la tabla intitulada... 378-379. entre qué números está comprendido 282; se ve que lo está entre 265 y 303; la cifra 7, corrrespondiente a 265, indica las décimas del número buscado. Para obtener las centésimas se busca la diferencia que existe entre 282 y 265, y se encuentra 17; si fuera 170, la tabla daría 4 décimas; 17 dará cuatro centésimas; de este modo se habrá encontrado 1147574; y, como la característica es 0, el número pedido, es 1,147574.

### 3. — Observaciones sobre el empleo de las partes proporcionales.

415. *Las diferencias entre los logaritmos de dos números consecutivos van disminuyendo sin cesar.* Para convencerse de ello basta echar una ojeada a la tabla de logaritmos. Pero es muy fácil demostrarlo.

Sean, en efecto, $a+1$ y $a$ dos números enteros consecutivos; llamando $d$ la diferencia de sus logaritmos, se tendrá :

$$d = \log(a+1) - \log a = \log\left(\frac{a+1}{a}\right)$$

$$d = \log\left(1 + \frac{1}{a}\right)$$

ahora bien, a medida que $a$ aumenta, $\frac{1}{a}$ disminuye, y la expresión $1 + \frac{1}{a}$ tiende hacia 1; pero el logaritmo de 1 es 0, luego las diferencias tienden hacia 0.

**416.** *Cuando los números son suficientemente grandes, los aumentos de los logaritmos son sensiblemente proporcionales a los aumentos de los números.*

Sean tres números $a, a+h, a+2h$, en progresión aritmética, hagamos ver que los logaritmos de estos números están sensiblemente en progresión aritmética, es decir, que se tiene :

$$\log(a+h) - \log a = \log(a+2h) - \log\,(a+h).$$

$$\log\left(\frac{a+h}{a}\right) = \log\left(\frac{a+2h}{a+h}\right)$$

$$\log\left(1 + \frac{h}{a}\right) = \log\left(1 + \frac{h}{a+h}\right) \qquad (1)$$

Si $a$ es suficientemente grande y $h$ muy pequeña, los valores de los paréntesis se acercan sensiblemente à 1, por consiguiente la última igualdad se verifica lo mismo que las anteriores.

**417. Observación.** — Si en las expresiones $\log\left(1 + \frac{h}{a}\right)$ y $\log\left(1 + \frac{h}{a+h}\right)$ hacemos $a = 1\,000$, $h = 1$, estas expresiones se convierten en

$$\mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{1\,000}\right) = \log\frac{1\,001}{1\,000} = 0{,}00043408$$

$$\mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{1\,001}\right) = \log\frac{1\,002}{1\,001} = 0{,}00043364.$$



Como estos dos logaritmos difieren menos de una unidad del sexto orden decimal, lo mismo sucede con los dos miembros de la igualdad (1). Luego cuando los números son mayores que 1000 los aumentos de los logaritmos son sensiblemente proporcionales a los aumentos de los números.

### Operaciones resueltas por logaritmos.

**418.** 1° *Sea por sumar el log.* . . . . . . . . . . 3,87245
*con el logaritmo* . . . . . . . . . . . . . . . $\bar{2}$,95419
*se encuentra* . . . . . . . . . . . . . . . . 2,82664

Después de haber dicho en las décimas : 1 de retenida y 8 son 9, y 9 son 18, escribo 8 y retengo 1; se continúa : 1 de retenida y 3 son 4, 4 y — 2 son + 2; el resultado es, pues, 2,82664.

2° *Sea por restar del logaritmo*. . . . . . . . . 0,93676
*el logaritmo*. . . . . . . . . . . . . . . . . 3,11190
*se encuentra*. . . . . . . . . . . . . . . . . $\bar{3}$,82486

Después de haber dicho en las décimas : 1 para 9 faltan 8, se continúa 3 para 0 faltan — 3.

3° *Sea por restar del log de 1 o* . . . . . . . . 0,00000
*el logaritmo*. . . . . . . . . . . . . . . . . $\bar{3}$,39193
*se encuentra*. . . . . . . . . . . . . . . . . 2,60807

Después de haber dicho en las décimas : 1 de retenida y 3 son 4, 4 para 10 faltan 6, se continúa : 1 de retenida y — 3 son — 2, — 2 para 0 faltan + 2.

Se ve que esto equivale à tomar el cologaritmo de 3,39193 (núm. 407).

4° *Sea por multiplicar por 3 el log* . . . . . . $\bar{4}$,90200
3
*producto*. . . . . . . . . . . . . . . . . . $\overline{10}$,70600

Después de haber dicho 3 por 9 son 27, escribo 7 y retengo 2, se agrega : 3 por $-4$ da $-12$, $-12$ y $+2$ de retenida son $-10$.

Cuando hay que dividir por 2, por 3, por 4, etc., un logaritmo cuya característica negativa no sea divisible exactamente por estos números, se agrega a dicha característica un número negativo tal que la haga divisible ; luego por compensación, se agrega el mismo número positivo á la mantisa, y se hace la división.

**419.** EJEMPLOS : 5° *Dividir por 2 el log* $\bar{1},42846$.

Se agrega $-1$ a la característica, a fin de hacerla divisible por 2, luego, por compensación, se agrega $+1$ a la parte decimal, y se dice : mitad de $\bar{2}$ es $\bar{1}$, mitad de 14 es 7, mitad de 2 es 1...

El cociente es pues $\bar{1},71423$.

6° *Dividir por 4 el log* $\bar{5},62829$.

Se agrega $-3$ a la característica, a fin de hacerla divisible por 4, luego, por compensación, se agrega $+3$ a la mantisa, y se dice : cuarta de $\bar{8}$ es $\bar{2}$, cuarta de 36 es 9...

El cociente pedido es $\bar{2},90707$, con aproximación de un cienmilésimo.

7° *Calcular el logaritmo de la expresión :*

$$x = \frac{64 \times 0,0826 \times 16,57}{13,48 \times 0,0017 \times 9,467}.$$

Se suman juntamente los logaritmos de los factores del numerador, y los cologaritmos de los factores del denominador.

$$\begin{aligned}
\text{Log } 64 &= 1,80618 \\
\text{Log } 0,0826 &= \bar{2},91698 \\
\text{Log } 16,57 &= 1,21932 \\
\text{Colog } 13,48 &= \bar{2},87031 \\
\text{Colog } 0,0017 &= 2,76955 \\
\text{Colog } 9,467 &= \bar{1},02379 \\
\hline
\text{Log } x &= 2,60613.
\end{aligned}$$

8° *Calcular la expresión*

$$x = \frac{6,462\sqrt{6} \times \sqrt[3]{2}\,(\overline{64,13^2} + 0,\overline{42636^2})}{196\pi\sqrt{21}}.$$



CÁLCULOS AUXILIARES

$$\begin{aligned}
\text{Log } 64,13 &= 1,80706 \\
2 \log 64,13 &= 3,61412 \\
\overline{64,13^2} &= 4112,72 \\
\text{Log } 0,42636 &= \bar{1},62978 \\
2 \log 0,42636 &= \bar{1},25956 \\
0,\overline{42636^2} &= 0,18178 \\
64,13^2 + 0,\overline{42636^2} &= 4112,90 \\
\text{Log } 4112,9 &= 3,61416 \\
\text{Log } 2 &= 0,30103 \\
\text{Log } \sqrt[3]{2} = \tfrac{1}{3} \log 2 &= 0,10034 \\
\text{Log } 6 &= 0,77815 \\
\text{Log } \sqrt{6} = \tfrac{1}{2} \log 6 &= 0,38907 \\
\text{Log } 21 &= 1,32222 \\
\text{Log } \sqrt{21} = \tfrac{1}{2} \log 21 &= 0,66111
\end{aligned}$$

OPERACIONES

$$\begin{aligned}
\text{Log } 6,462 &= 0,81037 \\
\tfrac{1}{2} \log 6 &= 0,38907 \\
\tfrac{1}{3} \log 2 &= 0,10034 \\
\text{Log } 4112,90 &= 3,61416 \\
\text{Colog } 196 &= \bar{3},70774 \\
\text{Colog } \pi &= \bar{1},50285 \\
\text{Colog } \tfrac{1}{2} \log 21 &= \bar{1},33889 \\
\hline
\text{Log } x &= 1,46342 \\
x &= 29,068
\end{aligned}$$

9° *Sea por último, calcular el valor de la siguiente expresión :*

$$x = \frac{0,913\pi\sqrt{15} \times 0,654321\sqrt[3]{2}}{186,8417 \times 0,056789459}$$

Para efectuar este cálculo, haremos uso de las tablas con siete decimales.

$$\begin{aligned}
\text{Log } 0,913 &= \bar{1},9604708 \\
\text{Log } \pi &= 0,4971499 \\
\text{Log } \sqrt{15} &= 0,5880456 \\
\text{Log } 0,654321 &= \bar{1},8157909 \\
\text{Log } \sqrt[3]{2} &= 0,1003433 \\
\text{Colog } 186,8417 &= \bar{3},7285262 \\
\text{Colog } 1,056789459 &= 1,2457322 \\
\hline
\text{Log } x &= \bar{1},9360589 \\
x &= 0,863096
\end{aligned}$$

con aproximación de un millonésimo.

# CAPÍTULO II

## ECUACIONES EXPONENCIALES

**420 Definición.** — *Llámase* ecuación exponencial *una ecuación en la cual la incógnita es un exponente.*

Se resuelven estas ecuaciones aplicando las propiedades de los logaritmos.

**421. Problema I.** — *Resolver la ecuación* $a^x = b$, *con* a *y* b *positivos.*

Tomando los logaritmos

$$x \log a = \log b$$

$$x = \frac{\log b}{\log a}.$$

**422. Problema II.** — *Resolver la ecuación* $a^{b^x} = c$.

Haciendo $b^x = y$, se tiene

$$a^y = c$$

de donde

$$y = \frac{\log c}{\log a}$$

y, por ser

$$x = \frac{\log y}{\log b}$$

$$x = \frac{1}{\log b} \cdot \log \frac{\log c}{\log a}.$$

**423. Problema III.** — *Resolver la ecuación*

$$a^{2x} + ba^x + c = 0.$$

Haciendo

$$a^x = y$$

resulta

$$y^2 + by + c = 0$$

ó

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Por ser

$$x = \frac{\log y}{\log a}$$



$$x = \frac{1}{\log a} \cdot \log\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}\right).$$

Es preciso que los valores de $y$ sean positivos.

**424. Problema IV.** — *Resolver las ecuaciones*

$$\log x + \log y = m$$
$$ax + by = c.$$

La primera ecuación da

$$\log xy = m$$

ó

$$xy = 10^m$$

o

$$y = \frac{10^m}{x}.$$

Sustituyendo en la segunda á $xy$ por este valor

$$ax + \frac{b10^m}{x} = c$$

o

$$ax^2 - cx + b \times 10^m = 0$$

de donde

$$x = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab \times 10^m}}{2a}.$$

A cada valor de $x$ corresponde un valor de $y$.

**425. Problema V.** — *Resolver las ecuaciones*

$$x^y = y^x \qquad (1)$$
$$x^3 = y^2. \qquad (2)$$

La primera ecuación da

$$y \log x = x \log y$$

y la segunda

$$3 \log x = 2 \log y.$$

Dividiendo miembro a miembro

$$\frac{y}{3} = \frac{x}{2}$$

o

$$y = \frac{3x}{2}.$$

Sustituyendo en (2);

$$x^3 = \frac{9}{4}x^2$$

$$x^2\left(x - \frac{9}{4}\right) = 0.$$

La solución $x = 0$ no tiene significación.
Tomando

$$x = \frac{9}{4}$$

$$y = \frac{3}{2} \times \frac{9}{4} = \frac{27}{8}.$$

---

## CAPÍTULO III

## INTERÉS COMPUESTO. ANUALIDADES

### § I. — Interés compuesto.

**426. Definición.** — *Una suma está impuesta á* interés compuesto, *cuando, cada año, el interés producido se agrega al capital para producir interés el año siguiente.*

**427. Fórmula del interés compuesto.**

Llamemos $a$, el capital impuesto.

— $r$, el interés anual de un peso o el $\frac{1}{100}$ del tanto.

— $n$, el tiempo.

— $A$, el capital aumentado con su interés.

1 peso se convierte en un año en. . . . . . . . . $1 + r$
$a$ pesos se convertirán en $a$ veces más o . . . . $a(1 + r)$

Así, multiplicando un capital cualquiera por $(1 + r)$ se encuentra en lo que se convierte este capital al cabo de un año.

$a(1 + r)$ es el capital que deberá producir intereses



durante el segundo año; este capital se convertirá al fin de dicho año en

$$a(1 + r)(1 + r) = a(1 + r)^2$$

Del mismo modo, siendo $a(1 + r)^2$ el capital que debe producir intereses durante el tercer año, este capital se convertirá al fin de dicho año en

$$a(1 + r)^2(1 + r) = a(1 + r)^3$$

y así consecutivamente.

Luego, al cabo de $n$ años, el valor A del capital, más sus intereses compuestos, será :

$$A = a(1 + r)^n \qquad (1)$$

**428.** Tal es la fórmula general del interés compuesto; contiene cuatro cantidades variables : A, $a$, $n$ y $r$; conociendo tres de ellas se puede calcular la otra.

**429. Cálculo del capital impuesto.** — Para despejar $a$, se dividen los dos miembros por $(1 + r)^n$, y se encuentra :

$$a = \frac{A}{(1 + r)^n}. \qquad (2)$$

**430. Cálculo del tanto.** — Para despejar a $r$, se dividen por $a$ los dos miembros de la ecuación (1), y se extrae la raíz $n^{ma}$ de los cocientes; queda

$$1 + r = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}$$

de donde

$$r = \sqrt[n]{\frac{A}{a}} - 1. \qquad (3)$$

**431. Cálculo del tiempo.** — Por último, para despejar a $n$, se hace uso de los logaritmos, y se escribe :

$$\operatorname{Log} A = \log a + n \log(1 + r)$$

de donde

$$n = \frac{\log A - \log a}{\log(1 + r)}. \qquad (4)$$

**432.** Todas estas fórmulas son calculables por logaritmos. Cuando el logaritmo de $(1 + r)$ debe repetirse $n$ veces (estando $n$ ordinariamente comprendido entre 1 y 100), es bueno tomarlo con ocho o nueve decimales; porque, en las tablas, *no siendo más que aproximada* la última cifra, el producto del logaritmo por $n$ podría hacer el error considerable; después de haber multiplicado por $n$ el logaritmo de $(1+r)$, no se conservan en el producto más que cinco cifras o siete cifras decimales según las tablas que se hayan usado, y se tiene cuidado *de forzar la última*, si la cifra que sigue es mayor que 4.*

**433. Observación I.** — A menudo el interés se capitaliza cada seis meses; entonces, en las fórmulas, $2n$ representa el número de semestres transcurridos, y $\frac{r}{2}$ el $\frac{1}{100}$ del tanto por seis meses. Las fórmulas toman en este caso las siguientes formas:

$$A = a\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}$$

$$a = \frac{A}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}}$$

$$\frac{r}{2} = \sqrt[2n]{\frac{A}{a}} - 1$$

$$2n = \frac{\log A - \log a}{\log\left(1+\frac{r}{2}\right)}.$$

*Así un capital de* 4 000 *pesos impuestos a interés compuesto durante* 15 *años, al* 4 °/₀, *y capitalizándose los intereses cada* 6 *meses se convierte en :*

$$A = 4\,000\,(1{,}02)^{30} = \$\,7245{,}50.$$

**434. Observación II.** — La fórmula $A\,(1+r)^n$ supone que $n$ representa un número entero de años. Si esto no es así, se calcula generalmente en lo que se convertirá el capital más sus intereses al cabo de $n$ años, luego se buscan los intereses simples que produce durante la fracción de año el capital así aumentado.

Llamemos $n$ el número de años, $f$ la fracción de año, siendo siempre $r$ el interés de 1 peso en un año.

* Al fin de la obra se encontrará una tabla de los logaritmos de $(1+r)$ con nueve cifras decimales.



Al cabo de $n$ años el capital se habrá convertido en

$$a(1+r)^n.$$

Si 1 peso produce $r$ en un año, en un tiempo $f$ producirá $fr$, y el capital $a(1+r)^n$ producirá en el mismo tiempo :

$$a(1+r)^n \times fr.$$

Luego

$$A = a(1+r)^n + a(1+r)^n \times fr.$$

Sacando $a(1+r)^n$ como factor común, se tiene :

$$A = a(1+r)^n\,(1+fr). \qquad (5)$$

**435.** La fórmula (5) se aplica sin trabajo cuando la incógnita es A o $a$; es de una aplicación menos fácil cuando la incógnita es $r$, porque conduce generalmente a una ecuación de un grado superior al segundo; por último, cuando se busca el tiempo, todavía se puede aplicar, aun cuando entonces se tengan dos incógnitas.

En efecto, se tiene :

$$\operatorname{Log} A = \log a + n\log(1+r) + \log(1+fr)$$

de donde

$$n = \frac{\log A - \log a}{\log(1+r)} - \frac{\log(1+fr)}{\log(1+r)}. \qquad (6)$$

Si efectuamos la división indicada en la primera parte del segundo miembro, tendremos, llamando $q$ el cociente y R la resta,

$$\frac{\log A - \log a}{\log(1+r)} = q + \frac{R}{\log(1+r)}.$$

Llevando este valor a la ecuación (6), queda :

$$n = q + \frac{R}{\log(1+r)} - \frac{\log(1+fr)}{\log(1+r)}.$$

Por otra parte, $n$ y $q$ son enteros por hipótesis; $\frac{R}{\log(1+r)}$ y $\frac{\log(1+fr)}{\log(1+r)}$, son fracciones, porque $1+fr$ es menor que $1+r$; luego la igualdad no se verificará sino cuando se tenga :

$$n = q, \quad \text{y} \quad \frac{R}{\log(1 + r)} = \frac{\log(1 + fr)}{\log(1 + r)}$$

de donde

$$R = \log(1 + fr).$$

Así, la parte entera del cociente da un número exacto de años, y la resta es el log. de $(1 + fr)$, de donde se saca fácilmente el valor de $f$.

**436. Problema.** — *Una ciudad ve crecer su población cada año la ciento veinteava parte; se pregunta dentro de qué tiempo se duplicará su población.*

Sean $p$ la población actual,

$\frac{1}{m}$ la relación que expresa el aumento anual,

$n$ el tiempo,

P la población después de $n$ años.

Después de un año la población será $p$ más el aumento

$$p \times \frac{1}{m}, \quad \text{o} \quad p + \frac{p}{m}, \quad \text{o} \quad p\left(1 + \frac{1}{m}\right), \quad \text{o} \quad p\left(\frac{m+1}{m}\right).$$

Así, multiplicando por $\frac{m+1}{m}$ la población al principio de un año, se obtiene la que será al fin de este año.

Después de dos años la población será pues :

$$p\left(\frac{m+1}{m}\right)^2$$

después de 3 años será :

$$p\left(\frac{m+1}{m}\right)^3$$

y después de $n$ años será :

$$p\left(\frac{m+1}{m}\right)^n$$

entonces se tendrá por fórmula general :

$$P = p\left(\frac{m+1}{m}\right)^n.$$

Para resolver el problema propuesto, hagamos $P = 2p$, y queda :

$$2p = p\left(\frac{m+1}{m}\right)^n, \quad \text{o} \quad 2 = \left(\frac{m+1}{m}\right)^n.$$



$$\text{Log}\,2 = n \log\left(\frac{m+1}{m}\right), \text{ de donde } n = \frac{\log 2}{\log\left(\frac{m+1}{m}\right)};$$ reemplacemos las letras por su valor :

$$n = \frac{\log 2}{\log \frac{121}{120}}.$$

$$\text{Log}\,2 = 0{,}30103.$$

$$\text{Log}\,\frac{121}{120} = 0{,}00361.$$

El cociente de 0,30103 por 0,00361 es 83, más una fracción. Así la población se duplicará dentro de 83 años próximamente.

**437. Aplicaciones.** — 1° *Hallar en qué se convierte una suma de 40 000 pesos impuesta a interés compuesto, al 4,5 °/o, durante 12 años.*

La fórmula (1) da :

$$A = 40000\,(1{,}045)^{12}$$
$$\text{Log. } 40000 = 4{,}60206$$
$$+\ 12 \log. 1{,}045 = 0{,}22940$$
$$\text{Log. } A = \overline{4{,}83146}$$

de donde

$$A = 67835{,}7.$$

2° *¿Cuál es el capital que colocado a interés compuesto, y al 5 °/o durante 10 años, se ha convertido en $ 12 640?*

La fórmula (2) da :

$$a = \frac{12640}{(1{,}05)^{10}}$$
$$\text{Log. } 12640 = 4{,}10175$$
$$\text{Colog. } (1{,}05)^{10} = \bar{1}{,}78811$$
$$\text{Log. } A = \overline{3{,}88986}$$

de donde

$$a = 7760 \text{ pesos.}$$

3° *Una suma de 10 000 pesos colocada a interés compuesto se ha convertido en 20 360 pesos después de 15 años, ¿a qué tanto fue impuesta?*

La fórmula (3) da :

$$r = \sqrt[15]{\frac{20360}{10000}} - 1$$

$$\begin{aligned} \text{Log. } 20360 &= 4,30878 \\ \text{Log. } 10000 &= 4,00000 \\ \hline \text{Diferencia } & 0,30878 \end{aligned}$$

El $\frac{1}{15}$ es 0,02058, correspondiente a 1,049, por exceso, de donde :

$$r = 0,049$$

y por consiguiente el tanto es 4,90.

4° *Una suma de 40 000 pesos colocada al 4,5 °/₀ de interés compuesto, se ha convertido en $ 67835,7, ¿cuántos años duró colocada?*

La fórmula (4) da :

$$n = \frac{\text{log. } 67835,7 - \text{log. } 40000}{\text{log. } 1,045}$$

$$\begin{aligned} \text{Log. } 67835,7 &= 4,83146 \\ \text{Log. } 40000 &= 4,60206 \\ \hline \text{Diferencia} &= 0,22940 \end{aligned}$$

que es preciso dividir por 0,01912, log. de 1,045. Se encuentra por cociente 12 años.

5° *¿Qué tiempo se necesita para que se duplique una suma impuesta al 5 °/₀ de interés compuesto?*

Si en la fórmula (1) se hace $A = 2a$, queda :

$$2a = a(1 + r)^n \quad \text{o} \quad 2 = (1 + r)^n$$

$$\text{Log. } 2 = n \text{ log. } (1 + r)$$

de donde

$$n = \frac{\text{log. } 2}{\text{log. } 1,05} = \frac{0,30103}{0,02119}.$$

Efectuando la división, se encuentra un poco más de 14 años.

6° *Una suma de 60 000 pesos ha sido impuesta a interés compuesto durante cierto tiempo. Si hubiera permanecido un año menos, el capital definitivo hubiera sido $ 3996,12 menor; si, al contrario, hubiera permanecido un año más, el capital definitivo hubiera sido $ 4156,02 mayor. Se pregunta cuál era el tanto del interés y la duración de la imposición.*



Para resolver este problema, observemos que la diferencia

$$4156,02 - 3996,12 \quad \text{o} \quad \$\,159,9$$

proviene únicamente del interés por un año de $ 3996,12. Se obtendrá pues el tanto estableciendo la proporción :

$$\frac{3996,12}{159,9} = \frac{100}{x}$$

de donde $x = 4,001$, o sea 4 por ciento.

El capital definitivo después de $n$ años es $60\,000\,(1,04)^n$.

Después de $n - 1$ años, este capital tiene por expresión

$$60000\,(1,04)^{n-1}.$$

Siendo la diferencia entre estos dos capitales $ 3996,12, se tendrá la igualdad

$$60000\,(1,04)^n - 60000\,(1,04)^{n-1} = 3996,12 \qquad (1)$$

como $60000\,(1,04)^n$ es lo mismo que $60000\,(1,04)^{n-1}(1,04)$ la ecuación anterior puede escribirse :

$$60000\,(1,04)^{n-1}(1,04) - 60000\,(1,04)^{n-1} = 3996,12.$$

Sacando á $60000\,(1,04)^{n-1}$ como factor común, queda :

$$60000\,(1,04)^{n-1}(1,04 - 1) = 3996,12$$

o

$$60000\,(1,04)^{n-1} \times 0,04 = 3996,12$$

$$2400\,(1,04)^{n-1} = 3996,12.$$

$$\text{Log. } 2400 + (n - 1) \text{ log. } 1,04 = \text{log. } 3996,12$$

de donde

$$n - 1 = \frac{\text{log. } 3996,12 - \text{log. } 2400}{\text{log. } 1,04} = 13 \text{ años}$$

y por consiguiente

$$n = 14 \text{ años}.$$

## § II. — Anualidades y amortizaciones

**438. Definición.** — *Se llama* **anualidad** *la suma que se deposita cada año, durante un tiempo determinado, para constituir un capital o para amortizar una deuda.*

En el cálculo de las anualidades siempre se tiene en cuenta el interés compuesto.

### 1. — Amortización.

**439. Fórmula de la amortización.** — Llamemos A un capital prestado.

$a$ la anualidad que debe pagarse para amortizar este capital.

$r$ el interés anual de 1 peso.

$n$ el tiempo.

El capital A se convertirá al cabo de $n$ años en (número 427)

$$A(1+r)^n.$$

La primera anualidad, pagada al fin del primer año, producirá intereses compuestos durante $n-1$ años y se convertirá en

$$a(1+r)^{n-1}.$$

La segunda anualidad, pagada al fin del segundo año, producirá intereses compuestos durante $n-2$ años y se convertirá en

$$a(1+r)^{n-2}.$$

La tercera anualidad se convertirá de una manera análoga en

$$a(1+r)^{n-3}$$

y así consecutivamente, de manera que la anualidad pagada dos años antes del $n^{mo}$ año se convertirá en

$$a(1+r)^2.$$

La pagada un año antes del $n^{mo}$ año se convertirá en

$$a(1+r)$$

y la última anualidad no tendrá más que su valor $a$.

Pero entonces la deuda está pagada; luego la suma de todas estas anualidades más sus intereses compuestos, debe valer

$$A(1+r)^n$$

de donde resulta la ecuación :

$$A(1+r)^n = a + a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3 + \ldots\ldots a(1+r)^{n-1}.$$



El segundo miembro de esta ecuación es la suma de los términos de una progresión geométrica creciente cuyo primer término es $a$, y la razón $(1+r)$; esta suma es igual á

$$\frac{a[(1+r)^n-1]}{1+r-1}, \quad \text{o} \quad \frac{a}{r}[(1+r)^n-1]$$

y la ecuación se convierte en :

$$A(1+r)^n = \frac{a}{r}[(1+r)^n-1]$$

de donde

$$a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}. \qquad (1)$$

**440.** Tal es la fórmula de la amortización, la cual contiene cuatro cantidades variables, A, $a$, $r$ y $n$, que se pueden despejar fácilmente, excepto sin embargo $r$, que ordinariamente se halla por una ecuación de un grado superior al segundo.

**441. Cálculo del capital prestado.** — Si se despeja A, queda :

$$A = \frac{a[(1+r)^n-1]}{r(1+r)^n}. \qquad (2)$$

**442. Cálculo del tiempo.** — Si se despeja $n$, se encuentra sucesivamente :

$$Ar(1+r)^n = a(1+r)^n - a$$
$$Ar(1+r)^n - a(1+r)^n = -a$$
$$(1+r)^n(Ar-a) = -a$$
$$(1+r)^n(a-Ar) = a.$$
$$n\log.(1+r) + \log.(a-Ar) = \log. a$$

de donde

$$n = \frac{\log. a - \log.(a-Ar)}{\log.(1+r)}. \qquad (3)$$

**443. Cálculo del tanto.** — Cuando $r$ es la incognita, se ensayan sucesivamente diversos tantos y el que resuelve la ecuación hace conocer $r$.

Para facilitar estos ensayos, se pone generalmente la ecuación (1) bajo la forma

$$\frac{a}{Ar} = \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

Se busca el cociente de $a$ por $Ar$; si este cociente es igual a $\frac{(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$ el tanto ensayado es el tanto pedido; en caso contrario, se ensaya otro tanto. Cuanto más se aproxima uno al tanto verdadero, menor es la diferencia entre el valor $\frac{a}{Ar}$ y $\frac{(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$; si esta diferencia cambia de signo, el tanto buscado es intermedio entre los dos últimos tantos ensayados. Se obtiene de esta manera el valor de $r$ con la aproximación que se quiera.

**444. Observación.** — Si $a = Ar$, la misma fórmula (3) se convierte en (número 394):

$$n = \frac{\log. a - \log. 0}{\log. (1+r)} = \frac{\log. a - (-\infty)}{\log. (1+r)} = \infty.$$

Lo que prueba que si la anualidad iguala únicamente al interés simple del capital, la amortización es imposible. En este caso el valor de $a$ es lo que se llama *renta perpetua.*

### 2. — Constitución de un capital.

**445.** Supongamos que se impone al principio de cada año, durante cierto tiempo, una suma $a$, y propongámonos calcular cuál será el valor del capital así constituído, al fin del $n^{mo}$ año.

Llamemos A el capital buscado,
$a$ la anualidad impuesta;
$r$ el interés anual de 1 peso:
$n$ el tiempo.

Entre la primera imposición y el día en que el capital esté constituído, transcurrirán $n$ años.

La primera imposición $a$ producirá pues intereses compuestos durante $n$ años y se convertirá en (núm. 427):

$$a(1+r)^n.$$

La segunda imposición producirá intereses compuestos durante $(n-1)$ años y se convertirá en:

$$a(1+r)^{n-1}.$$

La tercera imposición del mismo modo se convertirá en

$$a(1+r)^{n-2}$$



y así consecutivamente, de manera que la penúltima imposición se convertirá en:

$$a(1+r)^2$$

y la última, un año antes del arreglo:

$$a(1+r).$$

El capital así constituído será pues:

$$A = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} .. a(1+r)^2 + a(1+r)$$

o

$$A = a[(1+r) + (1+r)^2 + (1+r)^3 ... (1+r)^n].$$

La parte comprendida entre los corchetes es la suma de los términos de una progresión geométrica creciente de $n$ términos cuya razón es $1+r$, así como el primer término. Esta suma es pues (núm. 381):

$$A = \frac{a(1+r)[(1+r)^n - 1]}{1+r-1)}$$

o

$$A = \frac{a(1+r)[(1+r)^n - 1]}{r}. \qquad (4)$$

**446.** Esta fórmula general contiene cuatro cantidades variables, A, $a$, $r$, y $n$, que se pueden despejar fácilmente, excepto, sin embargo $r$, que ordinariamente se obtiene por una ecuación de un grado superior al segundo.

Si se despeja $a$, resulta:

$$a = \frac{Ar}{(1+r)[(1+r)^n - 1]}. \qquad (5)$$

Si se despeja $n$, se encuentra sucesivamente:

$$Ar = a(1+r)(1+r)^n - a(1+r)$$
$$Ar + a(1+r) = a(1+r)(1+r)^n$$
$$\frac{Ar + a(1+r)}{a(1+r)} = (1+r)^n$$
$$n \log. (1+r) = \log. [Ar + a(1+r)] - \log. a(1+r)$$
$$n = \frac{\log. [Ar + a(1+r)] - \log. a(1+r)}{\log. (1+r)}. \qquad (6)$$

**447.** Si el capital no debiera estar constituído sino $m$ años después del $n^{mo}$ depósito, se razonaría como sigue:

La última anualidad pagada produciría durante $m$ años y se convertiría en :

$$a(1+r)^m$$

la penúltima se convertiría en :

$$a(1+r)^{m+1}$$

la antepenúltima :

$$a(1+r)^{m+2}$$

y así sucesivamente, de tal manera que la primera anualidad se convertiría en :

$$a(1+r)^{m+(n-1)}$$

de donde haciendo la suma :

$$A=a(1+r)^m+a(1+r)^{m+1}+a(1+r)^{m+2}\ldots a(1+r)^{m+n-1}.$$

El segundo miembro es la suma de los términos de una progresión geométrica creciente cuya razón es $1+r$ y el número de términos $n$; luego (núm. 381) :

$$A=\frac{a(1+r)^m[(1+r)^n-1]}{r}. \qquad (7)$$

**448. Observación.** — Constituir un capital $m$ años después del $n^{mo}$ y último depósito, es lo mismo que constituirlo $m+(n-1)$ años después del primer depósito.

**449. Aplicaciones.** — 1° *Un municipio pide prestados 50 000 pesos al 4 °/₀ y quiere amortizar esta deuda en 20 años. ¿Qué anualidad debe pagar?*

La formula (1) da :

$$a=\frac{50000\times 0,04(1,04)^{20}}{(1,04)^{20}-1}.$$

Se tiene primeramente para el numerador :

$$\begin{aligned} \text{Log } 50000 &= 4,69897 \\ \text{Log } 0,04 &= \bar{2},60206 \\ 20 \log 1,04 &= 0,34067 \\ \hline \text{Log del numerador } & \quad 3,64170 \end{aligned}$$

Para el denominador se tiene :

$$20 \log 1,04 = 0,34067, \text{ de donde } (1,04)^{20}=2,1911$$



y por consiguiente el valor de $(1,04)^{20}-1$ es....1,1911.

$$\text{Log } 1,1911 = 0,07595.$$

Restando este logaritmo de el del numerador :

$$\text{Log } a = 3,56575$$

de donde

$$a = \$\ 3679,25.$$

2° *Un municipio que puede disponer durante 24 años de una suma de 8 000 pesos, pregunta qué capital debe tomar prestado al 5 °/₀ para que este capital quede amortizado al cabo de 24 años.*

La fórmula (2) da :

$$A=\frac{8000[(1,05)^{24}-1]}{0,05(1,05)^{24}},$$

Efectuando los cálculos, se encuentra $A=110387$ pesos.

3° *Un padre de familia impone cada año, desde el nacimiento de su hijo, una suma de 200 pesos, al 4 °/₀ de interés compuesto. ¿Qué suma recibirá el hijo a la edad de 21 años?*

Hay por todo 21 imposiciones, porque la primera se hizo el día del nacimiento del hijo, la segunda al principio del segundo año...., la vigésima primera al principio del vigésimo primer año.

La fórmula (4) da :

$$A=\frac{200\times 1,04(1,04^{21}-1)}{0,04}=\$\ 6649,70.$$

4° *Un hacendado ha impuesto cada año, durante 15 años, una suma de 500 pesos al 4°/₀. ¿Qué capital tendrá 5 años después del último depósito?*

Aquí $m=5$, $n=15$ y la fórmula (7) da :

$$A=\frac{500}{0,04}(1,04)^5[(1,04)^{15}-1]=\$\ 12181,5.$$

# NOTA I

## PRINCIPIOS RELATIVOS A LAS ECUACIONES Y Á LAS INECUACIONES

### § I. — Principios generales relativos á las ecuaciones.

**450. Primer principio.** — *Si se agrega o se quita una misma cantidad a los dos miembros de una ecuación, se obtiene una ecuación equivalente.*

Representemos por A el primer miembro y por B el segundo miembro de una ecuación, pudiendo uno y otro miembro contener las incógnitas, y escribamos :

$$A = B$$

Agreguemos a los dos miembros la cantidad C, contenga o no contenga incógnitas, se tiene :

$$A + C = B + C.$$

Hagamos ver que estas dos ecuaciones son equivalentes. Para esto necesitamos probar que cualquier solución de la primera es una solución de la segunda y recíprocamente.

En efecto, haciendo idénticos, cualquier solución de la ecuación (1), a los dos miembros de esta ecuación, estos miembros serán todavía idénticos cuando se haya agregado a cada uno de ellos la misma cantidad C; pero entonces las cantidades que se obtienen son los dos miembros de la ecuación (2); luego cualquier solución de la ecuación (1) conviene también a la ecuación (2).

**Recíprocamente.** — Cualquier solución de la ecuación (2), haciendo idénticos los dos miembros de esta ecuación, da evidentemente el mismo valor a C en los dos miembros, por consiguiente hace a A idéntico a B : es pues una solución de la ecuación (1).

**451. Observación.** — Si se supone que C sea negativa, la demostración anterior prueba que se puede quitar una misma cantidad a los dos miembros de una ecuación sin que se alteren las soluciones de esta ecuación.



**452. Segundo principio.** — *Si se multiplican o se dividen los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad que no sea nula ni infinita y que no contenga ninguna incógnita, se obtiene una ecuación equivalente.*

Sea la ecuación

$$A = B.$$

Multipliquemos los dos miembros por una misma cantidad finita C, que no contenga incógnita, se tendrá :

$$A \times C = B \times C.$$

Apliquemos el principio anterior (nº 450) y hagamos pasar todos los términos de las dos ecuaciones al primer miembro, resultando :

$$A - B = 0 \qquad (1)$$

$$C \times (A - B) = 0 \qquad (2)$$

Falta probar que cualquier solución de la primera ecuación es una solución de la segunda, y recíprocamente.

En efecto, toda solución de la ecuación (1) haciendo A igual a B anula el primer miembro de esta ecuación ; este miembro valdrá todavía cero aun cuando se haya multiplicado por la cantidad C que no es infinita. Pero entonces se tiene el primer miembro de la ecuación (2), luego toda solución de la ecuación (1) conviene igualmente a la ecuación (2).

**Recíprocamente.** — El primer miembro de la ecuación (2) llegando a ser cero para toda solución de esta ecuación y no siendo C nulo, es preciso que A — B valga cero; pero A — B es el primer miembro de la ecuación (1), luego toda solución de la ecuacion (2) conviene igualmente a la ecuación (1).

**453. Observación.** — Si se supone que C represente un quebrado de la forma $\frac{1}{C}$, la demostración anterior prueba que se pueden dividir los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad finita sin cambiar las soluciones de esta ecuación.

### § II. — Ecuaciones simultáneas.

**454. Primer principio.** — *Cuando se tiene un sistema de ecuaciones simultáneas, se puede reemplazar cualquiera de* *ellas por la ecuación que resulte de sumar miembro a miembro esta ecuación con una o varias de las otras ecuaciones, y se forma un sistema equivalente al primero.*

Sean los sistemas :

$$\begin{matrix} A = A' \\ B = B' \\ C = C' \end{matrix} \quad (1) \qquad \begin{matrix} A + B + C = A' + B' + C' \\ B = B' \\ C = C' \end{matrix} \quad (2)$$

se necesita probar que son equivalentes.

En efecto, toda solución del sistema (1) hará idénticos los dos miembros de las ecuaciones que lo componen. Pero si A es idéntico a A′, B a B′ y C a C′, los dos miembros de la ecuación :

$$A + B + C = A' + B' + C'$$

también son idénticos. Luego toda solución del sistema (1) es una solución del sistema (2).

**Recíprocamente** — Toda solución del sistema (2) haciendo a B idéntico a B′ y C a C′, hará $B + C$ idéntico a $B' + C'$; y como ella debe verificar también la ecuación $A + B + C = A' + B' + C'$, hará necesariamente a A idéntico a A′. Luego toda solución del sistema (2) es una solución del sistema (1). Luego los dos sistemas son equivalentes.

**455. Segundo principio** — *Cuando se tiene un sistema de ecuaciones simultáneas, si se saca de una de las ecuaciones el valor de cualquier incógnita en función de las otras y se substituye en las otras ecuaciones esta incógnita por el valor encontrado, se forma un nuevo sistema equivalente al primero.*

Sea el sistema :

$$\begin{matrix} x = A \\ B = B' \\ C = C' \end{matrix} \qquad (1)$$

en el cual A no contiene $x$, mientras que B, B′, C y C′ sí la contienen.

En las dos últimas ecuaciones, reemplacemos $x$ por A y llamemos $B_1$, $B'_1$, $C_1$ y $C'_1$ el resultado de la substitución, se tendrá el sistema :

$$\begin{matrix} x = A \\ B_1 = B'_1 \\ C_1 = C'_1 \end{matrix} \qquad (2)$$

necesita demostrarse que el sistema (2) es equivalente al sistema (1).



En efecto, toda solución del sistema (1) hará el valor de $x$ idéntico al de A; y como las ecuaciones del sistema (2) no difieren de las del sistema (1) sino en que allí se ha reemplazado $x$ por el valor idéntico A, se infiere de ahí que $B_1$, es idéntico a $B'_1$, y $C_1$ a $C'_1$. Luego toda solución del sistema (1) es una solución del sistema (2).

**Recíprocamente.** — Toda solución del sistema (2) haciendo el valor de $x$ idéntico al de A, se podrá, en este sistema, reemplazar A por $x$, y se volverá a encontrar el sistema (1); luego las soluciones del segundo sistema son las mismas que las del primero.

Por lo tanto los dos sistemas son equivalentes.

## § III. — Inecuaciones.

**456. Primer principio.** — *Si se agrega o se quita una misma cantidad a los dos miembros de una inecuación, se tiene una inecuación equivalente.*

En la demostración, suponemos que sólo hay una incógnita; pero el raciocinio sería idéntico si hubiera varias incógnitas

Sea

$$A(x) > B(x) \qquad (1)$$

una inecuación, y $C(x)$ una cantidad.

La inecuación

$$A(x) + C(x) > B(x) + C(x) \qquad (2)$$

es equivalente a la inecuación (1).

En efecto, si $x = a$ es una solución de (1), se tiene

$$A(a) > B(a). \qquad (1)'$$

En una desigualdad numérica, se puede agregar a los dos miembros el *número* $C(a)$ y se tiene

$$A(a) + C(a) > B(a) + C(a) \qquad (2)'$$

Esta desigualdad demuestra que $x = a$ es una solución de (2).

Recíprocamente, si $x = b$ es una solución de (2), se tiene

$$A(b) + C(b) > B(b) + C(b).$$

En esta desigualdad numérica, se puede quitar a cada miembro el *número* $C(b)$; y queda

$$A(b) > B(b)$$

que demuestra que $x = b$ es una solución de (1).

**457. Segundo principio.** — *Si se multiplican o se dividen los dos miembros de una inecuación por una misma cantidad positiva, se obtiene una inecuación equivalente; pero, si se multiplican o se dividen estos dos miembros por una misma cantidad negativa, es preciso cambiar el sentido de la segunda inecuación para que resulte equivalente a la inecuación dada.*

1° Sea

$$A(x) > B(x) \qquad (1)$$

y C una cantidad que contiene o no contiene $x$, pero queda siempre positiva.

La inecuación

$$A(x) \times C > B(x) \times C \qquad (2)$$

es equivalente a la inecuación (1).

En efecto, si $x = a$ es una solución de (1), se tiene

$$A(a) > B(a).$$

En esta *desigualdad numérica*, se pueden multiplicar los dos miembros por el *número positivo* C, y se tiene

$$A(a) \times C > B(a) \times C$$

lo que demuestra que $x = a$ es una solución de (2).

Recíprocamente, si $x = b$ es una solución de (2), se tiene

$$A(b) \times C > B(b) \times C$$

en esta *desigualdad numérica*, se pueden dividir los dos miembros por el *número positivo* C, y se tiene

$$A(b) > B(b)$$

lo que demuestra que $x = b$ es una solución de (1).

Del mismo modo se demuestra que se pueden dividir los dos miembros por C.

2° Si C queda siempre negativa, la inecuación

$$A(x) \times C < B(x) \times C \qquad (2)$$

es equivalente a

$$A(x) > B(x). \qquad (1)$$

En efecto, si $x = a$ es una solución de (1), se tiene

$$A(a) > B(a) \qquad (1)'$$

y, siendo C negativa, la desigualdad numérica (1)' da

$$A(a) \times C < B(a) \times C;$$

lo que demuestra que $x = a$ es una solución de (2) y, recíprocamente, toda solución de (2) es una solución de (1).



**458. Tercer principio.** — *Si los dos miembros de una inecuación son positivos, se los puede elevar al cuadrado, y resulta una inecuación equivalente; si son negativos, es preciso, además, cambiar el sentido de la nueva inecuación.*

*Si no se conoce su signo, tampoco se puede conocer el sentido del resultado.*

1° Sea

$$A(x) > B(x) \qquad (1)$$

en la cual los dos miembros siempre son positivos.

La inecuación

$$A^2(x) > B^2(x) \qquad (2)$$

es equivalente a (1).

En efecto (2) puede escribirse

$$A^2(x) - B^2(x) > 0$$

o

$$[A(x) + B(x)]\,[A(x) - B(x)] > 0 \qquad (2)'$$

y (1) puede escribirse

$$A(x) - B(x) > 0 \qquad (1)'$$

si $x = a$ es una solución de (1), se tiene

$$A(a) - B(a) > 0,$$

y, multiplicando por el *número positivo* $A(a) + B(a)$, se tiene

$$[A(a) + B(a)]\,[A(a) - B(a)] > 0$$

que demuestra que $x = a$ es una solución de (2).

Del mismo modo, si $x = b$ es una solución de (2), se tiene la *desigualdad numérica*

$$[A(b) + B(b)]\,[A(b) - B(b)] > 0$$

y dividiendo por el *número positivo* $A(b) + B(b)$, se tiene

$$A(b) - B(b) > 0$$

lo que demuestra que $x = b$ es una solución de (1).

2° Sea

$$A(x) > B(x) \qquad (1)$$

en la cual los dos miembros siempre son negativos.

La inecuación

$$A^2(x) < B^2(x) \qquad (2)$$

es equivalente a (1).

En efecto, (2) puede escribirse

$$A^2(x) - B^2(x) < 0$$

o

$$[A(x) + B(x)]\,[A(x) - B(x)] < 0$$

y (1) puede escribirse

$$A(x) - B(x) > 0$$

si $x = a$ es una solución de (1), se tiene

$$A(a) - B(a) > 0$$

y multiplicando los dos miembros de esta *desigualdad numérica* por el *número negativo* $A(a) + B(a)$,

resulta

$$[A(a) + B(a)]\,[A(a) - B(a)] < 0$$

lo que demuestra que $x = a$ es una solución de (2).

Recíprocamente, toda solución de (2) es una solución de (1).

---

## NOTA II

## MÁXIMOS Y MÍNIMOS

### § I. — Definiciones.

**459. Variable.** — *Se llama* **variable** *una cantidad que puede pasar sucesivamente por diferentes estados de magnitud.*

*Dos variables son* **función** *una de otra cuando la variación de una trae consigo la variación de la otra.*

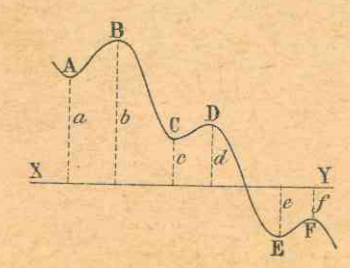
*Variable independiente* es aquella a la cual se atribuyen valores arbitrarios; la otra se llama *variable dependiente* o función de la primera.

**460**. Cuando una función que varía de una manera continua disminuye después de haber aumentado, pasa por un valor mayor que los valores que lo preceden y que lo siguen inmediatamente; este valor se dice que es **máximo**.



Al contrario, si después de haber disminuído, la función aumenta, pasa por un valor menor que los valores inmediatos; este valor se dice que es **mínimo**.

**461**. Los máximos y los mínimos son pues *magnitudes relativas* que deben siempre considerarse con relación a los valores inmediatos. Una misma función puede tener más de un máximo y más de un mínimo y puede suceder que un mínimo sea mayor que un máximo.




Si la línea ABF representa el corte de terreno por un plano vertical, las alturas $b$, $d$, $f$ arriba de una horizontal XY, marcan cada una un máximo, mientras que las alturas $a$, $c$, $e$, indican cada una un mínimo, y se ve que el mínimo $a$ es mayor que el máximo $d$.

**462**. La teoría de máximos y mínimos no es del dominio del álgebra elemental; se pueden sin embargo resolver las cuestiones que dan lugar a una función de segundo grado o aun algunas de un grado más elevado.

Con este fin se emplean varios procedimientos. Indicaremos el *Método directo*, el *Método indirecto* y el *Método de aplicación de los principios*.

Ninguno de estos métodos puede dar los máximos y mínimos de todas las funciones. El más cómodo y seguro es el de las derivadas (V. nuestros Elementos de Geom. Analítica y de Cálculo infinitesimal).

### § II. — Método directo.

**463**. El procedimiento más natural para la averiguación de los máximos y mínimos consiste en el estudio de las variaciones de la función cuando $x$ varía entre $-\infty$ y $+\infty$. Este método se llama *Método directo*. Lo hemos aplicado en el estudio de las variaciones del trinomio $y = ax^2 + bx + c$.

**464**. Demos otro ejemplo.

Sea

$$y = \frac{1}{x^2 - 7x + 12}.$$

Haciendo

$$z = x^2 - 7x + 12$$

se tiene

$$y = \frac{1}{z}$$

$z$ tiene un mínimo

$$\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

que es igual a

$$\frac{48 - 49}{4} = -\frac{1}{4}$$

y corresponde a

$$x = -\frac{-7}{2} = \frac{7}{2}.$$

Las raíces de $z$ son $x = 3$ y $x = 4$.

En fin, según el nº 312, $z$ es positivo cuando $x < 3$ ó $x > 4$, y es negativo cuando $3 < x < 4$.

Siendo $y$ la inversa de $z$, se tiene el cuadro siguiente

| Valor de $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $\frac{7}{2}$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valor de $z$ | $\infty$ | decrece | 0 | decrece | $-\frac{1}{4}$ | crece | 0 | crece | $+\infty$ |
| Signo de $z$ | | + | | | − | | | + | |
| Variac. de $y$ | 0 | crece | $+\infty$ $-\infty$ | crece | $-4$ | decrece | $-\infty$ $+\infty$ | decrece | 0 |

$y$ tiene un *máximo* que es $-4$, cuando $x = \frac{7}{2}$.

## § III. — Método indirecto.

**465.** Se representa la función por $m$ y se busca entre qué límites se puede hacer variar $m$ para que la variable permanezca real. Los límites así encontrados dan a conocer el máximo y el mínimo.

**466. Problema I.** — *Hallar el máximo o el mínimo del trinomio de segundo grado* $ax^2 + bx + c$.

Escribamos

$$ax^2 + bx + c = m$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac + 4am}}{2a}.$$



Para que $x$ sea real se necesita que

$$b^2 - 4ac + 4am \geqslant 0$$

o

$$4am \geqslant 4ac - b^2.$$

1º Si $a$ es positiva, se tiene :

$$m \geqslant \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

2º Y si $a$ es negativa,

$$m \leqslant \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

En el primer caso, debiendo ser $m$ cuando menos igual a $\frac{4ac - b^2}{4a}$ este valor es el mínimo de $m$.

En el segundo caso, debiendo ser $m$ cuando más igual a $\frac{4ac - b^2}{4a}$, este valor es el máximo de $m$.

**467. Problema II.** — *Hallar el máximo o el mínimo de los trinomios :*

$$3x^2 - 5x + 4 \quad \text{y} \quad -x^2 + 3x - 7.$$

1º Supongamos

$$3x^2 - 5x + 4 = m$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 48 + 12m}}{6}$$

$x$ no será real sino cuando se tenga

$$25 - 48 + 12m \geqslant 0$$

de donde

$$m \geqslant \frac{23}{12}.$$

El mínimo del trinomio es $\frac{23}{12}$; tiene lugar para $x = \frac{5}{6}$

Cuando se hace variar $x$ de $+\infty$ á $-\infty$, el trinomio dado toma todos los valores comprendidos entre $\frac{23}{12}$ y $+\infty$.

2º Supongamos

$$-x^2 + 3x - 7 = m$$

o

$$x^2 - 3x + 7 = -m$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{9 - 28 - 4m}}{2}.$$

Para que $x$ sea real se necesita que

$$-19 - 4m \geqslant 0$$

de donde

$$m \leqslant -\frac{19}{4}.$$

El trinomio tiene un máximo que es $-\frac{19}{4}$, tiene lugar para $x = \frac{3}{2}$.

**468. Problema III.** — *Siendo constante el producto de dos factores positivos, encontrar el mínimo de su suma.*

Sean $p^2$ el producto constante de los dos factores y $m$ su suma.

Se tiene

$$X^2 - mX + p^2 = 0$$

de donde

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4p^2}}{2}$$

$x$ e $y$ no serán reales sino cuando la cantidad colocada dentro del radical sea positiva, lo cual exige que $m$ no esté comprendido entre las dos raíces $+2p$ y $-2p$ de $m^2 - 4p^2 = 0$. Pero, conforme al enunciado, los factores son positivos; su suma $m$ deberá pues ser positiva. Esta suma puede por otra parte variar entre $+\infty$ y $2p$.

El mínimo pedido es pues $2p$.

Para $m = 2p$, $x = y = p$, y los dos factores son iguales.

**469. Problema IV.** — *Descomponer un número* a *en dos partes tales que la suma de sus cuadrados sea mínima.*

Se tiene

$$x^2 + (a - x)^2 = m \qquad (1)$$

$$x^2 - ax + \frac{a^2 - m}{2} = 0 \qquad (2)$$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{2m - a^2}}{2}. \qquad (3)$$

Para que el valor de $x$ sea real se necesita que

$$2m - a^2 \geqslant 0$$

de donde

$$m \geqslant \frac{a^2}{2}.$$

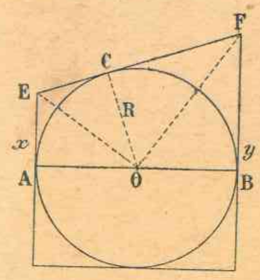
Así la suma $m$ no puede ser menor que la mitad del



cuadrado del número propuesto : $\frac{a^2}{2}$ es pues el mínimo pedido.

Reemplazando en la ecuación (3) $m$ por $\frac{a^2}{2}$, se encuentra $x = \frac{a}{2}$ y por consiguiente la otra parte será también $\frac{a}{2}$.

**470. Problema V.** — *Se tiene un semicírculo* ACB; *se levantan las perpendiculares* AE, BF *a las extremidades del diámetro, y se quiere trazar una tangente tal que el trapecio rectangular formado tenga una superficie mínima* S.




Supongamos

$$AE = EC = x; \quad BF = FC = y,$$
$$AB = 2R \quad \text{y} \quad OC = R.$$

Se tiene, conforme a la geometría,

$$(x + y)\,R = S$$

$$x + y = \frac{S}{R}. \qquad (1)$$

el triángulo rectángulo EOF da

$$xy = R^2. \qquad (2)$$

Conociendo la suma y el producto de las incógnitas, se puede escribir :

$$X^2 - \frac{S}{R}X + R^2 = 0$$

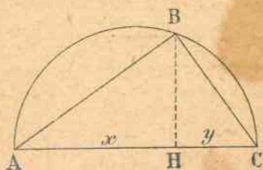
$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4R^4}}{2R}.$$

Para que los valores de $x$ y de $y$ sean reales, se necesita que la cantidad que está dentro del radical sea positiva, es decir, que el valor de S no esté comprendido entre las dos raíces $2R^2$ y $-2R^2$ de $S^2 - 4R^4 = 0$ (núm. 312); $2R^2$ es pues el mínimo y $-2R^2$ el máximo.

Para $S = 2R^2$ se encuentra $x = y = R$. El trapecio puede tomar dos series de valores : 1°, parte de $+\infty$ para $x = \infty$, decrece hasta $2R^2$ su mínimo, entonces $x = R$, luego crece hasta $+\infty$ para $x = 0$.

2° Parte de $-\infty$ para $x=0$, crece hasta $-2R^2$ su máximo, entonces $x=-R$, luego decrece hasta $-\infty$ para $x=-\infty$.

**471. Problema VI.** — *En un semicírculo se inscribe un triángulo; estudiar las variaciones del perímetro de este triángulo.*




Sea ABC un triángulo inscrito. Permaneciendo fija la base AC, la longitud del perímetro depende de la suma de los lados AB + BC. Como esta suma tiende hacia AC cuando un lado del ángulo recto tiende hacia cero, hay pues un máximo.

Llamemos $m$ la suma AB + BC; la perpendicular BH determina los segmentos $x$ e $y$, y se tiene:

$$AB=\sqrt{2Rx}; \qquad BC=\sqrt{2Ry}.$$

Las ecuaciones del problema son pues

$$x+y=2R$$
$$\sqrt{2Rx}+\sqrt{2Ry}=m.$$

El valor de $y$ sacado de la primera y substituído en la segunda da:

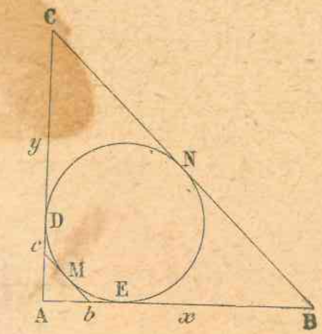
$$\sqrt{2Rx}+\sqrt{2R(2R-x)}=m$$
$$\sqrt{2R(2R-x)}=m-\sqrt{2Rx}$$
$$4R^2-2Rx=m^2+2Rx-2m\sqrt{2Rx}$$
$$4R^2-4Rx-m^2=-2m\sqrt{2Rx}$$
$$16R^4+16R^2x^2+m^4-32R^3x-8R^2m^2+8m^2Rx=8m^2Rx.$$
$$16R^2x^2-32R^3x+m^4+16R^4-8R^2m^2=0$$
$$x=\frac{4R^2\pm m\sqrt{8R^2-m^2}}{4R}.$$

Siendo negativo el coeficiente de $m^2$, no puede variar $m$ más que entre las raíces $\pm 2R\sqrt{2}$ de $8R^2-m^2=0$; el máximo es pues $2R\sqrt{2}$ y el mínimo $-2R\sqrt{2}$.

Para $m=2R\sqrt{2}$, $x=R$ y el triángulo es isósceles; cuando $m=-2R\sqrt{2}$, $x=R$; el triángulo también es isósceles y está situado debajo del primero.

**472. Problema VII.** — *Dado un círculo* r *tangente a los dos lados de un ángulo recto; se tira una tangente a este círculo y se forma un triángulo rectángulo circunscrito tal como A B C. Estudiar las variaciones del área de este triángulo y por consiguiente las de los lados del ángulo recto.*






Llamemos $x$ e $y$ los lados del ángulo recto del triángulo y S el área obtenida; se tiene por primera ecuación:

$$xy=2S \qquad (1)$$

como

$$CN=CD=y-r$$
$$BN=BE=x-r$$

El perímetro del triángulo es pues:

$$2x+2y-2r$$

por consiguiente la segunda ecuación será

$$(x+y-r)r=S$$
$$x+y=\frac{S+r^2}{r}. \qquad (2)$$

Conociendo ya la suma y el producto de las incógnitas, se puede escribir:

$$X^2-\frac{(S+r^2)X}{r}+2S=0$$
$$x=\frac{S+r^2+\sqrt{S^2-6r^2S+r^4}}{2r} \qquad (3)$$
$$y=\frac{S+r^2-\sqrt{S^2-6r^2S+r^4}}{2r} \qquad (4)$$

**Discusión.** — Para que las raíces sean reales, se necesita que el valor de S no esté comprendido entre las raíces $r^2(3+2\sqrt{2})$ y $r^2(3-2\sqrt{2})$ del trinomio $S^2-6r^2S+r^4$.

El mínimo es pues $r^2(3+2\sqrt{2})$, y el máximo $r^2(3-2\sqrt{2})$.

Para $S=r^2(3+2\sqrt{2})$, $\quad x=y=r(2+\sqrt{2})$
y para $S=r^2(3-2\sqrt{2})$, $\quad x=y=r(2-\sqrt{2})$.

Cuando $S=\infty$, $x=\infty$, BC es paralela a AB, y por consiguiente $y=2r$.

Es fácil verificar este resultado para el valor de $x$, porque cuando se hace $S=\infty$ en la ecuación (3) se encuentra $x=\infty$. La ecuación (4) no se presta directamente á la verificación del valor de $y$; pero cuando se multiplican los dos términos del segundo miembro por

$$S+r^2+\sqrt{S^2-6r^2S+r^4}$$

esta ecuación se convierte en

$$y=\frac{4Sr}{S+r^2+\sqrt{S^2-6r^2S+r^4}}$$

o, dividiendo todos los términos por S :

$$y=\frac{4r}{1+\frac{r^2}{S}+\sqrt{1-\frac{6r^2}{S}+\frac{r^4}{S^2}}}.$$

Si se hace $S=\infty$, los términos $\frac{r^2}{S}$, $-\frac{6r^2}{S}$ y $\frac{r^4}{S^2}$ se convierten en cero, y se tiene :

$$y=\frac{4r}{1+1}=2r.$$

Cuando $S=0$, $x=r$ e $y=0$. Para verificar este resultado, basta hacer $S=0$ en las fórmulas (3) y (4), y se encuentra

$$x=\frac{r^2+r^2}{2r}=r$$

$$y=\frac{r^2-r^2}{2r}=0.$$

**Resumen.** — 1° Decreciendo $x$ de $+\infty$ a $r(2+\sqrt{2})$, S decrece de $+\infty$ a $r^2(3+2\sqrt{2})$, su mínimo; si $x$ continúa decreciendo de $r(2+\sqrt{2})$ a $2r$, S crece de $r^2(3+2\sqrt{2})$ á $+\infty$.

2° Decreciendo $x$ de $r$ a $r(2-\sqrt{2})$, S crece de 0 a $r^2(3-2\sqrt{2})$, su máximo; si $x$ continúa decreciendo de $r(2-\sqrt{2})$ á 0, S decrece de $r^2(3-2\sqrt{2})$ á 0.

No consideramos los valores de $x$ comprendidos entre



$2r$ y $r$, porque el triángulo no estaría situado en el ángulo BAC. Para estos valores, S varía de $-\infty$ á 0.

Así el triángulo puede tomar dos series de valores, todos positivos. 1° Parte de $+\infty$, decrece hasta su mínimo, luego crece hasta $+\infty$; 2° Parte de 0, crece hasta su máximo, luego decrece hasta 0.

El mínimo corresponde al triángulo isósceles ABC, y el máximo al triángulo isósceles Abc. El triángulo Abc, no obstante ser menor que el triángulo ABC, es sin embargo el mayor de los triángulos que se pueden formar por medio de una tangente al círculo en la region DME, mientras que ABC es el menor de los triángulos que determina una tangente en la región DNE.

**473. Problema VIII.** — *¿Para qué valor de* x *será máxima o mínima la expresión* $\frac{x-4}{x^2-3x-3}$?

Llamemos $m$ el valor de la función, se tendrá :

$$\frac{x-4}{x^2-3x-3}=m$$

$$x-4=mx^2-3mx-3m$$

$$mx^2-3mx-x-3m+4=0$$

$$mx^2-(3m+1)x-(3m-4)=0$$

$$x=\frac{3m+1\pm\sqrt{(3m+1)^2+4m(3m-4)}}{2m}$$

simplificando se encuentra :

$$x=\frac{3m+1\pm\sqrt{21m^2-10m+1}}{2m}. \qquad (1)$$

Para que $x$ sea real, se necesita que :

$$21m^2-10m+1\geqslant 0.$$

Las raíces del trinomio :

$$m^2-\frac{10m}{21}+\frac{1}{21}$$

son :

$$m'=\frac{1}{3} \quad \text{y} \quad m''=\frac{1}{7}.$$

Siendo positivo el primer término del trinomio, el valor de $m$ no debe estar comprendido entre las dos raíces. Así $m$ debe ser mayor que $\frac{1}{3}$ o menor que $\frac{1}{7}$; puede, pues, valer todos los números comprendidos entre $\frac{1}{3}$ y $+\infty$, y entre $\frac{1}{7}$ y $-\infty$.

El mínimo de la función es pues $\frac{1}{3}$ y su máximo $\frac{1}{7}$.

Para $m=\frac{1}{3}$ la ecuación (1) da $x=3$, y para $m=\frac{1}{7}$ la misma ecuación da $x=5$.

La fracción propuesta es, pues, máxima para $x=5$ y mínima para $x=3$.

474. **Discusión.** — Cuando $x=4$, llegando a ser nulo el numerador sin serlo el denominador, la función se anula.

Para determinar el valor hacia el cual tiende la función cuando $x$ tiende hacia el infinito, se dividen los dos términos de la fracción por $x^2$ y se escribe:

$$m=\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}=\frac{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}}.$$

Si se hace ahora $x=\pm\infty$, el valor de cada uno de los términos $\frac{1}{x}$, $-\frac{4}{x^2}$, $-\frac{3}{x}$, $-\frac{3}{x^2}$ se convierte en cero, y se encuentra $m=\frac{0}{1}=0$.

Así la función se anula todavía para $x=\pm\infty$.

El denominador igualado a cero tiene por raíces $\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$; no anulando al numerador estos valores, la función llega á ser infinita para

$$x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}.$$

475. **Resumen.** — Decreciendo $x$ de $+\infty$ á $+5$, $m$ crece de 0 á $\frac{1}{7}$ su máximo; decreciendo $x$ de $+5$ a $+4$, $m$ disminuye de $\frac{1}{7}$ a 0; decreciendo $x$ todavía de 4 a $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$, $m$ decrece de cero á $-\infty$. Desde el momento en que $x$ llega a ser menor que $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$, $m$ pasa bruscamente de $-\infty$ a $+\infty$.



Si $x$ continúa decreciendo de $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ a $+3$, $m$ decrece de $+\infty$ a $\frac{1}{3}$, su mínimo; decreciendo $x$ siempre de 3 a $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$, $m$ crece de $\frac{1}{3}$ a $+\infty$, siendo su valor $\frac{4}{3}$ para $x=0$; desde el momento en que $x$ llega a ser menor que $\frac{3-\sqrt{21}}{3}$, $m$ pasa todavía bruscamente de $+\infty$ a $-\infty$.

Por último, decreciendo $x$ de $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$ a $-\infty$, $m$ varía de $-\infty$ a 0.

476. **Problema IX.** — *Hallar el máximo y el mínimo de la fracción*

$$\frac{x^2+3}{2x-x^2-1}.$$

Escribamos
$$\frac{x^2+3}{2x-x^2-1}=m$$

o
$$x^2(1+m)-2mx+m+3=0$$

$$x=\frac{m\pm\sqrt{-4m-3}}{1+m}.$$

Para que $x$ sea real, se necesita que

$$-4m-3\geqslant 0$$

ó
$$4m+3\leqslant 0,\quad \text{ó sea}\quad m\leqslant -\frac{3}{4}.$$

Así $m$ debe ser menor que $-\frac{3}{4}$; puede pues valer todo lo más $-\frac{3}{4}$, y la fracción propuesta tiene un máximo y no tiene mínimo

Para $m=-\frac{3}{4}$ se encuentra $x=-3$.

477. **Problema X.** — *Hallar el máximo y el mínimo de la fracción*

$$\frac{x^2-4}{x^2-x-2}.$$

Supongamos $$\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=m$$
o
$$x^2(m-1)-mx-(2m-4)=0$$
de donde
$$x=\frac{m\pm\sqrt{9m^2-24m+16}}{2(m-1)}.$$

Para que $x$ sea real, se necesita que
$$9m^2-24m+16 \geqslant 0.$$

Este trinomio tiene sus dos raíces iguales cada una a $\frac{4}{3}$; será pues positivo como su primer término, cualesquiera que sean los valores que se den a $m$, en consecuencia, la fracción propuesta no tiene ni máximo ni mínimo.

Para el valor particular de $m=\frac{4}{3}$, se encuentra $x=2$; llevando este valor a la fracción, queda $m=\frac{0}{0}$.

Para quitar la indeterminación, observemos que el trinomio
$$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$$
y que $x^2-4$ puede ponerse bajo la forma $(x+2)(x-2)$.
Suprimiendo el factor común $(x-2)$ se encuentra :
$$\frac{x+2}{x+1}=\frac{4}{3}=m.$$

**Observación.** — Si las raíces del trinomio colocado dentro del radical hubieran sido imaginarias, la fracción tampoco hubiera tenido en ese caso ni máximo ni mínimo.

**478. Problema XI.** — *Hallar el máximo y el mínimo de la fracción*
$$\frac{4x-2x^2+1}{x^2+1}.$$
Supongamos
$$\frac{4x-2x^2+1}{x^2+1}=m$$
$$x^2(m+2)-4x-(1-m)=0$$
de donde
$$x=\frac{2\pm\sqrt{-m^2-m+6}}{m+2}.$$



Para que $x$ sea real, se necesita que
$$-(m^2+m-6)\geqslant 0.$$

Las raíces del trinomio $m^2+m-6$ son $+2$ y $-3$.

Para que la expresión $-(m^2+m-6)$ sea mayor que cero, se necesita que el trinomio $m^2+m-6$ tenga signo contrario al de su primer término, lo que tendrá lugar para todo valor de $m$ comprendido entre las dos raíces $+2$ y $-3$.

Se ve que 2 es un máximo y $-3$ un mínimo.

Para $m=2$, se encuentra $x=\frac{1}{2}$, y para $m=-3$. resulta $x=-2$.

**479. Regla práctica.** — Se ve, por los problemas que anteceden, que para determinar el máximo o el mínimo de una función de segundo grado con una sola incógnita, se iguala esta función a $m$, y se resuelve la ecuación con respecto a la incógnita. Pueden entonces presentarse dos casos según sea del segundo grado o del primer grado en $m$, la cantidad que está dentro del radical.

1° *La cantidad que está dentro del radical es del segundo grado*; tiene por consiguiente dos raíces. Entonces, si el coeficiente de $m^2$ es positivo, la mayor raíz es mínimo y la menor máximo. Al contrario, si el coeficiente de $m^2$ es negativo, la mayor raíz es máximo y la menor mínimo. Cuando las raíces son iguales o imaginarias, no hay ni máximo ni mínimo.

2° *La cantidad que está dentro del radical es de primer grado.* Entonces hay un máximo cuando el coeficiente de $m$ es negativo; y un mínimo cuando este coeficiente es positivo.

## § IV. — Método de aplicación de los principios.

**480.** Se puede á veces encontrar los máximos y mínimos aplicando los principios siguientes.

**481. 1er Principio.** — *El producto de dos factores positivos variables cuya suma es constante, es máximo cuando estos factores son iguales, si esto es posible.*

Sea $p$ el producto de dos factores $x$ e $y$ cuya suma $s$ es constante, se tiene :

$$X^2 - sX + p = 0$$

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \Big\} = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}.$$

Para que los valores de $x$ y de $y$ sean reales, se necesita que

$$s^2 - 4p \geqslant 0$$

o

$$p \leqslant \frac{s^2}{4}.$$

No pudiendo el producto $p$ ser mayor que $\frac{s^2}{4}$, $\frac{s^2}{4}$ es su máximo; para $p = \frac{s^2}{4}$ se encuentra $x = y = \frac{s}{2}$.

Así el producto es máximo cuando los dos factores son iguales.

**482.** Este principio puede demostrarse todavía como sigue:

Sean $2s$ la suma constante de los dos factores, y $2d$ su diferencia; los factores serán $s + d$ y $s - d$, y su producto

$$s^2 - d^2.$$

Este producto está compuesto de una cantidad constante $s^2$ y de una parte variable $d^2$; será el mayor posible cuando la cantidad por restar $d^2$ sea nula; pero si la cantidad $d$ es nula, los dos factores se convierten el uno y el otro en $a$, por consiguiente son iguales.

**483. 2° Principio.** — *El producto de varios factores positivos variables, cuya suma es constante, es máximo cuando estos factores son iguales, si esto es posible.*

Sean $x$, $y$, $z$, $v$... factores cuya suma es $s$.

Si estos factores no son iguales, se puede, sin alterar la suma constante $s$, reemplazar dos factores cualesquiera, $x$ e $y$ por ejemplo, cada uno por su semisuma $\frac{x+y}{2}$, y el producto $\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)$ es mayor que $xy$ (1er principio).

Así, en tanto que dos factores no sean iguales se podrá, sin alterar su suma, hacerlos iguales y aumentar el producto. Luego el producto será máximo cuando los factores sean iguales.

**484. 3er Principio.** — *El producto de dos factores positivos variables, cuya suma es constante y que están afectados cada uno de un exponente, es máximo cuando estos factores son proporcionales a sus exponentes.*



Sean $x^m$ e $y^n$ dos factores cuya suma $x + y = s$; su producto puede escribirse:

$$\frac{x^m}{m^m} \times \frac{y^n}{n^n} \times m^m \times n^n.$$

Este producto está formado de dos partes, la una fija $m^m \times n^n$ y la otra variable $\frac{x^m}{m^m} \times \frac{y^n}{n^n}$ o $\left(\frac{x}{m}\right)^m \times \left(\frac{y}{n}\right)^n$.

Esta última parte se compone de $m$ factores iguales a $\frac{x}{m}$ y de $n$ factores iguales a $\frac{x}{n}$; la suma de estos factores es constante, porque

$$m\frac{x}{m} + n\frac{y}{n} = x + y = s.$$

El producto será pues máximo cuando estos factores sean iguales (2° principio), es decir, cuando se tenga:

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} \quad \text{ó} \quad \frac{x}{y} = \frac{m}{n}.$$

**485. Observación.** — Hay un gran número de cuestiones de máximos y mínimos que se podrían llamar *recíprocas*, y en las cuales el máximo de la una corresponde al mínimo de la otra, de tal manera que el conocimiento del primero permite descubrir fácilmente el segundo.

Así, dada una cantidad P, si una segunda cantidad Q, ligada con la primera, llega a un máximo para ciertos valores de P, recíprocamente, dada Q, P llegará a un mínimo en las mismas circunstancias, *si con todo eso el máximo de Q disminuye al mismo tiempo que el valor de P.*

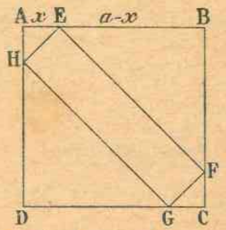
En efecto, sea $a$ el valor dado á P para el cual corresponde *un máximo* M de Q; si se le da a P un valor $a'$, menor que $a$, el máximo correspondiente de Q llega a ser, por hipótesis, menor que M; luego, para que Q pueda ser igual a M, se necesita dar a P un valor *cuando menos igual a* a, $a$ es pues *un mínimo.*

**486. Problema I.** — *Dividir el número 20 en dos partes tales que su producto sea máximo.*

Debiendo ser iguales los dos factores para que el producto sea máximo, cada uno de ellos valdrá 10.

Se puede uno cerciorar, en efecto, de que el producto de dos factores tales como 9 y 11, 8 y 12, 7 y 13... cuya suma es 20, es menor que el producto de 10 por 10.

**487. Problema II.** — *¿Cuál es el mayor rectángulo que se puede inscribir en un cuadrado dado?*




Sea ABCD el cuadrado dado. Llevemos a partir de los vértices opuestos A y C, y en los dos sentidos, una misma longitud arbitraria

$$AE = AH = CF = CG$$

el cuadrilátero EFGH es un rectángulo.

Llamando $a$ el lado del cuadrado y $x$ la longitud AE, se tendrá:

$$a - x = EB$$

Los triángulos AEH, EBF son rectángulos ó isósceles, luego

$$HE = x\sqrt{2} \quad \text{y} \quad EF = (a - x)\sqrt{2}.$$

Entonces

$$S = EH \times EF = x\sqrt{2} \times (a - x)\sqrt{2}$$

ó

$$S = 2(a - x)x.$$

La superficie S está expresada por tres factores de los cuales, uno, el factor 2, es fijo y los otros dos son variables; esta superficie será, pues, máxima cuando el producto de los factores variables sea el mayor posible.

La suma de estos dos factores variables es $a - x + x$ o $a$, cantidad constante. Así el producto $(a - x)x$ será máximo cuando los dos factores sean iguales; escribamos pues:

$$a - x = x$$

de donde

$$x = \frac{a}{2} \quad \text{y} \quad S = \frac{a^2}{2}.$$

Se ve que el rectángulo máximo es el cuadrado que tiene por vértices los medios de los 4 lados del cuadrado dado.



**488. Problema III.** — *De todos los triángulos que tienen el mismo perímetro ¿cuál es aquel cuya superficie es máxima?*

Llamemos 2 $p$ el perímetro y S la superficie; se tiene, conforme á una fórmula de geometría,

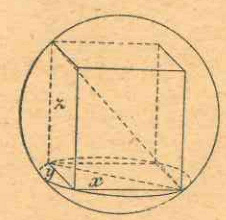
$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

La superficie será máxima cuando el producto de los tres factores variables $(p - a)(p - b)(p - c)$ sea el mayor posible; por otra parte, la suma de estos factores es constante, porque es igual á

$$p - a + p - b + p - c = 3p - (a + b + c) = 3p - 2p = p.$$

Luego el producto será máximo cuando los tres factores sean iguales; es decir, cuando se tenga $a = b = c$.

Así, de todos los triángulos que tienen el mismo perímetro, el mayor es el triángulo equilátero.




**489. Problema IV.** — *Inscribir en una esfera de radio conocido R el paralelipípedo rectángulo máximo.*

Llamando $x$, $y$, $z$ las tres dimensiones del paralelipípedo y V su volumen, se tiene

$$V = xyz$$

o

$$V^2 = x^2y^2z^2.$$

Se tiene también, llamando $v$ la diagonal de la base

$$x^2 + y^2 = v^2$$

y

$$v^2 + z^2 = 4R^2$$

de donde

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$$

$V^2$ es el producto de los tres factores $x^2$, $y^2$, $z^2$ cuya suma $4R^2$ es constante; este producto será máximo cuando los 3 factores sean iguales. Se tendrá pues:

$$x^2 = y^2 = z^2, \quad \text{o} \quad x = y = z.$$

Así, el paralelipípedo rectángulo máximo inscrito en una esfera es el cubo.

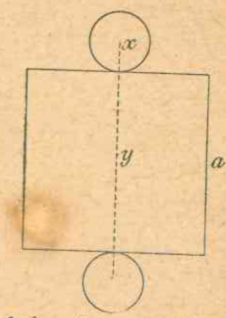
**490. Problema V.** — *De todos los cilindros de la misma superficie total $2\pi a^2$ ¿cuál es aquel cuyo volumen es máximo?*

Sean $x$ el radio de la base e $y$ la altura del cilindro, se tiene

$$2\pi x(x+y)=2\pi a^2$$

de donde

$$y=\frac{a^2-x^2}{x}.$$




Se tiene todavía :

$$V=\pi x^2 y=\frac{\pi x^2(a^2-x^2)}{x}=\pi x(a^2-x^2)$$

o

$$\frac{V^2}{\pi^2}=(x^2)(a^2-x^2)^2.$$

Teniendo una suma constante $a^2$ los factores $x^2$ y $a^2-x^2$, su producto será máximo cuando estos factores sean entre sí como sus exponentes; se tendrá pues :

$$\frac{x^2}{a^2-x^2}=\frac{1}{2}$$

de donde

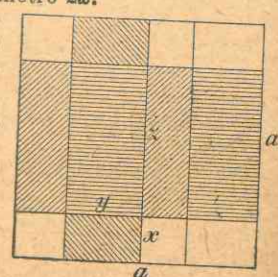
$$x=\frac{a}{3}\sqrt{3}$$

y por consiguiente :

$$y=\frac{a^2-\frac{a^2}{3}}{\frac{a}{3}\sqrt{3}}=\frac{2a}{3}\sqrt{3}.$$

Así la altura $y$ es igual al diámetro $2x$.

**491. Problema VI.** — *Con un cuadrado de cartón cuyo lado es a, construir el paralelipípedo rectángulo de volumen máximo.*




Llamando $x$, $y$, $z$, las tres dimensiones, se tiene :

$$y=\frac{a-2x}{2}$$

$$z=a-2x$$

y

$$V=xyz=\frac{x(a-2x)(a-2x)}{2}$$



$$V=\frac{x}{2}(a-2x)^2=\frac{1}{4}\times 2x(a-2x)^2.$$

Teniendo los factores variables $2x$ y $(a-2x)$ una suma constante $a$, su producto será máximo cuando sean proporcionales á sus exponentes.

Luego

$$\frac{a-2x}{2x}=\frac{2}{1}$$

de donde

$$x=\frac{a}{6}$$

y por consiguiente

$$y=\frac{2a}{6}$$

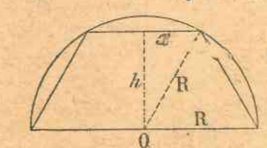
$$z=\frac{4a}{6}$$

de donde

$$V=xyz=\frac{a^3}{27}.$$

**Discusión.** — La fórmula $V=\frac{x}{2}(a-2x)^2$ demuestra que $x$ puede variar de 0 a $\frac{a}{2}$.

Para $x=0$, el factor $\frac{x}{2}$ es nulo así como el volumen $\frac{x}{2}(a-2x)^2$ creciendo $x$ de 0 a $\frac{a}{6}$, el volumen crece de 0 a $\frac{a^3}{27}$, su máximo; creciendo $x$ de $\frac{a}{6}$ a $\frac{a}{2}$, el factor $a-2x$ llega a ser nulo, y el volumen disminuye de $\frac{a^3}{27}$ a 0.




**492. Problema VII.** — *Inscribir en un semicírculo un trapecio cuya superficie S sea máxima.*

Llamemos $2x$ la longitud de la base superior del trapecio; se tendrá :

$$S=(R+x)h$$



$$S=(R+x)\sqrt{R^2-x^2}.$$

Hagamos pasar dentro del radical el factor $(R + x)$.

$$S = \sqrt{(R + x)^2 (R^2 - x^2)}$$
$$S = \sqrt{(R + x)^2 (R + x)(R - x)}$$
$$S = \sqrt{(R + x)^3 (R - x)}.$$

El valor S será máximo, cuando el producto de los factores $R + x$ y $R - x$ sea el mayor posible; ahora bien, la suma de estos dos factores es $2R$, cantidad constante; luego deben ser proporcionales a sus exponentes, y se tiene:

$$\frac{R + x}{R - x} = \frac{3}{1}$$

de donde

$$x = \frac{R}{2}.$$

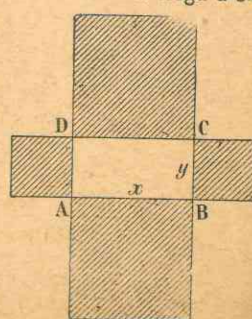
La base superior es pues R y por consiguiente el trapecio máximo es el semi-exágono regular.

**Discusión.** — La fórmula $S = \sqrt{(R + x)^3 (R - x)}$ demuestra que $x$ puede variar de 0 a R.

Para $x = 0$, la base superior es nula, el trapecio viene a ser un triángulo rectángulo isósceles cuya superficie es $R^2$.

Creciendo $x$ de 0 a $\frac{R}{2}$, la superficie crece de $R^2$ a $\frac{3R^2}{4}\sqrt{3}$, su máximo.

Creciendo $x$ aún de $\frac{R}{2}$ a R, la superficie disminuye de $\frac{3R^2}{4}\sqrt{3}$ a 0; porque para $x = R$, el factor $R - x$ llega a ser nulo, así como el producto $(R + x)^3 (R - x)$.




493. **Problema VIII.** — *Sobre cada uno de los lados de un rectángulo de perímetro constante 2p se construye un cuadrado ¿cuál es el mínimo de la superficie así obtenida?*

Se tiene

$$x + y = p$$
$$xy + 2x^2 + 2y^2 = S$$
$$2(x^2 + y^2 + 2xy) = S + 3xy$$
$$2(x + y)^2 = S + 3xy$$



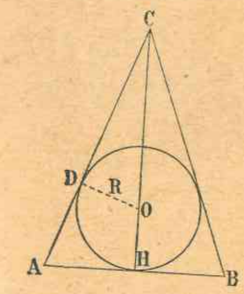
reemplacemos $x + y$ por $p$.

se tiene

$$2p^2 = S + 3xy$$
$$S = 2p^2 - 3xy.$$

Bajo esta forma vemos que el mínimo de la superficie S tendrá lugar cuando la cantidad por restar $3xy$ sea máxima, es decir, cuando se tenga $x = y$.

Así la superficie mínima estará formada por cinco cuadrados iguales.




494. **Problema IX.** — *Circunscribir a un círculo un triángulo isósceles de superficie mínima.*

Llamemos $2x$ la base AB e $y$ la altura CH, se tendrá

$$S = xy \qquad (1)$$

Los triángulos rectángulos semejantes CAH, COD dan:

$$\frac{\overline{AH}^2}{\overline{CH}^2} = \frac{\overline{DO}^2}{\overline{CD}^2} \quad \text{o} \quad \frac{x^2}{y^2} = \frac{R^2}{\overline{CD}^2}$$

ahora bien, la tangente

$$\overline{CD}^2 = y(y - 2R)$$

luego

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{R^2}{y(y - 2R)}. \qquad (2)$$

Multipliquemos los dos miembros por $y^4$.

$$x^2 y^2 = \frac{y^3 R^2}{y - 2R}$$

$x^2y^2$ es el cuadrado de la superficie; como el mínimo de la superficie tiene lugar al mismo tiempo que el mínimo del cuadrado; se trata pues, de estudiar la expresión $\frac{y^3 R^2}{y - 2R}$.

Transformémosla: después de haber dividido el numerador y el denominador por $y^3$, se tiene sucesivamente:

$$S^2 = \frac{R^2}{\frac{y}{y^3} - \frac{2R}{y^3}} = \frac{R^2}{\frac{1}{y^2} - \frac{2R}{y^3}} = \frac{R^2}{2R\left(\frac{1}{2Ry^2} - \frac{1}{y^3}\right)}$$

$$S^2 = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{1}{y^2}\left(\frac{1}{2R}-\frac{1}{y}\right)} = \frac{\frac{R}{2}}{\left(\frac{1}{y}\right)^2\left(\frac{1}{2R}-\frac{1}{y}\right)}.$$

El mínimo de la superficie tendrá lugar cuando el denominador

$$\left(\frac{1}{y}\right)^2\left(\frac{1}{2R}-\frac{1}{y}\right)$$

sea máximo; es decir, cuando los factores $\left(\frac{1}{y}\right)$ y $\left(\frac{1}{2R}-\frac{1}{y}\right)$ cuya suma es constante, sean entre sí como sus exponentes, escribamos pues :

$$\frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{2R}-\frac{1}{y}} = \frac{2}{1}$$

de donde

$$y = 3R.$$

Este valor de $y$ substituído en la ecuación (2) da :

$$2x = 2R\sqrt{3}$$

la superficie $xy$ del triángulo es $3R \times R\sqrt{3}$ o $3R^2\sqrt{3}$. Esta es la del triángulo equilátero circunscrito.

---

## NOTA III

## LOS LOGARITMOS DEDUCIDOS DE LAS PROGRESIONES

**495. Definición.** — Se llaman *logaritmos* los números de una progresión aritmética que comienza por cero, y que corresponden término a término a otros números de una progresión geométrica que comienza por 1. Cada término de la progresión aritmética es el logaritmo del término correspondiente en la progresión geométrica.



Las dos progresiones que sirven para definir los logaritmos pueden ser prolongadas indefinidamente en ambos sentidos; una de ellas debe contener el término cero, la otra el término 1, y estos dos términos deben corresponderse.

**496** Sean las progresiones :

$$\begin{array}{ll} ∺ 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : q^5 : q^6 : q^7 \ldots\ldots q^n & \\ ÷ 0 .\ r .\ 2r .\ 3r .\ 4r .\ 5r .\ 6r .\ 7r \ldots\ldots nr & \text{(A)} \end{array}$$

Se ve : 1° Que la progresión geométrica contiene *todas las potencias de la razón*;

2° Que la progresión aritmética contiene *todos los múltiplos de la razón*;

3° Que el número *que sirve de exponente* a un término cualquiera de la progresión geométrica *sirve de coeficiente* al término correspondiente de la progresión aritmética.

Conforme a la definición dada en el núm. 495 parecería que los números que forman la progresión geométrica son los únicos que tienen logaritmos; no sucede así sin embargo, y vamos a demostrar con ayuda del teorema siguiente, que todo número mayor que 1 tiene un logaritmo.

**497. Teorema.** — *Se puede interpolar un número bastante grande de medios entre los términos de una progresión geométrica para que la diferencia que existe entre dos términos consecutivos sea tan pequeña como se quiera.*

Sea la progresión :

$$∺ 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots q^n : q^{n+1} \ldots.$$

Interpolemos $m-1$ medios entre dos términos consecutivos cualesquiera $q^n$ y $q^{n+1}$; la razón de la progresión así formada será :

$$\sqrt[m]{\frac{q^{n+1}}{q^n}} = \sqrt[m]{q}$$

y dos términos consecutivos del orden $k+1$ y $k+2$ en esta progresión tendrán por expresión :

$$q^n(\sqrt[m]{q})^k \quad \text{y} \quad q^n(\sqrt[m]{q})^{k+1}.$$

Basta ahora probar que si $m$ es suficientemente grande, la diferencia

$$q^n(\sqrt[m]{q})^{k+1} - q^n(\sqrt[m]{q})^k$$

tenderá hacia cero.

Se tiene en efecto :

$$q^n(\sqrt[m]{q})^{k+1} - q^n(\sqrt[m]{q})^k = q^n(\sqrt[m]{q})^k\,(\sqrt[m]{q}-1).$$

El factor $(\sqrt[m]{q})^k$ tiene un valor determinado y menor que $q$, puesto que $m$ es mayor que $k$ y $q$ mayor que 1; $q^n$ tiene también un valor determinado, luego si el factor $(\sqrt[m]{q}-1)$ tiende hacia cero, lo mismo sucederá con el producto.

Para demostrar que $\sqrt[m]{q}-1$ tiende hacia cero, es preciso hacer ver que por pequeña que sea una cantidad $a$, hay valores de $m$ que verifiquen la desigualdad :

$$\sqrt[m]{q}-1<a$$

de donde

$$\sqrt[m]{q}<a+1$$

y

$$q<(a+1)^m.$$

Lo que ciertamente se verifica, puesto que las potencias de un número mayor que 1 crecen al mismo tiempo que sus exponentes (375).

**498.** Si un número A no forma parte de la progresión geométrica, estará comprendido entre dos términos consecutivos de esta progresión que diferirán el uno del otro, y por consiguiente, del número A, una cantidad tan pequeña como se quiera; y se podrá tomar indiferentemente el logaritmo de uno de ellos por el logaritmo del número A.

Luego todo número mayor que 1 tiene un logaritmo.

El teorema siguiente nos permitirá deducir que, en un sistema dado, no tiene más que uno.

**499. Teorema.** — *Si en una progresión geométrica, interpolando* m — 1 *o* m′ — 1 *medios, se llega a obtener un mismo número, se encontrará para este número, en ambos casos, el mismo logaritmo.*

Sean las dos progresiones :

$$\div\div\ 1:q:q^2:q^3:q^4\ldots.\ q^n:q^{n+1}$$
$$\div\ 0.\ r.\ 2r.\ 3r.\ 4r\ldots\ nr.(n+1)r.$$

Interpolemos $(m-1)$ medios entre cada término de las dos progresiones; los términos del rango $k+1$ en las progresiones así obtenidas, serán respectivamente :

$$(\sqrt[m]{q})^k \quad \text{y} \quad \frac{r}{m}k.$$



Si se interpolan del mismo modo $m'-1$ medios, los términos del orden $k'+1$ serán :

$$(\sqrt[m']{q})^{k'} \quad \text{y} \quad \frac{r}{m'}k'.$$

Es preciso probar que si se tiene :

$$(\sqrt[m]{q})^k=(\sqrt[m']{q})^{k'} \qquad (1)$$

se tiene también

$$\frac{r}{m}k=\frac{r}{m'}k' \quad \text{o} \quad \frac{k}{m}=\frac{k'}{m'}.$$

Elevemos la igualdad (1) a la potencia $mm'$; queda :

$$q^{km'}=q^{k'm}$$

lo que conduce a

$$km'=k'm \quad \text{o} \quad \frac{k}{m}=\frac{k'}{m'}.$$

Luego en un sistema dado, todo número mayor que 1 tiene un logaritmo y no tiene más que uno solo.

**500.** Si se prolongan en sentido inverso las dos progresiones (A), se tiene :

$$\div\div\ \frac{1}{q^n}\ldots\ldots\ \frac{1}{q^4}:\ \frac{1}{q^3}:\ \frac{1}{q^2}:\ \frac{1}{q}:\ 1:q:q^2:q^3\ldots\ldots$$
$$\div -nr\ldots\ldots -4r.\ -3r.\ -2r.\ -r.\ 0.\ r.\ 2r.\ 3r\ldots\ldots$$

Se ve que los términos de la progresión geométrica disminuyen indefinidamente y tienden hacia cero. Podríamos probar como antes que estos términos decreciendo de una manera insensible, dos términos consecutivos cualesquiera, difieren el uno del otro una cantidad tan pequeña como se quiera; y como un número menor que 1 que no pertenezca a la progresión estará siempre comprendido entre dos términos consecutivos de esta progresión, se infiere que todo número menor que 1 tiene un logaritmo, y que este logaritmo es negativo. Llegando a ser los términos de la izquierda de la progresión geométrica más y más pequeños tienden hacia cero, mientras que los de la progresión aritmética aumentan en valor absoluto y tienden hacia $-\infty$, de donde se infiere que cero tiene por logaritmo $-\infty$.

**501.** No teniendo términos negativos la progresión geométrica, se infiere que *los números negativos no tienen logaritmos.*

## Propiedades de los logaritmos.

**502. 1ª Propiedad.** — *El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores de este producto.*

Sean las progresiones :

$$\div\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : q^5 : q^6 \ldots\ldots q^n$$
$$\div 0 .\ r .\ 2r .\ 3r .\ 4r .\ 5r .\ 6r \ldots\ldots nr.$$

Consideremos en la primera progresión dos términos cualesquiera, $q^4$ y $q^6$ cuyos logaritmos son respectivamente $4r$ y $6r$.

El producto de $q^4$ por $q^6$ es $q^{10}$, y se encuentra en la progresión geométrica, puesto que contiene todas las potencias de la razón. La suma de los dos logaritmos es $4r + 6r$ o $10r$, y se encuentra también en la progresión aritmética, puesto que contiene todos los múltiplos de la razón; por otra parte el término $10r$ corresponderá a $q^{10}$, luego será su logaritmo.

Del mismo modo el logaritmo del producto $q^3 \times q^5 \times q^8$ será $3r + 5r + 8r$, o $16r$.

En general, sean $q^m$, $q^n$, $q^v$, tres términos de una progresión geométrica, y $mr$, $nr$, $vr$, sus logaritmos. El producto $q^m \times q^n \times q^v$ o $q^{m+n+v}$ se encuentra en la progresión geométrica; la suma de los logaritmos $mr + nr + vr$ o $(m + n + v)r$ se encuentra también en la progresión aritmética; por otra parte, el término $(m + n + v)r$ corresponderá a $q^{m+n+v}$, luego será su logaritmo.

Luego

$$\log q^m \times q^n \times q^v = \log q^m + \log q^n + \log q^v.$$

Del mismo modo

$$\log abc\ldots\ldots = \log a + \log b + \log c\ldots\ldots$$

**503. 2ª Propiedad.** — *El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.*

Sea el cociente

$$q = \frac{A}{B}.$$

Se tiene

$$q \times B = A$$



y, conforme a la primera propiedad,

$$\log q + \log B = \log A$$

de donde

$$\log q \text{ o } \log \frac{A}{B} = \log A - \log B.$$

**504. 3ª Propiedad.** — *El logaritmo de la potencia de un número es igual al logaritmo de este número multiplicado por el exponente de la potencia.*

Se tiene en efecto,

$$A^5 = A \times A \times A \times A \times A$$

de donde

$$\log A^5 = \log A + \log A + \log A + \log A + \log A = 5 \log A.$$

En general

$$\log A^n = n \log A.$$

**505. 4ª Propiedad.** — *El logaritmo de la raiz de un número es igual al logaritmo de este número dividido por el indice de la raiz.*

Sea

$$R = \sqrt[3]{A}$$

de donde

$$R^3 = A$$

y, conforme a la tercera propiedad,

$$3 \log R = \log A$$

de donde

$$\log R = \frac{\log A}{3}.$$

En general

$$\log \sqrt[n]{A} = \frac{\log A}{n}.$$

**506. Observación.** — De la nueva definición de los logaritmos se han deducido propiedades idénticas a las que resultaron de la primera definición. Eso proviene de que las dos definiciones no son diferentes.

En efecto,

Consideremos las dos progresiones :

$$\div\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 \ldots\ldots : q^m \ldots\ldots q^n$$
$$\div 0 .\ r .\ 2r .\ 3r .\ 4r \ldots\ldots\ mr \ldots\ldots\ nr$$

que definen un sistema de logaritmos. Si se supone que $q^m$ sea la base del sistema, se tendrá $mr = 1$ de donde $r = \frac{1}{m}$; además, si se hace $q^m = a$, se tendrá $q = a^{\frac{1}{m}}$.

Reemplazando $r$ y $q$ por estos valores en las dos progresiones, se tendrá :

$$\div\!\div 1 : a^{\frac{1}{m}} : a^{\frac{2}{m}} : a^{\frac{3}{m}} : a^{\frac{4}{m}} \ldots\ldots a^{\frac{m}{m}} \ldots a^{\frac{n}{m}}$$

$$\div\, 0 \,.\, \frac{1}{m} \,.\, \frac{2}{m} \,.\, \frac{3}{m} \,.\, \frac{4}{m} \ldots\ldots \frac{m}{m} \ldots \frac{n}{m}$$

donde se ve que los logaritmos de los diferentes números de la progresión geométrica son precisamente los exponentes del número $a$, que es lo que dice la definición lagebraica.

# EJERCICIOS DE ALGEBRA

## INTRODUCCIÓN Y LIBRO I

### § I. — Valores numéricos.

*Encontrar el valor numérico de las cantidades siguientes :*

**1.** 1° $a^2 + 2ab + b^2$
2° $a^2 - 2ab + b^2$
para $a = 7$ y $b = 3$.

**2.** 1° $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
2° $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
para $a = 13$ y $b = 3$.

**3.** $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$
para $a = 5$, $b = 2$, $c = 3$, y 2° para $a = 5$, $b = 7$, $c = 3$.

**4.** 1° $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
2° $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$
para $a = 5$ y $b = -1$.

**5.** 1° $8ab^4 - 5a^2b^3 + a^3b^2 + a^4b$ para $a = -2$ y $b = -3$
2° $18ab + 72a^2b^2 - 64a^4 - 81b^4$ para $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{3}$.

**6.** 1° $\frac{a^2}{4} + b^2 + \frac{c^2}{9} + ab - \frac{ac}{3} - \frac{2bc}{3}$ para $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$
2° $(a+b-c)(a+b+c)(a-b+c)$ para $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$.

**7.** 1° $(3a + 4b)(4b - 3a) - 36a^2b$
2° $(1 + 2a + 3b)(1 + 2a - 3b) - 4a^2b$
para $a = \frac{1}{3}$ y $b = \frac{1}{2}$.

**8.** 1° $4a^2(a^2+b-c) - (b+c)(c-a^2-b) + (a+b)^2(c^2-b+a^2)$
para $a = -1$, $b = 2$, $c = 3$

2° $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

para $a=1,\quad b=2,\quad c=3.$

9. 1° $(x+y-z)^2+(x+y)^2(x-y+z)+(x-y)^3$

para $x=-1,\quad y=-2,\quad z=\frac{1}{2}$

2° $4a^2[(a^2-b^2)^2-(a^2+2ab+b^2)^2]+(a-b-c)(a+b)$

para $a=1,\quad b=2,\quad c=3.$

*Calcular los valores de los polinomios siguientes:*

10. $3x^5+2x^4-8x^3-2x^2+x-9$

para $x=1,\quad x=-1$ y $x=4.$

11. 1° $6x^5+5x^4-4x^3+8x^2-2$

para $x=2$ y para $x=\frac{1}{2}$

2° $12x^6+5x^5+3x^4+4x^3-11x^2-6x+3$

para $x=3$ y para $x=\frac{1}{3}$

12. $2x^4-x^3+5x^2-2x+1$

para $x=0,\quad x=1,\quad x=2,\quad x=3,\quad x=10.$

13. $x^5-15x^4+85x^3-225x^2+274x-120$

para $x=1,\quad x=2,\quad x=3,\quad x=4,\quad x=5,\quad x=6.$

14. $4x^3-16x^2-9x+36$

1° para $x=0,\quad x=1,\quad x=\frac{3}{2},\quad x=2$

y 2° para $x=-1,\quad x=-\frac{3}{2}$ y $x=-2.$

*Calcular los valores de las fórmulas siguientes:*

15. 1° $e=vt$; 2° $e=\frac{1}{2}\gamma t^2$; 3° $e=a+vt+\frac{1}{2}\gamma t^2$

para $a=15,\quad v=3,\quad t=6$ y $\gamma=2{,}4.$

16. 1° $ax^2+bx+c$

2° $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2}$

3° $\frac{\sqrt{a^2+2b}\pm\sqrt{a^2-2b}}{2a}$

para $a=5,\quad b=12,\quad c=4,\quad x=-2.$

17. En los trinomios siguientes, de la forma $ax^2+bx+c$, calcular el valor de la cantidad $b^2-4ac$:



1° $2x^2-5x+12$
2° $2x^2-5x-12$
3° $3x^2-8x+5$
4° $9x^2-24x+16.$

18. Un triángulo tiene por lados $a=13$, $b=14$, $c=15$; calcular: 1° la superficie S por medio de la fórmula:

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

2° el radio R del círculo circunscrito por medio de la fórmula:

$$R=\frac{abc}{4S}$$

3° a qué se reduce la fórmula de la superficie cuando $a=b=c$.

19. El volumen de un tronco de cono se encuentra por medio de la fórmula $V=\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr)$; el de una esfera es $V=\frac{4}{3}\pi h^3$. Si estos dos volúmenes son iguales, calcular $h$, sabiendo que $R=5$ y $r=3$.

20. Calcular los valores de $x$ dados por las fórmulas:

1° $x=R\sqrt{2-\sqrt{3}}-R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ para $R=16.$

2° $x=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)-\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ para $R=16.$

3° $x=a-2\sqrt{a+1}-\frac{2\sqrt[3]{4a-5}-\sqrt{2a-7}}{\sqrt{a-4}}$ para $a=8.$

## § II. — Ejercicios sobre la adición y la substracción.

*Sumar los polinomios siguientes y efectuar las reducciones:*

21. $4a-5b+2c-d$
$3a-7b+2c+d.$

22. $8a^2b-5ab^2$
$-4a^2b-ab^2+c.$

23. $a^2+b^2+2ab$
$a^2+b^2-2ab$
$a^2-b^2.$

24. $4a^3+2a^2b-3ab^2$
$-4a^3+6a^2b+2ab^2$
$a^3-7a^2b+6ab^2.$

25.
$$a^2 - \frac{ab}{4} + b^2$$
$$-\frac{a^2}{4} + ab + b^2$$
$$-a^2 + ab - \frac{b^2}{4}.$$

26.
$$\frac{3}{4}a^2 + a^2b^2$$
$$\frac{4}{5}a^2 - 3a^2b^2$$
$$-\frac{a^2}{10} + 7a^2b^2.$$

27.
$$\begin{aligned} &6a^2 - 4a + 3b - 1 \\ &12a^2 - 3a + b - 1. \end{aligned}$$

28.
$$\frac{3}{4}a^2b^3c^4 - \frac{4}{5}a^3b^2c$$
$$-\frac{4}{3}a^2b^3c^4 + \frac{2}{5}a^3b^2c$$
$$+\frac{2}{5}a^3b^2c.$$

29.
$$\begin{aligned} &5ax - 3by + 4cz \\ &-2ax + 4by - 3cz \\ &-ax + 7by - cz \\ &9ax - 11by + 10cz. \end{aligned}$$

30.
$$\begin{aligned} &5x^3 - 2x + y - 15 + y^2 \\ &3x^3 + 4y - y^2 + xy - x^2 \\ &4x^3 - 3xy \\ &+1 - 2xy + 4x^2 \end{aligned}$$

31
$$\begin{aligned} &x^3 + 2x^2y - 4xy^2 + 5y^3 \\ &7x^3 - 12x^2y + 15xy^2 - 13y^3 \\ &-4x^3 + 5x^2y - 7xy^2 + 9y^3 \\ &-2x^3 + 11x^2y - 12xy^2 + 3y^3 \end{aligned}$$

32.
$$\begin{aligned} &12a^5b^3 - 5a^4b^2 - 8a^3b^4 \\ &-7a^5b^3 + 8a^4b^2 + 5a^3b^4 \\ &-15a^5b^3 + 12a^4b^2 + 6a^3b^4 - 8a \end{aligned}$$

33.
$$\begin{aligned} &ax^3 + abx^2 + a^2bx \\ &px^3 - pqx^2 + p^2qx \\ &-rx^3 + rsx^2 - s^3x \end{aligned}$$

34.
$$\begin{aligned} &3x^m + 7x^{m-1} + 9x^{m-2} - 12x^{m-3} + \ldots. \\ &2x^m + 8x^{m-1} + 7x^{m-2} - 7x^{m-3} + \ldots. \\ &x^m - 4x^{m-1} + 4x^{m-2} - 9x^{m-3} + \ldots. \end{aligned}$$

35
$$\begin{aligned} &ax^n - a^2x^{n-1} + a^3x^{n-2} + a^4x^{n-3} + \ldots. \\ &x^n - 6x^{n-1} - b^3x^{n-2} + 8x^{n-3} + \ldots. \\ &-2x^n + 7x^{n-1} - a^2bx^{n-2} - b^4x^{n-3} + \ldots. \end{aligned}$$



*Efectuar las substracciones siguientes :*

**36.** De $a^2 - b^2$ restar $a^2 + b^2 - 2ab$.

**37.** De $7a^3 - 4b^3 + 5c^3$ restar $6a^3 + 9b^3 - 11c^3$.

**38.** De $9a^3 - 8a^2b + 5a^2b - 7b^3$ restar.
$7a^3 + 2a^2b + 9ab^2 - 11b^3 - 4c^3$.

**39.** De $\frac{1}{2}a^2x + \frac{1}{4}ax^2 + \frac{2}{3}x^3$ restar
$-\frac{3}{4}a^2x + \frac{1}{3}ax^2 - \frac{5}{8}x^3$.

**40.** De $ax^3 + bx^2 + cx + d$ restar $mx^3 - nx^2 - px + q$.

**41.** De $x^{m+1} + ax^m + a^2x^{m-1} + a^3x^{m-2} + a^4x^{m-3} + \ldots$
restar.
$x^{m+1} - (m+1)\,ax^m - (m-1)\,a^2x^{m-1} +$
$(m+1)\,a^3x^{m-2} - (m-1)\,a^4x^{m-3} + \ldots.$

**42.** Dados los polinomios siguientes :
$$\begin{aligned} P &= 4a^3 - 5a^2b + 7b^3 \\ P_1 &= 2a^3 + 11a^2b - 8b^3 \\ P_2 &= 4a^3 + 5a^2b - 8b^3. \end{aligned}$$
Calcular :
$$1^\circ\ P - P_1; \qquad 2^\circ\ P + P_1 - P_2.$$

**43.** Dados los cuatro polinomios :
$$\begin{aligned} &5a^2 - 3ab + b^2 - 3ac + 2bc + c^2 \\ &2a^2 + 5ab - 3b^2 + 2ac - 4bc + 3c^2 \\ &4a^2 - 7ab + 5b^2 - 4ac - 5bc + c^2 \\ &2a^2 + 9ab - 8b^2 + 3ac + 3bc + 2c^2 \end{aligned}$$
de la suma de los dos primeros restar la suma de los dos últimos.

**44.** Dados los cuatro polinomios :
$$\begin{aligned} &6a^2 - 3ab + 2b^2 - 5ac + 6bc - 2c^2 \\ &a^2 - ab + b^2 + ac - bc - c^2 \\ &2a^2 + 3ab - 2b^2 - 3ac - 4bc - 5c^2 \\ &3a^2 - 6ab + 3b^2 - 4ac + 10bc + 4c^2 \end{aligned}$$
del primero restar la suma de los tres últimos.

**45.** La misma cuestión para los cuatro polinomios :
$$\begin{aligned} &9x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 - b^3x + b^4 \\ &5x^4 + 3bx^3 - 5abx^2 - a^3x + b^4 \\ &2x^4 - ax^3 + 7b^2x^2 - 2b^3x - a^4 \\ &x^4 - 4ax^3 + 3a^2x^2 + 4a^2bx - 2a^2b^2. \end{aligned}$$

*Hacer desaparecer los paréntesis y efectuar las reducciones*

**46.** $(a - b) - (b + c - d) + (b + c - d) + (2b - a)$

**47.** $a^2 - (b^2 - c^2) + b^2 - (a^2 + c^2) - c^2 - (a^3 - b^3)$

48. $a-[b-(c-d)]$.

49. $(a+2b-6a)-[3b-(6a-6b)]$.

50. $(x+y-z)-(x-y+z)+(-x+y+z)-(-x-y+z)$.

51. $(4x^3-2x^2+x+1)-(3x^3-x^2-x-7)-(x^3-4x^2+2x+8)$.

52. $x+[(y-x)-(y-z)]$.

53. $(a+b-c)-[-(b-3c)]$.

54. $[(a+b-n-p)-(c-d-m+q)]-[(a+p-q)-(b-m)-(c+d-n)]$

55. $44x+[48y-(6z+3y-7x)+4z]-[48y-8x+2z-(4x+y)]$.

56. $(5a^2-3ax+x^2)-[4a^2+5ax-(3a^2-7ax+5x^2)]-7x^2$.

### Problemas elementales sobre la Adición y la Substracción.

57. Representado un número por $x$, expresar el número que le excede en $a$ y el que le es inferior en $b$.

58. Siendo $x$ la edad actual de una persona, expresar la edad que tendrá dentro de 20 años y la que tenía hace 9 años.

59. Se ha repartido una suma entre tres personas; la segunda recibió $a$ pesos más que la primera, la tercera $b$ pesos más que la segunda. Expresar la suma repartida, siendo $x$ la parte de la primera.

60. De un juego de 32 cartas, se sacan primero $x$ cartas y 3 más, la segunda vez se saca el doble de lo que se había sacado y 4 más. Expresar lo que queda.

61. Un negociante ganó durante cuatro años consecutivos una suma de $a$ pesos cada año; durante otros 3 años una suma $b$; en los 2 años siguientes perdió por todo una suma $c$. Expresar su capital actual habiendo sido $x$ su capital primitivo.

62. Una persona A tiene $a$ pesos; otra persona B, tiene $b$ pesos; las dos juntan su dinero y gastan en tres ocasiones diferentes una suma desconocida $x$. En el momento de separarse, A toma una suma $c$. Expresar lo que le queda a B.

63. Expresar el perímetro de un rectángulo, sabiendo que el lado mayor excede en $a$ al lado menor $x$. ¿Cuál sería el lado del rombo del mismo perímetro?

64. Se han hecho cuatro compras: la segunda ha costado $a$ pesos más que la primera; la tercera $b$ pesos más que la segunda; la cuarta $c$ pesos más que la tercera. Habiendo costado la primera compra $x$ pesos, se pregunta cuánto se ha gastado por todo.

65. Expresar algebraicamente un número de tres cifras $x$, $y$, $z$, en el sistema decimal, y expresar este número invertido.

66. En una mezcla de dos substancias A y B que pesa $a$ kilogramos, entran $b$ de A; se agrega un nuevo peso $c$ de A y se saca $d$ de B. ¿Cuánto queda de B y cuál es el peso de la mezcla?



67. Tengo en la mano izquierda 3 piezas más que en la derecha; si tomo 5 de ésta para ponerlas en la primera, ¿cuántas hay en cada una, siendo $x$ el número de piezas de la derecha?

68. Los lados de un triángulo son $a$, $b$, $c$; se le añade al lado $a$ una longitud $d$, se le quita al lado $b$ la longitud $\frac{d}{2}$ y se le agrega al lado $c$ $\frac{2d}{3}$. ¿Cuál es la diferencia de los perímetros de los dos triángulos, y cuál debe ser la longitud $d$ para que el perímetro del segundo triángulo sea doble de el del primero?

69. La edad de un padre es $a$, el hijo tiene $b$ años menos y el abuelo tiene $c$ años más que el padre. 1° ¿Cuál será la suma de las edades de estas tres personas dentro de $n$ años? 2° ¿Cuál era esta suma hace $n$ años? 3° Encontrar la diferencia entre la primera suma y la segunda. 4° Sumar estas dos sumas.

70. En un triángulo A B C, el ángulo A vale $n$ grados y la diferencia de los ángulos B y C es inferior $n'$ grados al valor del ángulo A. Calcular: 1° los ángulos B y C; 2° hacer el cálculo para $n = 32°$ y $n' = 36°$. Decir 3° cuál será la naturaleza del triángulo si $n' = 2n$.

## § III. — Ejercicios sobre la multiplicación.

***Efectuar los siguientes productos:***

71. 1° $3a \times 5b$
2° $7a^2 \times 8ab$
3° $12a^3b \times 7a^2bc$
4° $-5abc \times 8\,abd$
5° $14a^2bcx \times (-8ab^3x)$.

72. 1° $7ab \times 8a^2 \times 7bc$
2° $7ab^2c^3 \times 2a^2bc \times 5a^4b^5c^2$.

73. 1° $(6a+2\,b-8c)7a$
2° $(-5a^2+3ab-8b^2)(-9ab)$.

74. 1° $(x+8)(x+10)$
2° $(x-5)(x-7)$
3° $(2x-1)\left(x+\frac{1}{5}\right)$
4° $(x+a^2)(x-b^2)$.

75. 1° $(x^2-3x-7)(x-2)$
2° $(a^2+a^4+a^6)(a^2-1)$
3° $(a^4-2a^3b+4a^2b^2-8ab^3+16b^4)(a+2b)$.

76. $(a^m b^p - 2c^n)(2a^m - 3b)$.

77. $(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)$.

78. $(a+b-c)(a-b+c)$.
79. $(a+4b-c)(a-4b+c)$.
80. $(x+y-2z)(x-y+2z)$.
81. $(a^4+a^3b+a^2b^2)(a-b)$.
82. $(a^2-b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)$.
83. $(1+2a+3b+4c)(1+2a-3b-4c)$.
84. $(a^3-3a^2x+3ax^2-x^3)(a-x)$.
85. $(5a^2+ab-3b^2)(3a^2-2ab+b^2)$.
86. $(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)(a+b)$.
87. $(x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5)(x+a)$.
88. $(3a^5-2a^2b^3+9ab^4-8b^5)(4a^2+5ab-6b^2)$.
89. $(5a^4+2a^3b-3a^2b^2-4ab^3+7b^4)(9a^2-6ab-11b^2)$
90. $(x-a)(x-b)(x-c)$.
91. $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$.
92. $(a^2-4a-b)(a^2-4a+b)(a^2+4a-b)$.
93. $(4x^2-3x+2)(3x^2+2x-1)(x^2-2x+3)$
94. $[(a+b)+(c-d)][(a+b)-(c-d)]$.
95. $\left(\frac{5}{2}a^2+3ax-\frac{7}{3}a^2\right)\left(2x^2-ax-\frac{a^2}{2}\right)$.
96. $(a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4)(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$.
97. $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$
98. $(1-x^2-x^4-x^6-x^8)^2(1+x+2x^3+4x^5+x^7)$.

*Efectuar las operaciones indicadas:*

99. $(a+b-c-d)^2-(c+d-a-b)^2$.
100. $(a+b)^3-(a-b)^3-2b^3$.
101. $(1+2a-3b)^2-(3b-2a-1)^2$.
102. $(a+b)(b+c)-(c+d)(d+a)-(a+c)(b-d)$.
103. $(a+b)x+(b+c)y-[(a-b)x-(b-c)y]$.
104. $(9a-5b)(a+2b-3)-(3a-5b)(3a-b-3)$.
105. $(a+b-c)(a+b)+(a-b+c)(a+c)+(b+c-a)(b+c)$.
106. $(4x^2-12xy+9y^2)(2x+3y)(4x^2+12xy+9y^2)(2x-3y)$.
107. $[2x-y-(x+2y)][3x-2y-(2x+3y)]$.
108. $3(x-y)^2(x+y)-3(x+y)^2(x-y)$.
109. $(2a-b)[(4a+b)a+b(a+b)]x^2$.
110. $(a-b)^3+(a+b)^3+3(a+b)(a-b)^2+3(a-b)(a+b)^2$.
111. $[x^2+x(a+b)+(a^2+b^2)][x^2-x(a-b)+(a^2-b^2)]$.
112. $(8a^3-x^6)(8a^3+x^6)-(2a-x^2)(2a+x^2)[2a(2a+x^2)+x^4]$
$[4a^2-x^2(2a-x^2)]$.



## § IV. — Ejercicios sobre la división.

*Efectuar las divisiones siguientes:*

113. 1° $(15a^4b-12a^3b^2-9a^3b^3+6a^4b^2):3ab$
2° $(8a^4b^2-6a^3b^3+4a^2b^4-2a^2b^2):(-2a^2b^2)$
3° $(4a^7x^5-24a^6x^6+36a^5x^7):4ax$
4° $(x^{m+2}y^n+2x^{m+1}y^{n+1}+x^my^{n+2}):x^my^n$.

114. 1° $(a^2+4ab+3b^2):(a+b)$
2° $(a^3+3a^2+3a+1):(a+1)$
3° $(a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5):(a-b)$
4° $(a^4+8a^3+24a^2+32a+16):(a+2)$

115. 1° $(6a^4+a^2x-15x^2):(2a^2-3x)$
2° $(6x^2-2xy^2-28y^4):(2x+4y^2)$
3° $(4x^3+4x^2-29x+21):(2x-3)$
4° $(3a^5+5a^4b-33a^3b^2+14a^2b^3):(a^2+7ab)$.

116. 1° $(125x^6-64y^3):(5x^2-4y)$
2° $(a^5x^5+y^5):(ax+y)$
3° $(32a^5+b^5):(2a+b)$
4° $(81x^8-16y^8):(3x^2-2y^2)$.

117. $(2a^4-13a^3b+31a^2b^2-38ab^3+24b^4):(2a^2-3ab+4b^2)$
118. $(14a^5-27a^4b+21a^3b^2-3a^2b^3-2ab^4):(2a^2-3ab+2b^2)$.
119. $(6a^6b^3-13a^5b^4+28a^4b^5-23a^3b^6+20a^2b^7)$
$:(2a^2b^2-3ab^3+4b^4)$.
120. $(6x^5+5x^4-25x^3+31x^2-13x+2):(2x^2-3x+2)$.
121. $(5a^7b+8a^6b^2-13a^5b^3+38a^4b^4-26a^3b^5+24a^2b^6)$
$:(5a^2b-2ab^2+6b^3)$.
122. $(a^5-a^4b-4a^3b^2-a^3+4a^2b^3+3a^2b-a^2-2ab^2-2ab+1)$
$:a^2+2ab-1)$.
123. $(10a^5b-21a^4b^2-56ab^5-3a^2b^4-10a^3b^3):(8b^3-3ab^2+5a^2b)$.
124. $\left(x^4-\frac{5}{4}x^3+\frac{11}{8}x^2-\frac{1}{2}x\right):\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)$
125. $\left(x^4-\frac{13}{6}x^3+x^2+\frac{4}{3}x-2\right):\left(\frac{4}{3}x-2\right)$
126. $(p^8x^4-81a^{12}):(p^6x^3-3a^3p^4x^2+9a^6p^2x-27a^9)$.
127. $(a^{2n}+2a^nb^{2r}+b^{4r}-c^{2p}):(a^n+b^{2r}+c^p)$.
128. $(x^{8n}-y^{8r}):(x^{5n}-x^{4n}y^r+x^ny^{4r}-y^{5r})$.

*Encontrar, sin efectuar la operación, la resta de las divisiones siguientes:*

129. $(a^3-1):(a-1)$.
130. $(x^5+1):(x-1)$.

131. $(a^5 + b^5) : (a - b)$.

132. $(a^7 + b^7) : (a + b)$.

133. $(3a^3 + 5a^2 - 6a) : (a - 1)$.

134. $(x^4 - 8x^2 - 9) : (x - 2)$.

135. $(2x^4 + 17x^3 - 68x - 32) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$

136. $(3x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5x - 2) : (x + 1)$.

137. $(x^5 - 3bx^4 + 5b^2x^3 - 8b^3x^2 + 6b^4x - 4b^5) : (x - 2b)$.

*Escribir sin operar los siguientes cocientes :*

138. 1° $(x^4 - 1) : (x - 1)$
2° $(x^4 - 1) : (x + 1)$
3° $(a^4 - b^4) : (a - b)$
4° $(a^4 - b^4) : (a + b)$.

139. 1° $(a^6 - 1) : (a - 1)$
2° $(a^6 - 1) : (a + 1)$
3° $(x^6 - y^6) : (x - y)$
4° $(x^6 - y^6) : (x + y)$.

140. 1° $(a^5 + x^5) : (a + x)$
2° $(a^5 - x^5) : )a - x)$
3° $(x^7 + 1) : (x + 1)$
4° $(x^8 - y^8) : (x - y)$.

*¿Qué divisiones de la forma $(x^m \pm a^m) \div (x \pm a)$ dan los siguientes cocientes :*

141. 1° $x^2 + x + 1$
2° $x^2 - x + 1$
3° $a^2 + ab + b^2$
4° $a^2 - ab + b^2$.

142. 1° $x^3 - x^2 + x - 1$
2° $x^3 + ax^2 + a^2x + a^3$
3° $x^3 - ax^2 + a^2x - a^3$
4° $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$.

143. 1° $x^5 - x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$
2° $q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$
3° $x^3y^3 + mx^2y^2 + m^2xy + m^3$
4° $x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + \ldots + x + 1$.

144. Determinar $m$ de tal manera que :
1° $4x^2 - 6x + m$ sea divisible por $x - 3$,
y 2° $x^4 - 5x^2 + 4x - m$ sea divisible por $2x + 1$.

145. 1° $2x^4 + 4ax^3 - 5a^2x^2 - 3a^3x + ma^4$;
2° $x^4 + ma^2x^2 - 5a^3x + a^4$,
sean divisibles por $x - a$.



146. Determinar $m$ y $n$ de tal manera que el polinomio

$$x^4 - 3x^3 + mx + n$$

sea divisible por $x^2 - 2x + 4$.

147. ¿Qué valor debe darse a $m$ para que

1° $x^4 + ma^2x^2 + a^4$
2° $x^3 - max^2 + ma^2x - a^3$

sean divisibles por $x^2 - ax + a^2$?

148. Dados los polinomios $x^4 + px^2 + q$ y $x^2 + 2x + 5$ determinar $p$ y $q$ de tal manera que el primero sea divisible por el segundo.

149. Determinar $m$, $n$, $p$ de tal manera que el polinomio

$$x^5 - 2x^4 - 6x^3 + mx^2 + nx + p$$

sea divisible por $(x - 3)(x + 1)(x - 1)$.

En general : encontrar la condición para que el polinomio

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

sea divisible por $x^2 - \alpha^2$.

## § V. — Descomposición de los polinomios en factores.

*Sacar los factores comunes a los términos de los polinomios siguientes :*

150. 1° $7a^3b^2 - 5a^2b^4 + 2ab^5$
2° $25a^2 + 30a^4 - 35a^6$
3° $2a^3b^2c^4d - 3ab^4c^5 + 7a^2b^2c^4d^2$
4° $12a^2b^3 - 30a^3b^2 + 18ab^4 - 42a^4b$.

151. 1° $6a^2x^3 - 3ax^4 + 21a^2x^5$
2° $15a^2x^2 - 30a^2x^3 + 105a^2x^4 - 75a^2x^5$
3° $-44ax^n + 286a^2x^{n+1} - 66a^3x^{n+2}$
4° $x^{m+n}y^n - x^{2n}y^{m+n} - x^ny^{2m}$.

*Descomponer en dos factores las expresiones siguientes :*

152. 1° $x^2 - 9$
2° $x^2 - \frac{1}{9}$
3° $a^2 - 4x^2$
4° $4m^2 - 9n^2$.

153. 1° $a^2y^2 - b^2z^2$
2° $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

3° $\frac{x^2}{4} - p^2$

4° $16x^2y^2 - 81a^2b^2c^2$.

**154.**
1° $a^3 - b^3$
2° $a^3 + b^3$
3° $x^5 - 1$
4° $x^5 + 1$.

**155.**
1° $a^2 + 4ab + 4b^2$
2° $9a^2 - 12ab + 4b^2$
3° $a^2 + a + \frac{1}{4}$
4° $9x^2 - 3xy + \frac{y^2}{4}$
5° $\frac{a^2}{16} - \frac{3}{2}ab + 9b^2$
6° $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + c^2 + 2bc$

a **156.**
1° $x^2 + ax + bx + ab$
2° $x^2 + (a-b)x - ab$
3° $8ax - bx + 8ay - by$
4° $ap + ax - 2bx - 2bp$.

**157.**
1° $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$
2° $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$
3° $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$
4° $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$.

**158.**
1° $x^2 + 2x + 1 - y^2$
2° $y^2 - x^2 + 2x - 1$
3° $m^2 - n^2 + 2np - p^2$
4° $m^2 - n^2 - 2np - p^2$.

**159.**
1° $a^4 + b^4 + a^2b^2$
2° $a^4 + b^4 - a^2b^2$
3° $a^4 + b^4$
4° $a^8 + b^8$.

**160.**
1° $a^2 - b^2 + x^2 - y^2 + 2(ax - by)$
2° $a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - 2(ad - bc)$.

*Descomponer en tres factores las expresiones siguientes:*

**161**
1° $5a^2 - 45m^2$
2° $x^3y - xy^3$
3° $2a^3bc - 18ab^3c$
4° $x^{5m} - 9x^{3m}y^{4n}$.

**162.**
1° $a^4 - 1$
2° $a^4 - b^4$
3° $81x^4 - y^4$
4° $a^{4m} - b^{4n}$



**163.**
1° $9a^3 - 12a^2p + 4ap^2$
2° $a^5p^2 + 6a^3p + 9a$
3° $a^3 - 2a^2 - 3a$
4° $a^3 + a^2 - 4a - 4$

**164.**
1° $a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$
2° $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
3° $a^3b^3 + 3a^2b^2xy + 3abx^2y^2 + x^3y^3$
4° $3a^2x^3y + 6a^2x^2y^2 + 3a^2xy^3 - 3a^2xyz^2$

**165.**
1° $36a^2x^5y^3 - 24a^3x^4y^2z + 4a^4x^3yz^2$
2° $4a^7x^5 - 24a^6x^6 + 36a^5x^7$
3° $(x-y)(x^2-z^2) - (x-z)(x^2-y^2)$
4° $(x-1)(x-2)(x-3) + (x-1)(x-2) - (x-1)$.

*Descomponer en cuatro factores las expresiones siguientes:*

**166.**
1° $x^8 - 1$
2° $a^6 - b^6$
3° $3ax^4 - 3ay^4$
4° $3a^5 - 48ab^8$.

*Descomponer en factores las expresiones siguientes:*

**167.**
1° $a^2 - ab - b - 1$
2° $a^4 + a^3 - a^2 - a$
3° $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$
4° $4(ad + bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2$.

## § VI. — Ejercicios sobre la simplificación de las fracciones.

*Reducir á su más simple expresión las fracciones siguientes:*

**168.**
1° $\frac{14a^2bc^2}{7abcd}$
2° $\frac{-12acx^2}{4a^2c^2x}$
3° $\frac{-32x^2yz}{-64xyz}$
4° $\frac{25a^4b^3c^2}{5a^2b^4c^3d}$.

**169.**
1° $\frac{ax^3 - a^4}{2am + 3an}$
2° $\frac{12x^2 - 2xy}{16x^2}$
3° $\frac{b + b^2}{a + ab}$
4° $\frac{42a^3 - 30a^2m}{35am^2 - 25m^3}$.

**170.**
1° $\frac{ax + x^2}{ab^2 + b^2x}$
2° $\frac{14a^2 - 7ax}{10ay - 5xy}$
3° $\frac{12a^3x^4 + 2a^2x^5}{18ab^2x + 3b^2x^2}$
4° $\frac{3x^4y^3 + 9a^2x^2y^3}{4x^5y^2 + 12a^2x^3y^2}$.

**171.** 1° $\dfrac{a^2-2a+1}{a-1}$

2° $\dfrac{x^2-2ax+a^2}{mx+ma}$

3° $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}$

4° $\dfrac{a^3+b^3+3ab(a+b)}{(a+b)^2m^3}.$

**172.** 1° $\dfrac{ac+bc+ad+bd}{a^2+ab}$

2° $\dfrac{35+5x+7y+xy}{5+y}$

3° $\dfrac{xy-2x-3y+6}{xy-2x}$

4° $\dfrac{42a^2+51ab+15b^2}{6a+3b}.$

**173.** 1° $\dfrac{x^2-4ax+4a^2}{x^2-4a^2}$

2° $\dfrac{3ax^3+3a^3x-6a^2x^2}{ax^3-a^3x}$

3° $\dfrac{12a^5b^5-48a^3b^7}{16a^5b^5-32a^4b^6}$

4° $\dfrac{(a+b)^2(a^3-b^3)}{(a^2-b^2)^2}.$

**174.** 1° $\dfrac{a^3+b^3}{(a-b)^2+ab}$

2° $\dfrac{6a^2b^2-3a^3b-3ab^3}{ab^3-a^3b}$

3° $\dfrac{(a^2+b^2-c^2)^2-(a^2-b^2+c^2)^2}{4a^2b-4abc}$

4° $\dfrac{x^5-ax^4-a^4x+a^5}{x^4-ax^3-a^2x^2+a^3x}.$

**175.** 1° $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2+c^2-b^2+2ac}$

2° $\dfrac{x^2-1}{(1+ax)^2-(x+a)^2}$

3° $\dfrac{(a^8+2a^4x^2+x^4)(a^4-x^2)}{(a^2+x)(a^6-a^4x+a^2x^2-x^3)}$

4° $\dfrac{a^{12}+b^{12}}{a^8+a^4b+ab^4+b^8}.$

## § VII. — Ejercicios sobre las reducciones de fracciones.

*Reducir a una sola fracción y simplificar :*

**176.** 1° $2x+\dfrac{3-2x}{5}$

2° $5x+\dfrac{7x-4}{3x}$

3° $1+\dfrac{a-b}{a+b}$

4° $x-\dfrac{x}{x-1}.$



**177.** 1° $3b-\dfrac{ab+b^2}{2a}$

2° $7x-\dfrac{2ax-x^2}{3a-x}$

3° $a+b-\dfrac{a^2-b^2}{a+2b}$

4 $a+x-\dfrac{2ax-x^2}{a+x}.$

**178.** 1° $1-x+x^2-\dfrac{x^3}{1+x}$

2° $1+x+x^2+\dfrac{x^3}{1-x}$

3° $1+\dfrac{a^2-b^2-c^2}{2bc}$

4° $1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$

**179.** 1° $a^4-a^3+a^2-a+1-\dfrac{2}{a+1}$

2° $b^3-a^3+\dfrac{a^3b-ab^3}{a+2b}$

3° $\dfrac{4-2x+x^2}{2+x}-2-x$

4° $1-2x+x^2+\dfrac{1-x^4}{1+2x+x^2}.$

*Reducir al mismo denominador las fracciones siguientes :*

**180.** 1° $\dfrac{3a}{4b},\ \dfrac{5a}{6c},\ \dfrac{2c}{3b}$

2° $\dfrac{7b}{3a},\ \dfrac{11ab}{12c},\ \dfrac{5ac}{8b}$

3° $\dfrac{3a}{7x^2},\ \dfrac{5b}{14y^2},\ \dfrac{8ab}{21xy},\ \dfrac{5a^2b}{6x^2y}.$

**181.** 1° $\dfrac{a^2}{a+b},\ \dfrac{ab}{a-b},\ \dfrac{3a^2-2ab}{a^2-b^2}$

2° $\dfrac{ax}{a+x},\ \dfrac{2a^2x^2}{a^2-ax+x^2},\ \dfrac{2a^2+x^2}{a^3+x^3}$

3° $\dfrac{a+1}{a-1},\ \dfrac{a-1}{a+1},\ \dfrac{a^2+1}{a^2-1},\ \dfrac{a^2-1}{a^2+1}.$

## § VIII. — Operaciones con las fracciones.

EJERCICIOS SOBRE LA ADICIÓN Y LA SUBSTRACCIÓN

**182.** 1° $\dfrac{a}{5}+\dfrac{a}{2}+\dfrac{3a}{10}+\dfrac{2a}{5}$

2° $\frac{2a}{3x}+\frac{3a}{4x}+\frac{5a}{6x}+\frac{7a}{12x}$

3° $\frac{m+n}{2}+\frac{m-n}{3}$

4° $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}$.

**183.** 1° $n+\frac{1}{1+n}+\frac{1+n^2}{1-n}$

2° $\frac{2a}{a+x}+\frac{3x}{a-x}+\frac{3x^2+a^2}{a^2-x^2}$

3° $\frac{9x+7}{5}+\frac{6x+5}{4}+\frac{9x-8}{8}$

4° $\frac{4x-5}{7}+\frac{2x+6}{9}+\frac{4x+8}{11}$.

**184.** 1° $\frac{1+5x}{1-5x}-\frac{1-5x}{1+5x}$

2° $\frac{2x^2-2x+1}{x^2-x}-\frac{x}{x-1}$

3° $\frac{ax}{a^2-x^2}-\frac{a-x}{a+x}$

4° $\frac{ax-a}{x+1}-\frac{ax+a}{x-1}$.

**185.** 1° $\frac{13x-5a}{4}-\frac{7x-2a}{6}-\frac{3x}{5}$

2° $\frac{3a-4b}{7}-\frac{2a-b-c}{3}+\frac{15a-4c}{12}$

3° $\frac{3a+b+x}{5a}-\frac{2a+b}{3b}+\frac{7a-2b}{9a}$

4° $\frac{3a+2x}{a+x}-\frac{5a-x}{a-x}+\frac{a}{2x}$.

**186.** 1° $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1-x^2}$

2° $\frac{a^3}{(a+b)^3}-\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{b}{a+b}$

3° $\frac{2ax+x^2}{(a-x)^2}-\frac{a^2+5ax}{(a+x)^2}-\frac{x}{a-x}$

4° $\frac{3a}{(a-2x)^2}+\frac{2a+x}{(a+x)(a-2x)}-\frac{5}{(a+x)}$.

**187.** 1° $\frac{a-1}{a+1}+\frac{a+1}{a-1}-\frac{a^2+1}{a^2-1}$

2° $\frac{30a}{9a^2-1}+\frac{4}{3a-1}-\frac{5}{3a+1}$



$\frac{5}{1+5a}-\frac{3}{1-5a}+\frac{10(5a^2+2a)}{1-25a^2}$

$\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}-\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}+\frac{2b^3-b^2+a^2}{a^2-b^2}$.

**188.** 1° $\frac{3a-6b}{a+b}-\frac{5a-6b}{a-b}-\frac{4a-5b}{a+b}+\frac{7a-8b}{a-b}$

2° $\frac{b+1}{b-a}+\frac{5a+3b}{a^2-b^2}+\frac{b-1}{a+b}+\frac{3}{b-a}$

3° $\frac{x+1}{2x-2}-\frac{x-1}{2x+2}-\frac{4x}{x^2-1}+\frac{x^2+1}{x^2-1}$

4° $\frac{a}{a-b}+\frac{a}{a+b}+\frac{2a^2}{a^2+b^2}+\frac{4a^2b^2}{a^4-b^4}$.

**189.** 1° $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$

2° $\frac{bc}{(a-c)(a-b)}+\frac{ac}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}$

3° $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$

4° $\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

## EJERCICIOS SOBRE LA MULTIPLICACIÓN

**190.** 1° $\frac{2x}{x-y}\times\frac{x^2-y^2}{8}$

2° $\frac{x^2-1}{3}\times\frac{6a}{x+1}$

3° $\frac{a^2-b^2}{a}\times\frac{1}{a+b}\times\frac{a}{a-b}$

4° $\frac{15x-30}{2x}\times\frac{3x^2}{5x-10}$.

**191.** 1° $\frac{(x-1)^2}{y^3}\times\frac{(x+1)y^2}{x-1}$

2° $\left[\left(m+\frac{1}{m}\right)+1\right]\left[\left(m+\frac{1}{m}\right)-1\right]$

3° $\left(x+\frac{y^2}{x}\right)\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)$

4° $\frac{a^2-x^2}{a}\times\frac{a^2+x^2}{ax}$.

**192.** 1° $\frac{a^2x^2}{y^2} \times \frac{xy}{a(x+y)} \times \frac{x^2-y^2}{axy}$

2° $\frac{2a}{2b-c} \times \left(\frac{b+c}{3} - \frac{c}{2}\right)$

3° $\frac{a+x}{(m+n)^3} \times \frac{x^2-y^2}{12} \times \frac{(m+n)^2}{m-n} \times \frac{6(m^2-n^2)}{x+y}$

4° $\frac{ax+x^2}{2b-cx} \times \frac{2bx-cx^2}{(a+x)^2}$.

**193.** 1° $\left(a^2 - x + \frac{2x^2}{a^2+x}\right)(a^2+x)$

2° $\left(1 + x + \frac{3+x^3}{1-x}\right)(1-x^2)$

3° $\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)(x^4+x^3)$

4° $(a^2-1)\left(\frac{a}{a+1} + \frac{a}{a-1} - 1\right)$.

**194.** 1° $\left(\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{x} - 1\right)$

2° $\left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{4} - x\right)$

3° $\left[\frac{a+b}{2(a-b)} - \frac{a-b}{2(a+b)} + \frac{2b^2}{a^2-b^2}\right] \times \frac{a-b}{2b}$

4° $\left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{2xy} + 1\right)\frac{xy}{x^2+y^2}$

### EJERCICIOS SOBRE LA DIVISIÓN

**195.** 1° $\frac{3x}{2x-2} : \frac{2x}{x-1}$

2° $\frac{4a+2}{3a} : \frac{2a+1}{5a}$

3° $\frac{(x+y)^2}{x-y} : \frac{x+y}{(x-y)^2}$

4° $\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} : \frac{a-b}{c+d}$.

**196.** 1° $\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{a^2}{x^2}\right) : \left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right)$

2° $\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)$



3° $\left(x + \frac{x}{x-1}\right) : \left(x - \frac{x}{x-1}\right)$

4° $\left(x^4 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$.

**197.** 1° $\frac{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}{x+a} : \frac{x-a}{x+a}$

2° $\frac{x^4-y^4}{a^3+b^3} : \frac{x-y}{a^2-ab+b^2}$

3° $\frac{a^2-x^2}{4ax} : \frac{a-x}{3x}$

4° $\frac{a^3-x^3}{a^3+x^3} : \frac{a-x}{a^2-ax+x^2}$.

**198.** 1° $\frac{a+x}{(m+n)^2} : \frac{m+n}{a-x}$

2° $\frac{x^2-x}{x-3} : \frac{x^2-5x}{x-3}$

3° $\frac{3x^2}{a^3+x^3} : \frac{x}{a+x}$

4° $\frac{x^4-a^4}{(x-a)^2} : \frac{x^2+ax}{x-a}$.

**199.** 1° $\left(1 + \frac{a^3}{x^3}\right) : \left(\frac{1}{x^2} + \frac{a}{x^3}\right)$

2° $\left(\frac{a^3}{b^3} - \frac{b^3}{a^3}\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$

3° $\left(a + \frac{b-a}{1+ab}\right) : \left[1 - \frac{1+ab}{a(b-a)}\right]$

4° $\left[a - \frac{b^2}{2a}\right]\left[a - \frac{a^2+b^2}{a+b}\right] : \left[1 - \frac{a}{a+b}\right]$.

**200.** 1° $\frac{8-2a^4}{3ab} : (2+a^2)$

2° $4m^2p^3 : \frac{2m^3x}{p^2-px}$

3° $\left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right) : \left(\frac{a+b}{a-b} - 1\right)$

4° $\left(\frac{x}{x-a} + \frac{a}{x+a}\right) : \left(\frac{x}{x-a} - \frac{a}{x+a}\right)$.

**201.** 1° $\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)$

2° $\left(\frac{5-3a}{4+2a}-1+a\right):(a-a^2+2a^3)$

3° $\left(x-3+\frac{5x}{2x-6}\right):\left(2x-1+\frac{15}{x-3}\right)$

4° $\left(2-p+\frac{2p^2}{2+p}\right):\frac{4a+ap^2}{p^2x-4x}.$

202. 1° $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{x}{ab}\right)(a+b+x):\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}-\frac{x^2}{a^2b^2}\right)$

2° $\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)x^2:\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)\left(1-\frac{1}{1+x}\right)$

3° $$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}:\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a+c}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a+c}}$$

4° $$\frac{a^2b^2}{c}:\left[\frac{a^2c^2}{b}:\left(\frac{b^2c^2}{a}\times\frac{ac}{b^2}\right):\left(\frac{ab}{c^2}:\frac{bc}{a^2}\right)\right].$$

## § IX. — Ejercicios sobre el verdadero valor de las fracciones indeterminadas.

*Encontrar el verdadero valor de las expresiones siguientes :*

203. 1° $\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$ para $x=2$

2° $\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2}$ para $x=1$

3° $\frac{x^2-3x+2}{x^2-6x+5}$ para $x=1$

4° $\frac{x^2-6x+5}{x^3-3x+2}.$ para $x=1$

204. 1° $\frac{x^2-6x+5}{x^2-8x+15}$ para $x=5$

2° $\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}$ para $x=2$

3° $\frac{x^4-6x^2+8x-3}{x^2-3x+2}$ para $x=1$

4° $\frac{2x^2+3x-2}{x^3+16x^2-19x+5}$ para $x=\frac{1}{2}$

205. 1° $\frac{x^3-3x^2+4}{3x^3-18x^2+36x-24}$ para $x=2$



2° $\frac{8x^3+2x^2-5x+1}{8x^3+10x^2-11x+2}$ para $x=\frac{1}{2}$

3° $\frac{4x^3-13x^2-11x-2}{8x^3-22x^2+13x-2}$ para $x=2$

4° $\frac{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}{x^4-2x^3+x^2}$ para $x=1.$

206. 1° $\frac{x^5+x^3-8x^2-8}{x^4-2x^3+x^2-2x}$ para $x=2$

2° $\frac{x^4-5x^3+6x^2+4x-8}{x^3-4x^2+4x}$ para $x=2$

3° $\frac{75x^4+140x^3-223x^2+92x-12}{45x^4-93x^3+65x^2-19x+2}$ para $x=\frac{2}{5}$ y $x=\frac{1}{3}.$

207. 1° $\frac{x^5-2x^4+x-2}{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}$ para $x=2$

2° $\frac{2x^5-21x^4+68x^3-84x^2+32x}{2x^5-14x^4+31x^3-24x^2+12x-16}$ para $x=2$

3° $\frac{x^5-2x^3+2x^2-2x+1}{x^3-x^2-4x-4}$ para $x=1$

4° $\frac{x^6-2x^5+2x^4-2x^3+4x^2-6x+3}{x^7-3x^6+3x^5-3x^4+2x^3-6x^2+6x-6}$ para $x=1$

208. 1° $$\frac{x+3+\frac{x+1}{x-2}}{x+\frac{x^2}{x-2}}$$ para $x=2$

2° $$\frac{x^2+\frac{x+1}{x-3}}{2x+1+\frac{x^2}{x-3}}$$ para $x=3.$

209. 1° $\frac{x+6}{x^2-16}-\frac{x+1}{x(x-4)}$ para $x=4$

2° $\frac{x-12}{x^2+2x-8}-\frac{x^2+1}{3(x^2-5x+6)}$ para $x=2$

3° $\frac{7-2x}{x^2-x-2}-\frac{1}{x^2-3x+2}$ para $x=2$

4° $\frac{4x^2+3}{x^2(x^2+x-6)}-\frac{x-1}{x^2-6x+8}$ para $x=2$

210 1° $\frac{2x^2+4x-1}{x-3}$ para $x=\infty$

2° $\frac{5x-1}{x^2+2}$ para $x=\infty$

3° $\dfrac{5x^3 - 8x^2 + 3x + 4}{2x^3 - x + 6}$ para $x = \infty$

4° $\dfrac{5x^3 - 8x^2 + 3x + 4}{2x^2 - x + 6}$ para $x = \infty$.

**211.** 1° $\dfrac{5x^2 - 8x + 3}{2x^3 - x + 6}$ para $x = \infty$

2° $\dfrac{(2x + 3)(3x - 5)(x + 1)^2}{x^2(2x - 3)(4x - 1)}$ para $x = \infty$

3° $\dfrac{(3x^2 + 1)(5x + 3)}{(2x^3 - 1)(x + 4)}$ para $x = \infty$

4° $\dfrac{(2x - 3)^2(4x + 7)^3}{(3x - 4)^2(5x^2 + 1)}$ para $x = \infty$.

**212.** 1° $3x - \sqrt{x^2 - x + 1}$ para $x = \infty$

2° $\dfrac{x + 3\sqrt{x}}{7\sqrt{x} + 2x}$ para $x = \infty$

3° $\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3}$ para $x = \infty$

4° $\dfrac{2x^2 - 5 + \sqrt{x^4 - 3x + 1}}{x - 1 + \sqrt[3]{4x^6 + x - 2}}$ para $x = \infty$.

# LIBRO II

**Observación.** — El n° entre ( ) se refiere a nuestros *Exercices d'Algèbre.*

## § I. — Identidades.

**213** (278). Verificar las identidades siguientes :

1° $$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$$

2° $$1 + a^4 = (1 + a\sqrt{2} + a^2)(1 - a\sqrt{2} + a^2)$$

3° $$1 + a^6 = (1 + a\sqrt{3} + a^2)(1 + a^2)(1 - a\sqrt{3} + a^2$$

4° $$\pi h\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \frac{\pi h}{3}\left(\frac{R-r}{2}\right)^2 = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

**214** (279). Verificar las identidades :

1° $$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$$

2° $$(1 + x + x^2 + x^3)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 + x^6$$



3° $$\left(\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{2m}{m^2 + 1}\right)^2 = 1$$

4° $$\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 =$$
$$= 4 + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right).$$

**215** (280). Verificar las identidades :

1° $(a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a) = a^3 + b^3 + c^3$

2° $(a - b)^3 + 3(a - b)^2(a + b) + (a + b)^3 + 3(a - b)(a + b)^2 = 8a^3$

3° $(a + b + c)^2 + (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

4° $(a + b + c + d)^2 + (a - b)^2 + (a - c)^2 + (a - d)^2 + (b - c)^2$
$+ (b - d)^2 + (c - d)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$

**216** (281). Verificar las identidades :

1° $(a + b + c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3 - (a + b - c)^3 = 24abc$

2° $(a + b)^2 - (c + d)^2 + (a + c)^2 - (b + d)^2 = 2(a - d)(a + b + c + d)$

3° $a(b + c)^2 + b(c + a)^2 + c(a + b)^2 - 4abc = (a + b)(b + c)(c + a)$

4° $(a + b + c + d)^2 + (a - b - c + d)^2 + (a - b + c - d)^2$
$+ (a + b - c - d)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$

**217** (282). Verificar las identidades :

1° $(a - b)(a + b - c) + (b - c)(b + c - a) + (c - a)(c + a - b) = 0$

2° $(m^4 - n^4) + 2n(m^3 + n^3) - (n + m)^2(m - n)^2 = 2m^2n(m + n)$

3° $(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2 =$
$= (ab' - ba')^2 + (bc' - cb')^2 + (ac' - ca')^2$

4° $[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]^2 = 2[(a - b)^4 + (b - c)^4 + (c - a)^4].$

**218** (283). Verificar las identidades fraccionarias :

1° $$\frac{x^2y^2z^2}{b^2c^2} + \frac{(x^2 - b^2)(y^2 - b^2)(z^2 - b^2)}{b^2(b^2 - c^2)} + \frac{(x^2 - c^2)(y^2 - c^2)(z^2 - c^2)}{c^2(c^2 - b^2)} =$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 - c^2 - b^2$$

2° $$\frac{y^2z^2}{b^2c^2} + \frac{(z^2 - b^2)(b^2 - y^2)}{b^2(c^2 - b^2)} + \frac{(c^2 - z^2)(c^2 - y^2)}{c^2(c^2 - b^2)} = 1$$

3° $$\frac{x^2z^2}{b^2c^2} + \frac{(x^2 - b^2)(b^2 - z^2)y^2}{(y^2 - b^2)b^2(c^2 - b^2)} + \frac{(x^2 - c^2)(c^2 - z^2)y^2}{(c^2 - y^2)c^2(c^2 - b^2)} =$$
$$= \frac{(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)}{(y^2 - b^2)(c^2 - y^2)}.$$

**219** (284). Si se escribe $a + b + c = 2p$, demostrar que se tienen las identidades siguientes :

1° $$1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2p(p - a)}{bc}$$

2° $(p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 + p^2 = a^2 + b^2 + c^2$

3° $2(p - a)(p - b) + 2(p - b)(p - c) + 2(p - c)(p - a) =$
$= 2p^2 - a^2 - b^2 - c^2$

4° $2(p-a)(p-b)(p-c)+a(p-b)(p-c)+b(p-c)(p-a)$
$+c(p-a)(p-b)=abc.$

**220** (285). Verificar que si se tiene $a^2=b^2+c^2$, la fórmula
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
se reduce á $S=\frac{1}{2}\,bc.$

**221** (286). Verificar que si
$$x=\frac{2b^2-a^2+c^2}{3a} \quad \text{é} \quad y=\frac{2a^2-b^2+c^2}{3b},$$
se tiene
$$\frac{x+a}{y+b}=\frac{b}{a}.$$

**222** (287). Verificar que si se tiene $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d}$
se tiene también
$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=\sqrt{(A+B+C+D)(a+b+c+d)}.$$

**223** (288). Verificar que si $x+y=u$ y $xy=v$, se tiene :

1° $x^2+y^2=u^2-2v$
2° $x^3+y^3=u^3-3uv$
3° $x^4+y^4=u^4-4u^2v+2v^2$
4° $x^5+y^5=u^5-5u^3v+5uv^2.$

**224** (289). Verificar que si $ax+by+cz=0$, la expresión :
$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ac(z-x)^2+ab(x-y)^2}$$
es constante, cualesquiera que sean $x$, $y$, $z$.

**225** (290). Verificar que si $\frac{m}{x}=\frac{n}{y}=\frac{p}{z}$ y $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$,
se tiene también $\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{p^2}{c^2}=\frac{m^2+n^2+p^2}{x^2+y^2+z^2}.$

**226** (291). Verificar que la expresión :
$$(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ax+by+cz)^2$$
es divisible por $a^2+b^2+c^2$ y por $x^2+y^2+z^2$.

**227** (292). Verificar que el polinomio $(a+b+c)^m-a^m-b^m-c^m$ es siempre divisible por $(a+b)(b+c)(a+c)$ cuando $m$ es impar.

**228** (293). Verificar que la expresión $x^3+3x+2$ se anula cuando se da a $x$ el valor $(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}-(\sqrt{2}-1)^{-\frac{1}{3}}$.



**229** (294). Verificar que el producto $(1-ax)(1+ax)^{-1}(1+bx)^{\frac{1}{2}}(1-bx)^{-\frac{1}{2}}$ tiene por valor 1, cuando $x=a^{-1}\left(\frac{2a}{b}-1\right)^{-\frac{1}{2}}$.

**230** (295). Verificar que se tiene :
$$2a(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\left[x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}=a+b$$
cuando
$$x=2^{-1}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

*Demostrar las propiedades siguientes :*

**231** (296). 1° Si la suma de dos fracciones es igual a la unidad, su diferencia es la misma que la de sus cuadrados; 2° Si la diferencia de dos fracciones es igual á $\frac{p}{q}$, $p$ veces su suma es igual a $q$ veces la diferencia de sus cuadrados.

**232** (297). 1° La diferencia de los cuadrados de dos números impares es siempre divisible por 8; 2° lo mismo sucede con la suma y la diferencia de los cubos de dos números pares consecutivos.

**233** (298). 1° Todo número impar cuadrado perfecto disminuído en 1 es divisible por 8; 2° El cubo de un número impar disminuido este número impar es divisible por 24.

**234** (299). El producto de dos números que son la suma de dos cuadrados es igualmente la suma de dos cuadrados.

**235** (300). Si un número cualquiera es la suma de dos cuadrados : 1° su duplo; 2° su cuadrado; 3° en general, cada una de sus potencias es también la suma de dos cuadrados.

## § II. — Ecuaciones con una incógnita.

*Resolver las ecuaciones numéricas siguientes :*

**236** (301). $5x+50=4x+56.$

**237** (302). $16x-11=7x+70.$

**238** (303). $3x+10=5x-70.$

**239** (304). $18x+4=34x-4.$

**240** (305). $7(x-18)=3(x-14).$

**241** (306). $7(x-3)=9(x+1)-38.$

**242** (307). $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=11.$

**243** (308). $36-\frac{4x}{9}=8.$

244 (309). $\dfrac{3x-16}{x}=\dfrac{5}{3}$

245 (310). $\dfrac{5x-5}{x+1}=3.$

246 (311). $\dfrac{x}{2}+\dfrac{3x}{4}-\dfrac{5x}{6}=15.$

247 (312). $\dfrac{3x}{4}+5=\dfrac{5x}{6}+2.$

248 (313). $\dfrac{7x}{8}-5=\dfrac{9x}{10}-8.$

249 (314). $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x+1}{7}=x-2.$

250 (315). $4(x-3)-7(x-4)=6-x.$

251 (317). $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{x}{5}=x-17.$

252 (318). $2x-\dfrac{19-2x}{2}=\dfrac{2x-11}{2}.$

253 (319). $\dfrac{10x+3}{3}-\dfrac{3x-1}{5}=x-2.$

254 (320). $x+\dfrac{3x-9}{5}=4-\dfrac{5x-12}{3}.$

255 (321). $\dfrac{5x-7}{2}-\dfrac{2x+7}{3}=3x-14.$

256 (322). $\dfrac{x-2}{3}-\dfrac{12-x}{2}=\dfrac{5x-36}{4}-1.$

257 (323). $\dfrac{5x-2}{3}-\dfrac{x-8}{4}=\dfrac{x+14}{2}-2.$

258 (324). $\dfrac{2x-5}{3}-\dfrac{5x-3}{4}+2+\dfrac{2}{3}=0.$

259 (325). $\dfrac{x+4}{3}-\dfrac{x-4}{5}=2+\dfrac{3x-1}{15}.$

260 (326). $\dfrac{1}{7}(3x-4)+\dfrac{1}{3}(5x+3)=43-5x.$

261 (327). $\dfrac{1}{2}(27-x)=\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{10}(7x-54).$

262 (328). $\dfrac{1}{6}(8-x)+x-1\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}(x+6)-\dfrac{x}{3}.$

263 (329). $\dfrac{3x+1}{13}+\dfrac{2x-5}{3}=\dfrac{4x-1}{5}-\dfrac{2-x}{2}.$

264 (330). $\dfrac{x-1}{7}+\dfrac{23-x}{5}=7-\dfrac{4+x}{4}.$



265 (331). $\dfrac{4x-8}{10}-\dfrac{20-x}{4}+\dfrac{x+\frac{1}{2}}{3}=6\dfrac{1}{6}.$

266 (332). $\dfrac{x}{6}-\dfrac{x-\frac{1}{2}}{3}-\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{2}{5}-\dfrac{x}{3}\right]=0.$

267 (333). $\dfrac{7}{24}-\dfrac{\frac{13}{15}}{\frac{2x}{3}+\frac{4}{5}}=\dfrac{1}{4}.$

268 (334). $\dfrac{5}{6}\left[x-\dfrac{1}{3}\right]+\dfrac{7}{6}\left[\dfrac{x}{5}-\dfrac{1}{7}\right]=4\dfrac{8}{9}.$

269 (335). $\dfrac{5x}{3}+2x+6\left[x-\dfrac{x}{3}-\dfrac{4x}{9}\right]=450\,000.$

270 (336). $\dfrac{\frac{x}{2}-5}{\frac{x+8}{2}-8}+\dfrac{x-8}{2}+x=\dfrac{3x}{2}+\dfrac{49}{16}.$

271 (337). $(x-1)(x-2)+(x-1)(x-3)=2(x-2)(x-3).$

272 (338). $\dfrac{3x-7}{4x+2}=\dfrac{3x-14}{4x-13}.$

273 (339). $\dfrac{7x+16}{21}-\dfrac{x+8}{4x+10}=\dfrac{23}{70}+\dfrac{x}{3}.$

274 (346). $\left[x-\dfrac{5}{2}\right]\left[x+\dfrac{3}{2}\right]-(x-5)(x+3)=9\dfrac{3}{4}.$

275 (341). $\dfrac{1}{2x-3}+\dfrac{3}{2x^2-3x}=\dfrac{5}{x}.$

276 (342). $\dfrac{x-1}{4}-\dfrac{1}{8}\left[\dfrac{x-5}{4}-\dfrac{14-2x}{5}\right]=\dfrac{x-9}{2}-\dfrac{7}{8}.$

277 (343). $\left[\dfrac{1}{4}(x-2)+\dfrac{1}{3}\right]-\left[x-\dfrac{1}{3}(2x-1)\right]=0.$

278 (344). $\dfrac{1}{9}\left[3x-6-5\left(\dfrac{7x}{2}-5\right)\right]+13(x-5)+\dfrac{1}{4}=0.$

*Resolver las ecuaciones literales siguientes :*

279 (345). $\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{b}=c.$

280 (346). $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x}=d.$

281 (347). $\dfrac{x+a}{a}-\dfrac{x+b}{b}=1.$

282 (348). $\frac{x+m}{n}-\frac{x\ \ n}{m}=2.$

283 (349). $\frac{bx}{a}-\frac{d}{c}=\frac{a}{b}-\frac{cx}{d}.$

284 (350). $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}.$

285 (351). $\frac{a}{b-x}=\frac{b}{a-x}.$

286 (352). $\frac{a}{mn}-\frac{x-m}{m}=\frac{n-x}{n}.$

287 (353). $a-\frac{m+n}{x}=b-\frac{m-n}{x}.$

288 (354). $a(x-b)=b(a-x)-(a+b)x.$

289 (355). $a^2b-\frac{a+x}{b}=ab^2-\frac{b+x}{a}.$

290 (356). $\frac{a}{b}\left(1-\frac{a}{x}\right)+\frac{b}{a}\left(1-\frac{b}{x}\right)=1.$

291 (357). $\frac{a(a-x)}{b}-\frac{b(b+x)}{a}=x.$

292 (358). $\frac{a(x-a)}{b}+\frac{b(x-b)}{a}=x.$

293 (359). $\frac{2x+a}{b}-\frac{x-b}{a}=\frac{3ax+(a-b)^2}{ab}.$

294 (360). $\frac{x+a}{a-b}+\frac{x-a}{a+b}=\frac{x+b}{a+b}+\frac{2(x-b)}{a-b}.$

295 (361). $(a+x)(b+x)-a(b+c)=\frac{a^2c}{b}+x^2.$

296 (362). $\frac{1+ax}{1-ax}=\frac{3+a^2x^2}{1-a^2x^2}.$

297 (363).
$$\frac{(a+b)^2(x+1)-(a+b)(x+1)+(x+1}{a+b+1}=(a+b)^2-(a+b)+1.$$

298 (364). $\frac{x}{ab}+\frac{x}{bc}+\frac{x}{ac}-1=abc-x(a+b+c).$

299 (365). $(b+c)^2=\frac{b^3-c^3}{b-c}+\frac{bc(b+c)}{x}.$

300 (366). $\frac{1}{\frac{3(m+n)^2}{p^2x}+\frac{m+n}{p}}=\frac{p}{2(m+n)}.$

301 (367). $3x-\left(\frac{x}{3}+\frac{5a}{b}\right)=\frac{2a}{5}-\frac{a}{3}-\left(\frac{a}{2}-\frac{5x}{3}\right).$



302 (368). $x-\frac{a}{5}-\left(2x-\frac{a}{10}\right)=3x-\frac{a}{4}+4x-\frac{37a}{20}.$

303 (369). $\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}=\frac{a-b}{x^2-ab}.$

304 (370). $\frac{a}{x-a}-\frac{b}{x-b}=\frac{a-b}{x+a-b}.$

305 (371). $\frac{x+1}{x-1}=\frac{a+b+1}{a+b-1}.$

306 (372). $\frac{3x-b}{3x-5b}=\frac{3a-4b}{3a-8b}.$

307 (373). $\frac{x+1}{x+a+b}=\frac{x-1}{x+a-b}.$

308 (374). $\frac{a+b-c}{x-1}=\frac{a-b+c}{x+1}.$

309 (375). $\frac{x+a-b}{a}-\frac{x+b-a}{b}=\frac{b^2-a^2}{ab}.$

310 (396). $\frac{x-1}{x+a-b}=\frac{1-x}{x-a+b}+2.$

311 (377). $\frac{1}{1-m^2x^2}=\frac{m}{1+mx}-\frac{1}{1-mx}.$

312 (378). $\frac{x+a+b}{x+a}=\frac{x+a-b}{x-a}-\frac{a^2+b^2}{x^2-a^2}.$

313 (379). $[(a^2-b^2)x-1]^2+(2abx-1)^2=[(a^2+b^2)x+1]^2.$

314 (380). $(2-x)[16-12(12+2x)]=2x[12(x+5)-12].$

315 (381). $\frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{1+\frac{x+1}{x-1}}=\frac{1}{2}.$

316 (382). $\frac{2+2x}{9x^2-4}-\frac{x-2}{9x^2+12x+4}=\frac{x+4}{9x^2-4}.$

317 (383). $\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\left(\frac{2x-3}{x-1}\right)+\frac{3x-1}{2(x-1)}=\frac{3}{2}\left(\frac{x^2+2}{3x-2}\right)$

318 (384). $\frac{3+2x}{1+2x}-\frac{5+2x}{7+2x}=1-\frac{4x^2-2}{7+16x+4x^2}.$

319 (385). $\frac{x+a^2}{(a+b-c)(a-b+c)}+\frac{x-b^2-c^2}{(c-a-b)(b-a-c)}=1$

320 (386). $\frac{x}{a^{m-1}b^m}-\frac{x}{a^mb^{m-1}}=\frac{1}{b^m}-\frac{1}{a^m}.$

321 (387). $\frac{ax^{m+1}-x^m}{x-1}+\frac{bx^m}{x+1}=\frac{ax^m(x^2+1)}{x^2-1}.$

322 (388). $(a^{5x+1})^5=(a^{7x-1})^7\times(a^{x-6})^9.$

323 (389). $\dfrac{\sqrt[3+x]{a^{20}}}{a^2} = a^3.$

324 (390). $b^3 \sqrt[x]{b^{7+5x}} = \sqrt[x]{b^{23}}.$

## § III. — Ecuaciones con dos incógnitas.

*Resolver los sistemas de ecuaciones siguientes :*

325 (391). $2x - y = 1$, $x + 3y = 11.$

326 (392). $3x - 2y = 5$, $2x + 4y = 14.$

327 (393). $3x + 5y = 20$, $2x - 10y = 0.$

328 (394). $12x - 3y = 12$, $8x + y = 20.$

329 (395). $5x - 8y = 19$, $2x - 2y = 10.$

330 (396). $3x - y = 1$, $2y - x = 8.$

331 (397). $5x - 2y = 11$, $3y + x = 9.$

332 (398). $6x + 5y = 16$, $5x - 12y = -19.$

333 (399). $3x + 2y = 23$, $5y - 2x = 29.$

334 (400). $10x + 4y = 3$, $20y - 5x = 4.$

335 (401). $x - y = 1$, $\dfrac{2x}{5} + \dfrac{3y}{4} = 5.$

336 (402). $x - 3y = 1$, $\dfrac{3x}{4} - y = 2.$

337 (403). $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4}$, $5x - 4y = -3$

338 (404). $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = \dfrac{4}{3}$, $\dfrac{x}{y} - \dfrac{1}{2} = 0.$

339 (405). $\dfrac{x+y}{4} + \dfrac{x-y}{2} = 3$, $\dfrac{12x - 7y}{13} = 3.$

340 (406). $\dfrac{x+y}{5} = \dfrac{x-y}{3}$, $\dfrac{x}{2} = y + 2.$

341 (407). $\dfrac{x+1}{y} = \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{x}{y+1} = \dfrac{1}{5}.$

342 (408). $2x + \dfrac{y-2}{5} = 21$, $4y + \dfrac{x-4}{6} = 29.$



343 (409). $\dfrac{x+y}{3} + \dfrac{y-x}{2} = 9$, $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x+y}{9} = 5.$

344 (410). $\dfrac{x+y}{8} + \dfrac{x-y}{6} = 5$, $\dfrac{x+y}{4} - \dfrac{x-y}{3} = 10.$

345 (411). $5(x-2) = y + 2$, $x + 5 = 3(y - 5).$

346 (412). $2(2x + 3y) = 3(2x - 3y) + 10$, $4x - 3y = 4(6y - 2x) + 3.$

347 (413). $\dfrac{x+2}{7} + \dfrac{y-x}{4} = 2x - 8$, $\dfrac{2y - 3x}{3} + 2y = 3x + 4.$

348 (414). $\dfrac{13}{x + 2y + 3} = -\dfrac{3}{4x - 5y + 6}$, $\dfrac{3}{6x - 5y + 4} = \dfrac{19}{3x + 2y + 1}.$

349 (415). $\dfrac{5x + 7y}{3x + 11} = \dfrac{13}{7}$, $\dfrac{11x + 27}{7x + 5y} = \dfrac{19}{11}.$

350 (416). $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2$, $bx - ay = 0.$

351 (417). $x + y = a + b$, $bx + ay = 2ab.$

352 (418). $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, $\dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{a} = 1.$

353 (419). $(a + c)x - by = bc$, $x + y = a + b.$

354 (420). $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = c$, $\dfrac{x}{b} - \dfrac{y}{a} = 0.$

355 (421). $x + y = c$, $ax - by = c(a - b).$

**356** (422). $a(x+y)+b(x-y)=1$
$a(x-y)+b(x+y)=1.$

**357** (423). $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=0$

$$\frac{x+y-b}{a}+\frac{x-y-a}{b}=0.$$

**358** (424). $(a+b)x-(a-b)y=4ab$
$(a-b)x+(a+b)y=2a^2-2b^2.$

**359** (425). $\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=2a$

$$\frac{x-y}{2ab}=\frac{x+y}{a^2+b^2}.$$

**360** (426). $\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=\frac{1}{a-b}$

$$\frac{x}{a+b}-\frac{y}{a-b}=\frac{1}{a+b}.$$

**361** (427). $(a+b)x+(a-b)y=2ab$
$(a+c)x+(a-c)y=2ac.$

**362** (428). $(a+2b)x-(a-2b)y=6ac$
$(a+3c)y-(a-3c)x=4ab.$

**363** (429). $\frac{x}{a+b}-\frac{y}{a-b}=\frac{4ab}{b^2-a^2}$

$$\frac{x+y}{a+b}-\frac{x-y}{a-b}=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}.$$

**364** (430). $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{y-\dfrac{a}{x}}}=\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{y-\dfrac{b}{x}}}.$

$$\frac{1}{y}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1.$$

## § IV. — Ecuaciones con más de dos incógnitas.

**365** (431). $x+y+z=11$
$2x-y+z=5$
$3x+2y+z=24.$

**366** (432). $x-y+z=7$
$x+y-z=1$
$y+z-x=3.$

**367** (433). $x+4y-8z=-8$
$4x+8y-z=76$
$8x-y-4z=110.$

**368** (434). $x+y-6z=9$
$x-y+4z=5$
$3y-2x-z=4.$



**369** (435). $2x+y-4z=14$
$5y-x-z=1$
$2x-4y+5z=13.$

**370** (436). $2x-2y+3z=16$
$3x+5y-2z=6$
$4x+3y-4z=-1.$

**371** (437). $2x+3y+4z=61$
$3x+2y+z=54$
$5x-2y+3z=58.$

**372** (438). $4x-3y+2z=28$
$3x+2y-5z=16$
$2x+y-3z=10.$

**373** (439). $2x+3y+4z=53$
$3x+5y-4z=2$
$4x+7y-2z=31.$

**374** (440). $2x+7y-11z=10$
$5x-10y+3z=-11$
$-6x+12y-z=31.$

**375** (441). $\frac{x+2y}{5x+6z}=\frac{7}{9}$

$$\frac{3y+4z}{x+2y}=\frac{8}{7}$$

$$x+y+z=128.$$

**376** (442). $\frac{5x+7y}{x+y}=6$

$$\frac{3(z-x)}{x-y+z}=1$$

$$\frac{2x+3y-z}{\frac{x}{2}+3}=4.$$

**377** (443). $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{2z}{7}=58$

$$\frac{5x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=76$$

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{5}+\frac{7z}{10}=\frac{147}{5}.$$

**378** (444). $x+y+z=a+b$

$$\frac{1}{x-y}=\frac{1}{2b}$$

$$\frac{x}{y-z}-\frac{1}{2}=\frac{b}{a-b}.$$

**379** (445). $x+y+z=0$
$(b+c)x+(a+c)y+(a+b)z=0$
$bcx+acy+abz=1.$

**380** (446). $3x+6y-2z+9u=6$
$4y-5x+5z-6u=5$
$2z-3x+8y-3u=3$
$9u+10y+3z-4x=9.$

**381** (447). $x-2y+3z-4u=-8$
$y-2z+3u-4x=6$

$$z-2u+3x-4y=-8$$
$$u-2x+3y-4z=-2.$$

**382** (448).
$$4x-3z+u=10$$
$$5y+z-4u=1$$
$$3y+u=17$$
$$x+2y+3u=25.$$

**383** (449).
$$x+y+2z+u=3$$
$$2y+3z+4u=4$$
$$5z-6u=1$$
$$5x-4y=2.$$

**384** (450).
$$4x-3z=10$$
$$2y-5u=5$$
$$z+3v=19$$
$$3x+y=13$$
$$2y-4u=11.$$

## § V. — Ecuaciones para resolver con ayuda de artificios de cálculo.

*Resolver los sistemas de ecuaciones siguientes :*

**385** (451).
$$x+y=16$$
$$x+z=22$$
$$y+z=28.$$

**386** (452).
$$x+y=5$$
$$y+z=8$$
$$z+u=9$$
$$u+v=11$$
$$x+v=9.$$

**387** (453).
$$x+y+z=15$$
$$x+y+t=16$$
$$x+z+t=18$$
$$y+z+t=20.$$

**388** (454).
$$x+y+z=a$$
$$x+y+v=b$$
$$x+z+v=c$$
$$y+z+v=d.$$

**389** (455).
$$cx+az=b$$
$$ay+bx=c$$
$$bz+cy=a.$$

**390** (456).
$$\frac{x+y-1}{x-y+1}=a$$
$$\frac{y-x+1}{x-y+1}=ab.$$



**391** (457).
$$\frac{x}{6}=\frac{y}{3}=\frac{z}{18}$$
$$3x+5y+z=34.$$

**392** (458).
$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{u}{d}$$
$$ax+by+cz+du=\frac{a}{b}.$$

**393** (459).
$$mx=ny=pz$$
$$ax+by+cz=d$$

**394** (460).
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$$
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{20}$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15}.$$

**395** (461).
$$\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}=m$$
$$\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=n.$$

**396** (462).
$$a(x+y)-b(x-y)=2a$$
$$a(x-y)-b(x+y)=2b.$$

**397** (463).
$$\frac{1}{3x-2y+1}+\frac{1}{x+2y-3}=\frac{5}{12}$$
$$\frac{1}{x+2y-3}-\frac{1}{3x-2y+1}=\frac{1}{12}.$$

**398** (464).
$$5\sqrt{x}-3\sqrt{y}=3$$
$$25x-9y=81.$$

**399** (465).
$$\frac{xy}{x+y}=\frac{12}{5}$$
$$\frac{yz}{y+z}=\frac{18}{5}$$
$$\frac{xz}{x+z}=\frac{36}{13}.$$

**400** (466).
$$\frac{xy}{5x+4y}=6$$
$$\frac{xz}{3x+2z}=8$$
$$\frac{yz}{3y+5z}=6.$$

**401** (467).
$$\frac{xy}{ay+bx}=c$$
$$\frac{xz}{az+cx}=b.$$
$$\frac{yz}{bz+cy}=a.$$

**402** (468).
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$$
$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2xy.$$

**403** (469).
$$\frac{x-a}{b+c}=\frac{y-b}{a+c}=\frac{z-c}{a+b}$$
$$mx+ny+pz=d.$$

**404** (470).
$$x+y+z=1$$
$$ax+by+cz=k$$
$$a^2x+b^2y+c^2z=k^2.$$

## § VI. — Problemas de 1$^{er}$ grado con una incógnita.

**405** (471). Dividir el número 46 en dos partes tales que $\frac{1}{7}$ de una, más $\frac{1}{3}$ de la otra sumen 10. Generalizar la cuestión.

**406** (472). ¿Cuál es el número cuyos $\frac{3}{4}$ menos 8, y la mitad más 5 dan 122?

**407** (473). Se han vendido el $\frac{1}{3}$, el $\frac{1}{4}$, el $\frac{1}{6}$ de una pieza de paño, de la cual quedan todavía 15 metros. Encontrar la longitud de la pieza.

**408** (474). Repartir 100 pesos entre tres personas, de manera que la primera reciba 5 pesos más que la segunda, y que ésta reciba 10 pesos más que la tercera.

**409** (475). Repartir 90 pesos entre tres personas, de manera que la tercera reciba 5 pesos menos que la segunda, y ésta 10 pesos más que la primera.

**410** (476). La suma de las edades de tres personas es 100 años. Encontrar la edad de cada una, sabiendo que la de en medio tiene diez años más que la más joven, y que la mayor tiene tantos años como las otras dos juntas.

**411** (477). Las edades de una madre y de sus dos hijos suman 60 años. Encontrar la edad de cada uno de los hijos, sabiendo que el mayor tiene 3 veces la edad de su hermano, y que la madre tiene el doble de la edad de sus hijos.



**412** (478). Se quiere vender un coche, un caballo y sus arneses en 700 pesos; el caballo vale 3 veces sus arneses, y el coche 2 veces el caballo. Encontrar los precios respectivos.

**413** (479). En tres días una casa de banco recibió 16 800 pesos. Encontrar la entrada diaria, sabiendo que cada día recibió el $\frac{1}{4}$ de lo que había recibido la víspera.

**414** (480). En tres meses una fábrica de armas suministró 55 900 fusiles : encontrar la provisión mensual, sabiendo que cada mes se entregaban los $\frac{17}{10}$ del número de armas que se habían entregado el mes anterior.

**415** (481). Cinco personas se han repartido 8 591 pesos : encontrar la parte de cada una, sabiendo que la segunda recibió los $\frac{3}{4}$ de lo que recibió la primera, la tercera los $\frac{3}{4}$ de lo que recibió la segunda, y así sucesivamente.

**416** (482). Una persona gasta la mitad de lo que gana en su alimento, y el $\frac{1}{3}$ en sus otros gastos; después de 40 días ha ahorrado 30 pesos, ¿cuánto gana por día?

**417** (483). Descomponer 176 en dos partes que sean entre sí como 5 es á 6.

**418** (484). Descomponer un número $a$ en dos partes que sean entre sí como $m$ es a $n$.

**419** (485). Encontrar el número cuyos $\frac{2}{7}$ más los 0,291 hagan 0,0027.

**420** (486). Dos propiedades han costado 33000 pesos; encontrar el valor de cada una, sabiendo que el tercio y el cuarto del precio de la primera es igual a los $\frac{7}{10}$ del precio de la segunda.

**421** (487). Encontrar dos números consecutivos tales que su suma sea igual a los $\frac{2}{3}$ del primero, más los $\frac{117}{88}$ del segundo.

**422** (488). Dividir el número 200 en dos partes tales que dividiendo la primera por 16 y la segunda por 10, la diferencia de los cocientes sea 6.

**423** (489). Dividir el número $m$ en dos partes tales que la primera dividida por $a$, menos la segunda dividida por $b$, dé $d$.

**424** (490). El cociente de dos números es 4 y la resta de su división 60. Encontrar estos dos números, sabiendo que su diferencia es 495.

**425** (491). Encontrar un número que, dividido por 5 dé 1 por resta, por 6 dé 2 de resta, por 7 dé 5 de resta, y cuya suma de los cocientes sea igual a la mitad del número menos 2.

426 (492). ¿Qué número debe agregarse a los dos términos de la fracción $\frac{23}{40}$ para que se convierta en $\frac{2}{3}$?

427 (493). ¿Qué cantidad aumenta o disminuye una fracción $\frac{a}{b}$ cuando se agregan $c$ a sus dos términos? — Discusión.

428 (494). Encontrar una proporción cuyos cuatro términos excedan igualmente a los números 11, 6, 8 y 4.

429 (495). Encontrar una proporción cuyos cuatro términos excedan igualmente a los cuatro números $a$, $b$, $c$, y $d$. — Discusión.

430 (496). La suma de los cuatro términos de una proporción es 65; cada uno de los tres últimos términos es los $\frac{2}{3}$ del precedente : encontrar esta proporción.

431 (497). Un padre tiene 27 años, su hijo 3, ¿dentro de cuántos años la edad del hijo será el cuarto de la del padre?

432 (498). Un padre tiene 40 años y su hijo 12, ¿cuántos años hace que la edad del padre era 5 veces la del hijo?

433 (499). La edad de una persona es doble de la de otra, y hace 7 años la suma de las edades de las dos personas era igual a la edad actual de la primera, ¿cuáles son actualmente las edades de las dos personas?

434 (500). Un padre decía a su hijo : Ahora tu edad es el quinto de la mía; hace 5 años no era más que el noveno, ¿qué edad tenemos los dos?

435 (501). Las edades de dos personas son respectivamente $a$ y $b$, ¿dentro de qué tiempo la relación de sus edades será igual a $\frac{m}{n}$? — Discusión.

436 (502). Un niño nació en Noviembre, y el 10 de Diciembre tiene una edad igual al número de días transcurridos del 1° de Noviembre al día de su nacimiento : encontrar la fecha del
el 20
nacimiento de este niño.

437 (503). ¿Cuál es la fecha del mes de Marzo en la cual la fracción transcurrida del mes es la misma que la fracción transcurrida del año : 1° para un año común, y 2° para un año bisiesto?

438 (504). Un comerciante compra vino a 30 pesos el hectolitro; vende la mitad a 35 pesos, el tercio a $ 29, y el resto á $ 32. Realiza una ganancia de $ 1815. ¿Cuántos hectolitros compró?

439 (505). Se tienen 100 litros de vino de a $ 0,45 el litro. ¿Qué cantidad de vino de a $ 0,60 el litro debe agregarse para que la
50
mezcla valga a $ 0,50 el litro?



440 (506). Se tienen 360 gramos de plata de ley de 0,820. ¿Cuántos gramos deben agregarse de un segundo lingote de ley de 0,500, para que la liga descienda a la ley de 0,700?

441 (507). Una liga de oro y de cobre, de peso de 128 gramos, tiene una ley de 0,915. ¿Qué cantidad de cobre debe agregarse para bajar la ley a 0,840? Se calculará el peso con aproximación de 1/2 miligramo.

1/3
442 (508). Se pregunta en qué proporción deben mezclarse vino
2/3
de a $ 0,80 con vino de a $ 0,50 para obtener vino de a $ 0,60 el litro.

443 (509). Con vino que cuesta $a$ pesos y $b$ pesos el litro, se quiere hacer una mezcla de $n$ litros que salga a $c$ pesos el litro. — Discusión.

444 (510). Un comerciante tiene vino de a $ 0,50 el litro, y vierte agua de tal manera que 75 litros de mezcla no valen más que $ 33,75. ¿Cuál es la cantidad de agua contenida en un litro de mezcla?

445 (511). 40 kilogramos de agua salada contienen kg. 3,4 de sal. ¿Qué peso de agua pura debe agregarse para que $40^{kg}$ de la nueva mezcla no contengan más que $2^{kg}$ de la sal?

446 (512). Un barril contiene 120 litros de vino y 180 litros de agua; un segundo barril contiene 90 litros de vino y 30 litros de agua, ¿Cuántos litros deben tomarse de cada uno de los barriles para formar una mezcla que contenga 70 litros de vino y 70 litros de agua?

447 (513). Dos trenes parten al mismo tiempo el uno de París y el otro de Dijon, en dirección a Marsella; el primero camina 60 kilómetros por hora y el segundo 35. ¿A qué distancia de Dijon se cruzarán, sabiendo que Dijon está a $315^{km}$ de París?

448 (514). Dos viajeros parten al mismo tiempo, el uno de A, y el otro de B; van al encuentro uno de otro y caminan, el primero $5^{km}$ por hora, el segundo $5\ 1/2^{km}$. ¿A qué distancia de A se encontrarán? La distancia de un pueblo al otro es de $60^{km}$.

449 (515). Una persona viaja haciendo 7 leguas en 5 horas. 8 horas después parte otra persona de la misma ciudad haciendo 5 leguas en 3 horas. ¿Cuántas leguas recorrerá la primera antes de que la alcance la segunda?

450 (516). De cierta ciudad, parte un correo que camina $28^{km}$ en 5 horas; de otra ciudad situada a $32^{km}$ atrás de la primera, parte 8 horas después en la misma dirección, un segundo correo que camina $20^{km}$ en 3 horas. ¿Cuándo y dónde el segundo correo alcanzará al primero?

451 (517). Un convoy parte a las 8 y 20 minutos para hacer un trayecto de $471^{km}$ que efectúa en 16 horas 40 minutos. ¿Qué velocidad debe tener un segundo convoy que parte 1 hora y

20 minutos después que el primero, para alcanzarlo a 356$^{km}$ del punto de partida?

**452** (518). Dos correos A y B van en el mismo sentido y están a una distancia $d$ el uno del otro. A va $n$ veces más aprisa que B : se pregunta el camino que debe recorrer para alcanzarlo.

**453** (519). Un zorro perseguido por un galgo le lleva 50 saltos de ventaja, y da 4 saltos mientras el galgo sólo da 3; pero 2 saltos del galgo equivalen a 3 del zorro. ¿Cuántos saltos dará el galgo para alcanzar al zorro?

**454** (520). Un reloj marca las doce. ¿A qué hora el minutero encontrará al horario? ¿En qué instante se verifica el encuentro comprendido entre las dos y las tres?

**455** (521). Son las tres. ¿A qué hora las agujas estarán en prolongación una de otra?

**456** (522). Un reloj que tiene tres agujas marca las doce : se pregunta a qué hora; 1° la aguja de los segundos encontrará a la de las horas; 2° la aguja de los segundos encontrará a la de los minutos; 3° la aguja de los segundos será bisectriz del ángulo formado por las otras dos.

**457** (523). Un maestro propone 16 problemas a un discípulo y le promete 5 vales por cada uno de los problemas que resuelva, a condición de que el alumno le dé 3 vales, por cada uno de los que no resuelva. Sucede que el maestro y el alumno no se deben nada. ¿Cuántos problemas resolvió el alumno?

**458** (524). En un juego de tiro se pagan $ 0,40 por cada tiro errado, y se recibe 1 peso por cada tiro acertado. Si después de 25 tiros el tirador debe 10 pesos al dueño del tiro, ¿cuántos tiros acertó?

**459** (525). Un escribiente entra al estudio de un notario; se le prometen $ 2 600, y una gratificación por 5 años de trabajo. Al cabo de 3 años 3 meses, el escribiente abandona el estudio, y recibe con su gratificación $ 850. ¿A cuanto ascendía esta gratificación?

**460** (526). Un banquero descuenta dos letras, una de 8 000 pesos, pagadera a los 10 meses, otra de 5 000 pesos, pagadera a los 6 meses, y retiene $ 187,50 más por la primera que por la segunda : se quiere saber cuál es el tanto, en el concepto de que es el mismo para las dos letras.

**461** (527). Dos sumas son pagaderas, la primera dentro de un año, la segunda, que excede a la primera en 45 000 pesos, lo es dentro de 18 meses; haciendo el pago al contado, se obtiene un descuento de 4,5 por °/o anual : ¿cuál es el valor de cada suma, siendo la rebaja total de $ 4 108,50.?

**462** (528). Una persona posee cierta suma que divide en dos partes iguales, e impone una al 5 por °/o y la otra al 4,5 por °/o; la que está impuesta al 5 por °/o, produce anualmente 60 pesos de interés más que la otra. ¿Cuál es la suma?



**463** (529). Una persona que tiene 120 000 pesos, emplea una parte de esta suma en la compra de una casa; impone el tercio del resto al 4 por °/o, y los otros dos tercios al 5 por °/o. De esta manera su renta anual es de 3 920 pesos. Se quiere conocer el precio de la casa y cada una de las sumas impuestas.

**464** (530). Una persona dividió su capital en tres partes, la primera la impuso al 4 $^1/_2$ por °/o, durante 3 años 8 meses, la segunda, que es doble de la primera, la impuso al 5 por °/o durante 3 años 6 meses, y por último, la tercera, que es triple de la segunda, la impuso al 4 por °/o, durante 3 años 9 meses; los intereses reunidos de estos diversos capitales se han elevado a 14 150 pesos. Calcular las tres partes y el capital.

**465** (531). Una persona debe pagar cierta suma a 5 meses de plazo; se permite que la pague en cuatro partidas iguales. ¿Qué intervalo de tiempo debe transcurrir entre dos pagos consecutivos?

**466** (532). La diferencia de dos capitales es $a$; el mayor está impuesto a $t$ por °/o, el otro a $t'$ por °/o; estos dos capitales producen el mismo interés : encontrar el capital menor. — Discutir.

**467** (533). Vendiendo una mercancía en $a$ pesos, se gana $m$ por °/o. ¿Cuánto por ciento se ganaría si la mercancía se hubiese vendido en $b$ pesos? — Discusión.

**468** (534). Un viajero gasta todos los días la mitad de lo que posee más 1 peso; al cabo de tres días ha gastado todo. ¿Qué suma tenía?

**469** (535). Un comerciante aumenta cada año su fortuna el tercio de su valor, y al fin de cada año retira 1 000 pesos para sus gastos; habiéndose duplicado su fortuna al fin del tercer año, se pregunta cuánto tenía al principio.

**470** (536). Un comerciante, al fin del primer año de comercio, encuentra que hubiera duplicado su dinero si hubiera ganado 1500 pesos más; le pasa lo mismo al fin del segundo y del tercer año, y entonces tiene un capital que es los $\frac{11}{4}$ del capital primitivo. ¿Cuáles son las utilidades de cada año?

**471** (537). Un comerciante vende la mitad de sus naranjas, más la mitad de una naranja; una segunda vez, vende la mitad del resto, más media naranja, y así sucesivamente; después de tres ventas no le queda nada. ¿Cuántas naranjas tenía?

**472** (538). Un comerciante vende $\frac{1}{a}$ de sus naranjas, más $\frac{1}{a}$ de una naranja; una segunda vez vende $\frac{1}{a}$ del resto más $\frac{1}{a}$ de una naranja, así consecutivamente. Se quiere expesar el número de naranjas del $n^{mo}$ resto.

**473** (540). Un padre reparte sus bienes de la manera siguiente : al hijo mayor le da 1 000 pesos más 1/7 del resto; al segundo

2 000 pesos más 1/7 del resto; al tercero 3 000 pesos más 1/7 del resto, y así sucesivamente. Encontrar los bienes del padre y el número de hijos, sabiendo que todas las partes son iguales.

**474** (540). El mismo problema. El padre da al primero $a$ pesos más $\frac{1}{n}$ del resto; al segundo $2a$ pesos más $\frac{1}{n}$ del resto, etc.

## § VII. — Problemas con varias incógnitas.

**475** (541). La víspera de una batalla, los efectivos de dos ejércitos eran entre sí como 5 es a 6; el primero perdió 14 000 hombres, y el segundo 6 000; la relación es entonces de 2 a 3. ¿De cuántos hombres estaba formado cada ejército?

**476** (542). Se tiene trigo antiguo de a \$ 3,60 el hectolitro, y nuevo de a \$ 2,60. ¿En qué proporción se deben mezclar para obener 167 hectolitros $^2/_3$ de a \$ 3,20 el hectolitro?

**477** (543). Un comerciante tiene vino de dos clases; cuando lo mezcla en la relación de 4 a 5, el hectolitro vale 50 pesos; cuando lo mezcla en la relación de 3 a 2, el hectolitro no vale más que \$ 48,50. ¿Cuál es el precio del hectolitro de cada clase?

**478** (544). Una barra compuesta de oro y plata, pesa 1 320 gramos. ¿Cuál es el peso de cada uno de los dos metales, sabiendo que el precio de la plata contenida en la barra es el mismo que el del oro, en el concepto de que a pesos iguales el oro vale 31 veces más que la plata?

**479** (545). Se tienen dos barras del mismo peso y de leyes diferentes; si se funde la primera barra con $^1/_4$ de la segunda, se obtiene una liga con ley de 0,936, y si se funde la primera barra con la mitad de la segunda, se obtiene una liga con ley de 0,920. Se pregunta la ley de cada barra.

**480** (546). Determinar el volumen de dos líquidos si la densidad del uno es 1,3, y la del otro 0,7, sabiendo que si se mezclan, el volumen es igual a 3 litros, y la densidad 0,9.

**481** (547). La muestra de un vino pesaba $^1/_{50}$ menos que el agua, recibí 500 litros en una pipa, que vacía, pesa $32^{kg}$ y que, llena del vino enviado, pesa $523^{kg}$. Se quiere saber si le han mezclado agua, y en qué proporción.

**482** (548). Se tiene trigo de dos clases; cuando se mezclan $a$ medidas de la primera con $b$ medidas de la segunda, la medida de la mezcla vale $d$ pesos, y cuando se mezclan $b$ medidas de la primera con $a$ medidas de la segunda, la medida vale $d'$ pesos. Encontrar el precio de cada clase de trigo.

**483** (549). Dos obreros trabajan juntos; el primero gana por día $^1/_3$ más que el segundo. Al cabo de cierto tiempo, el primero, que ha trabajado 5 días más que el segundo, ha recibido



100 pesos, mientras que el otro ha recibido 60. ¿Cuánto gana cada uno por día?

**484** (550). Un niño dice a su amigo : Dame 5 de tus canicas, y tendremos tantas el uno como el otro; éste le responde : Dame 10 de las tuyas, y tendré dos veces más de las que te queden. ¿Cuántas canicas tenía cada uno?

**485** (551). Hace 18 años, la edad de una persona era el doble de la de otra; dentro de 9 años la edad de la primera no será ya más que los $^5/_4$ de la segunda. ¿Cuál es su edad actual?

**486** (552). Pedro dice a Simón : Tengo dos veces la edad que tenías cuando yo tenía la edad que tienes, y cuando tengas la edad que tengo, la suma de las dos edades será 63 años. ¿Cuáles son sus edades?

**487** (553). Una señora compra en un almacén 10 metros de terciopelo y 12 metros de seda. El importe neto de la factura es \$ 347,90 después de la deducción de un descuento de 2 por °/. sobre el precio de las mercancías. Pasado algún tiempo compra 4 metros de terciopelo y 6 metros de seda, y, por un descuento que le hacen de 4 por °/., no paga más que \$ 146,40. ¿Cuál es el precio del metro de cada especie?

**488** (554). Un número está formado de dos cifras, cuya suma de los valores absolutos es 9. Cuando se invierte el orden de las cifras, se obtiene un segundo número que excede en 9 al cuádruplo del primero. ¿Cuál es este número?

**489** (555). La cifra de las decenas de un número es los $^2/_3$ de la cifra de sus unidades, el número leído al revés excede en 18 al número primitivo. ¿Cuál es este número?

**490** (556). La cifra de las centenas de número de tres cifras vale $^3/_5$ de la cifra de las unidades, y la cifra de las decenas es la mitad de la suma de las otras dos. Encontrar este número, sabiendo que agregándole 198, se obtiene el número invertido.

**491** (557). Determinar un número comprendido entre 400 y 500, sabiendo que la suma de sus cifras es 9 y que el número leído al revés, no es más que los $^{36}/_{47}$ del número primitivo.

**492** (558). Newton nació en el siglo XVII, y murió en el XVIII. Se pregunta el año de su nacimiento y el de su muerte, sabiendo que el número formado por las dos últimas cifras de la época de su nacimiento aumentado en 12, es el doble del número formado por las dos últimas cifras de la época de su muerte, y este último número de dos cifras aumentado en una unidad es los $^2/_3$ del primero.

**493** (559). La fecha de la invención de la imprenta por Gutenberg, está expresada por un número de cuatro cifras : encontrar este número, sabiendo que la suma de sus cifras es 14, la cifra de las decenas es la mitad de la de las unidades, la cifra de las centenas es igual a la suma de la cifra de las decenas y de la de los millares; si se añade 4 905 a este número, se obtiene el número invertido.

**494** (560). Las dos cifras de que se compone un número son entre sí como $m$ es a $n$; si se agraga $a$ a este número, se encuentra el número invertido.

**495** (561). Repartir 8 600 pesos entre tres personas, de manera que la parte de la primera sea a la de la segunda como 2 es a 3, y que la de la segunda sea a la de la tercera como 5 es a 6.

**496** (562). Determinar 4 números, sabiendo que sus sumas de tres en tres son respectivamente 9, 10, 11 y 12.

**497** (563). Hallar dos números tales que su suma, su producto y su cociente sean iguales entre sí.

**498** (564). La suma, la diferencia y el producto de dos números son entre sí como 5, 3 y 16. ¿Cuáles son estos dos números?

**499** (565). La suma, la diferencia y el producto de dos números son entre sí como $m$, $n$ y $p$. ¿Cuáles son estos dos números?

**500** (566). Hallar dos números cuya suma sea igual a $m$ veces y el producto a $n$ veces la diferencia de ellos.

**501** (567). Una fuente puede llenarse por dos conductos A y B en 70 minutos, por los conductos A y C en 84 minutos, y por los conductos B y C en 140 minutos. ¿En qué tiempo podrá llenarse la fuente por cada uno de los conductos corriendo solo y por los tres corriendo juntos?

**502** (568). Se tienen tres barras compuestas como sigue:

| | | | |
|---|---|---|---|
| la primera de 20 gr. de oro, | de 30 gr. de plata | y de 40 gr. de cobre, | |
| la segunda de 30 | — 40 | — 50 | — |
| la tercera de 40 | — 50 | — 90 | — |

Se pregunta qué peso deberá tomarse de cada una de estas barras para formar otra que contenga 34 gramos de oro, 46 gramos de plata y 67 gramos de cobre.

**503** (569). Hiéron de Syracusa mandó hacer una corona de oro con peso de 7465 gramos. Para conocer si el joyero había substituído oro por plata, Arquímedes sumergió la corona en el agua, en donde perdió 467 gramos de su peso. Sabiendo que el oro pierde en el agua 52/1000 de su peso, y la plata 95/1000, se pregunta ¿qué cantidad de oro y de plata contenía la corona?

**504** (570). Tres jugadores convienen en que el que pierda duplicará el dinero de los otros dos; juegan tres partidos, pierden uno cada uno y se retiran con 16 pesos cada uno. ¿Cuánto tenía cada jugador al principio? — Generalizar.

## § VIII. — Ejercicios sobre las desigualdades.

**505** (596). Resolver la desigualdad:

$$\frac{5x}{7} - \frac{13}{21} + \frac{x}{15} < \frac{9}{25} - \frac{2x}{35}.$$



**506** (597). Encontrar los valores enteros de $x$ que pueden satisfacer la desigualdad:

$$3x - \frac{1}{4} > 20 - \frac{2x}{3}.$$

**507** (598). Encontrar los valores de $x$ positivos o negativos pero enteros, que verifican la desigualdad:

$$\frac{2x}{5} - 23 < 2x - 16.$$

**508** (599). Resolver la desigualdad:

$$\frac{mx+n}{a+b} - \frac{px+q}{a-b} < \frac{mx-n}{a-b} + \frac{px-q}{a+b}.$$

**509** (600). Encontrar los valores de $x$, positivos o negativos, pero enteros que satisfacen simultáneamente las desigualdades.

$$6x + \frac{5}{7} > 4x + 7 \quad \text{y} \quad \frac{8x+3}{2} < 2x + 25.$$

**510** (601). La misma cuestión para

$$15x - 2 > 2x + \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad 2(x-4) < \frac{3x-14}{2}.$$

**511** (602). ¿Entre qué límites puede variar $x$ para satisfacer simultáneamente las relaciones

$$8x - 5 > \frac{15x-8}{2} \quad \text{y} \quad 2(2x-3) > 5x - \frac{3}{4}.$$

**512** (603). La misma cuestión para

$$\frac{4x-5}{7} < x + 3 \quad \text{y} \quad \frac{3x+8}{4} > 2x - 5.$$

**513** (604). Verificar que se tiene siempre

$$a^2 - b^2 \geqq 2ab.$$

**514** (605). Verificar que se tiene siempre:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2.$$

**515** (606). Verificar que el medio aritmético entre dos números $a$ y $b$ es mayor que su medio geométrico.

**516** (607). Verificar que se tiene

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) > 6abc.$$

**517** (608). Verificar la desigualdad

$$3(1 + a^2 + a^4) > (1 + a + a^2)^2.$$

**518** (609). Verificar la desigualdad

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + ac + bc.$$

**519 (610).** Demostrar que si se tiene

$$\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} < \frac{a''}{b''}$$

se tiene también

$$\frac{a}{b} < \frac{a + a' + a''}{b + b' + b''} < \frac{a''}{b''}.$$

## LIBRO III

### § I. — Ejercicios sobre los radicales de 2° grado.

ADICIÓN Y SUBSTRACCIÓN

*Simplificar los radicales siguientes y efectuar las operaciones indicadas :*

**520 (220).** 1° $6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

2° $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{6}$

3° $2\sqrt{8} + 5\sqrt{72} - 7\sqrt{18} - \sqrt{50}$

4° $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48}.$

**521 (221).** 1° $3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{32}$

2° $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75}$

3° $8\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\sqrt{12} + 4\sqrt{27} - 2\sqrt{\frac{3}{16}}$

4° $2\sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{60} - \sqrt{\frac{3}{5}}.$

**522 (222).** 1° $\sqrt{45c^3} - \sqrt{80c^3} + \sqrt{5a^2c}$

2° $\sqrt{18a^5b^3} + \sqrt{50a^3b^3}$

3° $\sqrt{4a^3b^2 - 8a^2b^2}$

4° $\sqrt{18a^3b^3c^4 + 9a^2b^2c^4}.$

**523 (223).** 1° $\sqrt{3a^2c + 6abc + 3b^2c}$

2° $\sqrt{4a^5b^2 - 20a^3b^3 + 25ab^4}$

3° $\sqrt{\frac{a^4c}{b^3}} + \sqrt{\frac{a^2c^3}{bd^2}} - \sqrt{\frac{a^2cd^2}{bc^2}}$

4° $3b^2\sqrt{a^3c} + \frac{2}{c}\sqrt{a^5c^3} - c^4\sqrt{\frac{ac}{b^2}}.$



**524 (224).** 1° $\sqrt{\frac{m-n}{a^2}} + \sqrt{\frac{m}{n^2} - \frac{1}{n}}$

2° $\sqrt{\frac{a^3b^2c - 2a^2b^3d}{c^2d^2}}$

3° $\sqrt{\frac{a^2x - 2ax^2 + x^3}{a^2 + 2ax + x^2}}$

4° $\sqrt{9x + 27} + 3\sqrt{4x + 12}.$

**525 (225).** 1° $\sqrt{\frac{a}{a^2bd - 2ab^2d + b^3d}}$

2° $\sqrt{\frac{x^2 + 2x^2 + x}{a^3 + a^2b}}$

3° $\sqrt{\frac{a^3 - ax^2 - a^2x + x^3}{b^5c^3d}}$

4° $\frac{a-b}{a+b}\sqrt{\frac{ac}{(a-b)^2}}.$

**526 (226).** 1° $3\sqrt{-4} - \sqrt{-25} + 4\sqrt{-9}$

2° $2\sqrt{-8} + \sqrt{-18} - \sqrt{-32}$

3° $2\sqrt{-48} + 3\sqrt{-12} - 5\sqrt{-18} - 7\sqrt{-32}$

4° $\sqrt{-a^2 + 2ab - b^2}.$

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

**527 (227).** 1° $\sqrt{24} \times \sqrt{6}$ 12

2° $\sqrt{5} \times \sqrt{\frac{1}{5}}$ 1

3° $2\sqrt{27} \times 3\sqrt{6}$ $54\sqrt{2}$

4° $8\sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{\frac{1}{2}}.$ $2\sqrt{6}$ o $4\sqrt{\frac{3}{2}}$

**528 (228).** 1° $(3 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})$ $1-\sqrt{5}$

2° $(7 + 2\sqrt{6})(9 - 5\sqrt{6})$

3° $(6 + 12\sqrt{7})(3 - 5\sqrt{7})$

4° $(9\sqrt{12} + 3)(5\sqrt{12} + 8).$

**529 (229).** 1° $(9 + 2\sqrt{10})(9 - 2\sqrt{10})$ 41

2° $(7 - 2\sqrt{3})(7 + 2\sqrt{3})$

3° $(\sqrt{15} + \sqrt{7})(\sqrt{15} - \sqrt{7})$

4° $\left(-5 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right)\left(-5 + \sqrt{\frac{3}{4}}\right).$

530 (230). 1° $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$

2° $(5\sqrt{3}-7\sqrt{6})(2\sqrt{8}-3)$

3° $(5\sqrt{14}+3\sqrt{5})(7\sqrt{14}-2\sqrt{5})$

4° $(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(\sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2})$.

531 (231). 1° $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})$

2° $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

3° $(a+\sqrt{x})\times(b+\sqrt{y})$

4° $\left(a\sqrt{\frac{b}{a}}+b\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\left(a\sqrt{\frac{b}{a}}-b\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$.

532 (232). 1° $3\sqrt{-8}\times 2\sqrt{-18}$ 144 i

2° $(\sqrt{-3}+\sqrt{-2})\sqrt{-6}$

3° $(2-\sqrt{-3})(10-\sqrt{-8})$

4° $(3-\sqrt{-5})(4-2\sqrt{-5})$.

533 (233). 1° $(\sqrt{-10}+\sqrt{-7})(\sqrt{-10}-\sqrt{-7})$

2° $(2\sqrt{3}-\sqrt{-5})(4\sqrt{3}-2\sqrt{-5})$

3° $(\sqrt{2}-3\sqrt{-15})(\sqrt{7}-\sqrt{-3})$

4° $(\sqrt{-17}+\sqrt{-19})(7\sqrt{-17}-7\sqrt{-19})$.

534 (234). 1° $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$

2° $(a+\sqrt{-b})(a-\sqrt{-b})$

3° $(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})$

4° $(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$.

535 (235). 1° $(\sqrt{72}+\sqrt{32}-4):\sqrt{8}$

2° $(2\sqrt{32}+3\sqrt{2}+4):4\sqrt{8}$

3° $(3\sqrt{-4}-2\sqrt{-12}+\sqrt{6}-9):-3\sqrt{-2})$

4° $(14+\sqrt{15}-7\sqrt{-3}-2\sqrt{-5}):(7-\sqrt{-5})$.

536 (236). 1° $(a^2\sqrt{d}-b^2c\sqrt{d}-d\sqrt{d}-2bd\sqrt{c}):(a+b\sqrt{c}+\sqrt{d})$

2° $\left(\sqrt{1-x}+\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right):\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

3° $(a^2+b^2):(a-b\sqrt{-1})$

4° $[a+bm-(am-b)\sqrt{-1}]:(1-m\sqrt{-1})$.

*Hacer racional el denominador de las fracciones siguientes :*

537 (237). 1° $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$



2° $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

3° $\frac{2}{-1\pm\sqrt{5}}$

4° $\frac{7}{\sqrt{8}-2}$.

538 (238). 1° $\frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

2° $\frac{5-7\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

3° $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

4° $\frac{1}{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$.

539 (239). 1° $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{30}}{12}$

2° $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

3° $\frac{3+4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

4° $\frac{156+12\sqrt{11}}{6-2\sqrt{11}+14\sqrt{2}}$.

540 (240). 1° $\frac{6}{1+\sqrt{-2}}$

2° $\frac{8\sqrt{-12}-12\sqrt{-6}}{4\sqrt{-3}}$

3° $\frac{5-\sqrt{-2}}{1+\sqrt{-2}}$

4° $\frac{4\sqrt{5}-20}{\frac{3}{2}\sqrt{-10}-5\sqrt{-\frac{1}{2}}}$.

541 (241). 1° $\frac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{c}}$

2° $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt[3]{c}}$

3° $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

4° $\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

**542** (242) 1° $\dfrac{ab}{\sqrt{b^3}-\sqrt{ab^2}}$

2° $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$

3° $\dfrac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}$

4° $\dfrac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}+\dfrac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}}$.

## § II. — Transformación de los radicales dobles.

*Transformar las expresiones siguientes :*

**543** (243). 1° $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

2° $\sqrt{8+4\sqrt{3}}$

3° $\frac{R}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

4° $\frac{a}{2}\sqrt{5+\sqrt{24}}$.

**544** (244). 1° $a\sqrt{2+\sqrt{3}}$

2° $\sqrt{5-\sqrt{24}}$

3° $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

4° $\sqrt{28+5\sqrt{12}}$.

**545** (245). 1° $\sqrt{7+6\sqrt{-2}}$

2° $\sqrt{31+42\sqrt{-2}}$

3° $\sqrt{-3-\sqrt{-16}}$

4° $\sqrt{4\sqrt{-6}-2}$.

**546** (246). 1° $\sqrt{a^2+b+2a\sqrt{b}}$

2° $\sqrt{ac^2+bd^2+2cd\sqrt{ab}}$



3° $\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}$

4° $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$.

**547** (247). 1° $\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{c}{2}\sqrt{a^2-c^2}}$

2° $\sqrt{x+xy-2x\sqrt{y}}$

3° $\sqrt{\dfrac{3a}{b}+\sqrt{\dfrac{12a^3c^2}{bd^2}-\dfrac{4a^4c^4}{d^4}}}$

4° $\sqrt{b^2-ab+\dfrac{a^2}{4}+\sqrt{4ab^3-8a^2b^2+a^3b}}$.

**548** (248). 1° $\sqrt{\dfrac{a^2b-ab^2}{c^2}\pm\sqrt{-\dfrac{4a^3b^3}{c^2}}}$

2° $\sqrt{\dfrac{a^2c}{b^2}-cd+\dfrac{ac\sqrt{4d}}{b}\sqrt{-1}}$

3° $\sqrt{\dfrac{25a^2d}{c^2}-\dfrac{4a^2b}{d}-\dfrac{20a^2\sqrt{b}}{c}\sqrt{-1}}$

4° $\sqrt{a^4x^4-a^3b^2-a^2b^3-2a^3bx^2\sqrt{a+b}\sqrt{-1}}$.

## § III. — Exponentes y radicales cualesquiera.

*Simplificar las expresiones siguientes :*

**549** (249). 1° $(a^3)^2$

2° $(a^n)^3$

3° $(a^2b^3)^n$

4° $(-a)^3$.

**550** (250). 1° $(a^3)^{-2}$

2° $(a^n)^{-m}$

3° $(-a)^{-2n}$

4° $(-a)^{-(2n+1)}$.

**551** (251). 1° $[(-a^2)^4]^3$

2° $[a^2(b-c)^3]^4$

3° $[a(b-c)^2]^n$

4° $(a+b)^m(a-b)^m$.

**552** (252). 1° $\left(\dfrac{a^7}{b^x}\right)^m.(b^x)^m.a^m$

2° $\left(\dfrac{a+b}{c-x}\right)^m\cdot\left(\dfrac{c+x}{a+b}\right)^m\cdot\left(\dfrac{c-x}{a-b}\right)^m$

3° $\dfrac{(49x^2-36y^2)^m}{(7x-6y)^m}$

4° $\dfrac{(5a^2+8ab-21b^2)^m}{(a+3b)^m}$.

**553** (253). 1° $\left(\frac{a+b}{c-d}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{a+b}\right)^2 \cdot \left(\frac{c-d}{a+b}\right)^4$

2° $\frac{(2ab)^5.(3ab)^2.(5a)^4}{(3b)^3.(4ab)^6}$

3° $\frac{[(35a^5)^m]^n}{[(7a^3)^m]^n}$

4° $\frac{a^{4m}-a^{4n}}{a^{2m}-a^{2n}}$.

**554** (254). 1° $\sqrt[3]{a^6b^5}$

2° $\sqrt[3]{32a^4}$

3° $\sqrt[3]{81a^3x}$

4° $\sqrt[3]{24a^4x^5}$.

**555** (255). 1° $\sqrt[3]{a^4(x+a)^4}$

2° $\sqrt[3]{a^3x^4(a^4+a^3x)}$

3° $\sqrt[3]{32a^3(a^2-x^2)^4}$

4° $\sqrt[4]{36a^2b^2}$.

**556** (256). 1° $\sqrt[6]{4a^2}$

2° $\sqrt[4]{64a^8b^6}$

3° $\sqrt[6]{5^4b^4c^2}$

4° $\sqrt[8]{16a^4}$.

*Reducir al mismo índice los radicales siguientes :*

**557** (257). 1° $\sqrt{3},\ \sqrt[3]{5},\ \sqrt[4]{6}$

2° $\sqrt[5]{a^3},\ \sqrt[6]{a^5},\ \sqrt[10]{a^6}$

3° $\sqrt{a^2(x^2+y^2)},\ \sqrt[5]{4b^2(a^2-c^2)}$

4° $\sqrt[8]{xy^3},\ \sqrt[6]{3x^2y^2}$.

**558** (258). 1° $\sqrt[n]{(a-b)^p},\ \sqrt[m]{(a^2+x^2)^2}$

2° $\sqrt{a},\ \sqrt[3]{b},\ \sqrt[4]{ax},\ \sqrt[5]{a-x}$.

*Efectuar las adiciones y substracciones siguientes :*

**559** (259). 1° $\sqrt[3]{56}+\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{448}$

2° $\sqrt[3]{24a^4}+\sqrt[3]{3a^4x^3}-\sqrt[3]{81ax^6}$

3° $\sqrt[3]{-8}+\sqrt[3]{-512}-\sqrt[3]{-27}$

4° $\sqrt[3]{-54}-\sqrt[3]{-250}-\sqrt[3]{-128}$.

**560** (260). 1° $9\sqrt[3]{5x^4}-\sqrt[3]{135x^4}$

2° $8\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt[3]{a^6b}$

3° $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{\frac{9}{32}}$

4° $\sqrt{a^{3n}b}-\sqrt{a^{2n}b}$.

**561** (261). 1° $\sqrt[3]{5a^2(a+b)^7}-4ab\sqrt[3]{5a^2(a+b)}$



2° $\sqrt[5]{32a^3+96x}+\sqrt[5]{a^8+3a^5x}+\sqrt[5]{a^3x^5+3x^6}$

3° $\sqrt[3]{\frac{a^3b^2+a^3c}{b^2}}-\sqrt[3]{\frac{d^3b^2+d^3c}{b^2}}$

4° $\sqrt[3]{\frac{a^7c-a^6b}{c^2}}-\sqrt[3]{\frac{a^4c-a^3b}{c^2}}$.

*Efectuar las multiplicaciones y las divisiones siguientes :*

**562** (262). 1° $5\sqrt[3]{6}\times 3\sqrt[3]{4}$

2° $\frac{1}{3}\sqrt[3]{15}\times 5\sqrt[3]{18}$

3° $\sqrt[3]{7a^2}\times\sqrt[3]{ac^2}$

4° $6\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{2c}$.

**563** (263). 1° $\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{16}} : \frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$

2° $6\sqrt{7a^7} : 3\sqrt[3]{2ac^2}$

3° $2\sqrt[4]{19ax^2} : \sqrt[4]{8a}$

4° $\sqrt[n]{a^{3n+2}} : \sqrt[n]{a^{2n+2}}$.

**564** (264). 1° $\sqrt[4]{x}\times\sqrt{b}$

2° $\sqrt[4]{b}\times\sqrt{ax}$

3° $\sqrt[4]{a^3}\times\sqrt[8]{a^7}\times(-\sqrt{a})$

4° $3\sqrt[4]{a}\times 7\sqrt[6]{b}$.

**565** (265). 1° $\sqrt[6]{a^5b^7} : \sqrt[3]{a^2b^3}$

2° $\sqrt[4]{4} : \sqrt[6]{8}$

3° $2\sqrt[6]{27} : \sqrt[4]{9}$

4° $\sqrt[12]{125} : \sqrt[8]{25}$.

**566** (266). 1° $4\sqrt[3]{12} : 2\sqrt{3}$

2° $(2\sqrt{32}+3\sqrt{2}+\sqrt[4]{4}) : \sqrt{8}$

3° $(\sqrt{8}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[4]{4}) : \sqrt{2}$

4° $(\sqrt{8}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[4]{2}) : 2\sqrt{2}$.

*Hacer racional el denominador de las fracciones siguientes :*

**567** (267). 1° $\frac{4\sqrt[3]{12}}{2\sqrt{3}}$

2° $\frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[6]{8}}$

3° $\frac{1}{\sqrt[3]{0{,}008}}$

4° $\frac{2\sqrt[6]{27}}{\sqrt[4]{9}}$.

**568** (268). 1° $\frac{m}{\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{y}}$

2° $\frac{1}{\sqrt[3]{3} \pm \sqrt[3]{2}}$

3° $\frac{1}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}$

4° $\frac{m}{\sqrt{a} - \sqrt[4]{b}}$.

*Calcular las potencias y las raíces siguientes :*

**569** (269). 1° $(a\sqrt{3})^2$

2° $(2\sqrt{a})^3$

3° $(5\sqrt[3]{a^2x})^3$

4° $(7\sqrt[3]{x^2 - y^2})^3$.

**570** (270). 1° $\sqrt{9\sqrt{3}}$

2° $\sqrt[3]{27\sqrt{5}}$

3° $\sqrt[3]{\frac{1}{64}\sqrt{2}}$

4° $\sqrt[3]{a^7\sqrt{b}}$.

**571** (271). 1° $\sqrt[3]{\frac{1}{2}x\sqrt{\frac{x}{2}}}$

2° $\left(\sqrt[3]{\sqrt[7]{8a^3}}\right)^7$

3° $\left(\sqrt[4]{\sqrt[11]{16a^4}}\right)^{11}$

4° $\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{8a^3}}\right)^5$.

**572** (272). 1° $2\sqrt[12]{\sqrt[5]{7}} + 3\sqrt[6]{\sqrt{7}} - 3\sqrt[5]{\sqrt[12]{7}} - \sqrt[10]{\sqrt[6]{7}}$

2° $\sqrt[2m]{\sqrt[3n]{a^5}} \times \sqrt[6m]{\sqrt[n]{a^3}} \times \sqrt[m]{\sqrt{a^9}} \times \sqrt[6n]{\sqrt[m]{a}}$

3° $\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{2}}}$

4° $\sqrt[n-1]{\frac{a}{\sqrt[n]{a}}}$.

## § IV. — Exponentes fraccionarios y negativos.

*Efectuar las operaciones siguientes :*

**573** (273). 1° $36^{\frac{3}{2}}$

2° $4^{-\frac{7}{2}}$

3° $9^{-0{,}5}$

4° $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{8}{3}}$.



**574** (274). 1° $\left(1\,\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{8}{11}\right)^{\frac{1}{2}} \times 11^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$

2° $a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{5}{3}}$

3° $^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{7}{4}} \times a^{-\frac{1}{8}}$

4° $a^{-\frac{3}{4}} \times b^{-2} \times a^{\frac{5}{6}}\,b^{\frac{1}{2}}\,c$.

**575** (275). 1° $\left(a^{\frac{7}{2}} - a^3 + a^{\frac{5}{2}} - a^2 + a^{\frac{3}{2}} - a + a^{\frac{1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right)$

2° $\left(\frac{ay}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{bx}{y^2}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{y^2}{a^2b^2}\right)^{\frac{1}{4}}$

3° $(a^{-1} - x^{-1}) : \left(a^{-\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right)$

4° $\left(a^2 - a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{3}{4}}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)$.

**576** (276). 1° $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2}} \times \sqrt[6]{\sqrt[4]{a^9}}$

2° $\left(\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[5]{b^2}\right)\left(\sqrt{a^3} - \sqrt[5]{b^2}\right)$

3° $\left(a^3 - 2\sqrt[4]{a^2b^3} - a^2\sqrt[6]{a^3b^2} + 2b\sqrt[12]{b}\right) : \left(\sqrt{a} - \sqrt[3]{b}\right)$

4° $(5a^2 - 41ab + 42b^2)\sqrt[12]{a} : \left(\sqrt[3]{a} - \frac{7b}{\sqrt[3]{a^2}}\right)$.

**577** (277). 1° $\left(a^{\frac{3}{4}} - b^{\frac{3}{4}}\right) : \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}\right)$

2° $\left[\frac{c^2d}{(a+b)^{\frac{3}{2}}}\right]^{-\frac{1}{3}}$

3° $\sqrt[4]{\left(\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}\right)^3}$

4° $\left(\sqrt[x]{a^{-\frac{2}{y}}} + \sqrt[r]{a^{\frac{1}{y}}b} + 2\sqrt{\sqrt[r]{b}}\sqrt{\sqrt[x]{\sqrt[y]{\sqrt[r]{a^{x-2r}}}}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

## § V. — Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

578 (611). $x^2 - 6x + 8 = 0.$
579 (612). $x^2 - 4x - 21 = 0.$
580 (613). $x^2 + 8x + 12 = 0.$
581 (614). $x^2 - 10x + 25 = 0.$
582 (615). $x^2 + 6x + 9 = 0.$
583 (616). $x^2 - 7x + 5 = 0.$
584 (617). $x^2 - 9x + 18 = 0.$
585 (618). $x^2 - 7x - 18 = 0.$
586 (619). $x^2 + 3x - 28 = 0.$
587 (620). $x^2 - 11x + 10 = 0.$
588 (621). $x^2 - 4x + 7 = 0.$
589 (622). $x^2 - 2x + 6 = 0.$
590 (623). $3x^2 - 9x + 6 = 0.$
591 (624). $3x^2 - 15x + 18 = 0.$
592 (625). $3x^2 + 15x + 18 = 0.$
593 (626). $3x^2 - 21x + 36 = 0.$
594 (627). $5x^2 - 15x - 50 = 0.$
595 (628). $5x^2 + 15x - 50 = 0.$
596 (629). $7x^2 + 21x - 28 = 0.$
597 (630). $2x^2 - 16x + 30 = 0.$
598 (631). $4x^2 - 8x - 12 = 0.$
599 (632). $2x^2 + 8x + 6 = 0.$
600 (633). $2x^2 + 10x + 12 = 0.$
601 (634). $2x^2 - 12x - 14 = 0.$
602 (635). $3x^2 + 24x + 21 = 0.$
603 (636). $(x + 2)(x + 3) = 6.$
604 (637). $25x(x + 1) = -4.$
605 (638). $2x(4x - 2) = 4.$
606 (639). $(x - 15)(x + 15) = 400.$
607 (640). $4(x^2 - 1) = 4x - 1.$
608 (641). $(2x - 3)^2 = 8x.$
609 (642). $\frac{9}{x} - \frac{x}{3} = 2.$
610 (643). $x + \frac{1}{x - 3} = 5.$



611 (644). $\frac{x}{7} + \frac{21}{x + 5} = \frac{47}{7}.$
612 (645). $\frac{x}{x + 1} + \frac{x}{x + 4} = 1.$
613 (646). $\frac{2x}{x + 2} + \frac{x + 2}{2x} = 2.$
614 (647). $\frac{2x - 1}{x + 1} = \frac{x + 1}{x - 2}.$
615 (648). $\frac{x + 1}{x} + 1 = \frac{x}{x - 1}.$
616 (649). $x + 2 - \frac{6}{x + 2} = 1.$
617 (650). $x + \frac{24}{x - 1} = 3x - 4.$
618 (651). $\frac{15}{x} - \frac{72 - 6x}{2x^2} = 2.$ 3 y 6
619 (652). $3x^2 = \frac{2}{5}\left(x + \frac{4}{5}\right) + 2x^2.$ 4/5 y -2/5
620 (653). $\frac{8}{x + 6} + \frac{12 - x}{x - 6} = 1.$ 10 y -3
621 (654). $\frac{x + 8}{x - 8} - 2 = \frac{24}{x - 4}.$ 12 y -8
622 (655). $\frac{x + 5}{x - 5} + \frac{x - 5}{x + 5} = \frac{10}{3}.$ ± 10
623 (656). $\frac{7}{x - 2} + \frac{8}{x - 5} = 3.$ 3 y 9
624 (657). $\frac{5x + 4}{5x - 4} + \frac{5x - 4}{5x + 4} = \frac{13}{6}.$ ± 4
625 (658). $\frac{x + 1}{x + 2} + \frac{x - 1}{x - 2} = \frac{2x + 1}{x + 1}.$ 4 y 0
626 (659). $\frac{x + 1}{x - 1} + \frac{x + 2}{x - 2} = \frac{2x + 13}{x + 1}.$
627 (660). $\frac{x}{x - 6} - \frac{1}{2} = \frac{x}{6} + \frac{x + 6}{6 - x}.$

*Resolver las ecuaciones literales siguientes :*

628 (661). $x^2 - (a + b)x + ab = 0.$
629 (662). $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0.$
630 (663). $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0.$ $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$
631 (664). $c^2x^2 + (ac - bc)x - ab = 0.$ $\frac{b}{c}$ y $-\frac{a}{c}$
632 (665). $x^2 - 4bx + 4b^2 - a^2 = 0.$ 2b+a y 2b-a

633 (666). $x^3 - 2a^2bx + a^4b^2 - a^2b^4 = 0.$ $ab(a \pm b)$

634 (667). $a^2x^2 - 2a^3x + a^4 - 1 = 0.$ $\frac{a^2 \pm 1}{a}$

635 (668). $x^2 - 2acx + a^2(c^2 - b^2) = 0.$ $a(c \pm b)$

636 (669). $abcx^2 - (a^2b^2 + c^2)x + abc = 0.$ $\frac{ab}{c}$ y $\frac{c}{ab}$

637 (670). $x^2 - 6acx + a^2(9c^2 - 4b^2) = 0.$

638 (671). $12abx^2 - (16a^2 - 9b^2)x - 12ab = 0.$

639 (672). $(a^2 - b^2)x^2 - 2a^2bx + a^2b^2 = 0.$

640 (673). $c^2x^2 - 2acx + a^2 - b^2 = 0.$

641 (674). $d^2x^2 - 4abdx + 4a^2b^2 - 9c^2 = 0.$

642 (675). $x^2 - 2(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)^2 = 0.$

643 (676). $(a^2 - b^2)x^2 - 2(a^2 + b^2)x + a^2 - b^2 = 0.$

644 (677). $$\frac{x}{a} \pm \frac{a}{x} = \frac{b}{x} \pm \frac{x}{b}.$$

645 (678). $$\frac{(a - x)(x - b)}{(a - x) - (x - b)} = x.$$

646 (679). $$4a^2x = (a^2 - b^2 + x)^2.$$

647 (680). $$\frac{x - a}{a} = \frac{2a}{x - a}.$$

648 (681). $$\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} - \frac{1}{x - c} = 0.$$

649 (682). $$\frac{(a - x)^2 - (x - b)^2}{(a - x)(x - b)} = \frac{4ab}{a^2 - b^2}.$$

650 (683). $$\frac{x^2}{(m + n)^2} - \frac{4mn}{(m + n)^2}x - (m - n)^2 = 0.$$

651 (684). $$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{3a^2 + b^2}{a^2 + 3b^2}.$$

652 (685). $$\frac{\frac{a + x}{a - x} + \frac{a - x}{a + x}}{1 - \frac{a - x}{a + x}} = a - 1.$$

## § VI. — Ecuaciones irracionales.

653 (686). Resolver $\sqrt{x + 4} = 7.$

654 (687). Resolver $\sqrt{36 + x} = 2 + \sqrt{x}.$

655 (688). Resolver $x + \sqrt{25 - x^2} = 7.$

656 (689). Resolver $x - \sqrt{25 - x^2} = 1.$

657 (690). Resolver $x - \sqrt{169 - x^2} = 17.$

658 (691). Rosolver $x + \sqrt{5x + 10} = 8.$



659 (692). Resolver $x + \sqrt{10x + 6} = 9.$

660 (693). Resolver $4x + 2\sqrt{5 - 4x} = 5.$

661 (694). Resolver $\sqrt{1 + \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1.$

662 (695). Resolver $\sqrt{2 + \sqrt{x - 5}} = \sqrt{13 - x}.$

663 (696). Resolver $3x + \sqrt{6x + 10} = 35.$

664 (697). Resolver $\sqrt{x + 6} + \sqrt{x + 1} = \sqrt{7x + 4}.$

665 (698). Resolver $\sqrt{x + 7} + \sqrt{x - 5} = \sqrt{2x + 18}.$

666 (699). Resolver $\sqrt{x + 5} + \sqrt{2x + 8} = 7.$

667 (700). Resolver
$$\frac{\sqrt{4x + 20}}{4 + \sqrt{x}} = \frac{4 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

668 (701). Resolver
$$\sqrt{5a + x} + \sqrt{5a - x} = \frac{12a}{\sqrt{5a + x}}.$$

669 (702). Resolver
$$\sqrt{2x + 1} + 2\sqrt{x} = \frac{21}{\sqrt{2x + 1}}.$$

670 (703). Resolver
$$x\sqrt{\frac{a}{x} - 1} = \sqrt{x^2 - b^2}.$$

671 (704). Resolver
$$\frac{2}{x + \sqrt{2 - x^2}} + \frac{2}{x - \sqrt{2 - x^2}} = x.$$

672 (705). Resolver
$$\sqrt{a^2 + x\sqrt{b^2 + x^2 - a^2}} = x - a.$$

673 (706). Resolver
$$\sqrt{3 + \sqrt{x}} + \sqrt{4 - \sqrt{x}} = \sqrt{7 + 2\sqrt{x}}.$$

674 (707). Resolver
$$\frac{1}{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2 - x}} + \frac{1}{\sqrt{2 + x} + \sqrt{2 - x}} = 1.$$

675 (708). Resolver
$$\frac{\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}}{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}} = \sqrt{b}.$$

676 (709). Resolver
$$(2 + x)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} = 4(2 + x)^{-\frac{1}{2}}.$$

677 (710). Resolver
$$2x + 2\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{5a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

## § VII. — Ejercicios sobre las propiedades de las raíces.

**678** (711). En las ecuaciones siguientes, indicar, sin resolver, cuál es la naturaleza de las raíces; decir sus signos, su suma y su producto :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1° | $x^2 + 8x + 12 = 0$ | 4° | $3x^2 - 6x + 12 = 0$ |
| 2° | $5x^2 - 15x - 50 = 0$ | 5° | $9x^2 + 12x + 4 = 0$ |
| 3° | $7x^2 - 14x + 7 = 0$ | | $5x^2 - 15x = 0$ |

**679** (712). En las ecuaciones del problema anterior, calcular, sin resolver, cuál es la diferencia de las raíces.

**680** (713). ¿Qué relación debe existir entre $a$, $b$ y $c$ para que la diferencia de las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ sea igual a la unidad?

**681** (714). Formar una ecuación de segundo grado de coeficientes reales y enteros cuyas raíces sean :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1° | $7$ y $-3$ | 6° | $\frac{a+b}{a-b}$ y $\frac{a-b}{a+b}$ |
| 2° | $3$ y $\frac{1}{2}$ | 7° | $3 + \sqrt{2}$ y $3 - \sqrt{2}$ |
| 3° | $a + b$ y $a - b$ | 8° | $4 + \frac{2}{\sqrt{5}}$ y $4 - \frac{2}{\sqrt{5}}$ |
| 4° | $a + b$ y $\frac{1}{a+b}$ | 9° | $a + \sqrt{b}$ y $a - \sqrt{b}$ |
| 5° | $\frac{1}{a+b}$ y $\frac{1}{a-b}$ | 10° | $a + b\sqrt{-1}$ y $a - b\sqrt{-1}$ |

**662** (715). Hallar dos números que tengan :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1° | por suma | 18 | y por producto | 45 |
| 2° | id. | 14 | id. | 49 |
| 3° | id. | 4 | id. | $-12$ |
| 4° | id. | $-10$ | id. | 16 |
| 5° | id. | 4 | id. | 6. |

**683** (716). **Descomponer en factores los trinomios :**

1° $x^2 - 9x + 18$
2° $x^2 + 3x - 28$
3° $3x^2 - 21x + 36$
4° $2x^2 - 12x + 18$
5° $2x^2 - 3x - 2.$

**684** (717). Simplificar las fracciones siguientes **:**

1° $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}$

2° $\dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x - 5}$



3° $\dfrac{x^2 + 10x + 21}{2x^2 + 12x + 18}$

4° $\dfrac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 + x - 12}$

5° $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{3x^2 + 6x - 9}$

**685** (718). En la ecuación $x^2 - 7x + q = 0$, determinar $q$ de manera que una de las raíces sea :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1° | igual á $3$ | 3° | igual á $\frac{4}{5}$ |
| 2° | id. $-3$ | 4° | id. cero. |

**686** (719). En la ecuación $x^2 - px + 36 = 0$, determinar $p$ de tal manera que se tenga :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1° | $x' = x''$ | 3° | $x' = 5 + \sqrt{-11}$ |
| 2° | $x' = -x''$ | 4° | $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{5}{12}.$ |

**687** (720). En la ecuación $x^2 - 8x + q = 0$, determinar $q$ de tal manera que se tenga :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1° | $x' = x''$ | 4° | $x' = -\frac{1}{x''}$ |
| 2° | $x' = 3x''$ | 5° | $3x' - 4x'' = 3$ |
| 3° | $x' = \frac{1}{x''}$ | 6° | $x'^2 + x''^2 = 40.$ |

**688** (721). En la ecuación $(a - b)^2 x^2 + 2(a^2 - b^2) x + n = 0$, determinar $n$ de tal manera que las raíces sean : 1° iguales; 2° inversas.

**689** (722). ¿Qué valores debe tomar $c$ para que la ecuación $3x^2 - 10x + c = 0$ tenga :

1° sus dos raíces positivas;
2° una raíz positiva y la otra negativa;
3° una raíz nula;
4° dos raíces imaginarias.

**690** (723). En la ecuación $2x^2 - (m - 1)x + m + 1 = 0$ ¿qué valor debe darse a $m$ para que las raíces difieran 1?

**691** (724) Dada la ecuación $8x^2 - (m - 1)x + (m - 7) = 0$ ¿qué valores deben darse a $m$ para que las raíces sean :

1° reales e iguales;
2° iguales y de signos contrarios;
3° inversas;
4° una de ellas igual a cero?

**692** (725). Calcular la suma de las potencias semejantes de las raíces de la ecuación $x^2 + px + q = 0$ sin resolverla.

**693** (726). Calcular la suma de las potencias semejantes de las inversas de las raíces de la ecuación del segundo grado.

694 (727). Determinar $m$ de manera que la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación $x^2 + (m - 2)x - (m + 3) = 0$ sea igual a un número dado $k$. ¿Cuál es el mínimo de $k$? ¿A qué se reducen entonces las raíces?

695 (728). ¿Qué relación debe existir entre $p$ y $q$ para que las raíces de la ecuación $x^2 + px + q = 0$ estén en una relación dada $m$?

696 (729). ¿A qué condición deben satisfacer $a$, $b$, $c$ para que las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ sean proporcionales a dos números dados $m$ y $n$.

697 (730). En la ecuación $x^2 + px + q = 0$, determinar $p$ y $q$ de tal manera que la diferencia de las raíces sea 4 y la de sus cubos 208, sin calcular las raíces.

698 (731). Formar una ecuación de segundo grado, cuyas raíces satisfagan a las relaciones siguientes :

$$x'x'' + x' + x'' - m = 0$$
$$x'x'' - m(x' + x'') + 1 = 0$$

699 (732). ¿Qué relación deben tener los coeficientes de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ para que :

1° La diferencia de los cuadrados de las raíces sea igual a un número dado $m$?

2° $m$ veces una más $n$ veces la otra dé un número $p$?

700 (733). Dada la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, formar otra ecuación cuyas raíces sean :

1° iguales y de signos contrarios a los de la ecuación dada;
2° las inversas de las de la ecuación dada;
3° las de la ecuación dada multiplicadas por $m$;
4° las de la ecuación dada aumentadas $h$;
5° los cuadrados de las de la ecuación dada;
6° las inversas de los cuadrados de las de la ecuación dada.

701 (734). La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene por raíces $x'$ y $x''$; disponer de $h$ de manera que la ecuación que tenga por raíces $x' + h$ y $x'' + h$ carezca del término en $x$.

702 (735). Formar una ecuación de segundo grado que tenga por raíces la suma y el producto de las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

703 (736). Si $x'$ y $x''$ son las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, formar una ecuación que tenga por raíces $\frac{x'}{x''}$ y $\frac{x''}{x'}$.

704 (737). En la ecuación $x^2 + px + q = 0$, determinar $p$ y $q$ de tal manera que una de las raíces sea triple de la otra y que la suma de sus cuadrados sea 40.

705 (738). Se tienen las ecuaciones $x^2 - 7x + 12 = 0$ y $x^2 - 3x + q = 0$; determinar $q$ de tal manera que estas dos ecuaciones tengan una raíz común.

706 (739). Encontrar las relaciones que deben existir entre los coeficientes de las ecuaciones $x^2 + px + q = 0$ y $x^2 + p'x + q' = 0$ para que tengan una raíz común.



707 (740). Determinar $m$ y $n$ de tal manera que las dos ecuaciones :

$$(5m - 52)x^2 - (m - 4)x + 4 = 0$$
$$(2n + 1)x^2 - 5nx + 20 = 0$$

tengan las mismas raíces.

## § VIII. — Ecuaciones bicuadradas.

*Resolver las ecuaciones siguientes* :

708 (761)). $x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$
709 (762). $x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$
710 (763). $x^4 - 26x^2 + 25 = 0.$
711 (764). $x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$
712 (765). $x^4 - 8x^2 - 9 = 0.$
713 (766). $x^4 - 24x^2 - 25 = 0.$
714 (767). $x^4 - 5x^2 - 36 = 0.$
715 (768). $x^4 - 18x^2 + 81 = 0.$
716 (769). $x^4 - 2x^2 - 3 = 0.$
717 (770). $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0.$
718 (771). $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0.$
719 (772). $3x^4 - 26x^2 - 9 = 0.$
720 (773). $\sqrt{x^2 + 9} = 21 - x^2.$
721 (774). $a^2b^2x^4 - (a^4 + b^4)x^2 + a^2b^2 = 0.$
722 (775). $x^4 + 4abx^2 - (a^2 - b^2)^2 = 0.$
723 (776). $c^4x^4 + (a^2c^2 - b^2c^2)x^2 - b^2a^2 = 0.$

724 (777). Descomponer en factores del primer grado el trinomio

$$4x^4 - 17x^2 + 4.$$

725 (778). Formar una ecuación bicuadrada que tenga por raíces

1° $\pm 3$ y $\pm 1$
2° $\pm a$ y $\pm \sqrt{a}$.

726 (779). ¿Cuál es el trinomio bicuadrado cuyas raíces son

$$\pm(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \quad \text{y} \quad \pm(\sqrt{5} - \sqrt{3}).$$

727 (780). En la ecuación $2x^2 - (m^2 + 1)x + (m^2 + 3) = 0$ ¿qué valor debe darse a $m$ para que las raíces difieran 1?

## § IX. — Ecuaciones recíprocas.

*Resolver las ecuaciones siguientes :*

728 (781). $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0.$

729 (782). $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0.$

730 (783). $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

731 (784). $5x^3 - 31x^2 + 31x - 5 = 0.$

732 (785). $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0.$

733 (786). $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 = 0.$

734 (787). $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0.$

735 (788). $4x^4 - 17x^3 + 17x - 4 = 0.$

736 (789). $5x^4 - 26x^3 + 26x - 5 = 0.$

737 (790). $x^4 - 6x^3 + 6x - 1 = 0.$

738 (791). $3x^4 - 4x^3 + 4x - 3 = 0.$

739 (792). $x^4 - 5x^3 + 5x - 1 = 0.$

740 (793). $4x^4 - 6x^3 + 6x - 4 = 0.$

741 (794). $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 4.$

742 (795). $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0.$

743 (796). $x^4 - x^3 + \frac{5}{4}x^2 - x + 1 = 0.$

744 (797). $\frac{1 + x^4}{(1 + x)^4} = \frac{1}{2}.$

745 (798). $x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0.$

746 (799). $2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 3x - 2 = 0.$

747 (800). $12x^5 - 8x^4 - 45x^3 + 45x^2 + 8x - 12 = 0.$

## § X. — Ecuaciones binomias y trinomias.

*Resolver completamente las ecuaciones siguientes :*

750 (801). $x^3 + 27 = 0.$

751 (802). $x^4 = 16.$

752 (803). $x^4 + 625 = 0.$

753 (804). $x^5 = 32.$

754 (805) $x^6 = 729.$

755 (806). $x^6 - 28x^3 + 27 = 0.$

756 (807). $x^6 - 19x^3 - 216 = 0.$

757 (808). $8x^6 + 65x^3 + 8 = 0.$

758 (809). $7x^3 - \frac{1890}{x^3} - 119 = 0.$

759 (810). $x^8 - 97x^4 + 1296 = 0.$



## § XI. — Ecuaciones simultáneas de 2° grado.

(Limitarse a la investigación de las raíces reales.)

760 (811). Resolver los sistemas de ecuaciones siguientes.

1° $\left\{\begin{aligned} x + y &= 20 \\ xy &= 64 \end{aligned}\right.$

2° $\left\{\begin{aligned} x - y &= 9 \\ xy &= 90 \end{aligned}\right.$

3° $\left\{\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 625 \\ x + y &= 35 \end{aligned}\right.$

4° $\left\{\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 164 \\ x - y &= 2 \end{aligned}\right.$

5° $\left\{\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 85 \\ x - y &= 5 \end{aligned}\right.$

6° $\left\{\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 208 \\ xy &= 96 \end{aligned}\right.$

7° $\left\{\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 55 \\ xy &= 24. \end{aligned}\right.$

761 (812). Resolver los sistemas siguientes :

1° $\left\{\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 20 \\ \frac{x}{y} &= 2 \end{aligned}\right.$

2° $\left\{\begin{aligned} x + y &= 2{,}5 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &= 4{,}25 \end{aligned}\right.$

3° $\left\{\begin{aligned} x^2 + y^2 + x + y &= 62 \\ x^2 - y^2 + x - y &= 50 \end{aligned}\right.$

762 (813). Resolver el sistema de ecuaciones :

$$(7 + x)(6 + y) = 80$$
$$x + y = 5.$$

763 (814). Resolver el sistema de ecuaciones :

$$2xy - 3y - 3 = 0$$
$$y^2 - 4xy + 15 = 0.$$

764 (815). Resolver el sistema :

$$x^2 + 4xy - 5y^2 + 12x + 92 = 0$$
$$8x - y = 3.$$

765 (816). Resolver el sistema

$$x^2 + y^2 + xy = 52$$
$$x + y = 8.$$

**766** (817). **Resolver el sistema :**

$$x^2 + xy = 10$$
$$y^2 + xy = 15.$$

**767** (818). **Resolver el sistema :**

$$x^2 + y^2 + 6xy = 153$$
$$2x^2 + 2y^2 - 3xy = 36.$$

**768** (819). **Resolver el sistema :**

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{25}{7}$$
$$xy = 48.$$

**769** (820). **Resolver el sistema :**

$$\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2}$$
$$x^2 + y^2 = 90$$

**770** (821). **Resolver el sistema :**

$$x^2 + y^2 = 40$$
$$xy = z$$
$$x + y = 8.$$

**771** (822). **Resolver el sistema :**

$$x^2 - y^2 = 35$$
$$xy = 6$$
$$x + y = z.$$

**772** (823). **Resolver el sistema :**

$$x + y + z = 36$$
$$xy = 108$$
$$x^2 + y^2 = z^2.$$

**773** (824). **Resolver el sistema :**

$$x + y + z = 132$$
$$x^2 = y^2 + z^2$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 6\,050.$$

**774** (825). **Resolver el sistema :**

$$x + y + z = 29$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 289$$
$$xy = 72.$$

## § XII. — Ecuaciones que pueden reducirse al 2° grado con el auxilio de incógnitas auxiliares

**775** (826). **Resolver la ecuación :**

$$x^2 + x + 1 = \frac{42}{x^2 + x}.$$



**776** (827). **Resolver**

$$5x\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x^3} = 296.$$

**777** (828). **Resolver**

$$4\sqrt[3]{x} - \frac{20}{\sqrt[3]{x}} = 11.$$

**778** (829). **Resolver**

$$\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15.$$

**779** (830). **Resolver**

$$5\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} = 33.$$

**780** (831). **Resolver**

$$3\sqrt{1+x} - 2\sqrt[4]{1+x} = 8.$$

**781** (832). **Resolver**

$$3x + \sqrt{6x + 10} = 35.$$

**782** (833). **Resolver**

$$\frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{2} = \frac{12 - \sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}.$$

**783** (834). **Resolver**

$$(x^4 + x^2 + 1)^2 - 38\,(x^4 + x^2 + 1) + 105 = 0$$

**784** (835). **Resolver**

$$(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2\,(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0.$$

**785** (836). **Resolver el sistema :**

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 11$$
$$x + y = 73.$$

**786** (837). **Resolver el sistema :**

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 41$$
$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 901.$$

**787** (838). **Resolver el sistema :**

$$x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{3}{5}} = 35$$
$$x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{5}} = 5.$$

**798** (839). **Resolver el sistema :**

$$x^2y - xy^2 = 30$$
$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{2}{15}.$$

**789** (840). Resolver el sistema :

$$xy(x+y)=30$$
$$x^3+y^3=35.$$

**790** (841). Resolver el sistema :

$$x+y=16+\sqrt{4xy}$$
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=8.$$

**791** (842). Resolver el sistema :

$$x^2+y^2-(x+y)=48$$
$$x+y+xy=31.$$

**792** (843). Resolver el sistema :

$$x(x+y)+y(x-y)=158$$
$$7x(x+y)=72y(x-y).$$

**793** (844). Resolver el sistema :

$$x^4+y^4=272$$
$$x+y=6.$$

**794** (845). Resolver el sistema :

$$x^5-y^5=2\,882$$
$$x-y=2.$$

**795** (846). Resolver el sistema :

$$2x^2+3xy+y^2=70$$
$$6x^2+xy-y^2=50.$$

**796** (847). Resolver el sistema :

$$x^2y^2+xy=a$$
$$x+y=b.$$

**797** (848). Resolver el sistema :

$$\frac{1}{2}(x+y)=\sqrt{mx}+\sqrt{ny}=m+n.$$

**798** (849). Resolver el sistema :

$$(x-y)(x^2-y^2)=160$$
$$(x+y)(x^2+y^2)=580.$$

**799.** (850). Resolver el sistema :

$$x^3+y^3+x^2y+xy^2=32$$
$$x^4y^2+x^2y^4=128.$$

## § XIII. — Problemas con una incógnita.

**800** (851). ¿Cuál es el número que, multiplicado por $3\frac{1}{3}$, da un producto igual al noveno de su cuadrado más 25?



**801** (852). ¿Por qué número debe dividirse 96 para que el cociente exceda 4 al divisor?

**802** (853). El producto de los dos términos de una fracción es 120; los dos términos serían iguales si se le quitara 1 al denominador para añadirlo al numerador. ¿Cuál es esta fracción?

**803** (854). ¿Cuál es el número cuyos $\frac{3}{4}$ más 1, multiplicados por sus $\frac{4}{5}$ menos 15, dan 16 por producto?

**804** (855). Un comerciante vendió un mueble en 39 pesos, ganando en la venta tanto por ciento cuanto le costó el mueble. ¿Cuál era el precio del mueble?

**805** (856). Hallar dos números impares consecutivos tales que la diferencia de sus cuadrados sea 8 000.

**806** (857). Tres números son entre sí como 3, 2 y 5, y la suma de sus cuadrados es igual a 342 : encontrar estos números.

**807** (858). Se piden tres números enteros consecutivos tales que su producto sea igual a 5 veces su suma.

**808** (859). Dividir el número 12 en dos partes tales que la mayor sea media proporcional entre el número entero y la parte menor. Calcular con 0,001 de aproximación.

**809** (860). ¿Cuál es el número que aumentando 6 veces su raíz cuadrada se convierte en 135?

**810** (861). La edad de un niño será dentro de 3 años un cuadrado perfecto, y hace 3 años que su edad era precisamente la raíz de este mismo cuadrado. ¿Qué edad tiene?

**811** (862). Hallar tres números enteros consecutivos tales que el cubo del mayor sea igual a tres veces la suma de los cubos de los otros dos.

**812** (863). Un rentista había colocado 20 000 pesos a cierto tanto, y deja el capital durante cinco años. Después de este tiempo, retira su capital y los intereses simples e impone todo a un tanto inferior en 1 peso al primero, y retira anualmente 1 300 pesos de interés. Encontrar el tanto por ciento.

**813** (864). Quince personas, entre hombres y mujeres, comen en una fonda; los hombres gastan 36 pesos y las mujeres también. Encontrar el número de hombres y su gasto individual, sabiendo que cada mujer ha gastado 2 pesos menos que un hombre.

**814** (865). Debe distribuirse una suma de 400 pesos entre cierto número de personas por partes iguales; pero en el momento de la partición se retiran cuatro, lo que aumenta 5 pesos la parte de los otros. ¿Cuántos eran al principio los compartientes?

**815** (866). Un hacendado compra carneros en 150 pesos; los guarda 3 meses y pierde 5 por enfermedad y vende cada uno de los otros $ 1,20 más de lo que le costaron. En esta operación pierde 6 pesos. Encontrar el número de carneros y su precio.

**816** (867). Dos correos parten al mismo tiempo para una ciudad situada a 90 leguas del punto de partida. El primero que anda una legua por hora más que el segundo, llega al lugar designado una hora antes que el otro. ¿Cuál es la velocidad de cada correo?

**817** (868). Dos correos parten de dos ciudades situadas a 320 kilómetros, yendo al encuentro uno del otro; el primero recorre cada día 8 kilómetros más que el segundo, y el número de días durante los cuales viajan está representado por la mitad del número de kilómetros que el segundo camina en un día. ¿Cuál es la distancia recorrida por cada uno antes del encuentro?

**818** (869). ¿A cuántos días era pagadera una letra de 1 200 pesos, sabiendo que, descontada al 6 %, da un peso de diferencia entre su descuento externo y su descuento interno?

**819** (870). ¿En qué sistema de numeración el número 254 (base 10) se escribe 512?

**820** (871). ¿En qué sistema de numeración el número 1902 (base 10) se escribe 30 102?

**821** (872). Dos viajeros parten al mismo tiempo de Iguala y de Chilpancingo. En el momento de encontrarse, el primero ha caminado 12 kilómetros más que el segundo. Por otra parte, conservando la misma velocidad, llegan el uno a Chilpancingo 4 horas 2/3 después del encuentro, y el otro a Iguala 7 horas $\frac{5}{7}$ después del encuentro. ¿Cuál es la distancia entre las dos ciudades?

**822** (873). Se ha comprado cierto número de metros de género en una suma $m$ : si cada metro hubiera costado $a$ pesos menos, se hubieran tenido con la misma suma $b$ metros más. ¿Cuántos metros se compraron, y cuál es el precio del metro? — Discutir.

**823** (874). Un cuerpo es lanzado verticalmente en el vacío con una velocicidad inicial $a$. ¿Dentro de qué tiempo estará á la altura $h$?

**824** (875). Calcular la profundidad de un pozo, sabiendo que ha transcurrido un número $t$ de segundos entre el instante en que se ha dejado caer una piedra y el instante en que el ruido que produce al tocar el fondo ha llegado al oído. (Se hace abstracción de la resistencia del aire.)

## § XIV. — Problemas con varias incógnitas.

**825** (876). Dividir 27 en dos partes tales que 4 veces el cuadrado de la primera y 5 veces el cuadrado de la segunda valgan 1620.



**826** (877). Dividir 10 en dos partes cuyos cuadrados sean proporcionales a 13 y á 7. Calcular con 0,001 de aproximación.

**827** (878). Las razones directa é inversa de dos números tienen por suma 2,05; los mismos dos números suman 63. ¿Cuáles son estos dos números?

**828** (879). Un número está compuesto de dos cifras; si se le agrega 9 se encuentra el mismo número invertido, y si se divide el número por el producto de las dos cifras, se tiene 6 por cociente : encontrar este número.

**829** (880). Dos manantiales corriendo juntos pueden llenar un depósito en 2 horas 24 minutos : encontrar el tiempo que tardaría cada uno de ellos, sabiendo que el segundo, corriendo solo, tarda dos horas menos que el primero.

**830** (881). Dos manantiales pueden llenar un depósito en 18 horas : encontrar el tiempo que tardará cada uno de ellos, sabiendo que el primero, corriendo solo, emplearía 27 horas más que el segundo.

**831** (882). Dos obreros emplean 25 horas, si trabajan separadamente, para hacer cada uno la mitad de una obra; pero si trabajan juntos, no emplean más que 12 horas en hacerla completa : encontrar el tiempo que emplearían separadamente para ejecutar el trabajo.

**832** (883). Dos obreros reciben el uno 16 pesos y el otro 9 pesos; el primero ha trabajado cinco días más que el otro. Si cada uno hubiera trabajado el número de días que ha trabajado el otro, hubieran recibido la misma suma : se pregunta el número de días de trabajo de cada obrero y el precio de su jornal.

**833** (884). Una pieza de género ha sido vendida en 360 pesos; el comprador al recibirla averigua que, por equivocación, le han entregado una pieza que vale $ 0,50 menos por metro, pero que en compensación, contiene 15 metros más que la que esperaba. Se decide a guardarla, y se pregunta cuántos metros contenía esta pieza, y cuál era el precio del metro.

**834** (885). Dos socios han hecho un fondo común de 2 000 pesos; el primero ha dejado su imposición durante 2 meses, el segundo ha dejado la suya durante 8 meses. El primero ha recibido 1 800 pesos tanto por la ganancia como por la imposición, mientras que el segundo no ha recibido más que 900 pesos : encontrar la ganancia y la imposición de cada uno.

**835** (886). Dos capitales están prestados a tantos diferentes. La suma de estos dos capitales es de 60 000 pesos, la suma de los tantos es 12. El primer capital produce 1 320 pesos y el segundo 2 340 pesos al año. Determinar estos dos capitales.

**836** (887). Dos capitales están prestados a tantos diferentes; el primer capital, que produce 500 pesos al año, excede en 4 000 pesos al segundo capital que produce 390 pesos; pero el tanto de este último excede en 3/2 al tanto del primero. Determinar estos capitales.

**837** (888). Dos capitales diferentes están prestados al 6 °/° y valen juntos 30 000 pesos; el primero, que ha permanecido impuesto cuatro meses más, ha producido 1 280 pesos, y el segundo 840 pesos. Determinar estos dos capitales.

**838** (889). En una proporción, los dos primeros términos son entre sí como 2 es á 3, y el producto de los cuatro términos es igual á 81 veces el cuadrado del primero. Determinar los dos últimos términos.

**839** (890). Hallar cuatro números en proporción, conociendo la suma de sus cuadrados, 62,5, sabiendo además que el primero excede al segundo en 4, y que el tercero excede al cuarto en 3.

**840** (891). En una proporción continua, la suma de los tres términos es 28, la diferencia entre los dos primeros términos es 8. Determinar esta proporción.

**841** (892). Calcular los términos de una proporción continua, conociendo la suma 15 de los dos primeros términos, y la suma 13 del primero y del último.

**842** (893). En una proporción, la diferencia de los dos primeros términos es 6; la de los dos últimos es 5; la suma de los cuadrados de los cuatro términos es 793 : encontrar esta proporción.

**843** (894). En una proporción, la suma de los antecedentes es 12, la de los consecuentes 9; y la diferencia entre la suma de los cuadrados de los tres primeros términos y el cuadrado del cuarto es 107 : encontrar los cuatro términos.

**844** (895). Encóntrar los cuatro términos de una proporción, conociendo la suma 130 de sus cuadrados, y los productos 6, 12, 18 del primer término por cada uno de los otros tres.

**845** (896). Determinar los cuatro términos de una proporción conociendo la suma $s$ de los cuatro términos, la suma $a$ de los extremos, y la diferencia $d$ de los medios.

**846** (897). Encontrar dos números tales que su suma sea a su producto como 2 es á 3, y que la suma de sus cuadrados sea el quintuplo de la suma de los números.

**847** (898). Encontrar un número de dos cifras, sabiendo que la suma de los cuadrados de estas dos cifras es igual al número aumentado con el producto de estas mismas cifras, y que además, si se agrega 36 al número, se obtiene el número invertido.

**848** (899). Encontrar un número de dos cifras tal que dividiéndolo por la suma de las cifras, luego invirtiendo el número y dividiendo aún por la suma de las cifras, la diferencia de los dos cocientes sea igual a la diferencia de las dos cifras y el producto de estos dos cocientes igual al número mismo.

**849** (900). Encontrar dos números, sabiendo que su suma, su producto y la diferencia de sus cuadrados son iguales entre sí.



## § XV. — Trinomio de segundo grado y desigualdades.

**850** (741). ¿Para qué valores de $x$ los trinomios siguientes serán positivos, nulos o negativos?

1° $2x^2 - 16x + 24$
2° $-2x^2 + 16x - 24$
3° $2x^2 - 16x + 32$
4° $-2x^2 + 16x - 32$
5° $2x^2 - 16x + 40$
6° $-2x^2 + 16x - 40.$

**851** (742). Determinar en qué intervalos de la serie de los números

$$-2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2$$

se encuentran las raíces de la ecuación $8x^2 + 2x - 15 = 0$, sin resolver la ecuación.

**852** (743). Dada la ecuación $7x^2 - 61x + 40 = 0$, se quiere determinar el lugar de los números $\frac{3}{8}$, 2, 7, 9 con relación a las raíces, sin resolver la ecuación.

**853** (744). Encontrar los valores de $x$ que satisfagan a la desigualdad $x^2 > 4$.

**854** (745). Resolver la desigualdad

$$7x^2 < 3x.$$

**855** (746). Resolver la desigualdad

$$(x-a)(x-b)(x-c) > 0.$$

**856** (747). Resolver la desigualdad

$$(x-a)(x-b)(x-c) < 0.$$

**857** (748). ¿Hay valores de $x$ que verifiquen la desigualdad

$$x^2 - 6x + 5 < 0?$$

**858** (749). La misma cuestión para

$$-x^2 + 6x - 9 > 0.$$

**859** (750). La misma cuestión para

$$x^2 - 3x + 7 > 0.$$

**860** (751). ¿Qué valores de $x$ verifican simultáneamente las dos relaciones

$$x^2 + x - 6 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + 3x - 4 > 0?$$

**861** (752). ¿Existen valores de $x$ que verifiquen simultáneamente las desigualdades

$$x^2 - 12x + 32 > 0 \quad \text{y} \quad x^2 - 13x + 22 < 0.$$

**862** (753). La misma cuestión para

$$5x^2 - 7x + 1 < 0 \quad \text{y} \quad x^2 - 9x + 30 < 0.$$

**863** (754). ¿Cuáles son los valores de $x$ que verifican la desigualdad

$$4x^3 - 10x^2 + 48x < 0.$$

**864** (755). La misma cuestión para

$$3x^3 - 12x^2 + 9x > 0.$$

**865** (756). ¿Existen valores de $x$ que puedan verificar simultáneamente las desigualdades

$$3x^3 - 5x^2 + 2x > 0 \quad \text{y} \quad x^3 - x^2 + 4x < 0?$$

**866** (757). La misma cuestión para

$$x^3 - 11x^2 + 10x < 0 \quad \text{y} \quad x^3 - 12x^2 + 32x > 0.$$

**867** (758). ¿Qué valores es preciso dar á $x$ para satisfacer a la desigualdad

$$3 + \frac{1}{x-1} > \frac{1}{2x+1}?$$

**868** (759). ¿Cuál es la condición de realidad de las raices de la ecuación

$$(a^2 + b^2)\, x^2 - 2acx - b^2 + c^2 = 0?$$

**869.** En la ecuación $mx^2 + (m-1)\,x + 2m = 0$, ¿cuál es el limite de los valores de $m$ para que las raices sean reales?

## LIBRO IV

### § I. — Análisis combinatorio.

**870.** Número de ordenaciones de 7 objetos de 3 en 3.
**871.** Número de ordenaciones de 12 objetos de 4 en 4.
**872.** Formar las ordenaciones de 3 en 3 de las letras $a, b, c, d, e$.
**873.** Número de permutaciones de 6 objetos.
**874.** Número de combinaciones de 20 objetos de 5 en 5.
**875.** Entre las combinaciones de 20 objetos de 5 en 5, ¿cuántas veces entra el primero?
**876.** Entre las permutaciones de las letras $a, b, c, d$, ¿cuántas principian por $a$?
**877.** Entre las ordenaciones de $a, b, c, d, e$ de 3 en 3, ¿cuántas contienen $a$?

### § II. — Binomio.

Escribir inmediatamente el desarrollo de los binomios siguientes :

**878.** $(a + b)^5$.



**879.** $(a - b)^7$.
**880.** $(a - 1)^4$.
**881.** $(x + 1)^9$.
**882.** $(2a + 4b)^3$.
**883.** $(4a - 1)^6$.
**884.** Hallar el término medio del desarrollo

$$(a + b)^{12}.$$

**885.** Hallar el desarrollo de $(a + b)^m + (a - b)^m$.

**886.** Desarrollo de $(1 + x)^{\frac{1}{2}}$.

**887.** Desarrollo de $(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$.

**888.** Desarrollo de $(1 + x)^{\frac{5}{7}}$.

**889.** Desarrollo de $(1 + x)^{\frac{1}{3}}$.

**890.** Desarrollo de $(1 - x^2)^{\frac{1}{3}}$.

**891.** Desarrollo de $(1 + x)^{\frac{3}{4}}$.

**892.** Desarrollo de $(1 + x^2)^{\frac{2}{3}}$.

**893.** Desarrollo de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

**894.** Desarrollo de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

**895.** Desarrollo de $(1 - x)^{-\frac{2}{3}}$.

**896.** Desarrollo de $(a + x)^{\frac{1}{2}}$.

**897.** Desarrollo de $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

**898.** Calcular $\sqrt{1{,}001}$ con $\dfrac{1}{1\,000\,000}$ de aproximación.

**899.** Calcular $\sqrt{4{,}16}$ con $\dfrac{1}{1\,000}$ de aproximación.

**900.** Calcular $\sqrt[3]{27{,}027}$ con $\dfrac{1}{10\,000}$ de aproximación.

## LIBRO V

### § I. — Progresiones aritméticas.

**901** (1001). Conociendo $a$, $l$, $r$, determinar $n$ y S. Aplicación : $a = 23$, $l = 5$, $r = -2$.

**902** (1002). Conociendo $a$, $r$, $n$, determinar $l$ y S. Aplicación : $a = 3$, $r = 2$, $n = 13$.

**903** (1003). Conociendo $a$, $l$, $n$, determinar $r$ y S. Aplicación : $a = 95$, $n = 19$, $l = 5$.

**904** (1004). Conociendo $a$, $l$, $s$, determinar $r$ y $n$. Aplicación $a = 3$, $l = 39$, $S = 210$.

**905** (1005). Conociendo $l$, $n$, S, determinar $a$ y $r$. Aplicación : $l = 199$, $n = 100$, $S = 10\,000$.

**906** (1006). Conociendo $a$, $r$, S, determinar $l$ y $n$. Aplicación : $a = 3$, $r = 2$, $S = 120$.

**907** (1007). Conociendo $l$, $r$, S, determinar $a$ y $n$. Aplicación : $l = 18$, $r = 2$, $S = 88$.

**908** (1008). Encontrar 1° la suma de los 40 primeros múltiplos de 3; 2° la suma de los 20 primeros múltiplos de 3 que siguen al número 60.

**909** (1009). ¿Cuántas campanadas da un reloj en 24 horas, si no suena más que a las horas?

**910** (1010). Encontrar los tres ángulos de un triángulo rectángulo, sabiendo que estos ángulos están en progresión aritmética.

**911** (1011). Un cuerpo que cae recorre $4^m,9$ durante el primer segundo de su caída, y en cada segundo el espacio recorrido excede en $9^m,8$ al recorrido durante el segundo anterior. Se pregunta : 1° lo que el cuerpo recorre durante el décimo segundo de su caída; 2° el espacio recorrido durante los 10 segundos.

**912** (1012). Un vagón se desprende de un tren que sube una pendiente, recorre durante el primer segundo $0^m,30$; durante el segundo $3 \times 0,30$; durante el tercero $5 \times 0,30$; durante el cuarto $7 \times 0,30$; ¿cuánto recorre por un minuto que dura su descenso?

**913** (1013). Un peón debe depositar una carretilla de arena al pie de cada uno de los 30 árboles que están de un lado de una calzada; los árboles están a 6 metros de distancia, y el montón de arena está a 10 metros antes del primer árbol. ¿Qué camino habrá recorrido después de haber terminado su trabajo y vuelto la carretilla al montón de arena?

**914** (1014). Se sabe que el 2° y el 7° término de una progresión aritmética dan por suma 92, que el 4° con el 11° suman 71. ¿Cuáles son estos cuatro términos.

**915** (1015). La suma de los cuatro términos del centro de una progresión aritmética de 12 términos es 74; el producto de los extremos es 70. ¿Cuál es la progresión?

**916** (1016). En una progresión aritmética de 11 términos, la suma de los términos es 176; la diferencia de los extremos es 30. ¿Cuál es la progresión?

**917** (1017). La suma de tres términos en progresión aritmética es 33, su producto es igual a 1287. ¿Cuales son estos tres números?



**918** (1018). Hallar tres números en progresión aritmética conociendo su suma $s$ y la suma $b^2$ de sus cuadrados.

**919** (1019). Hallar 4 números en progresión aritmética, conociendo su suma 22 y la suma 166 de sus cuadrados.

**920** (1020). La razón de una progresión aritmética de 4 términos es 4, el producto de los 4 términos es 585. ¿Cuál es la progresión?

**921** (1021). Tres números en progresión aritmética dan por producto 16640; el menor es 20, ¿cuáles son los otros dos?

**922** (1022). El producto de 5 números en progresión por diferencia es 12 320 y su suma 40. ¿Cuáles son estos cinco números?

**923** (1023). Hallar 5 números en progresión aritmética, conociendo su suma $s$ y su producto $p$.

**924** (1024). La suma de 5 números en progresión por diferencia es 45, la de sus inversas es $\frac{137}{180}$. ¿Cuáles son estos 5 números?

**925** (1025). Hallar 4 números en progresión aritmética, conociendo su suma 20 y la suma $\frac{25}{24}$ de sus inversas.

**926** (1026). Un coronel que manda 3 003 hombres quiere formar sus soldados en triángulo de manera que la primera fila tenga 1 soldado, la segunda 2, la tercera 3, y así sucesivamente. ¿Cuántas filas habrá?

**927** (1027). Verificar que los cuadrados de las cantidades $x^2 - 2x - 1$, $x^2 + 1$ y $x^2 + 2x - 1$ están en progresión aritmética.

**928** (1028). Se pide el $n^{mo}$ término y la suma de los términos de la serie :

$$1,\quad \frac{n-1}{n},\quad \frac{n-2}{n},\quad \frac{n-3}{n}\dots$$

**929** (1029). Encontrar el $n^{mo}$ término y la suma de los $n$ términos de la serie :

$$\frac{n^2-1}{n},\qquad n,\qquad \frac{n^2+1}{n},\qquad \frac{n^2+2}{n}\dots$$

**930** (1030). Calcular la suma de los cuadrados y la suma de los cubos de los $n$ primeros números. — Más generalmente calcular la suma de los cuadrados y la suma de los cubos de los términos de una progresión aritmética.

## § II. — Progresiones geométricas.

**931** (1031). Conociendo el primer término $a = 2$, la razón $q = 3$ y el número de términos $n = 5$, encontrar el último término $l$ y la suma S de todos los términos.

**932** (1032). Conociendo $l = 1280$, $a = 5$ y $n = 9$, encontrar la razón q y la suma de los términos S.

**933** (1033). Conociendo $l = 384$, $q = 2$, $n = 8$, encontrar $a$ y S

**934** (1034). Conociendo $q = \frac{1}{4}$, $n = 6$ y $S = 2730$, encontrar $a$ y $l$.

**935** (1035). Interpolar : 1° dos medios proporcionales entre 161 y 4 347; 2° tres medios proporcionales entre 3 y 243; y 3° cuatro medios proporcionales entre 243 y 1.

**936** (1036). Encontrar el límite de la suma de los términos al infinito :

$$1^\circ \quad 8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots.$$

$$2^\circ \quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots.$$

$$3^\circ \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \ldots.$$

**937** (1037). Encontrar el límite de la serie : $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} \ldots.$ cuyos numeradores están en progresión aritmética y los denominadores en progresión geométrica.

**938** (1038). Encontrar la suma de los términos al infinito de la progresión :

$$\frac{\sqrt{2+1}}{\sqrt{2-1}} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \ldots.$$

**939** (1039). Encontrar la suma al infinito de los términos de :

$$1^\circ \quad a^n + ba^{n-1} + b^2a^{n-2} + \ldots..$$

$$2^\circ \quad a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \ldots.$$

**940** (1040). Hallar para $n > x$ la suma al infinito de los términos de la serie :

$$\frac{m}{n} - \frac{(m-n)x}{n} + \frac{(m-n)x^2}{n^2} - \frac{(m-n)x^3}{n^3} + \frac{(m-n)x^4}{n^4} - \ldots.$$

**941** (1041). En un cuadrado cuyo lado es $a$ se unen los medios de los cuatro lados y se forma otro cuadrado cuyos medios se unen también para formar un nuevo cuadrado y así sucesivamente : encontrar el límite de la suma de las áreas de todos los cuadrados así formados.

**942** (1042). ¿Qué límite se obtendría haciendo las mismas construcciones en un triángulo equilátero cuyo lado es $a$? ¿cuál sería el límite de la suma de las áreas de los círculos inscritos y de los círculos circunscritos á estos triángulos?

**943** (1043). En un círculo de radio R se inscribe un cuadrado, en este cuadrado se inscribe un círculo, en éste otro cuadrado y así indefinidamente. Se quiere saber : 1° el límite de la suma de las áreas de los círculos; 2° el límite de la suma de las áreas de los cuadrados.



**944** (1044). El émbolo de una máquina neumática se mueve en un cilindro cuya capacidad es los $\frac{2}{5}$ de la del recipiente : se pregunta qué fracción del aire primitivo permanecerá en el recipiente después de $n$ golpes de émbolo.

**945** (1045). La suma al infinito de los términos de una progresión geométrica es 6, la suma de los dos primeros términos es $4\frac{1}{2}$; encontrar la progresión.

**946** (1046). Encontrar los cuatro ángulos de un cuadrilátero, sabiendo que estos ángulos están en progresión geométrica y que el último es igual a 9 veces el segundo.

**947** (1047). Dividir el número 221 en tres partes que formen una progresión geométrica tal que el tercer término exceda al primero en 136.

**948** (1048). La suma de los tres términos de una progresión geométrica es 248 y la diferencia de los términos extremos 192. ¿Cuáles son estos tres términos?

**949** (1049). Hallar cuatro números en progresión geométrica tales que la suma de los dos primeros sea 28 y la de los dos últimos 175.

**950** (1050). Calcular los cuatro términos de una progresión geométrica, sabiendo que el segundo excede al primero en 4, que el 4° excede al tercero en 36 y finalmente que la suma de los cuadrados de los cuatro términos es 3 280.

**951** (1051). Suponiendo que una suma colocada a interés compuesto se haya duplicado cada 15 años, se pregunta el valor en 1890 de un peso colocado el año de 1 500.

**952** (1052). El volumen de un paralelipípedo rectángulo es 3 375 centímetros cúbicos. Encontrar la longitud de sus aristas, sabiendo que están en progresión geométrica y que su suma es 65.

**953** (1053). Hallar 3 números en progresión geométrica, conociendo su suma 26 y el exceso 10 del mayor sobre la suma de los otros dos.

**954** (1054). Una progresión geométrica tiene 5 términos, la razón es igual al cuarto del primer término, y la suma de los dos primeros es 24 : encontrar los 5 términos.

**955** (1055). Una progresión geométrica tiene 6 términos, la razón es igual al primer término con signo contrario y la diferencia de los dos primeros términos es 42 : encontrar la suma de los términos.

**956** (1056). Determinar una progresión de 7 términos conociendo la suma 26 de los tres primeros y la suma 2 106 de los tres últimos.

**957** (1057). En una progresión de 7 términos, la suma de los 6 últimos términos es doble de la suma de los 6 primeros; sabiendo que esta última es 157 1/2, determinar la progresión.

**958** (1058). La suma de los términos de una progresión geométrica de 5 términos es 484; la de los términos de orden par es igual 120. Determinar la progresión.

**959** (1059). En una progresión geométrica de 6 términos, se da la suma $a$ de los dos extremos y la suma $b$ de los medios. Determinar la progresión.

**960** (1060). Asaphad, historiador árabe, cuenta que Sessa presentó el juego de ajedréz, que acababa de inventar, a Scheran, principe de la India; éste le preguntó qué quería en recompensa; Sessa respondió : "Que Vuestra Majestad se digne darme 1 grano de trigo por la primera casilla del ajedrez, 2 por la segunda, 4 por la tercera y así sucesivamente, doblando siempre hasta la 64ª casilla ". Admirado de la modestia del inventor, ordenó el príncipe a sus ministros que le pagasen al instante. — Se pregunta : 1° ¿Cuántos granos de trigo se le debían entregar? 2° ¿Qué superficie sería preciso sembrar para cosechar este trigo, sabiendo que la hectárea produce 25 hectolitros y que el hectolitro contiene próximamente 2 000 000 de granos; 3° ¿Cuál es el valor de este trigo á razón de 5 pesos el hectolitro?

# LIBRO VI

## § I. — Ejercicios relativos al uso de las tablas.

**961** (1061). Encontrar los logaritmos de los números siguientes :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1° | 5 436 | 16° | 3 700 200 |
| 2° | 36 954 | 17° | 2 509 067 |
| 3° | 45 876 | 18° | 37 509 450 |
| 4° | 245 872 | 19° | 25,1075 |
| 5° | 5 278 429 | 20° | 3,162 95 |
| 6° | 883,70 | 21° | 0,263 05 |
| 7° | 103,555 | 22° | 0,789 6952 |
| 8° | 6 709,25 | 23° | 0,059 755 |
| 9° | 10 857,9 | 24° | 0,046 78296 |
| 10° | 84 357,25 | 25° | 0,002 578 |
| 11° | 9 758,496 | 26° | 0,001 8865 |
| 12° | 123,450 8 | 27° | 0,007 180457 |
| 13° | 23,475 38 | 28° | 0,000 16585 |
| 14° | 6,365 423 | 29° | 0,000 77113 |
| 15° | 508 090 | 30° | 0,000 1528907 |



**962** (1062). Encontrar los números correspondientes á los logaritmos siguientes :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1° | 3,570 1225 | 16° | 6,535 0125 |
| 2° | 4,579 2461 | 17° | 7,796 5022 |
| 3° | 5,135 0987 | 18° | 0,086 5127 |
| 4° | 6,987 1245 | 19° | 0,534 6930 |
| 5° | 7,678 0056 | 20° | $\bar{1}$,365 7296 |
| 6° | 6,883 9437 | 21° | $\bar{1}$,450 5099 |
| 7° | 5,828 2893 | 22° | $\bar{2}$,343 7105 |
| 8° | 2,007 1295 | 23° | $\bar{2}$,429 3782 |
| 9° | 1,892 3752 | 24° | $\bar{3}$,125 3680 |
| 10° | 0,345 7601 | 25° | $\bar{3}$,784 6058 |
| 11° | 1,456 1234 | 26° | $\bar{4}$,684 5624 |
| 12° | 2,733 2381 | 27° | $\bar{1}$,516 2489 |
| 13° | 3,887 0282 | 28° | $\bar{2}$,275 4689 |
| 14° | 4,567 3382 | 29° | $\bar{3}$,357 6158 |
| 15° | 5,448 4644 | 30° | $\bar{4}$,445 5502 |

**963** (1063). Calcular los logaritmos de las expresiones siguientes :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1° | $\frac{17}{6}$ | 4° | $\frac{3}{7}$ |
| 2° | $\frac{13}{16}$ | 5° | $\frac{17}{9}$ |
| 3° | $\frac{2}{3}$ | 6° | $\frac{5}{7}$ |

## § II. — Ejercicios de cálculo logarítmico.

**964** (1064). Desarollar las expresiones siguientes :

$$1^\circ \log\frac{abc}{de};\quad 2^\circ \log\frac{1}{ab};\quad 3^\circ \log\left(\frac{ab}{c}\right)^p$$

$$4^\circ \log\sqrt[n]{\frac{a^m}{bc^p}};\quad 5^\circ \log\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

**965** (1065). Calcular $x = ab$, sabiendo que :

$$\log a = 0{,}838\,8491,\quad \log b = \bar{1}{,}534\,0517$$

**966** (1066). Calcular $x = \frac{abc}{d}$, sabiendo que :

$$\log a = 3{,}273\,0013,\quad \log b = \bar{1}{,}995\,7528,\quad \log c = \bar{1}{,}984\,9438$$
$$\log d = \bar{1}{,}591\,8780.$$

**967** (1067). Calcular las potencias siguientes :

$$1^\circ\ 5^{10};\quad 2^\circ\ (0{,}4326)^3;\quad 3^\circ\ (0{,}986\,542)^{15}$$
$$4^\circ\ (3845{,}176)^{10};\quad 5^\circ\ (648{,}9517)^{12}.$$

**968** (1068). Calcular las raíces siguientes :

$$1^\circ\ \sqrt[3]{12};\quad 2^\circ\ \sqrt[3]{267};\quad 3^\circ\ \sqrt[3]{5{,}8};\quad 4^\circ\ \sqrt[3]{17};\quad \sqrt[5]{0{,}2}.$$

**969** (1069). Calcular las raíces siguientes :

$$1^\circ\ \sqrt[5]{0{,}07776};\quad 2^\circ\ \sqrt[7]{0{,}0002187};\quad 3^\circ\ \sqrt[5]{\frac{13}{16}}.$$
$$4^\circ\ \sqrt[10]{0{,}071\,52684};\quad 5^\circ\ \sqrt[18]{9{,}8172\,54}.$$

**970** (1070). Calcular por logaritmos el producto :

$$x = 875{,}6348 \times 62{,}82407.$$

**971** (1071). Calcular la expresión :

$$x = \frac{236{,}39 \times 127{,}46}{564{,}87}.$$

**972** (1072). Calcular la expresión :

$$x = \frac{248{,}9762 \times 2{,}728\,45}{1830{,}427}.$$

**973** (1073). Calcular la expresión :

$$x = \frac{(0{,}975\,1468)^8}{1572{,}369}.$$

**974** (1074). Calcular :

$$x = \sqrt[5]{\frac{0{,}5142}{375}}.$$

**975** (1075). Calcular : $x = \left(\frac{2}{37}\right)^5.$

**976** (1076). Calcular la expresión :

$$x = \frac{\sqrt[15]{25{,}36496}}{(0{,}089\,3462)^8}.$$

**977** (1077). Calcular la expresión :

$$x = \frac{(45{,}37284)^{10}}{\sqrt[3]{0{,}000\,5462\,379}}.$$

**978** (1078). Calcular :

$$x = \frac{(5173{,}841)^5}{(0{,}04152837)^9}.$$

**979** (1079). Calcular :

$$x = \frac{\sqrt[7]{(36\,926{,}5)^3} \times \sqrt[5]{2629}}{\sqrt[3]{(6258{,}96)^2}}.$$



**980** (1080). Calcular :

$$x = \sqrt[157]{\left(\frac{829}{828}\right)^{351}}$$

## § III. — Cuestiones para resolver por logaritmos.

**981** (1081). Conociendo el primer término 4, el último 4096 y la suma 5460 de los términos de una progresión geométrica, encontrar el número de términos y la razón.

**982** (1082). Conociendo el primer término 3, la razón 2 y la suma 765 de una progresión geométrica, encontrar el último término y el número de términos.

**983** (1083). Conociendo el último término 162, la razón 3 y la suma de los términos 242 de una progresión geométrica, encontrar el primer término y el número de términos.

**984** (1084). Conociendo el primer término 6, la razón 2 y el último término 192 de una progresión geométrica, encontrar la suma de los términos y el número de términos.

**985** (1085). Interpolar 14 medios proporcionales entre 3 y 98304.

**986** (1086). Interpolar 8 medios proporcionales entre 12 y 23437500.

**987** (1087). Calcular la arista de un cubo que tiene por volumen : 1° $0^{m3},478928$; 2° $0^{m3},054327$.

**988** (1088). Calcular : 1° la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es 2,51075 y 2° la superficie lateral del cilindro que tenga este círculo por base y una altura de $3^m,6954$.

**989** (1089). Calcular : 1° la superficie de un círculo de $0^m,059755$ de radio y 2° el volumen del cilindro que tenga este círculo por base y una altura de $0^m,45876$.

**990** (1090). ¿Cuál es el volumen de una esfera cuyo radio es igual a 0,7892?

**991** (1091). Calcular las dimensiones del hectolitro, sabiendo que tiene una altura igual a su diámetro.

**992** (1092). Calcular las dimensiones del litro, sabiendo que su altura es doble del diámetro.

**993** (1093). Calcular la altura del péndulo que oscila segundos en París, conociendo $g = 9{,}8088$.

**994** (1094). ¿Cuál es el radio de una esfera cuyo volumen es $199532^{cm3}$?

**995** (1095). Calcular la duración de la caída de un cuerpo en el vacío sin velocidad inicial de una altura de 4810 metros.

**996** (1096). ¿Cuál será el peso de un cono de bronce cuya densidad es $\delta = 9{,}235$, sabiendo que la generatriz y el diámetro de la base son iguales a $1^m,145$?

**997** (1097). ¿Cuál es el radio de una esfera maciza de latón que pesa $3^{kg},785$, sabiendo que la densidad del cobre es $\delta = 8,427$?

**998** (1098). Calcular el peso de un cilindro hueco de plomo, conociendo la altura $h = 0,392$, el diámetro exterior $D = 0,0523$, el diámetro interior $d = 0,0374$ y la densidad del plomo $\delta = 11,352$.

**999** (1099). Calcular : 1° el radio de la tierra; 2° el tiempo que tardaría una piedra que cae en llegar al centro, 3° la velocidad que tendría al llegar á ese punto.

**1000** (1100). Dados los tres lados de un triángulo : $a = 608^m,78$, $b = 1363^m,65$, $c = 949^m,69$, se quiere calcular : 1° la superficie, las tres alturas y el radio del círculo circunscrito; 2° las bisectrices $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, de los ángulos interiores y las bisectrices $\alpha'$, $\beta'$ $\gamma'$, de los ángulos exteriores.

## § IV. — Ecuaciones exponenciales.

### CUESTIONES PARA RESOLVER SIN AYUDA DE LAS TABLAS

**1001** (1101). Resolver la ecuación
$$(a^x)^x = (a^8)^2.$$

**1002** (1102). Resolver
$$(a^x)^2 = (a^x)^x.$$

**1003** (1103). Resolver
$$(a^{b-x})^x = a^x.$$

**1004** (1104). Resolver
$$(4^{3-x})^{2-x} = 1.$$

**1005** (1105). Resolver
$$(10^{5-x})^{6-x} = 100.$$

**1006** (1106). Resolver
$$\sqrt[x]{a} = a^x.$$

**1007** (1107) Resolver
$$100 \times 10^x = \sqrt[x]{1000^5}.$$

**1008** (1108). Resolver
$$2^{x+1} + 4^x = 80.$$

**1009** (1109). Resolver
$$2^x + 4^x = 272.$$

**1010** (1110). Resolver
$$2^{x+3} + 4^{x+1} = 320.$$

**1011** (1111). Resolver
$$3^{x+2} + 9^{x+1} = 810.$$

**1012** (1112). Resolver
$$\log x = \log 24 - \log 8.$$



**1013** (1113). Resolver
$$2 \log x = \log 192 + \log \frac{3}{4}.$$

**1014** (1114), Resolver
$$\log x = 3 \log 18 - 4 \log 12.$$

**1015** (1115). Resolver
$$5 \log x - \log 288 = 3 \log \frac{x}{2}.$$

### CUESTIONES PARA RESOLVER CON AYUDA DE LAS TABLAS

**1016** (1116). Resolver la ecuación
$$3^x = 177147.$$

**1017** (1117). Resolver
$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = 51\frac{1}{2}.$$

**1018** (1118). Resolver
$$3^{\frac{x}{2}} = 768.$$

**1019** (1119). Resolver
$$24^{3x-2} = 10\,000.$$

**1020** (1120). Resolver
$$3^{\sqrt{x}} = 243.$$

**1021** (1121). Resolver
$$5^{x^2-3x} = 625.$$

**1022** (1122). Resolver
$$x^{x^2-7x+12} = 1.$$

**1023** (1123). Resolver
$$7^{x^2-5x+9} = 343.$$

**1024** (1124). Resolver
$$2^{x^2-9x-24} = 4\,096.$$

**1025** (1125). Resolver
$$6^{x^4-18x^2+86} = 7776.$$

**1026.** Resolver
$$2^{x+1} + 4^x = 80.$$

**1027.** Resolver
$$3^x + 9^x = 6642.$$

**1028.** Resolver
$$2^{x+3} + 4^{x+1} = 320.$$

**1029.** Resolver
$$3^{x+2} + 9^{x+1} = 810.$$

**1030** (1130). Resolver
$$5^{2x} - 7 \times 5^x - 450 = 0.$$

**1031** (1131). Resolver

$$7^{2x} - 6 \times 7^x + 5 = 0.$$

**1032** (1132). Resolver

$$5 \times 3^{2x} - 7 \times 3^x - 3\,456 = 0.$$

**1033** (1133). Resolver

$$2 \times 5^x - \frac{779375}{5^x} - 3 = 0.$$

**1034** (1134). Resolver

$$3^{x+1} + 3^{x-2} - \frac{15}{3^{x-1}} = \frac{247}{3^{x-2}}.$$

**1035** (1135). Resolver

$$3^{x+1} - 3^{x-2} - 3^{x-3} + 3^{x-4} = 750.$$

**1036** (1136). Resolver

$$3^{2x} \times 5^{2x-3} = 7^{x-1} \times 4^{x+3}.$$

**1037** (1137). Resolver

$$3 \times 2^{x+3} = 192 \times 3^{x-3}.$$

**1038** (1138). Resolver

$$(a^4 - 2a^2b^2 + b^4)^{x-1} = \frac{(a-b)^{2x}}{(a+b^2}.$$

**1039** (1139). Resolver

$$a \times a^3 \times a^5 \times a^7 \ldots a^{2x-1} = n.$$

*Aplicación* : $a = 2$, $n = 512$; $a = 2$, $n = 65536$.

**1040** (1140). Resolver el sistema de las dos ecuaciones :

$$x + y = 65 \quad \text{y} \quad \log x + \log y = 3.$$

**1041** (1141). Resolver el sistema :

$$x^2 + y^2 = 425$$
$$\log x + \log y = 2.$$

**1042** (1142). Resolver el sistema :

$$x^4 + y^4 = 441$$
$$2 \log x + 2 \log y = 2.$$

**1043** (1143). Resolver el sistema :

$$\log x + \log y = 3.$$
$$5x^2 - 3y^2 = 11\,300.$$

**1044** (1144). Resolver el sistema :

$$\log \sqrt{x} - \log \sqrt{5} = 0{,}5$$
$$3 \log x + 2 \log y = 1{,}50515.$$

**1045** (1145). Resolver el sistema :

$$2 \log y - \log x = 0{,}12494$$
$$\log 3 + 2 \log x + \log y = 1{,}73239.$$



**1046** (1146). Resolver el sistema :

$$\log x - \log 5 = \log 10$$
$$\log x^3 + \log y^2 = \log 32.$$

**1047** (1147). Resolver el sistema :

$$5^{3x-2y} = 3\,125$$
$$11^{6x-7y} = 14\,641.$$

**1048** (1148). Resolver el sistema :

$$\log x + \log y = \frac{3}{2}$$
$$\log x - \log y = \frac{1}{2}.$$

**1049** (1149). Resolver el sistema :

$$3^x \times 4^y = 3\,981\,312.$$
$$2^y \times 5^x = 400\,000.$$

**1050** (1150). Resolver el sistema :

$$\sqrt[x]{x+y} = 2$$
$$(x+y)3^x = 279\,936.$$

## § V. — Interés compuesto, anualidades.

**1051** (1151). ¿A cuánto ascenderá, dentro de 14 años, un capital de 16 000 pesos impuesto al 4 °/₀ de interés compuesto?

**1052** (1152). ¿A cuánto ascenderán $ 15 000 colocados á interés compuesto al $3\frac{1}{2}$ °/₀, durante 10 años, capitalizándose los intereses cada 6 meses?

**1053** (1153). ¿Qué suma colocada al 6 °/₀ de interés compuesto durante 20 años, se ha convertido en 20645,5?

**1054** (1154). Habiendo vendido una ciudad un terreno en $ 140 000, impone esta suma al 4 °/₀ de interés compuesto : se quiere saber dentro de cuántos años tendrá $ 200 000.

**1055** (1155). ¿Qué tiempo se necesita para que una suma impuesta á interés compuestos de 4 °/₀, 5 °/₀, 6 °/₀, aumente su mitad?

**1056** (1156). Encontrar el aumento de una suma de $ 100 000 colocada á interés compuesto durante 8 años y 8 meses al 4 °/₀.

**1057** (1157). ¿Qué suma necesita imponerse al 4 °/₀ de interés compuesto para recibir después de 18 años 20 000 pesos, capitalizándose los intereses cada seis meses?

**1058** (1158). ¿A qué tanto debe imponerse un capital á interés compuesto para que se cuadruplique dentro de 31 años?

**1059** (1159). ¿Qué tiempo necesita una suma impuesta al 3,5 °/₀ de interés compuesto para duplicarse, triplicarse, cuadruplicarse, quintuplicarse?

1060 (1160). En general ¿qué tiempo necesita una suma $a$ colocada a interés compuesto y a $t$ °/₀ para llegar a ser $m$ veces mayor?

1061 (1161). Se ponen $ 15 000 al 4,5 °/₀ de interés compuesto durante 20 años; se pregunta durante qué tiempo hubiera tenido que imponerse la misma suma al 5 °/₀ de interés simple para que hubiera aumentado en lo mismo que en el primer caso.

1062 (1162). Se ha colocado la suma de 8 000 pesos al 5 °/₀ de interés compuesto durante 12 años. ¿Qué suma hubiera sido preciso imponer al 5,5 °/₀ de interés simple para obtener el mismo interés en el mismo tiempo?

1063 (1163). Se ha colocado a interés compuesto una suma de $ 400 000 : si se hubiera dejado un año menos, el capital definitivo hubiera sido 22 030 pesos menor; si al contrario, se hubiera dejado un año más, el capital definitivo habría aumentado en $ 23 152,50. Encontrar el tanto del interés y la duración de la imposicion.

1064 (1164). Un particular que tiene dos sumas que imponer una de 6 000 pesos y la otra de 5 000, calcula que si impone la mayor al tanto más elevado, y la menor al tanto más bajo, obtiene después de 4 años $ 13141,30 mientras que si impone la menor al tanto más alto y la mayor al tanto más bajo, obtiene solamente después de 4 años $ 13096,70. ¿A qué tanto han sido impuestas estas dos sumas?

1065 (1165). Se ha colocado a interés compuesto una suma de 50 000 pesos : si se hubiera dejado 2 años menos, el capital definitivo hubiera disminuído en $ 4412,93; si, al contrario, se hubiese dejado dos años más, el capital hubiera aumentado en 4 773 pesos. Encontrar el tanto del interés y el tiempo de la imposición.

1066 (1166). ¿En qué época hubiera sido preciso imponer un vigésimo de peso al 5 °/₀ de interés compuesto, para que en 1881 se convirtiera en $ 33 000 000 000?

1067 (1167). Una ciudad contrata un empréstito de 1 800 000 pesos al 4 °/₀ y quiere amortizar esta deuda en 30 años. ¿Qué anualidad debe consagrar para ello?

1068 (1168). Una persona que tiene que pagar una anualidad de $ 2 500 durante 6 años, desea liquidar en un solo pago. ¿Qué suma debe entregar, siendo el tanto de 4,5 °/₀.?

1069 (1169). Una sociedad puede dedicar cada año durante 40 años, una anualidad de $ 50 000 para amortizar un empréstito que desea contratar. ¿Qué suma podrá pedir si el tanto es de 5 °/₀?

1070 (1170). Un municipio que ha tomado $ 100 000 al 4 °/₀ dedica anualmente $ 3679,25 para amortizar esta deuda ¿En qué tiempo quedará saldada?

1071 (1171). Un particular pide prestada una suma de $ 10 000 y salda su deuda en dos anualidades de 5 276 **pesos.** ¿A que tanto por ciento se hizo el préstamo?



1072 (1172). Un obrero impone cada año una suma de 300 pesos al 3 °/₀ de interés compuesto. ¿En cuánto se le habrá convertido un año después de la 25ª imposición?

1073 (1173). Un negociante de 35 años de edad desea tener a los 50 años un capital de $ 40 000. ¿Qué suma deberá imponer cada año al 4 °/₀ para realizar sus esperanzas?

1074 (1174). Desea un obrero saber qué suma debe imponer al 3,5 °/₀ de interés compuesto desde la edad de 21 años hasta los 60 para formar un capital de 30 000 pesos.

1075 (1175). Un fumador, desde la edad de 16 años, gasta por término medio 5 centavos diarios. Se pregunta qué suma retiraría a la edad de 60 años si impusiera al 5 °/₀ al fin de cada año los $ 14,60 que le cuesta este hábito?

1076 (1176). Un Estado ve crecer su población cada año el 80° de lo que era el año precedente. ¿En qué tiempo se habrá duplicado, triplicado su población?

1077 (1177). Una ciudad de 8 000 habitantes ha visto disminuir su población en 160 habitantes en un año; si la disminución se hace en lo sucesivo en la misma proporción, ¿dentro de cuántos años no tendrá más que 5 000 habitantes?

1078 (1178). Un departamento que tenía 600 000 habitantes hace 16 años no tiene hoy más que 570 000. ¿Cuál ha sido la disminución anual comparada con la población?

1079 (1179). El aumento observado en 1863 en una ciudad de 54 000 habitantes es tal que se deduce que en 1899 se habrá duplicado esta población. ¿Cuál era su población en 1872?

1080 (1180). Al salir del arca la familia de Noé se componía de 8 personas. Suponiendo que el aumento de la población sea por término medio de 1/222 por año, y que hayan pasado 4 200 años de este suceso, ¿cuál debe ser la población actual del globo?

1081 (1181). Un negociante que ha comenzado el comercio con 16 000 pesos ha visto crecer su fortuma 1/11 cada año. ¿Cuál es en la actualidad su fortuna, haciendo 18 años que estableció su comercio?

1082 (1182). Establecer la fórmula de la amortización descomponiendo la anualidad servida en dos partes, una empleada en el pago de los intereses del capital, y la otra en extinguir el capital.

1083 (1183). Se impone al principio de cada año durante $n$ años consecutivos una suma $a$; se pregunta qué capital se habrá obtenido de esa manera al fin del $n^{mo}$ año, suponiendo que todos los capitales estén colocados a interés compuesto al tanto de $r$ por 1 peso.

Aplicación : $a = 1000$, $r = 0,05$, $n = 25$.

1084 (1184). Se impone al comenzar el primer año una suma $a$.

luego al comenzar el segundo año la suma $(a+b)$; al comenzar el tercer año la suma $(a+2b)$, y así consecutivamente, aumentando cada año la suma en una misma contidad $b$. Se pregunta qué capital se habrá constituído de esa manera al fin del $n^{mo}$ año, suponiendo que todos los capitales se hayan impuesto a interés compuesto, al tanto de $r$ por 1 peso.

Aplicación : $a = 1000$, $b = 50$, $r = 0{,}05$, $n = 21$.

**1085** (1185). Se impone al comenzar el primer año la suma $a$; en seguida al comenzar el segundo año la suma $aq$; al comenzar el tercer año la suma $aq^2$, y así sucesivamente, de manera que las diversas sumas impuestas de este modo sean los términos de una progresión geométrica. Se pregunta qué capital se habrá constituído así al fin del $n^{mo}$ año, suponiendo que todos los capitales estén colocados a interés compuesto, al tanto de $r$ por 1 peso.

Aplicación : $a = 1000$, $q = 1{,}25$, $r = 0{,}05$, $n = 20$.

## Máxima y mínima de las funciones algebraicas.

**1086** (941). Dados los trinomios siguientes :

| | |
|---|---|
| 1° $y = x^2 - 8x + 12$ | 4° $y = 9x^2 - 6x + 1$ |
| 2° $y = 4x^2 - 5x + 3$ | 5° $y = -x^2 + 2x + 3$ |
| 3° $y = -x^2 + 6x - 9$ | 6° $y = -5x^2 + 12x - 9$ |

decir *a priori* si tienen un máximo o un mínimo, y si este máximo o este mínimo es positivo, nulo o negativo.

**1087** (942). Calcular el máximo ó el mínimo de los trinomios anteriores y los valores correspondientes de $x$.

**1088** (943). 1° Hacer máximas las expresiones :

| | |
|---|---|
| 1° $x(a^2 - x^2)$ | 3° $\dfrac{x-2a}{x^3}$ |
| 2° $x^4(4a^2 - x^2)$ | 4° $\dfrac{x^2-a^2}{x^3}$. |

2° Hacer mínimas las expresiones :

| | |
|---|---|
| 5° $\dfrac{x^3}{(x-a)^2}$ | 7° $\dfrac{a^3+b^2x^6}{x^2}$ |
| 6° $\dfrac{a^4+x^4}{x^2}$ | 8° $x^2 + \dfrac{a^3}{x}$. |

**1089** (944). Encontrar el máximo o el mínimo de las funciones siguientes :

| | |
|---|---|
| 1° $y = \dfrac{b(a^2+x^2)}{2(a+x)}$ | 3° $y = \dfrac{(x-a)(x-b)}{x}$. |
| 2° $y = \dfrac{a+x}{a-x} + \dfrac{a-x}{a+x}$ | 4° $y = x + 2\sqrt{a^2 - x^2}$. |



**1090** (945). ¿Cuál es el máximo ó el mínimo de las funciones siguientes :

| | |
|---|---|
| 1° $y = \dfrac{4x^2+1}{x^2-2x+1}$ | 3° $y = \dfrac{x^2-x-2}{x^2-6x+9}$ |
| 2° $y = \dfrac{1-2x^2}{x^2+4x+4}$ | 4° $y = \dfrac{x^2+4}{x^2+2x+1}$. |

**1091** (946). Calcular el máximo y el mínimo de las funciones siguientes :

| | |
|---|---|
| 1° $y = \dfrac{x^2+21}{x-2}$ | 3° $y = \dfrac{x^2-10x+21}{2x-15}$ |
| 2° $y = \dfrac{4(2x-4)}{x^2-4}$ | 4° $y = \dfrac{x^2-5}{2x-4}$. |

**1092** (947). Calcular el máximo y el mínimo de las funciones siguientes :

| | |
|---|---|
| 1° $y = \dfrac{x^2+4x-36}{2(x-5)}$ | 3° $y = \dfrac{2x-3}{x^2-2x+3}$ |
| 2° $y = \dfrac{x^2-6x+8}{2x-8}$ | 4° $y = \dfrac{x^2+2x-8}{x-2}$. |

**1093** (948). Calcular el máximo y el mínimo de las funciones siguientes :

| | |
|---|---|
| 1° $y = \dfrac{x^2-x-8}{x^2+x-2}$ | 3° $y = \dfrac{x^2+14x+9}{x^2+2x+3}$ |
| 2° $y = \dfrac{x^2+x-1}{x^2-x-1}$ | 4° $y = \dfrac{ax^2+b^2}{(a^2-b^2)x}$. |

**1094** (949). Estudiar las variaciones de las funciones siguientes :

| | |
|---|---|
| 1° $y = \dfrac{x^2-x+2}{x^2-6x+9}$ | 3° $y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-1}$ |
| 2° $y = \dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-7x+12}$ | 4° $y = \dfrac{x^2-4}{x^2+2x-3}$. |

**1095** (950). Estudiar las variaciones de las funciones siguientes :

| | |
|---|---|
| 1° $y = \dfrac{x^2-5x+1}{x^2-x+1}$ | 3° $y = \dfrac{3x^2-21x+30}{4x^2-16x+12}$ |
| 2° $y = \dfrac{x^2-8x+4}{x^2-4x+2}$ | 4° $y = \dfrac{x^2-4x+3}{3x^2-12x+12}$. |

**1096** (1320). ¿La suma de tres números en progresión geométrica es $a$. ¿Cuál es el máximo y el mínimo de su producto?

**1097** (1321). Cuál es el menor valor que puede tomar la expresión $3x^2 - 8x + 7$ cuando se atribuyen a $x$ valores reales?

**1098** (1322). Máximo o mínimo de $(x^2-1)^3 + 7$.

**1099** (1323). Determinar $a$ de tal manera que la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación $x^2+(2-a)x-a-3=0$ sea mínima.

**1100** (1324). ¿Cuáles deben ser los coeficientes del trinomio $ax^2+bx+c$ para que se anule cuando se tenga $x=8$, y que tenga por mínimo $-12$ cuando $x=6$?

**1101** (1325). Determinar $p$ y $q$ en el trinomio $x^2+px+q$ de manera que el mínimo sea igual a $a$ y que este trinomio tome para $x=\frac{1}{2}$ el valor $b+\frac{1}{4}$, designando $a$ y $b$ números dados.

**1102** (1326). ¿Qué valor de $x$ hace mínima la suma

$$(ax+b)^2+(a'x+b')^2$$

en la cual $a$, $a'$, $b$, $b'$ designan números dados? Indicar este mínimo.

**1103** (1327). Encontrar el máximo de las expresiones siguientes y los valores de $x$ por los cuales se produce :

1° $x\sqrt{x}\sqrt{1-x^3}$.

2° $x^2(a-bx)$, representando $a$ y $b$ números positivos.

**1104** (1328). Siendo constante la suma $x+y$, ¿son susceptibles de un máximo o de un mínimo las sumas $x^2+y^2$ y $x^3+y^3$?

**1105** (1329). ¿Entre qué límites varía la fracción

$$\frac{3x^2-5x+5}{2x^2-3x+4}?$$

**1106** (1330). Máximo y mínimo de

$$\frac{x^2+2}{x^2-6x+11}.$$

**1107** (1331). Encontrar el máximo y el mínimo de las fracciones siguientes con los valores correspondientes de $x$ :

1° $\dfrac{x^2+3x+5}{x^2+1}$ 3° $\dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3}$

2° $\dfrac{5x^2+8x-1}{x^2+1}$ 4° $\dfrac{3x}{x^2+x+1}$.

**1108** (1332). La misma cuestión para las fracciones siguientes :

1° $\dfrac{2x^2-24x+48}{x^2-10x+25}$ 4° $\dfrac{x^2-10x+21}{x^2-6x+5}$

2° $\dfrac{2x^2-2x+4}{3x^2-4x+5}$ 5° $\dfrac{2x^2+2}{x^2-3x+2}$

3° $\dfrac{x^2-1}{5x^2+4x}$ 6° $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-6x+9}$.

**1109** (1335). Calcular el máximo y el mínimo de la expresión $\dfrac{x^2-x-c}{x^2+x-c}$. Se distinguirán varios casos que correspondan a los diferentes valores de $c$.



**1110** (1336). ¿Cuáles son los valores que puede tomar la fracción

$$\frac{x^2-4}{x^2+2ax-1}$$

cuando se le dan a $x$ todos los valores reales? ¿Qué valores debe tener $a$ para que esta fracción tenga un máximo?

**1111** (1347). Suponiendo conocidos dos números $a$ y $b$, encontrar el máximo y el mínimo de la expresión

$$\frac{2ax+b}{x^2+1}.$$

Decir, en particular, qué valores deben darse a $a$ y a $b$ para que el máximo sea 4 y el mínimo $-1$.

**1112** (1338). Determinar $p$ y $q$ de manera que el máximo de

$$\frac{x^2+px+q}{x}$$

sea $a$ y que el mínimo sea $b$.

**1113** (1339). Se dan las cantidades $m$, $a$, de las cuales la primera es positiva y se quiere determinar $r$ y $t$ de tal manera que el mínimo de $rx+\frac{t}{x}$ sea igual a $m$, y que este mínimo tenga lugar para $x=a$.

**1114** (1340). Determinar $p$ y $q$ de tal manera que la fracción

$$\frac{3x^2+px+q}{x^2+1}$$

pueda tomar todos los valores entre 4 y $-3$, y solamente estos valores cuando $x$ tome todos los valores desde el infinito negativo hasta el infinito positivo.

**1115** (1341). Demostrar que para que la fracción

$$\frac{x^2+ax}{x^2-2x-3}$$

pase por un máximo y por un mínimo, cuando $x$ varíe de $-\infty$ a $+\infty$, es preciso y basta que el parámetro constante $a$ esté comprendido entre $-3$ y 1.

**1116** (1342). Se da la fracción

$$y=\frac{x^2+px+q}{x-1}$$

y se quiere determinar $p$ y $q$ de manera que $y$ no pueda tomar ningún valor entre los números 3 y 7. ¿Qué valores de $x$ corresponden a estos límites?

**1117** (1343). Determinar $p$ y $p'$ de manera que la fracción

$$\frac{x^2+px-3}{x^2+p'x+5}$$

llegue a un máximo o a un mínimo para $x=2$ y $x=3$.

**1118** (1344). ¿Qué valor debe darse a la cantidad $a$ para que el valor de $x$ que haga mínima la expresión $x+\frac{1}{x+a}$ sea doble del que la haga máxima?

**1119** (1345). ¿Encontrar la relación que debe existir entre $a$ y $a'$ para que el máximo y el mínimo de la fracción

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2+2a'x+1}$$

sean iguales y de signos contrarios.

**1120** (1346). Debiendo las cantidades $x$ e $y$ verificar la relación $x^2+y^2+xy=k^2$, asignar los valores de $x$ y de $y$ que hagan tomar a la expresión $ax+by$ su valor máximo, y decir cuál es este valor.

**1121** (1347). Encontrar el máximo o el mínimo de $y-2x$, cuando $16y^2+36x^2=9$.

**1122** (1348). Encontrar entre qué límites puede variar la expresión

$$\frac{x^3+2xy^2+3y^3}{x^2+y^2}$$

cuando $x+y$ tiene un valor dado $a$.

**1123** (1349). Máximo y mínimo de

$$\frac{x^3-x^2+3x^4-3x^5}{3x-3+x^2-x^3}.$$

**1124** (1334). ¿Entré qué límites varía la fracción

$$\frac{2x^2+3x+2}{x^2+x+1}?$$

# EJERCICIOS DE RECAPITULACIÓN

## § I. — Cálculo algebraico y ecuaciones de primer grado.

**1127** (1201). Efectuar la siguiente división : $\frac{32x^5+243}{2x+3}$.

**1128** (1202). Demostrar que si tres números enteros están en progresión aritmética de razón $r$, y si uno de ellos es múltiplo de $r$, el producto de estos tres números es divisible por $6r^3$.

**1129** (1203). Si $x$, $y$, $z$ representan tres números enteros y si el número entero $x^2+2y^2z$ es el cuadrado de un número entero, demostrar que el número entero $x^2+y^2z$ es la suma de los cuadrados de dos números enteros.

**1130** (1204). Descomponer en factores de primer grado la expresión :

$$2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4.$$

**1131** (1205). Descomponer en dos factores de primer grado la expresión :

$$(a^2-4b^2)x^2+2(a^3+2b^3)x+a^4-b^4.$$

**1132** (1206). ¿Cómo se debe elegir el coeficiente numérico $m$ para que la división de $x^3+y^3+z^3+mxyz$ por $x+y+z$ pueda efectuarse? Dar el cociente de esta división.

**1133** (1207). Se quiere dividir $x^4+1$ por $x^2+px+q$, en donde $p$ y $q$ son números dados. ¿Qué valores deben darse a $p$ y a $q$ para que la división no dé resta?

**1134** (1208). Dado $x^4+px^2+q$, determinar $p$ y $q$ de tal manera que el polinomio sea divisible por $x^2-6x+5$.

**1135** (1209). ¿Qué cantidad debe restarse a los dos términos de una fracción $\frac{a}{b}$ para que llegue a ser igual a su cuadrado o a su cubo?

**1136** (1210). Simplificar la fracción :

$$\frac{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}.$$

**1137** (1211). Simplificar la expresión :

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$$

**1138** (1212). ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que la fracción $\frac{ax+b}{a'x+b'}$, conserve el mismo valor, cualquiera que sea el valor de $x$?

**1139** (1213). Encontrar las condiciones necesarias para que a fracción $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$, sea independiente de la variable $x$.

**1140** (1214). Poner la fracción $\frac{x-1}{3x^2-7x+2}$ bajo la forma de una suma de dos fracciones $\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$, es decir, determinar A, B, $a$, $b$, de manera que esta suma sea idénticamente igual a la fracción propuesta.

**1141** (1215). ¿Cuál es el valor de la expresión $\frac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}$ cuando se hace que $x$ tienda hacia la unidad?

**1142** (1216). ¿Hacia qué límite tiende la expresión

$$\sqrt{x^2+x+1}-ax$$

en la cual $a$ es un número cualquiera, cuando $x$ aumenta indefinidamente?

**1143** (1217). Transformar la expresión :

$$\sqrt{x^2+x+1-\sqrt{2x^3+x^2+2x}}$$

en otra que no contenga más que radicales simples.

**1144** (1218). Resolver el sistema de ecuaciones :

$$\begin{gathered} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=h \\ a^2x+b^2y+c^2z=h^2 \end{gathered}$$

hacer ver que el numerador y el denominador del valor de cada una de las incógnitas pueden descomponerse en factores del primer grado.

**1145** (1219). Resolver el sistema siguiente :

$$\begin{gathered} x-ay+a^2z=a^3 \\ x-by+b^2z=b^3 \\ x-cy+c^2z=c^3. \end{gathered}$$

**1146** (1220). Resolver el sistema de ecuaciones :

$$\begin{gathered} a^3x+a^2y+az-1=0 \\ b^3x+b^2y+bz-1=0 \\ c^3x+c^2y+cz-1=0. \end{gathered}$$

**1147** (1221). Dado el sistema :

$$\begin{gathered} ax-by=4 \\ 3x+5y=1 \end{gathered}$$



se pregunta los valores que deben darse a los coeficientes $a$ y $b$ para que este sistema sea indeterminado.

**1148** (1222). Se da el sistema de dos ecuaciones de primer grado entre las incógnitas $x$ e $y$ :

$$\begin{gathered} ax-6y=5a-3 \\ 2x+(a-7)y=-7a+29 \end{gathered}$$

y se pregunta los valores que deben darse a la indeterminada $a$ para que : 1° las ecuaciones propuestas sean incompatibles; 2° las ecuaciones formen un sistema indeterminado; 3° la resolución del sistema dé $x=y$.

**1149** (1223). ¿En qué condiciones las tres ecuaciones :

$$\begin{gathered} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \\ a''x+b''y+c''z=0 \end{gathered}$$

se satisfacen además de por $x=0,\ \ y=0,\ \ z=0$?

**1150** (1224). ¿A qué condiciones deben satisfacer las cantidades $l$, $m$, $n$ para verificar las tres ecuaciones con dos incógnitas :

$$\begin{gathered} x-ly-n=0 \\ y-lx-m=0 \\ nx+my-1=0. \end{gathered}$$

**1151** (1225). Si $\alpha, \beta, \gamma$ son tres números distintos que satisfacen á las relaciones :

$$\begin{gathered} \alpha^3+p\alpha+q=0 \\ \beta^3+p\beta+q=0 \\ \gamma^3+p\gamma+q=0 \end{gathered}$$

probar que se debe tener $\alpha+\beta+\gamma=0$.

**1152** (1226). Se dan dos números $x$ e $y$, se calculan otros dos $x'$ e $y'$ por las fórmulas $x'=ax+by+c$, e $y'=a'x+b'y+c$.

Se emplean estos dos últimos para calcular otros dos $x''$ e $y''$ con ayuda de las mismas fórmulas, y se quiere determinar $a'$, $b'$ y $c'$ de manera que, cualesquiera que sean los números primitivos $x$ e $y$, el resultado de la operación sea reproducirlos; o que en otros términos se tenga siempre : $x''=x$, $y''=y$.

**1153** (1227). Dos puntos A y B están distantes uno del otro $d$ kilómetros. La tonelada de carbón tomada en A, cuesta $a$ pesos; la tonelada de carbón tomada en B, cuesta $b$ pesos. El transporte de la tonelada cuesta $c$ pesos por kilómetro. Encontrar entre A y B el punto en que la tonelada de carbón cueste el mismo precio, ya venga de A o de B, y verificar que estos precios son iguales.

Aplicación : $a=\$\ 7{,}45$, $b=\$\ 9{,}35$, $c=\$\ 0{,}0036$, $d=800$ km.

**1154** (1228). Una persona posee un capital C dividido en dos partes $a$ y $b$. La parte $a$ impuesta durante $m$ años al tanto $t$ ha producido intereses simples iguales a los que la otra parte $b$ ha producido en $n$ años al tanto $t'$. Por otra parte, $a$ impuesto durante un año al tanto $t'$ produce una suma P, y $b$ impuesto durante un año al tanto $t$ produce una suma Q. Conociendo C, P, Q, $m$, $n$, encontrar $a$, $b$, $t$, $t'$.

## § II. — Ecuaciones de 2° grado. Propiedades de las raíces.

**1155** (1229). El número 190 está escrito en el sistema decimal. Está representado por 276 en un sistema de base desconocida. ¿Cuál es esta base?

**1156** (1230). Resolver la ecuación :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b+x}.$$

**1157** (1231). La diferencia de las dos raíces de una ecuación de segundo grado es $a^2b^2$ y su producto $\left(\frac{a^4-b^4}{2}\right)^2$. Calcular estas dos raíces.

**1158** (1232). ¿Para qué valores de $a$ tiene sus raíces reales la ecuación :

$$x^2-2(a-5)x+a^2-1=0.$$

Indicar los signos de las raíces para cada uno de estos valores.

**1159** (1233). Resolver la ecuación $\frac{x-1}{2x-1}+\frac{2x+1}{x-1}=m$, y encontrar entre qué límites debe variar $m$ para que la ecuación tenga sus raíces reales.

**1160** (1234). Resolver la ecuación $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$, y demostrar que siempre tiene sus raíces reales, siendo $a$, $b$, $c$ números cualesquiera.

**1161** (1235). Demostrar que la ecuación $\frac{a^2}{x-p}+\frac{b^2}{x-q}-1=0$ tiene siempre sus raíces reales, cualesquiera que sean las constantes $a$, $b$, $p$, $q$.

**1162** (1236). Resolver la ecuación $\frac{a}{x}=\frac{x-1}{x-a}$ y determinar los límites entre los cuales debe estar comprendido $a$ para que las raíces sean reales.

**1163** (1237). Resolver $ax^2-x+a=0$. Explicar la operación y discutir el resultado. Examinar el caso particular de $a=\frac{m}{m^2+1}$.

**1164** (1238). Resolver la ecuación $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{x-c}$ en la que las cantidades $a$, $b$, $c$ son reales y positivas. Condición para que las raíces sean también reales y positivas.



**1165** (1239). Dada la ecuación :

$$(m-5)x^2-4mx+(m-2)=0$$

se pregunta para qué valores de $m$ tendrá la ecuación : 1° sus raíces reales; 2° sus dos raíces de signos contrarios.

**1166** (1240). Encontrar la suma de la cuarta potencia de las raíces de la ecuación de segundo grado : $x'^4+x''^4$.

**1167** (1241). Se da la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ y se quieren determinar los coeficientes $a$, $b$, $c$ de tal manera que : 1° la suma de los cuadrados de las raíces sea igual a un número dado $m^2$; 2° la suma de la razón directa de estas raíces y de la razón inversa sea igual a un número dado $k$. ¿Cuál debe ser este número $k$ para que el problema sea posible, y cuántas soluciones hay en este caso? Examinar si la condición encontrada es suficiente para que las raíces de la ecuación sean reales.

Aplicación : $m^2=14$, $k=14$.

**1168** (1242). Dada la ecuación : $x^2\,2+(2m-1)x+3m^2+5=0$ : 1° determinar entre qué límites debe estar comprendida $m$ para que las raíces sean reales; 2° examinar si el número 1 puede estar comprendido entre las raíces de esta ecuación; 3° calcular, en función de $m$ la expresión

$$\frac{x'^2}{x''^2}+\frac{x''^2}{x'^2}.$$

**1169** (1243). Un móvil es lanzado en el vacío verticalmente de abajo arriba con una velocidad inicial $v_0$; ¿hasta qué altura se elevará y en qué tiempo? ¿Qué tiempo tardará en elevarse a una altura dada $h$?

**1170** (1244). Resolver la ecuación $\frac{x^2}{x^2-a^2}+\frac{x^2}{x^2-b^2}=4$ y hacer ver que las raíces son siempre reales, cualesquiera que sean los valores de $a$ y de $b$.

**1171** (1245). En la ecuación bicuadrada

$$x^4-(3m+4)x^2+(m+1)^2=0$$

determinar $m$ por la condición que las cuatro raíces estén en progresión aritmética.

**1172** (1246). Determinar $k$ en la ecuación $5x^2-4x+k=0$, de manera que el primer miembro sea : 1° la suma de dos cuadrados; 2° la diferencia de dos cuadrados.

**1173** (1247). Dado el trinomio $ax^2+bx+c$, determinar la cantidad $m$ por la condición que el polinomio

$$ax^2+bx+c+m(x^2+1)$$

sea un cuadrado perfecto. Demostrar que la ecuación a que conduce $m$ tiene siempre sus raíces reales.

**1174** (1248. Encontrar la condición para que

$$(a+bx)^2+(a'+b'x)^2$$

sea el cuadrado perfecto de una expresión de primer grado en $x$. Demostrar que si

$$(a + bx)^2 + (a' + b'x)^2 \text{ y } (a + cx)^2 + (a' + c'x)^2$$

son cuadrados perfectos, lo mismo sucede con

$$(b + cx)^2 + (b' + c'x)^2.$$

**1175** (1249). Encontrar dos números enteros consecutivos cuyos cubos difieran $n$. ¿En qué caso es posible el problema?

**1176** (1250). Llamando $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ tres cantidades dadas, y $x'$, $x''$ las dos raíces de la ecuación $x^2 + px + q = 0$, encontrar las condiciones que deben satisfacer los coeficientes $p$ y $q$ para que se tenga : $\alpha x'^2 + \beta x' + \gamma = \alpha x''^2 + \beta x'' + \gamma$.

**1177** (1251). Determinar $c$ para que las raíces del trinomio $ax^2 + bx + c$ verifiquen la relación $ax' + bx'' + c = 0$.

**1178** (1252). Formar una ecuación de segundo grado cuyas raíces $x'$ y $x''$ satisfagan á las relaciones

$$x'x'' + x' + x'' - a = 0, \quad x'x'' - a(x' + x'') + 1 = 0$$

¿Qué valor debe t[illegible]r $a$ para que las raíces sean : 1° reales; 2° positivas?

**1179** (1253). Llan[illegible]o $x'$ y $x''$ las raíces de la ecuacion $x^2 + px + q = 0$, se quiere formar la ecuación bicuadrada que tiene por raíces las cuatro cantidades $x'$, $x''$, $-x'$, $-x''$.

**1180** (1254). Dada la ecuación $x^3 + ax^2 + bx - 30 = 0$, deter minar los valoros de $a$ y $b$ de manera que 2 y 3 sean raíces de esta ecuación; calcular la tercera raíz.

**1181** (1255). Dada la ecuación $x^2 + px + q = 0$ se quiere : 1° Saber qué valores deben darse a $p$ y q para que las raíces sean precisamente $p$ y q.

2° Formar la ecuación de segundo grado que admite por raíces los cuadrados de las raíces de la ecuación dada.

3° Habiendo atribuído a $p$ un valor determinado, saber qué valor debe darse á q para que una de las raíces sea doble de la otra.

4° Averiguar qué valor debe darse á q cuando se tenga $p = -2$, para que una de las raíces sea igual al cuadrado de la otra.

**1182** (1256). Se tiene la ecuación

$$(2m - 1)\, x^2 + 2\,(1 - m)\, x + 3m = 0,$$

determinar $m$ : 1° de manera que la ecuación tenga $-1$ por raíz; 2° de tal manera que la suma de los cuadrados de las raíces sea igual a 4.

**1183** (1257). En la ecuación $2x^2 - (2m + 1)\,x + m^2 - 9m + 39 = 0$ ¿qué valor debe darse a $m$ para que la ecuación tenga una raíz doble de la otra? Resolver la ecuación por el valor obtenido.

**1184** (1258). Se quiere determinar la relación que debe existir entre $p$ y q para que una de las raíces de la ecuación

$$x^2 + px + q = 0$$



sea $n$ veces mayor que la otra. Se aplicará al caso en que $n = 4$, no tomando para $p$ y q más que valores enteros menores que 30.

**1185** (1259). Se dan las dos ecuaciones $x^2 - 5x + k = 0$, y

$$x^2 - 7x + 2k = 0$$

y se quiere determinar $k$ de tal manera que una de las dos raíces de la segunda sea doble de una de las de la primera.

**1186** (1260). Encontrar la relación que liga las raíces de la ecuación

$$x^2 - 2x\sqrt{p^2 - 2q} + p^2 - 2q = 0 \quad \text{con las de} \quad x^2 + px + q = 0.$$

Si se construye un rectángulo que tenga por dimensiones las raíces de la segunda ¿cuáles son las líneas que representan las raíces de la primera?

**1187** (1261). Encontrar la relación que debe existir entre los coeficientes de dos ecuaciones de segundo grado para que tengan una raíz común.

**1188** (1262). Dadas las ecuaciones $x^2 + ax + 1 = 0$, y

$$x^2 + x + a = 0,$$

determinar $a$ de manera que las dos ecuaciones admitan una raíz común.

**1189** (1263). Encontrar en todos los casos posibles entre qué límites debe variar $m$ para que la ecuación

$$ax^2 + bx + c + m\,(a'x^2 + b'x + c') = 0 \qquad (1)$$

tenga sus raíces reales.

2° Condición para que las dos ecuaciones : $ax^2 + bx + c = 0$ y $a'x^2 + b'x + c' = 0$ tengan una raíz común.

3° Probar que el trinomio subradical, en la resolución de la ecuación (1), es un cuadrado perfecto cuando las dos ecuaciones del (2) tienen una raíz común.

## § III. — Desigualdades.

**1190** (1264). ¿Qué condiciones debe satisfacer el número $n$ para que, cualquiera que sea el valor real atribuído a $x$, el trinomio $x^2 + 2x + n$ sea superior a 10?

**1192** (1265). Resolver la desigualdad :

$$x\,(x^4 - 7x^2 + 12) > 0.$$

**1193** (1266). Encontrar los límites entre los cuales debe estar comprendida $h$ para que la desigualdad

$$x^2 + 2hx + h > \frac{3}{16}$$

se verifique para todos los valores reales de $x$, positivos o negativos.

**1194** (1267). **Resolver la desigualdad :**

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}>0.$$

**1195** (1268). **Resolver las desigualdades :**

1° $$\frac{x^2+10x+16}{x-1}>10$$

2° $$\frac{7x-5}{8x+3}>4.$$

**1196** (1269). Encontrar los valores de la variable $x$ para los cuales se verifican las desigualdades :

1° $$\frac{(x-1)\,(x-2)}{(x-3)\,(x-4)}>1$$

2° $$\frac{2x^2-6x+3}{x^2-5x+4}>1.$$

**1197** (1270). Buscar los valores de $x$ que satisfagan a la desigualdad :

$$\frac{x}{x-a}-\frac{2a}{x+a}>\frac{8a^2}{x^2-a^2}.$$

**1198** (1271). Encontrar entre qué límites debe estar comprendida $x$ para que la expresión $\frac{x^4-17x^2+60}{x(x^2-8x+5)}$ sea positiva.

**1199** (1272). Demostrar que si $a, b, c$ representan los tres lados de un triángulo, el trinomio de segundo grado $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2$ es siempre positivo, cualquiera que sea el valor que se le dé a la variable $x$. ¿Qué relación existiría entre $a$, $b$ y $c$ en el caso muy particular y limitado en que este trinomio fuese un cuadrado perfecto?

**1200** (1273). ¿Qué valor debe darse a $y$ en la ecuación

$$x^2-3xy+y^2+2x-9y+1=0$$

para que resuelta con respecto a $x$ tenga sus dos raíces iguales? ¿Entre qué límites debe variar $y$ para que los valores de $x$ sean reales?

**1201** (1274). Encontrar los límites de los valores de $x$ y de $y$ que puedan verificar la ecuación :

$$x^2+12xy+4y^2+4x+8y+20=0$$

**1202** (1275). Dada la ecuación :

$$5x^2-12xy+4y^2+54x-4y-139=0$$

se preguntan los límites entre los cuales se puede hacer variar $x$ para que los valores de $y$ sean reales, y entre qué límites se puede hacer variar $y$ para que los valores de $x$ sean reales.



**1203** (1276). ¿Qué valor debe darse a $m$ para que el trinomio

$$mx^2+(m-1)x+m-1$$

sea negativo, cualquiera que sea $x$?

**1204** (1277). ¿Qué valores deben darse a la constante $m$ para que los trinomios siguientes sean positivos para todos los valores de $x$?

1° $$(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6$$

2° $$(4-m)x^2-3x+4+m.$$

**1205** (1278). Dada la cantidad $h$ ¿qué valor debe atribuirse a $k$ para que la desigualdad

$$\frac{(h+1)x^2+hx+h}{x^2+x+1}>k$$

se verifique para todos los valores positivos o negativos de $x$?

**1206** (1279). ¿Puede tomar la expresión $\frac{2x^4+8x^2+3}{2x^4+x^2-1}$ todos los valores posibles cuando $x$ varíe de $-\infty$ á $+\infty$?

¿Para cuántos valores de $x$ toma los valores que es susceptible de adquirir?

**1207** (1280). ¿Puede tomar la expresión $\frac{x^4+4x^2-2}{x^4+1}$ todos los valores posibles cuando varía $x$? Entre los valores que toma esta expresión, distinguir los que se obtienen para dos o cuatro valores reales de $x$.

## § IV. — Ecuaciones reducibles al 2° grado. Sistemas de ecuaciones.

**1208** (1281). Resolver la ecuación :

$$\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x}{a}.$$

**1209** (1282). Resolver :

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}=5.$$

**1210** (1283). Resolver :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}=4.$$

**1211** (1284). Resolver :

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}=0.$$

**1212** (1285). Resolver :

$$\sqrt[3]{72-x}-\sqrt[3]{16-x}=2.$$

**1213** (1286) Resolver :

$$\sqrt[3]{A+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{A-\sqrt{x}}=B.$$

**1214** (1287). Resolver :

$$x^4-2x^3-10x^2+4x+16=0.$$

**1215** (1288). Resolver :

$$x^2-6x+9=4\sqrt{x^2-6x+6}.$$

**1216** (1289). Resolver :

$$2x-x^2+\sqrt{6x^2-12x+7}=0.$$

**1217** (1290) Resolver :

$$(x+\sqrt{x})^4-(x+\sqrt{x})^2=159\,600.$$

**1218** (1291). Resolver :

$$x^5+\frac{x^4}{2}-\frac{3x^3}{4}-\frac{3x^2}{8}+\frac{x}{16}+\frac{1}{32}=0.$$

**1219** (1292). Resolver la ecuación $x+\sqrt{a^2-x^2}=b$, en la que las cantidades $a$ y $b$ se suponen reales y positivas.

**1220** (1293). Resolver la ecuación $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=1$. Aplicación numérica en el caso en que $a=10$, $b=2$.

**1221** (1294). Resolver la ecuación $\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}=m$. — Se encuentra que la incógnita se determina por una ecuación de primer grado. ¿La raiz de esta última conviene siempre a la ecuación propuesta?

**1222** (1295). Resolver la ecuación $\sqrt{mx+a}+\sqrt{x+b}=c$, designando las letras $a$, $b$, $c$, números dados de los cuales el último es superior o al menos igual a la unidad. Limites de $c$.

**1223** (1296). Resolver la ecuación $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}=\sqrt{x-c}$, en la que $x$ es la incógnita y $a$, $b$, $c$, cantidades dadas.

**1224** (1297). Hacer racionales las ecuaciones :

$$\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}+\sqrt{x-c}=0$$
$$\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}-\sqrt{x-c}=0$$
$$\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}+\sqrt{x-c}=0$$
$$\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}-\sqrt{x-c}=0.$$

Conducen a la misma ecuación racional de segundo grado; demostrar que esta ecuación tiene sus raices reales, y que si se tienen las desigualdades $a>b>c$, una de las raices es inferior a $c$, la otra superior a $a$; inferir de ahí el número de las raices de las cuatro ecuaciones propuestas.



**1225** (1298). Resolver la ecuación $\sqrt{r^2-x^2}+\sqrt{2rx-x^2}=m$, siendo $m$ y $r$ cantidades dadas y $x$ la incógnita.

**1226** (1299). Resolver los dos sistemas de ecuaciones :

$$1^\circ \quad \begin{cases} ax+by=c \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$2^\circ \quad \begin{cases} x-y=a \\ bx^2-cy^2=d. \end{cases}$$

**1227** (1300). Hallar dos números conociendo su suma o su diferencia $a$ y la diferencia $b^2$ de sus cuadrados. — Aplicación :

$$a=16,\ b^2=32.$$

**1228** (1301). Hallar una fracción equivalente a $\frac{3}{5}$ y cuya suma de los cuadrados de los términos sea 306.

**1229** (1302). Hallar dos números, conociendo : 1° su suma $a$ y la de sus cubos $b^3$.

2° su diferencia $a$ y la de sus cubos $b^3$.

**1230** (1303). Resolver el sistema de ecuaciones :

$$x+y=a$$
$$x^5+y^5=b.$$

**1231** (1304). Resolver el sistema de ecuaciones :

$$x+y+xy=5$$
$$x+y=\frac{6}{xy}.$$

**1232** (1305). Resolver el sistema de ecuaciones :

$$xy=a^2$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{b}$$

se hará el enunciado y la discusión suponiendo que $x$ é $y$ son los lados de un rectángulo. — Resolver en seguida, sin discutir los valores encontrados, el sistema :

$$xy=a^2$$
$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{b^2}.$$

**1233** (1306). Resolver el sistema :

$$a(x+y)+x^2+y^2=b^2.$$
$$xy+y^2+x^2=c^2.$$

**1234** (1307). Encontrar todos los valores de $x$ y de $y$ que verifican las dos ecuaciones :

$$x^4+y^4=2a^2+2b^2+12ab$$
$$xy=a-b.$$

**1235** (1308). Hallar dos números tales que su diferencia y la suma de sus raíces cuadradas estén expresadas por el mismo número $a$.

**1236** (1309). Resolver el sistema de ecuaciones :

$$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1$$
$$x-y=217.$$

**1237** (1310). Resolver el sistema :

$$x+y+\sqrt{xy}=a$$
$$x^2+y^2+xy=b.$$

**1238** (1311). Resolver el sistema :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{c}$$
$$\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a-y}=\frac{2}{a-b}.$$

**1239** (1312). Dadas dos cantidades reales $a$ y $b$ se quieren encontrar otras dos cantidades reales $x$ e $y$ tales que se tenga :

$$(x+y\sqrt{-1})^2=a+b\sqrt{-1}.$$

**1240** (1313). Resolver el sistema :

$$x+y=mz$$
$$x^2+y^2=nz^2$$
$$x^3+y^3=a^3-z^3.$$

**1241** (1314). Encontrar los valores numéricos de $x$, de $y$ y de $z$ que satisfacen simultáneamente al siguiente sistema de ecuaciones :

$$x^2+xy+y^2=37$$
$$x^2+xz+z^2=28$$
$$y^2+yz+z^2=19$$

**1242** (1315). Resolver el sistema :

$$x^2+y^2+z^2=14$$
$$xy+xz-yz=7$$
$$x+y+z=6.$$

**1243** (1316). Resolver el sistema :

$$-3x+8y^2+6z^3=0$$
$$-x-2y^2+12z^3=-4$$
$$-2x+6y^2-3z^3=-5.$$



## § V. — Progresiones, Logaritmos, interés compuesto.

**1244** (1575). Cuál es la suma de los $n$ primeros términos de a progresión :

$$\frac{n-1}{n},\ \frac{n-2}{n},\ \frac{n-3}{n},\ldots\ ?$$

**1245** (1578). Encontrar el primer término y la razón de una rogresión aritmética, sabiendo que la suma de los $n$ primeros rminos es igual a $n(3n+1)$, cualquiera que sea el número de rminos $n$.

La misma cuestión, siendo la suma de los $n$ primeros términos :

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

**1246** (1579). La suma de los $m$ primeros términos de una proesión aritmética cuyo primer término es $x$ y la razón $y$, es $n$; la suma de los $n$ primeros términos de la misma progresión $m$. Calcular la suma de los $m+n$ primeros términos y la de s $m-n$ primeros términos.

1247 (1580). Encontrar cuatro números en progresión aritméa conociendo su suma $4a$ y la suma $4b^2$ de sus cuadrados.

248 (1581). Determinar cinco números en progresión aritméa conociendo su suma $5a$ y su producto $p^5$.

249 (1582). Determinar cinco números en progresión geoméa conociendo su suma $a$ y su producto $b^5$.

250 (1583). En una progresión aritmética compuesta de tres minos, se conoce la suma $2a$ de los tres términos, y la suma de sus cuartas potencias. Calcular : 1° el término medio, y a razón de la progresión.

251 (1584). Encontrar una progresión aritmética de cinco inos, conociendo la suma $5a$ de los términos y la suma $\frac{1}{b}$ us inversas.

52. (1585). ¿Pueden los números 12, 20 y 35, formar parte na progresión aritmética o geométrica?

53 (1586). Demostrar que si los tres lados de un triángulo n en progresión geométrica, la razón de esta progresión está sariamente comprendida entre $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ y $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$.

54. Hallar tres números en progresión geométrica tales que ma sea igual a $a$ y la de sus cuadrados á $b^2$.

55 (1588). En una progresión geométrica de $n$ términos, se a suma S de los de $n-1$ primeros términos y la suma S' os $n-1$ últimos. Encontrar la razón y el primer término.

1256 (1589). ¿Hacia qué límite tiende de suma de todos los términos siguientes :

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+..\right)$$
$$+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+..\right)$$
$$+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+..\right)$$
$$+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{17^2}+\frac{1}{17^3}+..\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{(2^n+1)^2}+\frac{1}{(2^n+1)^3}+..\right).$$

1257 (1593). En cada intervalo formado por dos términos consecutivos de la progresión geométrica $1, q, q^2, q^3, \ldots q^n$, se interpolan $k$ medios aritméticos de los cuales se pide la suma total expresada en función de las cantidades $q, n, k$. ¿Cuál llega a ser el resultado para una progresión decreciente que se prolonga indefinidamente?

1258 (1594). 1° En qué se convierte la expresión $1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}-\frac{1}{a^5}+\ldots$ prolongada al infinito cuando el número $a$ supuesto positivo y mayor que la unidad se acerque indefinidamente a 1? 2° ¿A qué función algebraica simple es equivalente el polinomio $x-y+\frac{y^2}{x}-\frac{y^3}{x^2}+\frac{y^4}{x^3}-\frac{y^5}{x^4}+\ldots$ cuyos términos forman una progresión geométrica indefinida.

1259 (1596). Encontrar la suma de los términos de la serie :

$$1+2x+3x^2+\ldots nx^{n-1}.$$

1260 (1597). Sobre una recta XX' se marcan $n$ puntos A, B, C, .... N distantes la misma longitud $a$, y se les numera 1, 2, 3, .... $n$. Encontrar la distancia, al primer punto A, de un punto I de la recta, tal que la suma de los cuadrados de sus distancias AI, BI, .... NI á los otros puntos dados multiplicadas por los números correspondientes 1, 2, .... $n$, es decir

$$1\times\overline{AI}^2\times 2+\overline{BI}^2+\ldots n\times\overline{NI}^2 \text{ sea un mínimo.}$$

1261 (1598). Resolver la ecuación :

$$\log(7x-9)^2+\log(3x-4)^2=2.$$

1262 (1599). Resolver la ecuación :

$$\log\sqrt{7x+5}+\log\sqrt{2x+3}=1+\log 4{,}5.$$

1263 (1600). Despejar a $x$ en la ecuación :

$$\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)}=3.$$



1264 (1601). Una persona pide prestada una suma de $a$ pesos por 2 años; la paga en dos abonos de $b$ pesos efectuados al fin del primero y del segundo año. ¿A qué tanto ha pedido prestado, siendo los intereses compuestos? Discutir las condiciones de posibilidad del problema.

1265 (1602). Se toma prestada una suma de A al 5 °/₀ de interés compuesto. ¿Qué anualidad deberá pagarse para que después de 5 años esta deuda se reduzca a $\frac{A}{2}$.

1266 (1603). Se debe pagar cada año una suma de 2 000 pesos durante 12 años. ¿Por qué suma podrá ser reemplazada esta anualidad si no se quiere hacer más que un solo pago al cabo de 4 años, siendo el tanto el 5 °/₀?

1267 (1604). Un municipio contrató un empréstito de 23 795 francos al 4,5 °/₀ y quiere saldarlo por medio de anualidades que obtiene votando fr. 0,04 extraordinarios; por cada céntimo votado percibe 769 fr. por año; se pregunta : 1° ¿Por cuántos años debe imponerse? 2° ¿Qué suma habrá pagado de esa manera?

1268 (1605). Un obrero impone al fin de cada año una suma de 40 pesos a interés compuesto y al 5 °/₀. Al cabo de 20 años, emplea la suma que se le debe, y á la cual agrega 40 pesos ahorrados el último año, en comprar renta del 3 °/₀ al precio de 61,75. ¿Qué renta recibirá, siendo los gastos de corretaje $ 3,15?

1269 (1606). Un industrial ha pedido prestada el 1° de Enero de 1906 una suma de 33 640 pesos, la cual salda en dos pagos iguales de $ 19 448,10. El primero de estos pagos se efectuó el 1° de Enero de 1908 y el segundo el 1° de Enero de 1910. Se pregunta a qué tanto exacto se hizo el préstamo, sabiendo que el interés ha sido compuesto.

1270 (1607). Una persona se encarga de depositar en una compañía de seguros $n$ anualidades iguales a $a$ con la condición de que la compañía le servirá, durante los $2n$ años siguientes, una renta anual igual a $b$; debiendo efectuarse el primero de estos pagos después del depósito de la última anualidad $a$. Los intereses son compuestos y el tanto es $r$ por un peso al año. Se quiere : 1° Calcular la relación $\frac{a}{b}$;

2° Determinar el valor que debe tener el número $n$ para que la relación $\frac{a}{b}$ tenga un valor determinado $p$;

3° Aplicar la fórmula al caso que se tuviera $r=0{,}025$, $p=\frac{1}{2}$.

## PRINCIPALES FÓRMULAS

EMPLEADAS EN LA OBRA

Cuadrado de una suma. . . . . . . $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Cuadrado de una diferencia. . . . . $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
Producto de una suma por una diferencia . . . . . . . . . . . . . . $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.
Cociente de $x^m - a^m$ por $x - a$. $x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} .. a^{m-1}$.
Cociente de $x^m + a^m$ por $x - a$ ...... $x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + a^3x^{m-4} ...... + a^{m-1}$, resta $2a^m$.
Razones iguales $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $ad = bc$; $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$; $\frac{a}{b \pm a} = \frac{c}{d \pm c}$.
Razones iguales $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \cdots\cdots \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$.
Expresión de un número par . . . . . . . . . . . . . . . . $2n$.
Expresión de un número impar. . . . . . . . . . . . . $2n+1$.
Ecuación de 1.er grado con 2 incógnitas $x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$; $y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$.
Valores de dos cantidades cuando se conoce la suma $s$ y la diferencia $d$. . . . . . . . . . . . $x = \frac{s+d}{2}$; $y = \frac{s-d}{2}$.

### Ecuaciones de segundo grado.

Ecuación incompleta $ax^2 + c = 0$. . . . . . . $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Ecuación completa $ax^2 + bx + c = 0$. . $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Ecuación completa, siendo $b$ par. . . . $x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$.

Ecuación $x^2 + px + q = 0$ . . . . . . . $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Suma de las dos raíces . . . $x' + x'' = -p$, ó $x' + x'' = -\frac{b}{a}$.

Produeto de las raíces. . . . . . . . . $x'x'' = q$, ó $x'x'' = \frac{c}{a}$.

Ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$. $x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$



Ecuación trinomia $ax^{2n} + bx^n + c = 0$. $x = \sqrt[n]{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

### Progresiones aritméticas.

Valor de un término de un orden cualquiera. $l = a + (n-1)r$.
Suma de los términos. . . . . . . . . . . . . $s = \frac{(a+l)n}{2}$.

### Progresiones geométricas.

Valor de un término de un orden cualquiera. . . $l = aq^{n-1}$.
Suma de los términos. $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$, ó $S = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$, ó $S = \frac{lq - a}{q - 1}$.
Límite de la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente. . . . . . . . . . . . . . . . . . $L = \frac{a}{1 - q}$

### Interés compuesto. — Anualidades.

Fórmula general. . . . . . . . . . . . . . . $A = a(1 + r)^n$.
— capitalizándose los intereses cada seis meses. $A = a\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2n}$.
Constitución de un capital . . . . $A = \frac{a(1+r)[(1+r)^n - 1]}{r}$.
Amortización. . . . . . . . . . . . . . . . $a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$.

### Logaritmos de $(1 + r)$ con nueve decimales (núm. 432.)

| Números. | Logaritmos. | Números. | Logaritmos. |
|---|---|---|---|
| 1,02 | 0,008 600 172 | 1,06 | 0,025 305 865 |
| 1,025 | 0,010 723 865 | 1,065 | 0,027 349 608 |
| 1,03 | 0,012 837 225 | 1,07 | 0,029 383 778 |
| 1,035 | 0,014 940 350 | 1,075 | 0,031 408 464 |
| 1,04 | 0,017 033 339 | 1,08 | 0,033 423 756 |
| 1,045 | 0,019 116 290 | 1,09 | 0,037 426 498 |
| 1,05 | 0,021 189 299 | 1,10 | 0,041 392 686 |
| 1,055 | 0,023 252 460 | 1,12 | 0,049 218 022 |

# ÍNDICE

## LIBRO III

## RADICALES Y ECUACIONES DE 2° GRADO







## LIBRO IV

## NOCIONES DE ANÁLISIS COMBINATORIO



## LIBRO V

## PROGRESIONES



## LIBRO VI

## LOGARITMOS Y ECUACIONES EXPONENCIALES

## NOTAS



## EJERCICIOS PROPUESTOS

### LIBRO I



### LIBRO II



### LIBRO III







### LIBRO IV



### LIBRO V



### LIBRO VI



### Ejercicios de recapitulación.



16992. — Paris. Imprenta de la Vda de C. Bouret. — 1-32.

# Curso de estudios de las escuelas cristianas

## G. M. BRUÑO

**Álgebra** *(Elementos de).*
— *Libro del maestro.*
**Aritmética, Curso elemental.**
— *Libro del maestro.*
**Aritmética, Curso medio.**
— *Libro del maestro.*
**Aritmética** *(Elementos de).*
— *Libro del maestro.*
**Botánica experimental.**
**Ciencias** *(Nociones elementales de).*
**Contabilidad** *(Elementos de).*
**Física usual** *(Elementos de).*
**Fisiología experimental.**
**Geometría** *(Elementos de).*
— *Libro del maestro.*
**Geometría analítica y cálculo infinitesimal.**
**Historia natural e higiene.**
**Compendio de historia natural.**
**Mineralogía.**
**Química usual** *(Elementos de).*
**Taquigrafía comercial** *(Manual práctico).*
**Teneduría de libros** *(Curso elemental).*
— *Libro del maestro.*
**Trigonometría rectilínea y esférica.**
— *Libro del maestro.*
**Zoología experimental.**