

En el presente manuscrito se desarrolla la teoría de efectos oscilatorios de tipo óptico en la densidad de estados de electrones vestidos de fotones al igual que en magnitudes asociadas a ésta como son el potencial químico, el tiempo de relajación electrónico y especialmente se acentúa el estudio en la conductividad terahercios de láminas de grafeno depositadas sobre un sustrato en presencia de campos electromagnéticos circularmente polarizados. Este tipo de efectos pueden manifestarse en datos experimentales de espectroscopía terahercios en monocapas de grafeno en presencia de campos *ac* intensos.



Escanee el código QR para conocer más títulos publicados por el Sello Editorial Universidad del Atlántico



ISBN 978-958-5525-48-1



9 789585 525481 >

Efectos Oscilatorios de tipo óptico

Ricardo Vega Monroy - Guillermo Salazar Cohen



Efectos Oscilatorios

de tipo óptico en la conductividad terahercios del grafeno

Ricardo Vega Monroy
Guillermo Salazar Cohen

Efectos Oscilatorios

**de tipo óptico en la conductividad
terahercios del grafeno**



Efectos Oscilatorios

de tipo óptico en la conductividad
terahercios del grafeno

Ricardo Vega Monroy
Guillermo Salazar Cohen



Catalogación en la publicación. Universidad del Atlántico. Departamento de Bibliotecas

Vega Monroy, Ricardo -- Salazar Cohen, Guillermo.

Efectos oscilatorios de tipo óptico en la conductividad terahercios del grafeno / Ricardo Vega Monroy, Guillermo Salazar Cohen. – 1 edición. – Puerto Colombia, Colombia: Sello Editorial Universidad del Atlántico, 2018.

46 páginas. Ilustraciones.

Incluye bibliografía

ISBN 978-958-5525-48-1 (Libro descargable PDF)

1. Física 2. Oscilaciones – física 3. Óptica física. I. Autor. II. Título.

CDD: 530 V422

Efectos oscilatorios de tipo óptico en la conductividad terahercios del grafeno

Autoría: Ricardo Vega Monroy - Guillermo Salazar Cohen

© Universidad del Atlántico, 2018

Edición:

Sello Editorial Universidad del Atlántico

Km 7 Vía Puerto Colombia (Atlántico)

www.uniatlantico.edu.co

publicaciones@mail.uniatlantico.edu.co

Impresión:

Calidad Gráfica S.A.

Av. Circunvalar Calle 110 No. 6QSN-522

PBX: 336 8000

lsalcedo@calidadgrafica.com.co

Barranquilla, Colombia

Publicación Electrónica

Barranquilla (Colombia), 2018

Nota legal: Reservados todos los derechos. No se permite la reproducción total o parcial de esta obra, ni su transmisión en cualquier forma o por cualquier medio (electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros medios conocidos o por conocerse) sin autorización previa y por escrito de los titulares de los derechos patrimoniales. La infracción de dichos derechos puede constituir un delito contra la propiedad intelectual. La responsabilidad del contenido de este texto corresponde a sus autores.

Depósito legal según Ley 44 de 1993, Decreto 460 del 16 de marzo de 1995, Decreto 2150 de 1995 y Decreto 358 de 2000.



CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	9
ESPECTRO DE ENERGÍA	13
2.1. Electrones vestidos de fotones.....	13
2.2. Brecha topológica.....	17
2.3. Densidad de estados	19
OSCILACIONES ÓPTICAS.....	21
3.1. Oscilaciones de la densidad de estados	21
3.2. Oscilaciones del potencial químico	23
3.3. Tiempo de relajación electrónica	27
CONDUCTIVIDAD ÓPTICA.....	31
4.1. Ecuación de Kubo	31
4.2. Conductividad óptica terahercios.....	34
4.3. Oscilaciones de la conductividad.....	36
BIBLIOGRAFÍA	43



LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1:	Estructura de bandas del grafeno [3].....	10
Figura 1.2:	Capa de grafeno soportada sobre un sustrato e irradiada por un campo electromagnético <i>ac</i> circularmente polarizado	12
Figura 2.1:	Representación del espectro de energía de los electrones vestidos de fotones en grafeno.....	19
Figura 2.2:	Densidad de estados de los electrones vestidos de fotones $\Sigma = \epsilon/E_+$	20
Figura 3.1:	Densidad de estados termodinámica como función de la frecuencia del campo <i>ac</i>	23
Figura 3.2:	Densidad de estados termodinámica como función de la frecuencia del campo <i>ac</i> para $\gamma = 0,99$ (línea sólida) y $\gamma = 0,75$ (línea punteada).....	24
Figura 3.3:	Densidad de estados termodinámica como función de la frecuencia del campo <i>ac</i> para $\chi = 1/\tau \mu = 0,5$ (línea sólida) y $\chi = 0,1$ (línea punteada).....	24
Figura 3.4:	Potencial químico como función de la frecuencia del campo circularmente polarizado [24].....	27
Figura 4.1:	Conductividad versus frecuencia para $T = 359K$, $\mu = meV$, y $\tau = 46fs$. $\sigma_0 = e^2/4\hbar$	40
Figura 4.2:	Conductividad versus frecuencia para los mismos valores de los parámetros en la figura 3.2 y temperaturas $T = 336K$ (curva inferior), $T = 336K$ (curva media), y $T = 336K$ (curva superior).....	40

Figura 4.3:	Conductividad versus la amplitud del campo para los mismos valores de los parametros como en la Figura 4.1. $E^* = (2\hbar\omega/\epsilon_0 A)^{1/2}$	42
Figura 4.4:	Conductividad versus frecuencia para los valores de los parámetros de la Figura 4.1; $\tau = 30fs$ (línea negra) y $\tau = 44fs$ (línea gris)	42



INTRODUCCIÓN

En años recientes, después que fue posible separar la capa de grafeno de una estructura gráfitica, un gran número de trabajos ha sido dedicado a estudiar este sistema debido a las propiedades no peculiares encontradas en este material [28, 29, 27, 6, 9, 2, 19, 12, 10, 13, 11, 40, 39, 8, 18]. La estructura característica del grafeno, en la cual las bandas de valencia y de conducción se tocan en dos puntos no equivalentes en la esquina de la primera zona de Brillouin, como consecuencia de su red en forma de pánel de abejas, hace a este material ópticamente transparente al igual que altamente buen conductor [26, 4] (ver Figura 1.1). Por lo anterior, las excitaciones de baja energía en grafeno poseen un espectro de dispersión lineal similar a los fotones en la radiación electromagnética, lo cual afecta de manera radical las propiedades de transporte en este sistema. En particular, las propiedades ópticas y eléctricas en grafeno bajo la acción de campos alternos intensos han sido objeto de muchas investigaciones, encontrándose que la radiación ac cambia de manera sorpresiva la estructura energética y, consecuentemente, la densidad de estados de este sistema [7, 25]. En este sentido, una variedad de fenómenos han sido predichos para ser observados en grafeno, como por ejemplo el efecto Hall fotovoltaico [30], las corriente valle-polarizadas [33], etc..

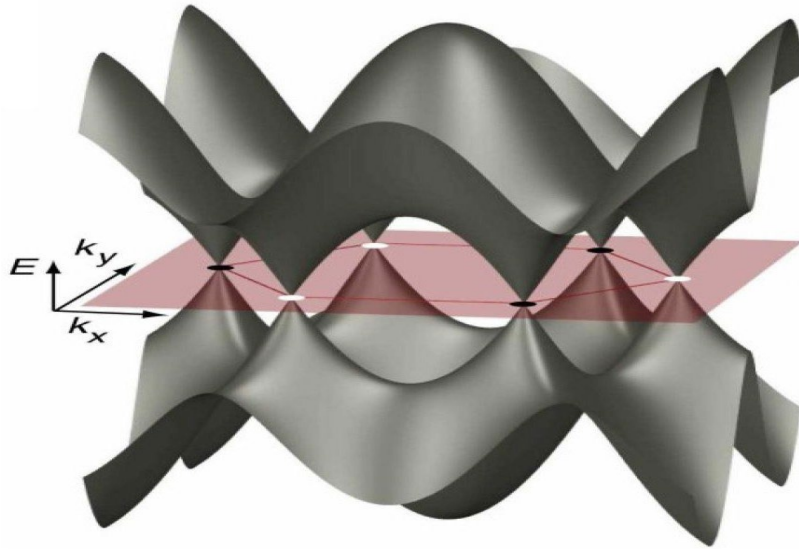


Figura 1.1: Estructura de bandas del grafeno [3]

Por otra parte, también se ha predicho que alrededor de los puntos de Dirac en grafeno en presencia de campos circularmente polarizados se puede observar un conjunto de estados localizados, los cuales se asocian con estados electrónicos vestidos de fotones que pueden conducir a transiciones metal-aislante [15]. Estos estados electrónicos vestidos de fotones han sido relacionados con un sin número de fenómenos como por ejemplo: el transporte electrónico no disipativo [16], el efecto magnetoóptico Franz-Keldish [38], el tunelamiento anómalo fotoasistido [14], entre otros.

En este contexto, para describir la dinámica de portadores de carga en grafeno, el modelo a seguir debe ser dinámico, el cual debe tener en cuenta la respuesta no lineal debido a la fuerte interacción entre los portadores de carga y la radiación electromagnética que lleva a transiciones interbandas, así como además a transiciones intrabandas. Sin embargo, como es conocido de la literatura, se tiene que para láminas de grafeno en los rangos de frecuencias de terahercios y grandes intensidades, esencialmente los fenómenos no lineales de la conducción pueden ser descritos por un modelo lineal, el cual es suficiente para una completa descripción de los fenómenos ópticos. La respuesta no lineal del sistema se introduce en el modelo lineal a partir de fenómenos de dispersión, para los cuales el tiempo de relajación depende de la amplitud del campo ac. En este sentido, generalmente la conductividad terahercios es descrita por el modelo de Drude. Lo anterior se soporta en datos experimentales

de espectroscopía de terahercios, en los cuales el espectro de transmisión a través de la muestra de grafeno depositada sobre un sustrato se relaciona con la conductividad del grafeno a través de la ecuación

$$T(\omega) = \frac{T_{g+s}}{T_s} = \frac{1+n}{1+n+Z_o\sigma(\omega)}, \quad (1.1)$$

donde T_{g+s} y T_s son la transmitancia a través de la muestra sin el sustrato y la transmitancia del sustrato, respectivamente. Aquí n es el índice de refracción del sustrato, $\sigma(\omega)$ es la conductividad compleja de la capa de grafeno y Z_o es la impedancia del espacio libre (ver Figura 1.2). Normalmente en el rango de frecuencias de terahercios, la conductividad es dominada por la respuesta intrabanda y en este sentido esta cantidad es descrita, como se dijo anteriormente, por la conductividad de Drude

$$\sigma(\omega) = \frac{D}{\frac{1}{\tau} - i\omega}, \quad (1.2)$$

donde ω es la frecuencia del campo ac, τ es el tiempo total de relajación del momento de los portadores de carga y D es el peso Drude, el cual está dado por la expresión:

$$D = \frac{2e^2 k_B T}{\pi \hbar^2} \ln \left(2 \cosh \frac{\mu}{2k_B T} \right), \quad (1.3)$$

siendo e la carga del electrón, k_B la constante de Boltzmann, T la temperatura, \hbar la constante reducida de Planck y μ el potencial químico. Para simplificar los desarrollos, el potencial químico se considera igual a la energía de Fermi a temperatura ambiente. Sin embargo, a medida que aumenta la temperatura, es necesario ajustarlo para que la carga neta en la capa de grafeno se mantenga constante. El potencial químico junto con la temperatura correspondiente se usa para calcular el peso de Drude.

En el anterior contexto, en el presente manuscrito se construye una teoría que describe efectos oscilatorios de tipo óptico en la densidad de estados y en magnitudes asociadas a ésta como el potencial químico, el tiempo de relajación electrónico y la conductividad terahercios del grafeno. Este tipo de efectos se manifiestan en datos experimentales de espectroscopía terahercios en monocapas de grafeno en presencia de campos ac intensos [21, 5, 6, 41].

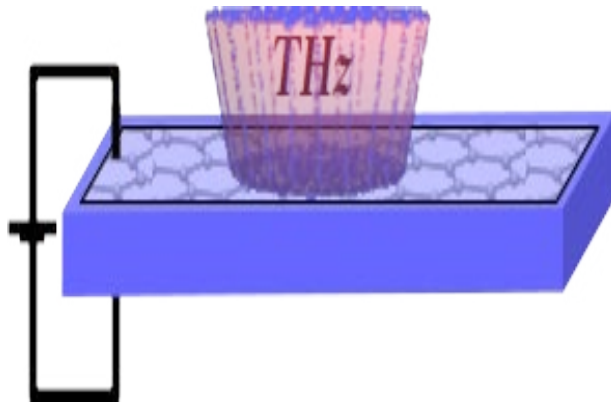


Figura 1.2: Capa de grafeno soportada sobre un sustrato e irradiada por un campo electromagnético *ac* circularmente polarizado

El modelo que se desarrolla en el presente manuscrito está basado en la ecuación lineal de Kubo y tiene un componente importante relacionado con la relajación del momento de los electrones vestidos de fotones con impurezas de la muestra.

El manuscrito está distribuido de la siguiente manera: En el Capítulo 2 se determina el espectro de energía de los estados electrónicos vestidos de fotones, al igual que la brecha de energía de naturaleza topológica. Además se determina la densidad de los estados de electrones vestidos de fotones. En el Capítulo 3 se determina los efectos oscilatorios asociados a la densidad de estados y, finalmente, en el Capítulo 4 se muestra la validez en la utilización de la ecuación lineal de Kubo en la descripción de efectos no lineales de la conductividad del grafeno y además se estudia en detalle los efectos cuánticos oscilatorios en la misma en presencia de radiación circularmente polarizada.



ESPECTRO DE ENERGÍA

El propósito del presente capítulo es mostrar cómo la fuerte interacción entre la radiación circularmente polarizada y los fermiones de Dirac en grafeno llevan a la introducción en el sistema de una fase topológica, la cual transforma de forma radical el espectro de energía en grafeno y de igual manera, como se verá más adelante, se manifiesta en la respuesta electrodinámica de este material.

2.1. ELECTRONES VESTIDOS DE FOTONES

Cuando se coloca una hoja de grafeno en presencia de radiación electromagnética intensa tiene lugar una interacción fuerte entre los electrones de Dirac del grafeno y los fotones del campo. Lo anterior se puede evidenciar fácilmente en el límite cuasiclásico [15].

Contrariamente a otros sistemas del estado sólido, el acople electrón-fotón es fuerte en grafeno, incluso para campos *ac* débiles. En este sentido, la energía característica del acople electrónico a un campo *ac* es la energía cinética del movimiento inducido por la onda electromagnética. Para un sistema del estado sólido con dispersión electrónica cuadrática

$$\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2m}, \quad (2.1)$$

la energía cinética asociada al movimiento electrónico en presencia del campo electromagnético es:

$$W_o = \frac{e^2 E_o^2}{2m\omega^2}, \quad (2.2)$$

donde E_o es la amplitud del campo electromagnético. Por el contrario, en grafeno, debido a la naturaleza untrarelativista de los electrones de Dirac, el espectro de energía es lineal $\varepsilon(p) = \pm v_f |p|$ y la energía cinética inducida por la onda electromagnética es dada por la expresión:

$$W = \frac{ev_f E_o}{\omega}. \quad (2.3)$$

Si se comparan ambas energías definidas por las ecuaciones (2.2) y (2.3) se tiene

$$W/W_o = \frac{2mv_f\omega}{eE_o} \sim \frac{10^1}{E_o} \text{ kV/cm}. \quad (2.4)$$

La relación anterior muestra claramente que el acople electrónico a una radiación electromagnética es sustancialmente más fuerte en grafeno que en otros sistemas de la materia condensada debido a que $W/W_o \gg 1$, incluso para campos ac débiles.

En este contexto, el hamiltoniano para estados electrónicos en las cercanías de los puntos de Dirac para una capa de grafeno en el plano $x - y$ en presencia de un campo ac es definido por la expresión:

$$\hat{H} = v_f \hat{\sigma} \cdot (\hat{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)), \quad (2.5)$$

donde v_f , σ y \hat{p} son la velocidad de Fermi, las matrices de Pauli y el momento del electrón respectivamente. En los límites de la teoría de campos estándar y asumiendo el campo electromagnético circularmente polarizado, el vector potencial magnético $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ de la radiación electromagnética puede ser descrito en términos de los operadores de segunda cuantización de creación y aniquilación de la forma:

$$\mathbf{A}(r, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega\epsilon_0 S}} (\hat{e}_+ \hat{a} + \hat{e}_- \hat{a}^\dagger), \quad (2.6)$$

siendo $\hat{e}_{\pm} = (e_x \pm ie_y)/\sqrt{2}$ los vectores unitarios de polarización circular derecha (+) e izquierda (-). De igual forma, ω es la frecuencia del modo, ϵ_0 es la permitividad del vacío y S es el área de la hoja de grafeno. El campo electromagnético se asume de polarización circular derecha y orientado a lo largo del eje z . Si se reemplaza la expresión (2.6) en la ecuación (2.5), el hamiltoniano \hat{H} adquiere la forma:

$$\hat{H} = v_f(\sigma_- \hat{p}_+ + \sigma_+ \hat{p}_-) + \epsilon_a(\sigma_- \hat{a}^\dagger + \sigma_+ \hat{a}). \quad (2.7)$$

En la ecuación anterior se introdujeron los siguientes parámetros $\epsilon_a = ev_f \sqrt{2\hbar/\omega\epsilon_0 S}$, así como $\hat{p}_{\pm} = \hat{p}_x \pm i\hat{p}_y$ y los pseudo operadores σ_+ y σ_- , definidos como

$$\sigma_+ = \frac{(\sigma_x + i\sigma_y)}{2}, \quad (2.8)$$

$$\sigma_- = \frac{(\sigma_x - i\sigma_y)}{2}. \quad (2.9)$$

Para solucionar la ecuación de Schroedinger y obtener el espectro de energía se empleará una aproximación no perturbativa [31]. En este sentido, a fin de diagonalizar el hamiltoniano se introduce el operador

$$\hat{\tilde{H}} = \sigma_z \hat{H} \sigma_z = -\hat{H}, \quad (2.10)$$

el cual actúa en el mismo espacio de Hilbert en el que actúa el hamiltoniano \hat{H} . Si se toma una combinación lineal de los operadores $\hat{\tilde{H}}$ and se tiene:

$$\mu \hat{\tilde{H}} \hat{H} + \eta (\hat{\tilde{H}} + \hat{H}) = \hat{J} \mathbf{I} + \mathbf{K}, \quad (2.11)$$

donde μ y η son coeficientes reales. Las cantidades \hat{J} y \mathbf{K} son de manera general un operador no diagonal y una matriz de 2×2 respectivamente. Si se escoge $\mu = -1$ y $\eta = \epsilon$, finalmente se obtiene la siguiente ecuación de valores propios:

$$\tilde{\epsilon}^2 |\psi\rangle = (\hat{J} \mathbf{I} + \mathbf{K}) |\psi\rangle. \quad (2.12)$$

En la obtención de la identidad anterior se ha tenido en cuenta la propiedad de simetría traslacional que posee la estructura de grafeno introduciendo una función estacionaria

$$|\Psi\rangle = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} |\psi\rangle. \quad (2.13)$$

En la igualdad (2.12) la cantidad $\tilde{\epsilon}$ tiene la forma

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{\epsilon^2 - v_f^2 \hbar^2 k^2}. \quad (2.14)$$

La forma explicita de la matriz \mathbf{K} se define a través de la expresión:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \epsilon_a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Por otra parte, de la igualdad (2.12), el operador \hat{J} se puede escribir de la forma

$$\hat{J} = \epsilon_a^2 \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (2.16)$$

El espinor $|\psi\rangle$ en la ecuación (2.13) se puede representar como el producto de dos funciones $|\psi\rangle = \chi|\varphi\rangle$, las cuales son soluciones de las ecuaciones:

$$\mathbf{K}\chi = \lambda_\chi \chi, \quad (2.17)$$

$$\hat{J}|\varphi\rangle = \lambda_\varphi |\varphi\rangle, \quad (2.18)$$

donde λ_χ y λ_φ son los valores propios de \mathbf{K} y \hat{J} respectivamente, los cuales toman los valores $\lambda_\chi = 0, \epsilon_N^2$ y $\lambda_\varphi = \epsilon_N^2 N$.

En la obtención de los valores propios, el vector $|\varphi\rangle$ se expresó a través de la combinación de vectores $|+1/2, N\rangle$ y $|-1/2, N+1\rangle$ asociados al producto del estado de pseudo espín electrónico y estados fotónicos N circularmente polarizados. Finalmente, la relación de dispersión para estados mixtos fotón-electrón en la capa de grafeno toma la forma [15, 38]:

$$\epsilon_N = \pm \left(\epsilon_N^2 + \zeta^2(k) \right)^{1/2}. \quad (2.19)$$

Formalmente, la expresión en la ecuación (2.19) corresponde a la energía de estados llamados electrones vestidos de fotones en grafeno, los cuales tienen energía de confinamiento

$$\epsilon_N = \epsilon_a \sqrt{N + \frac{1 \pm 1}{2}} \quad (2.20)$$

y espectro de dispersión en el plano

$$\zeta(k) = \hbar v_f k, \quad (2.21)$$

el cual se relaciona con estados de translación. El parámetro N está asociado al número de ocupación de fotones en estados electrónicos vestidos de fotones. La cuantización en la ecuación (2.20) luce similar a la cuantización de Landau en el grafeno, pero a diferencia del espectro de Landau, en este caso, hay grados de libertad extras, asociados a dispersión a lo largo de estados \vec{k} , así que la energía ϵ_N no presenta degeneración macroscópica debida al vector de onda. Además, es importante resaltar que el sistema de estados de electrones vestidos de fotones con energía definida en la expresión (2.20) posee una doble degeneración asociada a diferentes estados $|\pm 1/2, N\rangle$ y $|\mp 1/2, N\pm 1\rangle$.

2.2. BRECHA TOPOLOGICA

Si se considera un campo electromagnético intenso, entonces para un valor máximo $N = N_o$, el cual es fijado por la fuente del campo ac, se define de la ecuación (2.20) el valor de la brecha de energía $\epsilon_g = \epsilon_a \sqrt{N_o} = v_f e E_o / \omega$. Lo anterior indica que cualquier otro estado con energía ϵ_N satisface la relación $\epsilon_N \leq \epsilon_g$. Por consiguiente, el estado electrónico vestido de fotón ϵ_N solo puede ser encontrado dentro de dicha brecha ϵ_g . En este contexto, la brecha de energía está formada por una estructura de estados electrónicos vestidos de fotones de naturaleza topológica.

Se puede obtener una expresión explicita para los estados electrónicos vestidos de fotones fuera de la brecha a partir de la ecuación (2.19) en la aproximación de masa efectiva y en el límite $k < k^*$

$$\epsilon = \pm \left(\epsilon_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \right), \quad (2.22)$$

donde el valor límite k^* está definido por la expresión $k^* = \hbar\omega / 2eE_o$, siendo $E_o = \sqrt{4\pi N_o \hbar\omega / \epsilon_o S}$ la amplitud del campo electromagnético y m^* es la masa efectiva de los electrones vestidos de fotones, la cual tiene la siguiente forma:

$$\frac{1}{m^*} \approx \frac{v_f^2}{\epsilon_g} \left[1 - \frac{v_f^2 \hbar^2 k^2}{4\epsilon_g^2} + \frac{v_f^4 \hbar^4 k^4}{8\epsilon_g^4} - \dots \right]. \quad (2.23)$$

La expresión en la ecuación (2.22) evidencia que el vestimiento fotónico de los electrones abre una brecha en el espectro de electrones en grafeno, introduciendo una

masa efectiva a los electrones de Dirac y conduciendo a una dispersión parabólica de energía. Estos estados fuera de la brecha topológica se relacionan con transiciones interbandas, las cuales, como es conocido, determinan la principal contribución a la conductividad óptica en grafeno y además se relacionan a transiciones de tipo metal-aislante en grafeno [15], el efecto Franz-Keldysh magnetoóptico [38], a condensados de Bose-Einstein de electrones vestidos de fotones apareados [36], al igual que a transporte electrónico sin calor de Joules [16] y a tunelamiento anómalo asistido por fotones[14].

El espectro de energía de estados electrónicos vestidos de fotones, representado esquemáticamente en la Figura 2.1, influye de manera radical, como se mostrará mas adelante, en las propiedades ópticas y de transporte del grafeno irradiado por luz terahertz circularmente polarizada. Como se observa claramente, la característica distintiva del espectro de dispersión mostrado en la ecuación (2.22) está relacionada con la brecha de energía entre las bandas de valencia y conducción. Formalmente, el valor de la brecha de energía inducida por fotones de la radiación en el límite de grandes intensidades posee una expresión idéntica a la brecha dinámica inducida en el punto Dirac por una radiación clásica circularmente polarizada. Sin embargo, hay una diferencia conceptual entre la brecha de energía estacionaria en la ecuación (2.22), la cual aparece debida a la solución de la ecuación de Schroedinger independiente del tiempo, cuyos valores propios cambian la densidad de estados y pueden ser perceptibles en las distintas propiedades del sistema. En contraste, la brecha dinámica entra en la

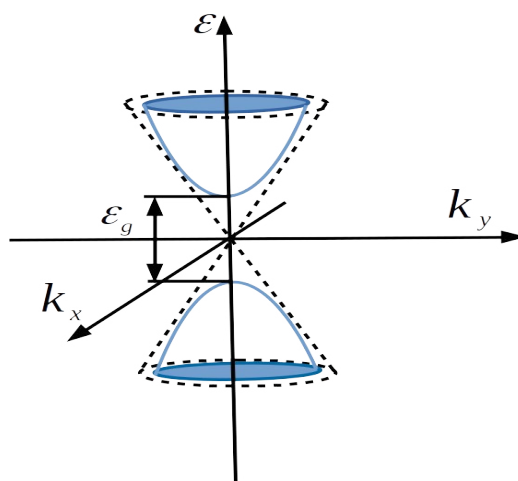


Figura 2.1: Representación del espectro de energía de los electrones vestidos de fotones en grafeno

teoría de la interacción grafeno-campo desarrollada para describir diferentes sistemas cuánticos expuestos a campos clásicos dependientes del tiempo y denota la brecha en el espectro de las cuasi energías de Floquet. Por lo tanto, la brecha dinámica no es brecha verdadera y no modifica la densidad de estados de los portadores de carga.

2.3. DENSIDAD DE ESTADOS

El espectro de energía en la ecuación (2.19) es una solución a la ecuación de Schroedinger independiente del tiempo de forma no perturbativa y, por consiguiente, dicha solución debe estar presente en todas las propiedades perceptibles a la densidad de estados de los electrones vestidos de fotones. La densidad de estados asociada con los estados extendidos k tiene una forma similar a la de un gas bidimensional, en tanto que la densidad de estados $D(\epsilon_N)$ relacionada con estados localizados solamente está definida en los límites dentro de la brecha topológica. En este sentido, la densidad de estados para estados ligados fotón-electrón tiene la forma:

$$D(\epsilon_N) = -\frac{g}{\pi} \text{ImTr}G(\epsilon_N), \quad (2.24)$$

donde Tr es la traza de la función de Green estacionaria, la cual está asociada al hamiltoniano \hat{H} para estados ligados y es una matriz de 2×2 que puede ser obtenida de la definición estandar y, además, con la ayuda de la ecuación (2.19)

$$G(\epsilon_N) = \begin{pmatrix} G_{11} & -G_{10} \\ -G_{01} & G_{00} \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

cuyos elementos matriciales son definidos así:

$$G_{\sigma\sigma'} = \sum_{N,s} \frac{s \langle N + \sigma' | \hat{a}^\dagger \hat{a} | N + \sigma \rangle}{\epsilon - s\epsilon_N + i\eta}. \quad (2.26)$$

En esta ecuación $\sigma, \sigma' = 0, 1$ y el parámetro η es una parte infinitesimal positiva de ϵ , para garantizar la convergencia de la función de Green. Además, g es la degeneración por espín y por valle del sistema. En la Figura 2.2 se muestra la densidad normalizada de estados electrónicos vestidos de fotones localizados dentro de la brecha topológica en el régimen de energías positivas. Los estados electrónicos vestidos de fotones aparecen como polos en la continuación analítica de la función de Green $G(\epsilon_N)$, lo cual se evidencia por los picos en la gráfica.

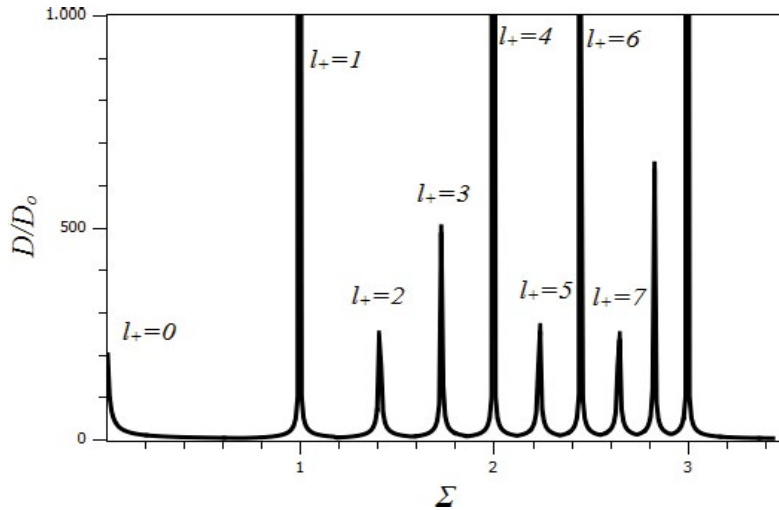


Figura 2.2: Densidad de estados de los electrones vestidos de fotones $\Sigma = \epsilon/E_+$.



OSCILACIONES ÓPTICAS

El presente capítulo tiene por objeto mostrar que la fuerte interacción entre los electrones de Dirac y los fotones de la radiación terahercios circularmente polarizada lleva al comportamiento oscilatorio de la densidad de estados del sistema, lo cual se refleja en oscilaciones cuánticas de tipo óptico de cantidades relacionadas como son el potencial químico y el tiempo de relajación de los momentos de los electrones vestidos de fotones.

3.1. OSCILACIONES DE LA DENSIDAD DE ESTADOS

La densidad de estados definida en la sección anterior puede ser apreciada directamente en magnitudes medibles experimentalmente como la compresibilidad o la conductividad del grafeno. En este sentido, la densidad de estados termodinámica se define de la forma:

$$D_T = \int_{-\infty}^{\infty} D(\epsilon) \left(-\frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right) d\epsilon, \quad (3.1)$$

donde f es la función estadística de Fermi. Para el sistema de electrones vestidos de fotones con espectro de energía ϵ_N , definido en la ecuación (2.19), la densidad de estados de la ecuación (2.24) se escribe como:

$$D(\epsilon) = g \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta(k) \rho[\zeta(k)] \sum_{N=0}^{\infty} [\delta(\epsilon - \epsilon_N) + \delta(\epsilon + \epsilon_N)]. \quad (3.2)$$

En esta ecuación, $\delta(\epsilon \pm \epsilon_N)$ es la función delta de Dirac, $\rho[\zeta(k)]$ es la densidad de estados asociada con estados k en el espectro de los electrones vestidos de fotones y $g = g_s g_v$ es la degeneración por espín y por valle.

Por simplicidad se calculará, sin pérdida de generalidad, la densidad de estados termodinámica a temperatura $T = 0$ para mostrar el efecto oscilatorio de la densidad de estados sin tener en cuenta efectos asociados a la temperatura y desorden. En este contexto, si se usa la relación $\delta(\epsilon - \epsilon_N) + \delta(\epsilon + \epsilon_N) = 2|\epsilon| \delta(\epsilon^2 - \epsilon_N^2)$ y la formula de suma de Poisson [17]

$$\frac{1}{2}F(0) + \sum_{N=-\infty}^{\infty} F(N) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} F(y) e^{2\pi i r y} dy, \quad (3.3)$$

donde r es un entero, la parte oscilante de la densidad de estados termodinámica a temperatura $T = 0$ toma la forma:

$$\tilde{D}_{T0} = \text{sign}(\mu) g \frac{d}{d\mu} \text{Re} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{i}{\pi r} \exp\left(i \frac{2\pi r \mu^2}{\epsilon_a^2}\right) I(r). \quad (3.4)$$

Aquí, $\mu = \hbar v_f \sqrt{\pi n_e}$ es la energía de Fermi del sistema sin campo ac y n_e es la densidad de portadores de carga. El factor $I(r)$ es la transformada de Fourier de la densidad de estados $\rho[\zeta(k)]$, la cual de forma particular para grafeno de tipo n se tiene:

$$I(r) = \int_{-\infty}^{\zeta(k_f)} d\zeta(k) \rho[\zeta(k)] \exp\left(i \frac{2\pi r \epsilon^2}{\epsilon_a^2}\right). \quad (3.5)$$

Teniendo en cuenta la expresión para $\zeta(k)$ y evaluando el integral anterior, la parte real de la ecuación (3.4) adquiere la siguiente expresión analítica [37]:

$$\tilde{D}_{T0} = g \frac{S\mu}{\pi \hbar^2 v_f^2} \text{sign}(\mu) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin\left(2\pi r \frac{\omega}{\omega^*} \gamma\right)}{r}, \quad (3.6)$$

donde $\omega^* = 2\hbar e^2 v_f^2 / \epsilon_o S \mu^2$ define el período de oscilación y la cantidad $\zeta(k_f) = \hbar v_f k_f$ es diferente de la energía de Fermi μ , siendo $k_f = [2m^*(\mu - \epsilon_g)]^{1/2}$. El parámetro $\gamma = 1 - (\hbar v_f k_f / \mu)^2$ caracteriza la desviación del valor $\zeta(k_f)$ con respecto a la energía de Fermi μ y consecuentemente afecta el período de oscilación.

Como se observa de los desarrollos anteriores, el corrimiento de las singularidades bajo la acción del campo ac externo conduce a un cambio periódico de la densidad de estados y al mismo tiempo a la reducción del vector de Fermi, lo cual lleva a transiciones electrónicas de adentro de la brecha topológica a estados extendidos fuera de la misma. Estos aspectos conducen a un comportamiento oscilatorio de la densidad de estados similar a como ocurre para el caso de las oscilaciones magnéticas [34].

El factor integral $I(r)$, el cual está relacionado a dispersión a lo largo de estados extendidos, define la forma explícita de las oscilaciones de la densidad de estados introduciendo “beats” con el incremento de la frecuencia del campo ac. Esta situación se evidencia en la Figura 3.1.

Por otra parte, la Figura 3.2 muestra la densidad de estados termodinámica como función de la frecuencia del campo ac para distintos valores del parámetro γ . Como se ve claramente de esta figura, el decrecimiento de γ conduce al aumento del período de oscilación, lo cual está ligado a la desviación de $\zeta(k_f)$ del valor de μ . De igual manera, en la Figura 3.3 es considerado el efecto del desorden en el sistema a través de distintos valores del tiempo de relajación τ , el cual se introduce en el modelo a través del parámetro estandar de Dingle

$$R_D(r) = \exp\left(-\frac{2\pi r \mu}{\tau \varepsilon_a^2}\right). \quad (3.7)$$

3.2. OSCILACIONES DEL POTENCIAL QUÍMICO

Con el fin de hacer una descripción del potencial químico en grafeno, bajo la acción de radiación terhercios circularmente polarizada,

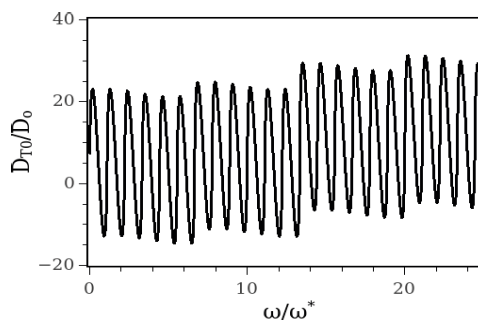


Figura 3.1: Densidad de estados termodinámica como función de la frecuencia del campo ac

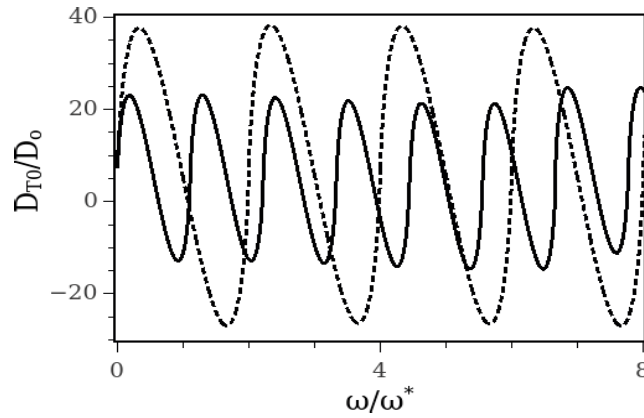


Figura 3.2: Densidad de estados termodinámica como función de la frecuencia del campo ac para $\gamma = 0,99$ (línea sólida) y $\gamma = 0,75$ (línea punteada)

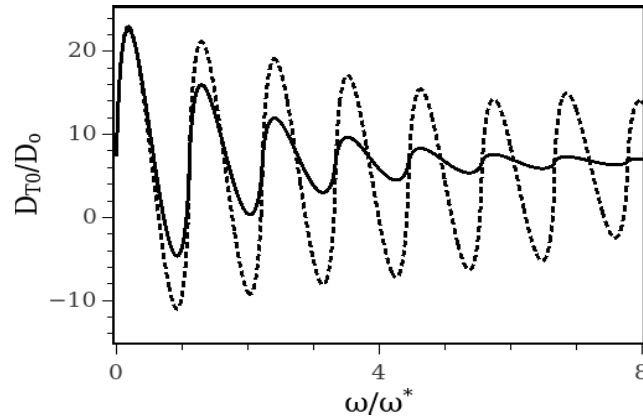


Figura 3.3: Densidad de estados termodinámica como función de la frecuencia del campo ac para $\chi = 1/\tau \mu = 0,5$ (línea sólida) y $\chi = 0,1$ (línea punteada)

es necesario desarrollar la densidad de estados electrónicos obtenida en la Sección 2.3 en el espacio de las frecuencias. En este sentido, la ecuación (2.24) para la densidad de estados del sistema se reescribe a través de la relación:

$$D(\epsilon) = -\frac{g}{\pi} \sum_{N,k} \text{Im} G_R(N, k). \quad (3.8)$$

En la ecuación (3.8) la función de Green retardada $G_R(N, k)$ está dada por la expresión:

$$G_R(N, k) = \frac{1}{\epsilon - \epsilon_N - \Sigma^R(\epsilon)} + \frac{1}{\epsilon + \epsilon_N - \Sigma^R(\epsilon)}. \quad (3.9)$$

En esta ecuación $\pm\epsilon_N$ es la energía de los electrones vestidos de fotones, la cual se determinó en la ecuación (2.19), y el parámetro $\Sigma^R(\epsilon) = \text{Re}\Sigma(\epsilon) + i\text{Im}\Sigma(\epsilon)$ es la autoenergía compleja. El primer y segundo término de la parte derecha de la ecuación (3.9) están relacionados con la función de Green retardada en las bandas de conducción y de valencia respectivamente. La expresión de la función de Green retardada, teniendo en cuenta los parámetros anteriores, se puede escribir en una forma más compacta como sigue:

$$G_R(N, k) = \frac{2(\epsilon' - |\mathbf{Im}\Sigma|)}{(\epsilon' - |\mathbf{Im}\Sigma|)^2 - \epsilon_N^2}. \quad (3.10)$$

En la expresión anterior la energía del sistema se redefine a través de la parte real de la autoenergía

$$\epsilon' = \epsilon + \text{Re}\Sigma. \quad (3.11)$$

Si se utiliza la fórmula de suma de Poisson de la sección anterior (ver ecuación (3.3)) se obtiene la densidad de estados de la forma

$$\frac{D(\epsilon)}{D_o} = \text{Re} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon'}{\epsilon_a} R_D(r) I(r) e^{2\pi i r \frac{\epsilon'^2}{\epsilon_a^2}}. \quad (3.12)$$

En la ecuación (3.12) se definió $D_o = g\sqrt{2\epsilon_o A \omega / \hbar e^2 v^2}$ y el parámetro $I(\epsilon, r)$ tiene la siguiente forma integral

$$I(\epsilon, r) = \int_0^{\infty} d\zeta \varrho(\zeta) e^{-2\pi i r \frac{\zeta^2}{\epsilon_a^2}}, \quad (3.13)$$

donde $\varrho(\zeta)$ es la densidad de estados asociada a estados de Bloch con dispersión k , la cual está definida a través de la ecuación (2.19). Además se introdujo el parámetro de Dingle

$$R_D(\epsilon, r) = e^{-4\pi|r| \frac{\epsilon' |\mathbf{Im}\Sigma|}{\epsilon_a^2}}, \quad (3.14)$$

el cual es dependiente de la energía y aparece después de la integración como una consecuencia intrínseca de la autoenergía dependiente de ϵ . La densidad de estados puede expresarse de forma compacta como sigue:

$$\frac{D(\epsilon)}{D_o} = \frac{\epsilon'}{\epsilon_a} \int_{\epsilon-\epsilon_g}^{\epsilon} \varrho(\zeta) S(\delta, \lambda) d\zeta, \quad (3.15)$$

donde se introdujo el parámetro

$$S = \sum_r e^{-\lambda r} \cos \delta r = \frac{\sinh \lambda}{\cosh \lambda - \cos \delta}, \quad (3.16)$$

siendo λ y δ definidos por las expresiones:

$$\lambda = \frac{\pi \epsilon' |\mathbf{Im} \Sigma|}{\epsilon_a^2}, \quad (3.17)$$

$$\delta = (2\pi \frac{\epsilon_g^2}{\epsilon_a^2}) (1 - \frac{2\epsilon'}{\epsilon_g}). \quad (3.18)$$

Habiendo determinado la densidad de estados del sistema de electrones vestidos de fotones, el potencial químico se determina a partir de la ecuación $n = -\partial\Omega/\partial\mu$, donde Ω es el potencial termodinámico, el cual tiene la forma estandar

$$\Omega = -T \int_0^\infty D(\epsilon) \ln \left[1 + \exp \left(\frac{\mu - \epsilon}{T} \right) \right] d\epsilon, \quad (3.19)$$

obteniendose la siguiente ecuación para la densidad de electrones vestidos de fotones:

$$n_e = \frac{1}{A} \int_0^\infty D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon. \quad (3.19)$$

En la igualdad anterior n_e es la densidad de portadores de carga y f es la función estadística de Fermi. En la Figura 3.4 se muestra el potencial químico a temperatura $T = 300$ K de una capa de grafeno como función de la frecuencia del campo ac . De esta gráfica se observa claramente que, con el aumento de la frecuencia del campo, el potencial químico se mueve hacia masas efectivas decrecientes $m^* \sim \epsilon_g \sim 1/\sqrt{\omega}$, pero con un comportamiento oscilatorio a medida que crece la frecuencia ω . Además cabe resaltar que para frecuencias de campo muy altas en el rango de terahercios, el efecto oscilatorio es críticamente atenuado.

Otro aspecto importante que cabe resaltar es que el comportamiento oscilatorio del potencial químico con respecto a la frecuencia se observa incluso a altas temperaturas, lo cual es sorprendente ya que como es conocido, la temperatura destruye las oscilaciones cuánticas. Este tipo de oscilaciones conocidas como oscilaciones de Bloch de altas temperaturas han sido observadas experimentalmente en estructuras de grafeno en presencia de campos magnéticos [35].

El comportamiento oscilatorio del potencial químico en función de la frecuencia de la radiación polarizada circularmente tiene una naturaleza topológica relacionada con las fases cuánticas introducidas por la fuerte interacción electrón-fotón en el régimen de terahercios. Las transiciones de electrones vestidos de fotones en el grafeno se producen entre estados coherentes de la densidad de estados. Estas transiciones desde dentro de la brecha topológica a estados extendidos fuera de la misma se vuelven más fuertes con el aumento de la frecuencia, lo que conduce a una disminución drástica de la brecha topológica y, en consecuencia, el efecto oscilatorio es sorprendentemente disminuido. La explicación anterior se refleja en el parámetro δ en el factor $S(\delta, \lambda)$, que se incrementa debido al aumento del parámetro $k_f = \sqrt{2m^*(\mu - \varepsilon_g)}/\hbar$, que redefine la altura del potencial químico y tiene una fuerte dependencia de la frecuencia de campo, dando lugar a desplazamientos periódicos del techo de la banda extendida y genera cambios periódicos en la densidad de estados de electrones vestidos de fotones, los cuales finalmente llevan al potencial químico a oscilaciones cuánticas. Este comportamiento oscilatorio se refleja en todas las cantidades asociadas a la densidad de estados como se verá en la siguientes secciones.

3.3. TIEMPO DE RELAJACIÓN ELECTRÓNICA

A fin de definir el tiempo de relajación de los momentos de electrones vestidos de fotones en grafeno es necesario determinar la autoenergía del sistema ya que el tiempo de relajación está asociado con

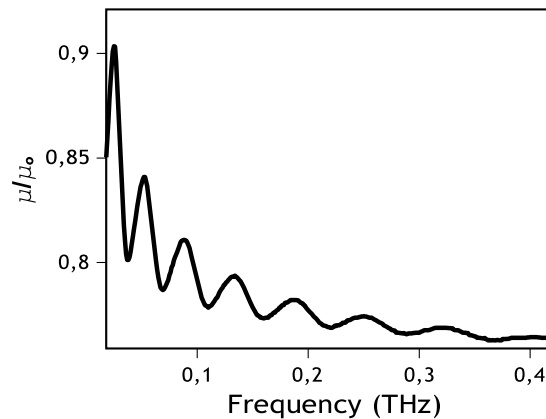


Figura 3.4: Potencial químico como función de la frecuencia del campo circularmente polarizado [24]

la parte imaginaria de la autoenergía a través de la relación

$$\frac{\hbar}{\tau(\epsilon)} = |\mathbf{Im}\Sigma|. \quad (3.21)$$

En este sentido, si se tiene en cuenta que en un gas de electrones la mayoría de los procesos de dispersión son inelásticos, y que el electrón pierde energía en cada dispersión, en el presente trabajo se considera la dispersión de electrones vestidos de fotones en impurezas de corto alcance. Datos experimentales muestran que este mecanismo de dispersión es prevalente a temperaturas cercanas a la ambiente.

Por simplicidad no se evaluará la dependencia de la autoenergía con respecto al número cuántico N , así que se considera esta cantidad como $\mathbf{Im}\Sigma(N, \epsilon) \approx \mathbf{Im}\Sigma(\epsilon)$.

Con el fin de entender el comportamiento de las oscilaciones cuánticas, asociadas al espectro de electrones vestidos de fotones, es preciso limitarse al marco del modelo de impurezas de punto simple para las cuales se tiene el siguiente potencial:

$$V(\vec{r} - \vec{R}) = V_o \delta(\vec{r} - \vec{R}), \quad (3.22)$$

donde \vec{R} es el vector posición de las impurezas que están distribuidas al azar, siendo V_o la amplitud del potencial de la impureza y δ es la función delta de Dirac. Es importante anotar que en la aproximación auto-consistente de Born además del potencial en la ecuación (3.22), también son válidos los potenciales aleatorios suaves.

La expresión para la autoenergía $\Sigma(E)$ se reduce en la ecuación de Dyson a la suma de los diagramas de Feynman sin autointersecciones. Lo anterior es posible cuando la concentración de impurezas es pequeña. La ecuación autoconsistente para la autoenergía se expresa así [20]:

$$\Sigma_R(\epsilon) = n_i V_o \left[1 + g V_o \sum_{N,k} G_R(N, k) \right], \quad (3.23)$$

la cual se puede reescribir de la forma:

$$\Sigma_R(\epsilon) = n_i V_o \left[1 + g V_o \sum_N \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \rho(\zeta) \zeta G_R(N, k) \right]. \quad (3.24)$$

En la ecuación anterior se ha cambiado la suma respecto a k por una integración sobre el parámetro ζ (ver ecuación (2.21), siendo n_i la concentración de impurezas. $G_R(N, k)$ es la función de Green retardada, la cual se determinó en la sección

anterior en la ecuación (3.10). Si se separa la parte imaginaria de la función $\Sigma(\epsilon)$ finalmente se obtiene:

$$|\text{Im}\Sigma| = gn_i V_o^2 \frac{4\pi\epsilon}{\epsilon_a^2} \sum_r e^{-4\pi\epsilon|\text{Im}\Sigma|/\epsilon_a^2} e^{2\pi i r(\epsilon^2 - \zeta^2)/\epsilon_a^2} \zeta d\zeta, \quad (3.25)$$

donde se despreció la parte real $\text{Re}\Sigma$ ya que ésta conlleva unicamente a correcciones en el potencial químico y no afecta el efecto oscilatorio que se pretende estudiar. De forma compacta la ecuación (3.25) se reescribe así:

$$|\text{Im}\Sigma| = gn_i V_o^2 \frac{4\pi\epsilon}{\epsilon_a^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \rho(\zeta) S(\delta, \lambda), \quad (3.26)$$

donde el parámetro S se definió en la ecuación (3.16). Como se observa de la expresión anterior, la cual define el tiempo de relajación de los momentos electrónicos, la parte imaginaria de la autoenergía posee un comportamiento directo al comportamiento definido por la densidad de estados (ver ecuación (3.23)), lo que indica que en la aproximación autoconsistente de Born $D(\epsilon) \sim \tau(\epsilon)^{-1}$. Con la ayuda de la ecuación (3.21), el tiempo de relajación dependiente de la energía toma la siguiente forma integral

$$\frac{1}{\tau(\epsilon)} = gn_i V_o^2 \frac{4\pi\epsilon}{\epsilon_a^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \rho(\zeta) S(\delta, \lambda). \quad (3.27)$$

La ecuación (3.27) describe de forma general el comportamiento del tiempo de relajación de los momentos de los electrones vestidos de fotones sobre impurezas como función de los parámetros δ y λ definidos en las ecuaciones (3.17) y (3.18). Ahora, con el fin de obtener una expresión explícita para $\tau(\epsilon)$ que será útil en la determinación de la conductividad terahercios se tiene en cuenta que el parámetro $S(\delta, \lambda)$ débilmente depende de $\zeta(k)$. Entonces el integral en la ecuación (3.25) toma el valor:

$$\int \rho(\zeta) d\zeta \approx \frac{A\epsilon_g E_f}{2\pi\hbar^2 v_f}. \quad (3.28)$$

Finalmente, con la ayuda de la relación (3.26) se obtiene la siguiente expresión para el tiempo de relajación de los momentos de los electrones vestidos de fotones:

$$\frac{\tau_0}{\tau(\epsilon)} = g \frac{\epsilon}{\epsilon_a} S(\delta, \lambda), \quad (3.29)$$

donde el parámetro τ_0 es el tiempo de relajación con respecto a una sola impureza

$$\tau_0 = \frac{\hbar V_o}{2An_i \sqrt{\pi n_e N_o}}. \quad (3.30)$$



CONDUCTIVIDAD ÓPTICA

El objetivo del presente capítulo es mostrar que la variación de la densidad de electrones vestidos de fotones en la brecha topológica favorece la inducción de sutiles oscilaciones cuánticas en la conductividad dinámica del grafeno. Ese tipo de comportamiento se puede observar en experimentos de espectroscopía de terahercios en monocapas de grafeno [21, 6].

4.1. ECUACIÓN DE KUBO

Es conocido en el formalismo de Floquet [30], que un campo ac intenso circularmente polarizado deforma el hamiltoniano de un cuerpo, y cada punto k sigue un círculo en la zona de Brillouin, formando una brecha con estados topológicos dentro de ella. Si el circuito encierra el punto de Dirac, tiene lugar un bombeo de carga no adiabático, en el cual la función de onda del sistema adquiere una fase geométrica de Aharonov-Anandan independiente del hamiltoniano que introduce la deformación [30, 23]. Esta fase lleva a un transpote cuantizado que puede ser descrito independientemente del orden de la intensidad del campo ac en el régimen de acople fuerte y la conductividad puede ser descrita por una teoría lineal. En este sentido, con el fin

de describir la conductividad dinámica en una capa de grafeno bajo intensa radiación polarizada de corriente alterna, se utiliza la formula Kubo sin correcciones de vértice para sistemas bidimensionales en el contexto de electrones vestidos de fotones, los cuales están asociados con la solución estacionaria de la ecuación de Schroedinger independiente del tiempo.

Inicialmente se mostrará en esta sección la validez de la ecuación lineal de Kubo en la descripción de fenómenos no lineales como son las oscilaciones cuánticas de tipo óptico en grafeno.

El Hamiltoniano de electrones de Dirac bajo campos *ac* se define por:

$$\hat{H} = v_f \hat{\sigma} \cdot (\hat{p} - eA), \quad (4.1)$$

donde $A = A_{ac}(t) + A_o(t)$, siendo $A_{ac}(t) = A_{ac}(t+T)$ el campo *ac* periódico intenso. $A_o(t)$ está asociado a un potencial débil, que satisface la relación $|A_o| \ll |A_{ac}|$ y cambia lentamente (usualmente se introduce este potencial experimentalmente como un voltaje de compuerta debil). El hamiltoniano se puede escribir de la forma $H = h_p + h + h_1$, donde

$$h_p = v_f \hat{\sigma} \cdot \hat{p} \quad (4.2)$$

es el hamiltoniano netamente electrónico, el hamiltoniano

$$h = -j \cdot A_{ac} \quad (4.3)$$

está relacionado con la interacción electrónica y el campo *ac*. El hamiltoniano

$$h_1 = -j \cdot A_o \quad (4.4)$$

está asociado a la interacción con el campo debil estático A_o , siendo $j = ev\hat{\sigma}$. Por simplicidad sin pérdida de generalidad, se procederá a hacer los desarrollos para los puntos $k = 0$. En este caso, para determinar la respuesta dinámica, se analiza el vector de estado

$$|\psi(t)\rangle = |\varphi_1(t)\rangle|\varphi(t)\rangle, \quad (4.5)$$

como un producto del vector $|\varphi_1(t)\rangle$, que satisface la ecuación

$$h_1|\varphi_1(t)\rangle = i\frac{\partial|\varphi_1(t)\rangle}{\partial t} \quad (4.6)$$

y el vector $|\varphi(t)\rangle$ que describe la evolución temporal del sistema en el campo ac de la forma $|\varphi(t)\rangle = U(t)|\varphi(0)\rangle$, donde $U(t) = \exp(-iht)$ es el operador de evolución temporal. Entonces $|\psi(t)\rangle$ se expresa a través de la fase geométrica de Aharonov-Anandan [1]:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\int h_1 dt'}|\varphi(t)\rangle, \quad (4.7)$$

$|\varphi(0)\rangle$ satisface la ecuación de Schroedinger independiente del tiempo:

$$h|\varphi(0)\rangle = \varepsilon_N|\varphi(0)\rangle. \quad (4.8)$$

donde la energía $\varepsilon_N = \varepsilon_a\sqrt{N}$ se relaciona con los estados electrónicos vestidos fotones dentro de la brecha topológica, los cuales fueron descritos en el Capítulo 2.

Se puede pasar a la representación de interacción, a través de la transformada

$$h_1(t) = U h_1 U^\dagger, \quad (4.9)$$

$$j(t) = U j U^\dagger. \quad (4.10)$$

Ahora si se tiene en cuenta la pequeñez de A_o en el Hamiltoniano h_1 , se puede expandir el factor exponencial en la ecuación (4.7) en serie de Taylor solo hasta términos lineales de A_o

$$\exp\left(-i\int h_1(t')dt'\right) \approx 1 - i\int h_1(t')dt'. \quad (4.11)$$

Así la ecuación (4.7) se puede reescribir de la forma

$$|\psi(t)\rangle = \left(1 - i\int h_1(t')dt'\right)|\phi(t)\rangle. \quad (4.12)$$

Por otro lado, el valor esperado para el operador de corriente J_α se obtiene de la forma

$$J_\alpha(t) = \langle j_\alpha(t) \rangle = \langle \psi(t) | j_\alpha(t) | \psi(t) \rangle. \quad (4.13)$$

Con la ayuda de las ecuaciones (4.10) y (4.12), la ecuación anterior se reescribe:

$$J_{\alpha}(t) = \langle \varphi(t) | \left\{ j_{\alpha}(t) - i \int dt' [j_{\alpha}(t)h_1(t') - h_1(t')j_{\alpha}(t)] \right\} | \varphi(t) \rangle, \quad (4.14)$$

o de forma mas compacta:

$$J_{\alpha}(t) = \langle \varphi(t) | \left\{ j_{\alpha}(t) - \frac{i}{\hbar} \int dt' [j_{\alpha}(t), h_1(t')] \right\} | \varphi(t) \rangle. \quad (4.15)$$

El primer término en el lado derecho de la ecuación (4.15) se anula ya que el valor medio de la corriente en ausencia de campo eléctrico es cero

$$\langle \varphi(t) | j_{\alpha}(t) | \varphi(t) \rangle = \langle \varphi(0) | j_{\alpha} | \varphi(0) \rangle = 0. \quad (4.16)$$

Si se tiene en cuenta la relación entre el campo eléctrico y el vector potencial $E = \partial A / \partial t$, al igual que la forma de Fourier del campo eléctrico, se obtiene la formula lineal de Kubo:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{\omega} \int dt' e^{i\omega(t-t')} \langle [j_{\alpha}(t), j_{\beta}(t')] \rangle, \quad (4.17)$$

donde en la expresión anterior se promedió con respecto al vector $|\varphi(t)\rangle$. Así claramente se muestra que la ecuación de Kubo para la conductividad electrónica en grafeno es independiente de la intensidad del campo de la radiación electromagnética. La expresión (4.17) será utilizada en la siguiente sección en la obtención de la conductividad terahercios del grafeno.

4.2. CONDUCTIVIDAD ÓPTICA TERAHERCIOS

La expresión para la conductividad en la ecuación (4.17) se puede escribir como

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\text{Im}\Pi_{\alpha\beta}}{\omega}, \quad (4.18)$$

donde Π es la función de correlación corriente-corriente. Si se desprecia la dispersión espacial del campo eléctrico, o sea el límite $qv_f \ll \omega$, las componentes no diagonales de la conductividad son cero [22]. La función de correlación corriente-corriente en la representación de Matsubara tiene la forma [20]:

$$\Pi(i\omega) = -\frac{g}{A} \int_0^{\beta} d\tau e^{i\omega\tau} \langle T_{\tau} S(\beta) e^{h_0\tau} j e^{-h_0\tau} \cdot j \rangle. \quad (4.19)$$

$S(\beta)$ en la ecuación (4.19) es la suma que se evalúa sobre las frecuencias de Matsubara

$$S(\beta) = \frac{1}{\beta} \sum_{ip} \frac{1}{ip - \xi - \Sigma(k, ip)} \frac{1}{ip + i\omega - \xi - \Sigma(k, ip + i\omega)}. \quad (4.20)$$

La suma es igual a las integrales a lo largo de los cortes en el plano complejo, donde las contribuciones $\pm\delta$ por encima y por debajo de los cortes en el plano se restan. Finalmente $S(\beta)$ toma la forma [20]:

$$S(\beta) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi i} f(\epsilon) K(k, \epsilon), \quad (4.21)$$

donde

$$K = \mathcal{G}(\epsilon + i\omega) \{ [\mathcal{G}(\epsilon + i\delta) - \mathcal{G}(\epsilon - i\delta)] + [\mathcal{G}(\epsilon + i\delta) - \mathcal{G}(\epsilon - i\delta)] \}, \quad (4.22)$$

f es la función estadística de Fermi y el factor dentro del corchete es la función espectral $A(k, \epsilon)$ de la función de Green retardada

$$\mathcal{G}(k, \epsilon + i\delta) - \mathcal{G}(k, \epsilon - i\delta) = G_R(k, \epsilon) - G_A(k, \epsilon) = 2iI_m G_R(k, \epsilon) = -iA(k, \epsilon). \quad (4.23)$$

Con la ayuda de las ecuaciones (4.21) y (4.22) la función de correlación se reescribe como sigue:

$$\Pi(i\omega) = \frac{2ge^2\hbar^2}{Sm^2} \sum_{k,N} k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} f A(k, \epsilon) [\mathcal{G}_R(k, \epsilon + i\omega) - \mathcal{G}(k, \epsilon - i\omega)]. \quad (4.24)$$

Haciendo la continuación analítica de $i\omega \rightarrow \omega + i\delta$, entonces $\mathcal{G}(k, \epsilon \pm i\omega)$ puede cambiarse por $G(k, \epsilon \pm \omega \pm i\delta)$. El siguiente paso es tomar la parte imaginaria de esta expresión y esto es justamente proporcional a su función espectral $A(k, \epsilon \pm \omega)$. La función de correlación corriente-corriente en la ecuación (4.24) se puede escribir como sigue

$$\text{Im}\Pi(\omega) = \frac{2ge^2\hbar^2}{Sm^{*2}} \sum_{k,N} k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} f A(k, \epsilon) [A(k, \epsilon + \omega) - A(k, \epsilon - \omega)], \quad (4.25)$$

donde m^* es la masa efectiva definida en la Sección 2.2. Cambiando de variables $E \rightarrow \epsilon \rightarrow \epsilon + \omega$ en el segundo término se obtiene la siguiente

expresión:

$$\text{Im}\Pi(\omega) = \frac{2ge^2\hbar^2}{Sm^{*2}} \sum_{k,N} k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} A(k, \epsilon) A(k, \epsilon + \omega) [f(\epsilon) - f(\epsilon + \omega)]. \quad (4.26)$$

De la ecuación anterior dividiendo por la frecuencia se desprenden dos contribuciones: la primera que está asociada a transiciones interbandas

$$\sigma_{inter} = \frac{ge^2}{\pi S} \sum_{k,N} \int v^2(k) [2\text{Im}G_R(N, k)]^2 \frac{[f(\epsilon) - f(\epsilon + \omega)]}{\omega} d\epsilon, \quad (4.27)$$

donde $v(k) = \partial\epsilon/\partial p$ es la velocidad de los electrones vestidos de fotones. La segunda contribución, que como es conocido de datos experimentales, en el rango de frecuencias terahercios define el principal aporte a la conductividad dinámica debido a transiciones electrónicas intrabandas [32]. En este sentido, si se expande $f(\epsilon + \omega)$ y $f(\epsilon)$ en serie de Taylor, así como teniendo en cuenta que en el límite $\hbar\omega \ll k_B T$, la relación $[f(\epsilon) - f(\epsilon + \omega)]/\omega \approx \partial f/\partial\epsilon$, entonces la conductividad dinámica asociada a las transiciones intrabanda adopta la forma siguiente:

$$\sigma_{intra} = \frac{ge^2}{\pi S} \sum_{k,N} \int v^2(k) [2\text{Im}G_R(N, k)]^2 \left(-\frac{\partial f}{\partial\epsilon}\right) d\epsilon. \quad (4.28)$$

Estas contribuciones a la conductividad terahercios son analizadas con más detalle en la siguiente sección.

4.3 OSCILACIONES DE LA CONDUCTIVIDAD

La parte imaginaria cuadrática de la función de Green retardada puede expresarse de la forma [20]:

$$[2\text{Im}G_R(k)]^2 = G_R^2 + G_A^2 - 2G_R G_A, \quad (4.29)$$

donde G_R es la función de Green retardada, la cual se obtuvo en la ecuación (3.10) y G_A es la función de Green avanzada, la cual se escribe:

$$G_A(N, k) = \frac{1}{\epsilon - \epsilon_N - \Sigma^A(\epsilon)} + \frac{1}{\epsilon + \epsilon_N - \Sigma^A(\epsilon)}, \quad (4.30)$$

siendo $\Sigma^A(\epsilon) = \text{Re}\Sigma(\epsilon) - i\text{Im}\Sigma(\epsilon)$ la auto-energía compleja avanzada. El primer y segundo término de la parte derecha de la ecuación (4.30) se relacionan con la función de Green avanzada en las bandas de conducción y de valencia. De forma compacta la ecuación (4.30) se reescribe

$$G_A(N, k) = \frac{2(\epsilon + |\mathbf{Im}\Sigma|)}{(\epsilon + |\mathbf{Im}\Sigma|)^2 - \epsilon_N^2}. \quad (4.31)$$

Por simplicidad, al igual que anteriormente, se puede descartar la cantidad $\mathbf{Re}\Sigma$, ya que sólo conduce a una pequeña corrección del potencial químico.

La expresión $-2G_R G_A$ tiene un polo de primer orden, en tanto que $G_R^2 + G_A^2$ tiene un polo de segundo orden en el plano complejo. Utilizando la formula de la suma de Poisson (ver ecuación (3.3)), facilmente después de algunos cálculos integrales, y aplicando el teorema del residuo, donde los polos están dados por $x = \pm 2i\epsilon|\mathbf{Im}\Sigma|/\epsilon_a^2$, se obtiene:

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} G_R G_A = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi\epsilon}{\epsilon_a^2 |\mathbf{Im}\Sigma|} e^{-\frac{4\pi r \epsilon |\mathbf{Im}\Sigma|}{\epsilon_a^2}} e^{2\pi i r \left(\frac{\epsilon^2 - \zeta^2}{\epsilon_a^2}\right)}. \quad (4.32)$$

Ahora para calcular el residuo del polo de segundo orden se tiene en cuenta la siguiente relación:

$$Res(h, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z - z_0)^n h(z)\}. \quad (4.33)$$

De esta manera, la función G_R^2 se puede escribir asi

$$G_R^2 = \frac{4(\epsilon^2 - 2i\epsilon|\mathbf{Im}\Sigma|)}{\epsilon_a^4 \left(-\frac{2i\epsilon|\mathbf{Im}\Sigma|}{\epsilon_a^2} - x^2\right)^2}. \quad (4.34)$$

Calculando el residuo a través de la ecuación (4.33), la suma de G_R^2 toma la forma:

$$\sum_N G_R^2 = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi}{\epsilon_a^2} \frac{\epsilon}{|\mathbf{Im}\Sigma|} e^{2\pi i r \left(\frac{\epsilon^2 - \zeta^2}{\epsilon_a^2}\right)} e^{-\frac{4\pi^2 |r| \epsilon |\mathbf{Im}\Sigma|}{\epsilon_a^2}} \left[\frac{4\pi |r| \epsilon^2 |\mathbf{Im}\Sigma|}{\epsilon_a^2} \right]. \quad (4.35)$$

De igual manera se obtiene una expresión para G_A^2

$$\sum_N G_A^2 = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi\epsilon}{\epsilon_a^2 |\mathbf{Im}\Sigma|} e^{2\pi i |r| \left(\frac{\epsilon^2 - \zeta^2}{\epsilon_a^2}\right)} e^{-\frac{4\pi |r| \epsilon |\mathbf{Im}\Sigma|}{\epsilon_a^2}} \left[\frac{4\pi |r| \epsilon |\mathbf{Im}\Sigma|}{\epsilon_a^2} \right]. \quad (4.36)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.32), (4.35) y (4.36) en la suma de la ecuación (4.27) finalmente se obtiene:

$$\sum_N [2\mathbf{Im}G_R(k)]^2 = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi\epsilon R_D}{\epsilon_a^2 |\mathbf{Im}\Sigma|} e^{2\pi i r \left(\frac{\epsilon^2 - \zeta^2}{\epsilon_a^2}\right)} \left[1 + \frac{8\pi |r| |\mathbf{Im}\Sigma| \epsilon}{\epsilon_a^2} \right] \quad (4.37)$$

donde $R_D(r)$ es el factor de Dingle definido en la ecuación (3.7). Ahora tomando la expresión (4.37) en la ecuación (4.27), la conductividad interbandas en la capa de grafeno puede ser reescrita en forma compacta de la siguiente manera:

$$\sigma_{inter} = \frac{2ge^2}{\pi Sm} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int \frac{\epsilon M(\epsilon, r)}{|\mathbf{Im}\Sigma|} e^{\frac{2\pi ir\epsilon^2}{\epsilon_a^2}} [2\mathbf{Im}G_R]^2 \frac{[f(\epsilon) - f(\epsilon + \omega)]}{\omega} d\epsilon. \quad (4.38)$$

En la ecuación (4.38) se definió el parámetro:

$$M(\epsilon, r) = \frac{4\pi}{\epsilon_a^2} R_D(\epsilon, r) N(\epsilon, r) \left[1 + \frac{8\pi |r| |\mathbf{Im}\Sigma| \epsilon}{\epsilon_a^2} \right], \quad (4.39)$$

donde $N(\epsilon, r)$ está definido por el integral

$$N(\epsilon, r) = \int_{-\infty}^{\epsilon} d\zeta \rho(\zeta) \zeta e^{-\frac{2\pi ir\zeta^2}{\epsilon_a^2}}. \quad (4.40)$$

En la expresión (4.39) se pasó de la suma por k a un integral por ζ como se realizó en la Sección 3.1. Para transiciones interbandas el segundo término de la expresión (4.39) es irrelevante y la ecuación (4.38) toma una forma mas compacta, expresandose a través del parámetro $S(\delta, \lambda)$,

el cual se definió en la ecuación (3.16)

$$\sigma_{inter} = \frac{2ge^2}{\pi Sm} \int \frac{\epsilon}{|\mathbf{Im}\Sigma|} N(\epsilon, 0) S(\delta, \lambda) \frac{[f(\epsilon) - f(\epsilon + \omega)]}{\omega} d\epsilon, \quad (4.41)$$

donde se definió el parámetro

$$N(\epsilon, 0) = \int_{-\infty}^{\epsilon} d\zeta \rho(\zeta) \zeta. \quad (4.42)$$

Por otro lado, la contribución a la conductividad terahercios debida a transiciones intrabanda puede escribirse como la suma de los términos de Drude y un término cuántico $\sigma_{intra} = \sigma_D + \sigma_Q$ siendo

$$\sigma_D = \frac{8ge^2}{Sm^*\epsilon_a^2} \int d\epsilon N(\epsilon, 0) \frac{\epsilon}{|\mathbf{Im}\Sigma|} \left(-\frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right) S(\delta, \lambda), \quad (4.43)$$

$$\sigma_Q = \frac{8ge^2}{Sm^*\epsilon_a^2} \int d\epsilon N(\epsilon, 0) \frac{\epsilon}{|\mathbf{Im}\Sigma|} \left(-\frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right) \left(-\lambda \frac{\partial S(\delta, \lambda)}{\partial \lambda} \right). \quad (4.44)$$

Ahora, la ecuación para σ_{intra} puede escribirse de manera mas compacta tomando en cuenta la expresión en la ecuación (3.23) para el tiempo de relajación. La ecuación para la conductividad dinámica intrabanda adquiere la siguiente forma [23]:

$$\sigma_{intra} = \frac{8e^2\tau_0}{Sm\epsilon_a} \int d\epsilon N(\epsilon, 0) \left(-\frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right) \left(1 - \Gamma \frac{\partial S(\delta, \lambda)}{\partial \lambda} \right). \quad (4.45)$$

En la ecuación anterior se introdujo el parámetro

$$\Gamma = \frac{4g\pi\epsilon^2}{\epsilon_a^3\tau_0}. \quad (4.46)$$

El factor $N(\epsilon, 0)$ de la ecuación (4.46), el cual está relacionado con la dispersión de electrones a lo largo de los estados extendidos para los electrones vestidos de fotones (ver ecuación (2.22)) contribuye a la forma explícita de la conductividad dinámica de dos maneras diferentes. En el término tipo Drude σ_D , el cual es monótono (primer término de ecuación (4.45)) y está asociado a absorciones intrabanda, el factor $N(\epsilon, 0)$ determina la condición para la cual la transición tenga lugar. Este aspecto establece el principal comportamiento de la conductividad terahertz para este material, hecho que es conocido en numerosos trabajos. Por otra parte, el término cuántico σ_Q de la ecuación (4.45), está vinculado a un efecto más sutil, el cual conduce a una dependencia oscilante de la conductividad dinámica sobre la frecuencia del campo ac . El factor $N(\epsilon, 0)$ contribuye a este efecto disminuyendo la amplitud de las oscilaciones. En la Figura 4.1 se muestra la conductividad como función de la frecuencia de acuerdo a la ecuación (4.45). En esta imagen, se evidencia el comportamiento modulado de la conductividad en terahercios con el aumento de la frecuencia.

Este efecto cuántico es estacionario ya que los estados electrónicos vestidos de fotones tratados en la ecuación (2.51) aparecen como una solución de la ecuación de Schroedinger independiente del tiempo.

A partir de datos experimentales de grafeno irradiado [24,25,26],

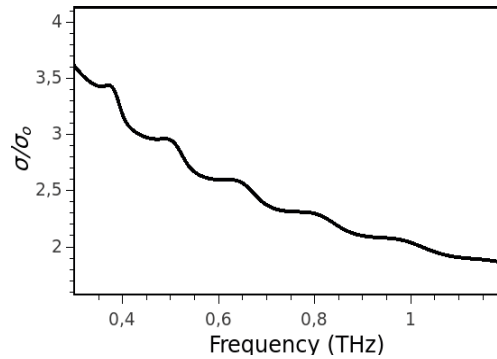


Figura 4.1: Conductividad versus frecuencia para $T = 359K$, $\mu = meV$, y $\tau = 46fs$. $\sigma_0 = e^2/4\hbar$

los cuáles pueden soportar nuestros resultados teóricos, se observa que la contribución de Drude se ajusta al rango espectral como ya es conocido, pero es obvio que la conductividad terahertz no cae de una manera monotona con el aumento de la frecuencia, sino de una manera oscilante, de la misma manera que se muestra en la Figura 4.1.

En la Figura 4.2 se muestra la misma dependencia como en la Figura 4.1 pero para diferentes temperaturas, teniendo en cuenta que $-\partial f/\partial \epsilon \approx [4T \cosh^2(\epsilon/2T)]^{-1}$.

De igual manera, datos experimentales muestran una fuerte dependencia de la conductividad con la intensidad del campo. En la Figura 4.3 se muestra la conductividad terahertz versus la amplitud del campo para los mismos valores de los parámetros de la Figura 4.1. La Figura 4.3 evidencia de forma clara el comportamiento oscilante de la conductividad.

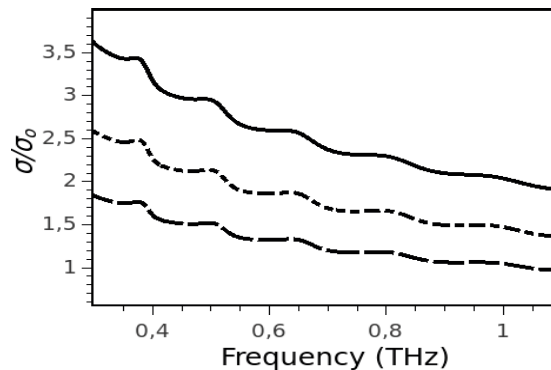


Figura 4.2: Conductividad versus frecuencia para los mismos valores de los parámetros en la figura 3.2 y temperaturas $T = 336K$ (curva inferior), $T = 336K$ (curva media), y $T = 336K$ (curva superior)

Para mostrar la naturaleza de este tipo de oscilaciones, analizamos por simplicidad el sistema a temperatura $T = 0$, entonces $(-\frac{\partial f}{\partial \epsilon}) \approx \delta(\epsilon - E_f)$. Reemplazando ésto en la ecuación (4.46) y aplicando la función delta Dirac, la conductividad dinámica adquiere una forma compacta

$$\sigma = \frac{4e^2\tau_o}{\pi\hbar^2\epsilon_a}\zeta_f^2 \left(1 - \Gamma_f \frac{\partial S(\delta_f, \lambda_f)}{\partial \lambda_f} \right). \quad (4.47)$$

La cantidad $\zeta_f = \hbar v_f k_f$ define la desviación de la energía de Fermi (medida desde la parte superior de la banda) de su valor a campo cero. El parámetro $k_f = [2m^*|E_f - \epsilon_g|]^{1/2}/\hbar$ es el vector de onda de Fermi en presencia de campos *ac*, en concordancia con la ecuación (2.19) y para los estados de borde en la aproximación de masa efectiva de acuerdo con la ecuación (2.22). Γ_f , δ_f y λ_f son los parámetros previamente definidos, pero para $\epsilon = E_f$. En este sentido, δ_f es el parámetro que caracteriza la desviación de ζ_f del valor E_f a temperatura $T = 0$. El corrimiento de las singularidades, debido a la frecuencia del campo, lleva a cambios periódicos en la densidad de estados (la cuál está relacionada con la función de Green de la ecuación (2.24)) para electrones vestidos de fotones y al mismo tiempo a la variación del vector de onda de Fermi. En otras palabras, como se puede ver de definición de la cantidad ϵ_g ésta depende inversamente de la frecuencia del campo por consiguiente si la frecuencia incrementa, entonces ϵ_g disminuye y de este modo disminuye la densidad de los electrones vestidos de fotones en el interior del gap.

El efecto estudiado puede ser comprendido sobre la base de transiciones intrabandas de electrones desde el interior al exterior del gap con el incremento en la frecuencia del campo y básicamente este efecto es responsable de las oscilaciones cuánticas en la conductividad terahertz.

La Figura 4.4 muestra la dependencia de la conductividad con la frecuencia terahertz para diferentes valores del tiempo de relajación. Como se observa de esta curva, el aumento de las impurezas reduce la amplitud de la oscilación, destruyendo las oscilaciones cuánticas y conduciendo al sistema a un comportamiento completamente de tipo Drude.

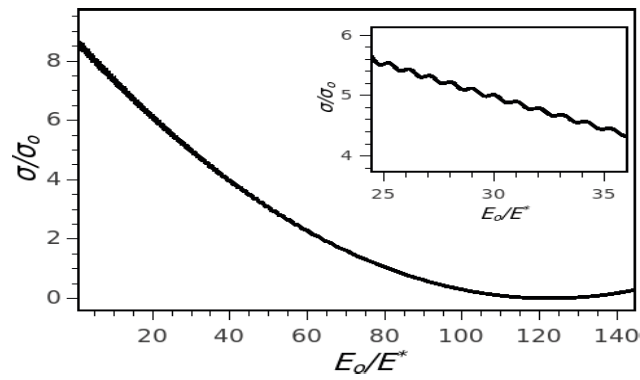


Figura 4.3: Conductividad versus la amplitud del campo para los mismos valores de los parámetros como en la Figura 4.1. $E^* = (2\hbar\omega/\epsilon_0 A)^{1/2}$

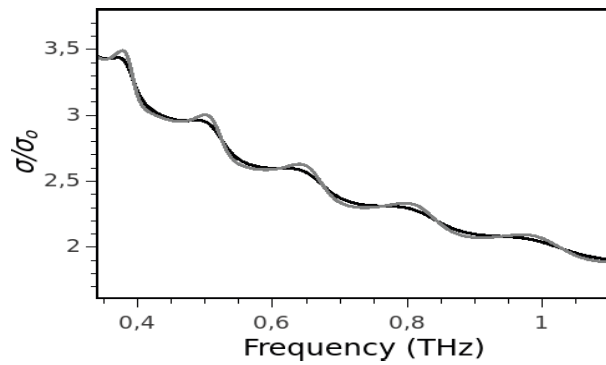


Figura 4.4: Conductividad versus frecuencia para los valores de los parámetros de la Figura 4.1; $\tau = 30 fs$ (línea negra) y $\tau = 44 fs$ (línea gris)

BIBLIOGRAFÍA

1. Y. Aharonov and J. Anandan. Phase change during a cyclic quantum evolution. *Phys. Rev. Lett.*, 58:1593, 1987.
2. Antonio Di Bartolomeo, Giuseppe Luongo, Filippo Giubileo, Nicola Funicello, Gang Niu, Thomas Schroeder, Marco Lisker, and Grzegorz Lupina. Hybrid graphene/silicon schottky photodiode with intrinsic gating effect. *2D Mater.*, 4:025075, 2017.
3. C. W. J. Beenakker. Colloquium: Andreev reflection and klein tunneling in graphene. *Rev. Mod. Phys.*, 80:1337, 2008.
4. K. Bolotin and et al. Ultrahigh electron mobility in suspended graphene. *Solid State Commun.*, 142:351, 2008.
5. J. Buron and et al. Graphene conductance uniformity mapping. *Nano Lett.*, 12:5074, 2012.
6. J. Buron and et al. Electrically continuous graphene from single crystal copper verified by terahertz conductance spectroscopy and micro four-point probe. *Nano Lett.*, 14:6348, 2014.
7. Thierry Champel and Serge Florens. High magnetic field theory for the local density of states in graphene with smooth arbitrary potential landscapes. *Phys. Rev. B*, 82:045421, 2010.
8. H.J. Choi and et al. Control of terahertz nonlinear transmission with electrically gated graphene metadevices. *Sci. Rep.*, 7:42833, 2017.

9. Hamed Dalir, Yang Xia, Yuan Wang, and Xiang Zhang. Athermal broadband graphene optical modulator with 35 ghz speed. *ACS Photonics*, 3(9):1564, 2016.
10. Guangsheng Deng, Tianyu Xia, Jun Yang, and Zhiping Yin. A graphene-based broadband terahertz metamaterial modulator. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 31:381–385, 2017.
11. J. Ding and et al. Tuneable complementary metamaterial structures based on graphene for single and multiple transparency windows. *Sci. Rep.*, 4:6128, 2014.
12. Maixia Fu and et al. Efficient terahertz modulator based on photoexcited graphene. *Optical Materials*, 66:381–385, 2017.
13. X.-J. He and et al. Electrically tunable terahertz wave modulator based on complementary metamaterial and graphene. *J. Appl. Phys.*, 115:17B903, 2014.
14. A. Iurov, G. Gumbs, O. Roslyak, and D. Huang. Anomalous photon-assisted tunneling in graphene. *J. Phys.: Condens. Matter*, 24:015303, 2012.
15. O. Kibis. Metal-insulator transition in graphene induced by circularly polarized photons. *Phys. Rev. B*, 81:165433, 2010.
16. O. Kibis. Dissipationless electron transport in photon-dressed nanostructures. *Phys. Rev. Lett.*, 107:106802, 2011.
17. L.D. Landau and E.M. Lifshits. *Statistical Mechanics I*. Pergamon Press, U.K., 3 edition, 1980.
18. Q. Li and et al. A graphene–silicon hybrid diode for terahertz waves. *Nat. Commun.*, 6:7082, 2015.
19. Quan Li and et al. Dual control of active graphene–silicon hybrid metamaterial devices. *Carbon*, 90:146, 2015.
20. G. Mahan. *Many-Particle Physics*. Plenum Press, New York, 2 edition, 1990.
21. Z. Mics and et al. Thermodynamic picture of ultrafast charge transport in graphene. *Nat. Commun.*, 6:7655, 2015.
22. E. G. Mishchenko. Effect of electron-electron interactions on the conductivity of clean graphene. *Phys. Rev. Lett.*, 98:216801, 2007.

23. R. Vega Monroy and G. Salazar Cohen. Photon-induced quantum oscillations of the terahertz conductivity in graphene. *Nano Lett.*, 16:6797, 2016.
24. R. Vega Monroy and K. Arrieta Carbon ó. Quantum optical oscillations of the fermi level in a graphene-based schottky junction. *The European Physical Journal B*, 91:232, 2018.
25. Marcin Mucha-Kruczynski, Oleksiy Kushuba, and Vladimir Fal'ko. Spectral features due to inter-landau-level transitions in the raman spectrum of bilayer graphene. *Phys. Rev. B*, 82:045405, 2010.
26. R. R. Nair and et al. Fine structure constant defines visual transparency of graphene. *Science*, 320:1308, 2008.
27. A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, and A. K. Geim. The electronic properties of graphene. *Rev. Mod. Phys.*, 81:109, 2009.
28. K.S. Novoselov and et al. Electric field effect in atomically thin carbon films. *Science*, 306:666, 2004.
29. K.S. Novoselov and et al. Two-dimensional gas of massless dirac fermions in graphene. *Nature*, 438:197, 2005.
30. T. Oka and H. Aoki. Photovoltaic hall effect in graphene. *Phys. Rev. B*, 79:081406(R), 2009.
31. N.M.R. Peres and Eduardo V. Castro. Algebraic solution of a graphene layer in transverse electric and perpendicular magnetic fields. *J. Phys.: Condens. Matter*, 19:406231, 2007.
32. H. Razavipour and et al. High-field response of gated graphene at terahertz frequencies. *Phys. Rev. B*, 92:245421, 2015.
33. O. Roslyak, G. Gumbs, and S. Mukamel. Trapping photon-dressed dirac electrons in a quantum dot studied by coherent two dimensional photon echo spectroscopy. *J. Chem. Phys.*, 136:194106, 2012.
34. S. G. Sharapov, V. P. Gusynin, and H. Beck. Magnetic oscillations in planar systems with the dirac-like spectrum of quasiparticle excitations. *Phys. Rev. B*, 69:075104, 2004.
35. R. Krishna Kumar et al. High-temperature quantum oscillations caused by recurring bloch states in graphene superlattices. *Science*, 14:181, 2017.

36. R. Vega-Monroy. Bose-einstein condensation of paired photon- dressed electrons in graphene. *Physica E*, 63:134, 2014.
37. R. Vega-Monroy, O. Martinez-Castro, and G. Salazar-Cohen. Frequency-driven quantum oscillations in a graphene layer under circularly polarized ac fields. *Phys. Lett. A*, 379:1169, 2015.
38. R. Vega-Monroy and C. Mera-Acosta. Magneto-optical franz- keldysh effect in graphene. *Phys. Rev. B*, 85:235442, 2012.
39. L. Wu and et al. A new ba(0.6)sr(0.4)tio(3) - silicon hybrid metamaterial device in terahertz regime. *Small*, 12:2616, 2016.
40. R. Yan, B. Sensale-Rodriguez, L. Liu, D. Jena, and H.G. Xing. A new class of electrically tunable metamaterial terahertz modulators. *Opt. Express*, 20(27):28664, 2012.
41. Weidong Zhang, Phi H. Q. Pham, Elliott R. Brown, , and Peter J. Burke. Ac conductivity parameters of graphene derived from thz etalon transmittance. *Nanoscale*, 6:13895, 2014.