



Universidad  
del Atlántico

CÓDIGO: FOR-DO-109

VERSIÓN: 0

FECHA: 03/06/2020

**AUTORIZACIÓN DE LOS AUTORES PARA LA CONSULTA, LA  
REPRODUCCIÓN PARCIAL O TOTAL, Y PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DEL  
TEXTO COMPLETO**

Puerto Colombia, **24 de julio de 2023**

Señores

**DEPARTAMENTO DE BIBLIOTECAS**

Universidad del Atlántico

Barranquilla

**Asunto: Autorización Trabajo de Grado**

Cordial saludo,

Yo, **TEDDY JOSÉ VILLAR TORDECILLA.**, identificado(a) con **C.C. No. 1.043.153.849** de **BARRANQUILLA**, autor(a) del trabajo de grado titulado **UNA INTRODUCCIÓN A LOS NÚMEROS P-ÁDICOS Y SU TEORÍA DE LA INTEGRACIÓN** presentado y aprobado en el año **2023** como requisito para optar al título Profesional de **MATEMÁTICO**; autorizo al Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico para que, con fines académicos, la producción académica, literaria, intelectual de la Universidad del Atlántico sea divulgada a nivel nacional e internacional a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios del Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico pueden consultar el contenido de este trabajo de grado en la página Web institucional, en el Repositorio Digital y en las redes de información del país y del exterior, con las cuales tenga convenio la Universidad del Atlántico.
- Permitir consulta, reproducción y citación a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato CD-ROM o digital desde Internet, Intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer.

Esto de conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

Atentamente,

Firma *Teddy Villar*

**TEDDY JOSÉ VILLAR TORDECILLA**

**C.C. No. 1.043.153.849 de BARRANQUILLA**

**DECLARACIÓN DE AUSENCIA DE PLAGIO EN TRABAJO ACADÉMICO PARA GRADO**

*Este documento debe ser diligenciado de manera clara y completa, sin tachaduras o enmendaduras y las firmas consignadas deben corresponder al (los) autor (es) identificado en el mismo.*

Puerto Colombia, **24 de julio de 2023**

Una vez obtenido el visto bueno del director del trabajo y los evaluadores, presento al **Departamento de Bibliotecas** el resultado académico de mi formación profesional o posgradual. Asimismo, declaro y entiendo lo siguiente:

- El trabajo académico es original y se realizó sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, en consecuencia, la obra es de mi exclusiva autoría y detento la titularidad sobre la misma.
- Asumo total responsabilidad por el contenido del trabajo académico.
- Eximo a la Universidad del Atlántico, quien actúa como un tercero de buena fe, contra cualquier daño o perjuicio originado en la reclamación de los derechos de este documento, por parte de terceros.
- Las fuentes citadas han sido debidamente referenciadas en el mismo.
- El (los) autor (es) declara (n) que conoce (n) lo consignado en el trabajo académico debido a que contribuyeron en su elaboración y aprobaron esta versión adjunta.

Título del trabajo académico:	UNA INTRODUCCIÓN A LOS NÚMEROS P-ÁDICOS Y SU TEORÍA DE LA INTEGRACIÓN
Programa académico:	MATEMÁTICAS

Firma de Autor 1:	<i>Teddy Villar</i>						
Nombres y Apellidos:	TEDDY JOSÉ VILLAR TORDECILLA						
Documento de Identificación:	CC	X	CE		PA		Número:
Nacionalidad:	COLOMBIANA			Lugar de residencia:		BARRANQUILLA	
Dirección de residencia:	CL 31 40ª-16						
Teléfono:					Celular: 3207832248		



**FORMULARIO DESCRIPTIVO DEL TRABAJO DE GRADO**

<b>TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO DE GRADO</b>	<b>UNA INTRODUCCIÓN A LOS NÚMEROS P-ÁDICOS Y SU TEORÍA DE LA INTEGRACIÓN</b>
<b>AUTOR(A) (ES)</b>	<b>TEDDY JOSÉ VILLAR TORDECILLA</b>
<b>DIRECTOR (A)</b>	<b>EDWIN ALBERTO BOLAÑO BENÍTEZ</b>
<b>CO-DIRECTOR (A)</b>	<b>NO APLICA</b>
<b>JURADOS</b>	<b>ALFREDO RAFAEL ROA NARVÁEZ ANSELMO TORRES BLANCA BADILLO</b>
<b>TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE</b>	<b>MATEMÁTICO</b>
<b>PROGRAMA</b>	<b>MATEMÁTICAS</b>
<b>PREGRADO / POSTGRADO</b>	<b>PREGRADO</b>
<b>FACULTAD</b>	<b>CIENCIAS BÁSICAS</b>
<b>SEDE INSTITUCIONAL</b>	<b>SEDE NORTE-PUERTO COLOMBIA</b>
<b>AÑO DE PRESENTACIÓN DEL TRABAJO DE GRADO</b>	<b>2023</b>
<b>NÚMERO DE PÁGINAS</b>	<b>35</b>
<b>TIPO DE ILUSTRACIONES</b>	<b>NO APLICA</b>
<b>MATERIAL ANEXO (VÍDEO, AUDIO, MULTIMEDIA O PRODUCCIÓN ELECTRÓNICA)</b>	<b>NO APLICA</b>
<b>PREMIO O RECONOCIMIENTO</b>	<b>NO APLICA</b>



UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

---

UNA INTRODUCCIÓN A LOS NÚMEROS  $p$ -ÁDICOS Y  
SU TEORÍA DE INTEGRACIÓN.

---

PROPUESTA PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR  
AL TÍTULO DE MATEMÁTICO

*AUTOR:*

ESTUDIANTE TEDDY JOSÉ  
VILLAR TORDECILLA  
(COD: 202151002 )

*ASESOR:*

PROFESOR MSc. EDWIN  
ALBERTO BOLAÑO BENITEZ  
(C.C. Nro. 72253394)

9 DE MAYO DE 2023

## **Agradecimientos**

El principal agradecimiento a Dios quien me ha guiado y me ha dado la fortaleza para seguir adelante. A mis padres Yadira Elena y Pedro Antonio, pues sin ellos no lo habría logrado. Sus bendiciones a diario a lo largo de mi vida me protegen y me guían por el camino del bien.

También agradezco a mi hermano Juan José quién ha sido una motivación para nunca rendirme en los estudios y poder llegar a ser un ejemplo para él.

Le doy gracias a todos mis compañeros los cuales considero mis amigos, Roberto de la Hoz, María Camila Joly, Cristian Joly, Yuryen Royo, que estuvieron conmigo en este camino, con muchos obstáculos, pero sin ninguno que no pudiera vencer y los que fuimos quitando uno a uno para alcanzar los objetivos.

A todo el profesorado por guiarme y transmitirme conocimientos, en especial a los profesores Anselmo Torresblanca que inicio conmigo este trabajo y a mi asesor Edwin Bolaños, por la orientación y ayuda que me brindó para la realización de esta tesis, Dios los bendiga.

# Índice

<b>1. Objetivos</b>	<b>4</b>
1.1. Objetivo general . . . . .	4
1.2. Objetivos específicos . . . . .	4
<b>2. Introducción a los numeros <math>p</math>-ádicos</b>	<b>5</b>
2.1. Valuación $p$ -ádica . . . . .	5
<b>3. Topología no-Arquimediana de los números <math>p</math>-ádicos</b>	<b>17</b>
3.1. El espacio $\mathbb{Q}_p^n$ . . . . .	23
<b>4. Integración <math>p</math>-ádica</b>	<b>24</b>
<b>5. Algunas aplicaciones de la integración <math>p</math>-ádica</b>	<b>30</b>
5.1. La transformada de Fourier de las funciones de prueba . . . . .	30
5.2. Operadores Pseudo-diferenciales en el campo de los numeros $p$ -ádicos	31
<b>Referencias</b>	<b>32</b>

## Introducción

Los números  $p$ -ádicos (denotados por  $\mathbb{Q}_p$ ) son un sistema de numeración basado en una métrica no-Arquimediana la cual está definida a partir de una ultra-norma llamada norma  $p$ -ádica y que denotaremos por  $|\cdot|_p$ . Los números  $p$ -ádicos corresponden a una extensión de los números racionales ( $\mathbb{Q}$ ) y su completación se obtiene de manera análoga a la completación de los números racionales con respecto al valor absoluto usual para obtener los números reales ( $\mathbb{R}$ ). El estudio de los números  $p$ -ádicos está motivado por la resolución de diversos problemas de teoría de números y fueron introducidos por el matemático alemán Kurt Hensel en el año 1897. En este trabajo presentamos una introducción a los números  $p$ -ádicos y su teoría de integración las cuales son una herramienta indispensable para el desarrollo de la matemática moderna.

# 1. Objetivos

## 1.1. Objetivo general

Estudiar los números  $p$ -ádicos y su teoría de integración.

## 1.2. Objetivos específicos

- (i) Mostrar de forma detallada la construcción de los números  $p$ -ádicos a partir del proceso de completación de los números racionales junto con la norma  $p$ -ádica.
- (ii) Estudiar la topología no arquimediana de los números  $p$ -ádicos.
- (iii) Desarrollar las principales integrales  $p$ -ádicas que sirven de base para la implementación del análisis  $p$ -ádico actual.

## 2. Introducción a los números $p$ -ádicos

### 2.1. Valuación $p$ -ádica

A lo largo de esta tesis  $p$  denota un número primo.

**Definición 1** Definimos el orden  $p$ -ádico de  $x \in \mathbb{Q}$ , denotado por  $\text{ord}_p(x)$ , de la siguiente manera:

1. para  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $\text{ord}_p(x) = \text{máx} \{n \in \mathbb{N} : p^n \mid x\}$ ,
2. para  $x = a/b$ , donde  $a, b \in \mathbb{Z}$  y  $b \neq 0$ ,  $\text{ord}_p(x) = \text{ord}_p(a) - \text{ord}_p(b)$ ,
3.  $\text{ord}_p(0) := \infty$ .

El orden  $p$ -ádico de  $x$  también es llamado la valuación  $p$ -ádica de  $x$ .

**Observación 1** El teorema fundamental de la Aritmética garantiza la existencia y unicidad del orden  $p$ -ádico de  $x \in \mathbb{Q}$ .

Todo número entero  $n > 1$  puede ser expresado como producto de números primos. Esta representación es única, salvo el orden de los factores. Así que, para cualquier  $m \in \mathbb{Z}$ , tenemos  $m = \pm p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r} \dots$ , donde los  $p_i$  son números primos.

**Observación 2** Sea  $x \in \mathbb{Q}^*$  (rationales no nulos), entonces  $\text{ord}_p(x)$  está determinado por la fórmula  $x = p^{\text{ord}_p(x)} \frac{a}{b}$ , con  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$  y  $p \nmid ab$ .

**Ejemplo 1** A continuación listamos algunos ejemplos del orden  $p$ -ádico:

1.  $\text{ord}_5(35) = 1$ , ya que  $35 = 7 \cdot 5$
2.  $\text{ord}_5(250) = 3$ , ya que  $250 = 5^3 \cdot 2$
3.  $\text{ord}_2(250) = 1$ , ya que  $250 = 5^3 \cdot 2$
4.  $\text{ord}_3(40) = 0$ , ya que  $40 = 2^3 \cdot 5$
5.  $\text{ord}_2\left(\frac{25}{8}\right) = \text{ord}_2(25) - \text{ord}_2(8) = 0 - 3 = -3$
6.  $\text{ord}_3\left(\frac{81}{4}\right) = \text{ord}_3(81) - \text{ord}_3(4) = 4 - 0 = 4$
7.  $\text{ord}_5\left(\frac{4}{7}\right) = \text{ord}_5(4) - \text{ord}_5(7) = 0 - 0 = 0$ .

**Lema 1** Si  $m, n \in \mathbb{Z}$  entonces,  $\text{ord}_p(mn) = \text{ord}_p(m) + \text{ord}_p(n)$ .

**Demostración.** Sean  $m, n \in \mathbb{Z}$  cualesquiera tales que:

$$m = p^{\text{ord}_p(m)} m', p \nmid m', \quad n = p^{\text{ord}_p(n)} n', p \nmid n'.$$

Luego

$$mn = p^{\text{ord}_p(n) + \text{ord}_p(m)} m' n', \text{ con } p \nmid m' n'.$$

Entonces  $\text{ord}_p(mn) = \text{ord}_p(m) + \text{ord}_p(n)$ . □

**Lema 2** Para todo  $x, y \in \mathbb{Q}$ , el orden  $p$ -ádico cumple las siguientes propiedades:

1. El  $\text{ord}_p(x)$  no depende de la representación de  $x$  como cociente de números enteros.
2.  $\text{ord}_p(xy) = \text{ord}_p(x) + \text{ord}_p(y)$ .
3.  $\text{ord}_p(x + y) \geq \min \{ \text{ord}_p(x), \text{ord}_p(y) \}$ .

**Demostración.**

1. Sean  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  dos representaciones arbitrarias de  $x$ , con  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  y  $bd \neq 0$ , tal que  $x = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ . Entonces

$$\begin{aligned} ad &= bc \\ \text{ord}_p(ad) &= \text{ord}_p(bc) \\ \text{ord}_p(a) + \text{ord}_p(d) &= \text{ord}_p(b) + \text{ord}_p(c) \\ \text{ord}_p(a) - \text{ord}_p(b) &= \text{ord}_p(c) - \text{ord}_p(d) \\ \text{ord}_p\left(\frac{a}{b}\right) &= \text{ord}_p\left(\frac{c}{d}\right). \end{aligned}$$

Así el orden  $p$ -ádico de  $x$  no depende de la representación de  $x$ .

2. Sean  $x = \frac{a}{b}$  e  $y = \frac{c}{d}$ , para  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  y  $bd \neq 0$  entonces

$$\begin{aligned} &= \text{ord}_p(xy) = \text{ord}_p\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \\ &= \text{ord}_p\left(\frac{ac}{bd}\right) \\ &= \text{ord}_p(ac) - \text{ord}_p(bd) \\ &= \text{ord}_p(a) + \text{ord}_p(c) - \text{ord}_p(b) - \text{ord}_p(d) \\ &= (\text{ord}_p(a) - \text{ord}_p(b)) + (\text{ord}_p(c) - \text{ord}_p(d)) \\ &= \text{ord}_p\left(\frac{a}{b}\right) + \text{ord}_p\left(\frac{c}{d}\right) \\ &= \text{ord}_p(x) + \text{ord}_p(y). \end{aligned}$$

3. Si  $x = 0$  o  $y = 0$  es inmediato que se cumpla la desigualdad triangular. Sean  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$  con la forma  $x = p^{\text{ord}_p(x)} \frac{a}{b}$  e  $y = p^{\text{ord}_p(y)} \frac{c}{d}$ , para  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  y  $bd \neq 0$  entonces

$$\begin{aligned} x + y &= p^{\text{ord}_p(x)} \frac{a}{b} + p^{\text{ord}_p(y)} \frac{c}{d} \\ &= p^t \left( p^{\text{ord}_p(x)-t} \frac{a}{b} + p^{\text{ord}_p(y)-t} \frac{c}{d} \right), \end{aligned}$$

donde  $t := \min \{ \text{ord}_p(x), \text{ord}_p(y) \}$ . De la última igualdad y de la definición de  $\text{ord}_p(x)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \text{ord}_p(x + y) &= \text{ord}_p \left( p^t \left( p^{\text{ord}_p(x)-t} \frac{a}{b} + p^{\text{ord}_p(y)-t} \frac{c}{d} \right) \right) \\ &= \text{ord}_p(p^t) + \text{ord}_p \left( p^{\text{ord}_p(x)-t} \frac{a}{b} + p^{\text{ord}_p(y)-t} \frac{c}{d} \right) \\ &\geq \text{ord}_p(p^t) \\ &= \min \{ \text{ord}_p(x), \text{ord}_p(y) \}. \end{aligned}$$

□

**Definición 2** Definimos la aplicación  $|\cdot|_p = \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_+$  como

$$|x|_p := \begin{cases} p^{-\text{ord}_p(x)} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**Observación 3** Note que  $|\cdot|_p$  solo puede tomar el conjunto de valores discretos  $\{p^\gamma : \gamma \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ .

**Teorema 1** La aplicación  $|\cdot|_p$  es una norma no-arquimedea sobre el campo de los números racionales.

**Demostración.**

1. Si  $x \in \mathbb{Q}$  y  $|x|_p = 0$  implica que  $x = 0$ , por la definición de  $|\cdot|_p$ .

2. Sean  $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ . Entonces

$$|xy|_p = p^{-\text{ord}_p(xy)} = p^{-\text{ord}_p(x) - \text{ord}_p(y)} = p^{-\text{ord}_p(x)} p^{-\text{ord}_p(y)} = |x|_p |y|_p.$$

3. Si  $x = 0$  ó  $y = 0$  ó  $x + y = 0$  el resultado es inmediato. Supongamos  $x, y, x + y \neq 0$ , con  $x$  e  $y$  simultáneamente distintos de cero y supongamos que  $x = \frac{a}{b}$  e  $y = \frac{c}{d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  donde  $bd \neq 0$ . Entonces

$$\begin{aligned}
ord_p(x + y) &= ord_p\left(\frac{ad + bc}{bd}\right) \\
&= ord_p(ad + bc) - ord_p(b) - ord_p(d) \\
&\geq \min\{ord_p(ad), ord_p(bc)\} - ord_p(b) - ord_p(d) \\
&= \min\{ord_p(a) + ord_p(d), ord_p(b) + ord_p(c)\} - ord_p(b) - ord_p(d) \\
&= \min\{ord_p(a) - ord_p(b), ord_p(c) - ord_p(d)\} \\
&= \min\{ord_p(x), ord_p(y)\}.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
&= |x + y|_p \\
&= p^{-ord_p(x+y)} \\
&\leq \max\{p^{-ord_p(x)}, p^{-ord_p(y)}\} \\
&= \max\{|x|_p, |y|_p\} \\
&\leq |x|_p + |y|_p. \quad \square
\end{aligned}$$

De ahora en adelante, llamaremos a la aplicación  $|\cdot|_p$  norma  $p$ -ádica sobre el campo  $\mathbb{Q}$ .

**Ejemplo 2 .**

$$\begin{aligned}
|35|_5 &= \frac{1}{5}, \text{ ya que } 5^{-ord_5(35)} = 5^{-1} \\
|250|_5 &= \frac{1}{125}, \text{ ya que } 5^{-ord_5(250)} = 5^{-3} \\
|250|_2 &= \frac{1}{2}, \text{ ya que } 2^{-ord_2(250)} = 2^{-1} \\
|340|_3 &= 1, \text{ ya que } 3^{-ord_3(340)} = 3^0 = 1 \\
\left|\frac{340}{33}\right|_2 &= 2^{-ord_2\left(\frac{340}{33}\right)} = 2^{-2} = \frac{1}{4} \\
\left|\frac{340}{33}\right|_5 &= 5^{-ord_5\left(\frac{340}{33}\right)} = 5^{-1} = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

**Teorema 2**  $|n|_p \leq 1$  para todo entero  $n$ .

**Demostración.** Demostraremos este teorema por inducción.

Es claro que  $|1|_p = 1 \leq 1$ .

Supongamos que  $|k|_p \leq 1$  para todo  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ .

A continuación, se sigue de nuestra suposición que

$$|n|_p = |1 + (n - 1)|_p \leq \max\{|1|_p, |(n - 1)|_p\} \leq 1.$$

Así según el axioma de inducción, tenemos  $|n| \leq 1$  para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . Dado que  $|-n|_p = |n|_p$ , concluimos que  $|n|_p \leq 1$  para cualquier  $n \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

Nuestro objetivo a continuación es mostrar que el cuerpo de los números racionales no es completo con respecto a la norma  $p$ -ádica y para ello utilizaremos argumentos clásicos de la teoría de números. Para más detalles al respecto el lector puede consultar [9], [13].

**Observación 4** La función  $\varphi$  de Euler se define de la siguiente manera: si  $n$  es un entero positivo, entonces  $\varphi(n)$  es el número de enteros positivos menores o iguales a  $n$  y que son coprimos con  $n$ , es decir

$$\varphi(n) = |\{m \in \mathbb{N} : m \leq n \text{ y } (m, n) = 1\}|$$

Por ejemplo,

$$\varphi(8) = |\{m \in \mathbb{N} : m \leq 8 \text{ y } (m, 8) = 1\}| = |\{1, 3, 5, 7\}| = 4.$$

$$\varphi(7) = |\{m \in \mathbb{N} : m \leq 7 \text{ y } (m, 7) = 1\}| = |\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}| = 6.$$

Dado que  $\varphi(p) = p - 1$ , para cualquier primo  $p$ . Se puede demostrar que

$$\varphi(p^n) = (p - 1)p^{n-1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

El teorema de Euler nos afirma que si  $(a, m) = 1$ , entonces  $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ .

De lo anterior se puede demostrar lo siguiente: si  $1 < a < p - 1$ , entonces  $a^{(p-1)p^{n-1}} \equiv 1 \pmod{p^n} \Leftrightarrow p^n \mid (a^{(p-1)p^{n-1}} - 1)$ .

**Definición 3** Una sucesión  $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$  es de Cauchy con respecto a  $|\cdot|_p$  si dado  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $m, n \geq N$ , entonces  $|x_n - x_m|_p < \epsilon$ .

**Lema 3** Una sucesión  $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$  es de Cauchy con respecto a  $|\cdot|_p$  si y solo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n|_p = 0.$$

**Demostración.** ( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$  es de Cauchy. Entonces, dado  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $m, n \geq N$ , entonces  $|x_m - x_n|_p < \epsilon$ . En particular, tomando  $m = n + 1$  con  $n \geq N$ , se tiene  $|x_{n+1} - x_n|_p < \epsilon$ . De la arbitrariedad de  $\epsilon$  tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n|_p = 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n|_p = 0$ . Entonces, dado  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq N$ , se cumple  $|x_{n+1} - x_n|_p < \epsilon$ . Sean  $m, n \in \mathbb{N}$  arbitrarios tales que  $m, n \geq N$ .

Sin perder generalidad supongamos que  $m > n$ . Entonces existe  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $m = l + n$ . Luego,

$$\begin{aligned} |x_m - x_n|_p &= |x_{l+n} - x_n|_p \\ &= |x_{l+n} - x_{l+n-1} + x_{l+n-1} - x_{l+n-2} + x_{l+n-2} - \dots + x_{n+1} - x_n|_p \\ &\leq \max \left\{ |x_{l+n} - x_{l+n-1}|_p, |x_{l+n-1} - x_{l+n-2}|_p, \dots, |x_{n+1} - x_n|_p \right\} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy. □

**Definición 4** Una sucesión  $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$  tiene límite  $x \in \mathbb{Q}$  respecto a  $|\cdot|_p$  (denotado  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ) si dado  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - x|_p < \epsilon$ , para  $n \geq N$ .

**Ejemplo 3** Sea  $p > 3$  un número primo y  $a \in \mathbb{N}$  tal que  $1 < a < p - 1$ . Consideremos la sucesión  $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$  dada por  $x_n := a^{p^{n-1}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Mostraremos que  $\{x_n\}$  es de Cauchy.

$$\begin{aligned}
 |x_{n+1} - x_n|_p &= |a^{p^n} - a^{p^{n-1}}|_p \\
 &= |a^{p^{n-1}} (a^{p^{n-1}(p-1)} - 1)|_p \\
 &= |x_{n+1} - x_n|_p \\
 &= |a^{p^n} - a^{p^{n-1}}|_p \\
 &= |a^{p^{n-1}} (a^{p^{n-1}(p-1)} - 1)|_p \\
 &= |a^{p^{n-1}}|_p |a^{p^{n-1}(p-1)} - 1|_p
 \end{aligned}$$

Tenemos que  $\text{ord}_p(a^{p^{n-1}(p-1)} - 1)$  es la mayor potencia de  $p$  que divide a  $a^{p^{n-1}(p-1)} - 1$ .

Además, por la observación anterior tenemos que  $p^n \mid (a^{p^{n-1}(p-1)} - 1)$ . Así que

$\text{ord}_p(a^{p^{n-1}(p-1)} - 1) \geq n$ , y de aquí se tiene  $p^{-\text{ord}_p(a^{p^{n-1}(p-1)} - 1)} \leq p^{-n}$ .

$$|a^{p^{n-1}(p-1)} - 1|_p \leq p^{-n}.$$

Luego,  $|x_{n+1} - x_n|_p \leq p^{-n}$  y en consecuencia,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n|_p = 0$  por lo tanto,  $\{x_n\}$  es de Cauchy.

Supongamos que

$$\begin{aligned}
 x &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} a^{p^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{p^{n-1}})^p \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^p \\
 &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^p
 \end{aligned}$$

Luego,  $x = x^p$  y en consecuencia

$$x^p - x = 0 \Leftrightarrow x(x^{p-1} - 1) = 0 \quad (1)$$

Ahora, como  $1 < a < p - 1$  se cumple que  $x$  no es 0 ni 1. Así que de (1) se cumple que  $x^{p-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow x^{p-1} = 1$ , esto es,  $x$  es una raíz  $p - 1$  de la unidad. Por lo tanto,  $x \notin \mathbb{Q}$ .

Lo anterior demuestra que  $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$  no es completo.  $\square$

A continuación presentaremos la construcción del campo de los números  $p$ -ádicos  $\mathbb{Q}_p$ , que es la completación de  $\mathbb{Q}$  respecto a  $|\cdot|_p$ .

Denotamos por  $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$  la colección de todas las sucesiones de Cauchy en  $\mathbb{Q}$ .

$$\mathcal{C}_{\mathbb{Q}} := \left\{ \{a_n\} \subset \mathbb{Q} : \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0 \right\}.$$

Para  $\{a_n\}, \{b_n\} \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$  definimos la suma  $\{a_n + b_n\}$ , resta  $\{a_n - b_n\}$  y multiplicación  $\{a_n b_n\}$  en  $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ , las cuales son sucesiones de Cauchy. Se puede verificar que  $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$  es un anillo conmutativo, con elemento aditivo  $\{\hat{0}\} = \{0, 0, \dots\}$  y el elemento identidad multiplicativo  $\{\hat{1}\} = \{1, 1, \dots\}$ . Podemos encontrar en  $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$  un subanillo isomorfo a  $\mathbb{Q}$ , dado por la aplicación  $\phi(a) := \{\hat{a}\}$ , Para  $a \in \mathbb{Q}$ , donde  $\{\hat{a}\} = \{a, a, \dots\}$  es la sucesión constante en  $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ .

Presentamos a  $P$  como el conjunto de las sucesiones infinitesimales, esto es

$$P := \left\{ \{a_n\} \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}} : \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|_p = 0 \right\}.$$

Es claro que  $P \neq \emptyset$ , dado que la sucesión nula  $\{\hat{0}\} \in P$ . Además,  $P$  es un subanillo de  $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$  y esto se puede verificar fácilmente, puesto que hereda las operaciones de  $\mathbb{Q}$ . Notemos que si  $\{a_n\}$  es una sucesión de Cauchy entonces es una sucesión acotada. Si  $\{a_n\} \in P$  y  $\{b_n\} \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$  entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n b_n|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|_p |b_n|_p \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|_p k_b = 0,$$

donde  $|b_n|_p \leq k_b, \forall n$ . Por lo tanto,  $P$  es un ideal en  $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ . En particular, es un ideal bilateral por la conmutatividad del producto.

Definimos  $\mathbb{Q}_p$  de la siguiente manera:

$$\mathbb{Q}_p : \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}/P = \{ \{a_n\} + P : \{a_n\} \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}} \}.$$

Definimos sobre  $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$  la siguiente relación:

$$\{a_n\} \sim \{b_n\} \Leftrightarrow \{a_n\} - \{b_n\} \in P.$$

Se verifica fácilmente que  $\sim$  es una relación de equivalencia en  $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ .

Sean  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$  entonces

- *Reflexiva:* El resultado es inmediato.
- *Simétrica*

$$\begin{aligned} \{a_n\} \sim \{b_n\} &\Leftrightarrow \{a_n\} - \{b_n\} \in P \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n|_p = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - a_n|_p = 0 \\ &\Leftrightarrow \{b_n\} - \{a_n\} \in P \\ &\Leftrightarrow \{b_n\} \sim \{a_n\}. \end{aligned}$$

- *Transitiva*

$$\begin{aligned} \{a_n\} \sim \{b_n\} \wedge \{b_n\} \sim \{c_n\} &\Leftrightarrow \{a_n\} - \{b_n\} \in P \wedge \{b_n\} - \{c_n\} \in P \\ &\Rightarrow (\{a_n\} - \{b_n\}) + (\{b_n\} - \{c_n\}) \\ &\Rightarrow (\{a_n\} - \{c_n\}) + (\{b_n\} - \{b_n\}) \\ &\Rightarrow \{a_n\} - \{c_n\} \in P \\ &\Rightarrow \{a_n\} - \{c_n\} \end{aligned}$$

Note que la clase de equivalencia de una sucesión de Cauchy  $\{a_n\}$  esta dada por:

$$\begin{aligned} [\{a_n\}] &:= \{ \{b_n\} \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}} : \{b_n\} - \{a_n\} \in P \} \\ &= \{ \{b_n\} \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}} : \{b_n\} - \{a_n\} = \{x_n\}, \text{ para algún } \{x_n\} \in P \} \\ &= \{ \{b_n\} \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}} : \{b_n\} = \{x_n\} + \{a_n\}, \text{ para algún } \{x_n\} \in P \} \\ &= \{a_n\} + P. \end{aligned}$$

Así que la clase  $[\{a_n\}] \in \mathbb{Q}_P$ . Definimos ahora en  $\mathbb{Q}_P$  las operaciones de suma y producto, respectivamente, como sigue:

$$[\{a_n\}] + [\{b_n\}] := [\{a_n + b_n\}] \text{ y } [\{a_n\}] [\{b_n\}] := [\{a_n b_n\}].$$

Probamos que la suma no depende del representante que se tome de la clase de equivalencia.

Sean  $\{a_n\}, \{a'_n\} \in [\{a_n\}]$  y  $\{b_n\}, \{b'_n\} \in [\{b_n\}]$  dos representaciones diferentes de cada clase.

Entonces  $\{a_n\} - \{a'_n\} \in P$  y  $\{b_n\} - \{b'_n\} \in P$  al sumar ambos términos,

$$\begin{aligned} & \{a_n\} - \{a'_n\} + \{b_n\} - \{b'_n\} \in P \\ \Rightarrow & (\{a_n\} + \{b_n\}) - (\{a'_n\} + \{b'_n\}) \in P \\ \Rightarrow & (\{a_n\} + \{b_n\}) + P = (\{a'_n\} + \{b'_n\}) + P. \end{aligned}$$

Esto demuestra que  $[\{a_n\} + \{b_n\}] = [\{a'_n\} + \{b'_n\}]$ .

Se realiza de forma similar para el caso del producto.

Consideremos ahora la aplicación  $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}_p$  dada por  $\varphi(a) := [\{\hat{a}\}]$ .

Probaremos que  $\varphi$  es un monomorfismo de anillos. Sean  $a, b \in \mathbb{Q}$  tal que

$$\varphi(a + b) = [\{\widehat{a + b}\}] = [\{\hat{a}\} + \{\hat{b}\}] = [\{\hat{a}\}] + [\{\hat{b}\}] = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(ab) = [\{\widehat{ab}\}] = [\{\hat{a}\}\{\hat{b}\}] = [\hat{a}][\hat{b}] = \varphi(a)\varphi(b).$$

Entonces,  $\varphi$  es un homomorfismo. A continuación demostramos que  $\varphi$  es inyectiva.

Sean  $a, b \in \mathbb{Q}$  y supongamos que

$$\begin{aligned} \varphi(a) = \varphi(b) & \Leftrightarrow [\{\hat{a}\}] = [\{\hat{b}\}] \\ & \Leftrightarrow \{\hat{a}\} + P = \{\hat{b}\} + P \\ & \Leftrightarrow \{\hat{a}\} - \{\hat{b}\} \in P \\ & \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a - b|_p = 0 \\ & \Leftrightarrow a = b. \end{aligned}$$

Así podemos identificar  $a \in \mathbb{Q}$  con  $[\{\hat{a}\}] \in \mathbb{Q}_p$ , y ver a  $\mathbb{Q}$  como subanillo de  $\mathbb{Q}_p$ .

**Observación 5** Para simplificar la notación escribiremos  $x$  en lugar de  $[\{x\}]$  para referirnos a los elementos de  $\mathbb{Q}_p$ .

**Teorema 3** El conjunto  $\mathbb{Q}_p$  es un campo.

**Demostración.** Probaremos que  $P$  es un ideal maximal en  $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$  y luego usaremos un resultado conocido en la teoría de anillos.

Supongamos que existe un ideal  $J \neq 0$  tal que  $P \subset J \subseteq \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ . Sea  $\{x_n\} \in J \setminus P$  una sucesión, esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p \neq 0.$$

Dado que  $\{x_n\}$  es una sucesión no nula, existe una subsucesión  $\{x_{n_k}\}$  de  $\{x_n\}$  tal que  $|x_{n_k}|_p > d$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $d \in \mathbb{R}_+$

Ahora consideramos una sucesión  $\{y_n\}$  definida como

$$y_k := \frac{1}{x_{n_k}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

y probemos que  $\{y_k\} \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Puesto que  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy, existe  $N := N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $k, j \geq N$ ,

$$|x_{n_k} - x_{n_j}|_p < \epsilon d^2.$$

Luego,

$$0 \leq |y_k - y_j| = \left| \frac{1}{x_{n_k}} - \frac{1}{x_{n_j}} \right|_p = \left| \frac{x_{n_j} - x_{n_k}}{x_{n_k} x_{n_j}} \right|_p = \frac{|x_{n_j} - x_{n_k}|_p}{|x_{n_k}|_p |x_{n_j}|_p} \leq \frac{1}{d^2} |x_{n_j} - x_{n_k}|_p < \epsilon.$$

Entonces  $\{y_k\}$  es una sucesión de Cauchy, esto es,  $\{y_n\} \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ .

Por otro lado, al multiplicar las sucesiones  $\{x_k\}$ ,  $\{y_k\}$  obtenemos que la sucesión  $\{a_k\}$  definida como  $\{a_k\} := \{x_k\} \{y_k\} = \{x_k y_k\} = \{\hat{1}\}$  es una sucesión de Cauchy.

Dado que  $J$  es un ideal,  $\{a_n\} \in J$ , es decir,  $\{\hat{1}\} \in J$ , concluimos que  $J = \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ .

Puesto que  $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$  es un anillo, y  $P$  es un ideal maximal, entonces el conjunto  $\mathbb{Q}_p$  es un campo.  $\square$

**Definición 5** Sean  $x \in \mathbb{Q}_p$  y  $\{x_n\} \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$  un representante de  $x$ . Definimos la aplicación

$$|x|_p := \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p.$$

**Proposición 1** La aplicación  $|x|_p$  definida anteriormente esta bien definida y además no depende de la elección del representante.

**Demostración.** Veamos que el límite existe. Sea  $x \in \mathbb{Q}_p$ , si  $x = 0$  el resultado es inmediato.

Sean  $x \in \mathbb{Q}_p^*$  y  $\{x_n\}$  un representante de  $x$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $N := N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $m, n > N$  se cumple que  $|x_n - x_m|_p < \epsilon$ .

Consideremos la sucesión de normas de  $\{|x_n|_p\}$ .

Por otro lado, para  $m, n > N$

$$||x_n|_p - |x_m|_p| \leq |x_n - x_m|_p < \epsilon.$$

Así, la sucesión  $\{|x_n|_p\}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{R}$  y dado que  $\mathbb{R}$  es completo se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p$  existe.

Ahora demostremos que el límite no depende de la elección del representante. Sean  $\{x_n\}, \{x'_n\}$  dos representantes de  $x$  diferentes. Entonces

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| |x_n|_p - |x'_n|_p \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x'_n|_p = 0.$$

La última igualdad se sigue del hecho que  $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ . Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} |x'_n|_p.$$

□

**Proposición 2** La aplicación  $|\cdot|_p$  definida en  $|x|_p := \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p$ , es una norma en  $\mathbb{Q}_p$ .

**Demostración.** Sean  $x, y \in \mathbb{Q}_p$

$$1. |x|_p = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x|_p = 0 \Leftrightarrow \{x_n\} \in P \Leftrightarrow x = 0.$$

$$2. |xy|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n y_n|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p |y_n|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n|_p = |x|_p |y|_p.$$

3. Probaremos que satisface la desigualdad triangular fuerte

$$\begin{aligned} |x + y|_p &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n + y_n|_p \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \max \{ |x_n|_p, |y_n|_p \} \\ &= \max \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p, \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n|_p \right\} \\ &= \max \{ |x|_p, |y|_p \}. \end{aligned}$$

Se ha probado que  $|x|_p := \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p$  es una norma y la condición 3. Prueba que es no-archimedeana . □

**Observación 6** Si  $|x|_p \neq |y|_p$  tenemos la igualdad en  $|x + y|_p = \max \{ |x|_p, |y|_p \}$ .

**Teorema 4** .

1.  $\mathbb{Q}$  es un subcampo de  $\mathbb{Q}_p$ .

2. El campo  $\mathbb{Q}_p$  es completo con respecto a la norma  $|x|_p := \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p$ .

**Demostración.**

1. Sean  $x \in \mathbb{Q}_p$  y  $\{x_n\}$  una sucesión representante de  $x$ . Para  $n \in \mathbb{N}$  fijo, consideremos la sucesión  $\{\widehat{x}_n\}$ . Entonces, la sucesión  $\{x_m - x_n\}$  (poniendo a correr  $m$ ) puede ser vista como un representante de  $x - \widehat{x}_n$ . Puesto que  $\{x_m\}$  es una sucesión de Cauchy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x - \widehat{x}_n|_p = \lim_{n, m \rightarrow \infty} |x_m - x_n|_p = 0.$$

2. Supongamos  $\{y_n\}$  una sucesión (de clases) de Cauchy en  $\mathbb{Q}_p$ . Dado que  $\mathbb{Q}$  es denso en  $\mathbb{Q}_p$ , para cada  $y_n$  existe un elemento  $x_n \in \mathbb{Q}$  tal que

$$|y_n - \widehat{x}_n|_p < \frac{1}{n}.$$

Por lo tanto  $\{y_n - \widehat{x}_n\}$  es una sucesión nula, y además, es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{Q}_p$ . Luego

$$\{\widehat{x}_n\} = \{y_n\} - \{y_n - \widehat{x}_n\}.$$

Entonces  $\{\widehat{x}_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{Q}_p$ . Ya que todos los elementos de  $\{\widehat{x}_n\}$  pertenecen a  $\mathbb{Q}$ ,  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{Q}$ . Denotamos la clase de equivalencia de  $\{x_n\}$  con  $x$ . Restando obtenemos una sucesión nula en  $\mathbb{Q}_p$ :

$$\{x - \widehat{x}_n\} - \{y_n - \widehat{x}_n\} = \{x - y_n\},$$

Esto implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x - y_n|_p = 0.$$

Así,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n|_p.$$

Extendemos la valuación  $p$ -ádica de  $\mathbb{Q}$  a  $\mathbb{Q}_p$ . Para cualquier  $x \in \mathbb{Q}_p$ . Para cualquier  $x \in \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$  establecemos que

$$\text{ord}_p(x) = -\log |x|_p \text{ y } \text{ord}_p(0) = \infty.$$

□

**Observación 7** [1] Cualquier número  $p$ -ádico  $x \in \mathbb{Q}_p, x \neq 0$  puede ser únicamente representado de la siguiente forma canónica

$$x = \sum_{k=\gamma}^{\infty} d_k p^k = p^\gamma \sum_{j=0}^{\infty} x_j p^j \quad (2)$$

donde  $\gamma = \gamma(x) = \text{ord}_p(x) \in \mathbb{Z}$ , donde  $x_j = d_{j+\gamma}, x_j = 0, 1, \dots, p-1$ . Puesto que  $|p^\gamma x_j p^j|_p = p^{-\gamma-j}$ , para  $j = 1, 2, \dots$ , la serie (2) converge respecto a la norma  $p$ -ádica.

Por la definición  $|x|_p := \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p$ ,

$$|x|_p = \left| \sum_{k=\gamma}^{\infty} d_k p^k \right|_p = p^{-\gamma}.$$

Podemos extender la Definición 1 sobre el orden  $p$ -ádico así:  $x \in \mathbb{Q}_p$  entonces  $\text{ord}_p(x) = -\gamma$  para  $x \in \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$  y  $\text{ord}_p(0) = \infty$ .

### 3. Topología no-Arquimediana de los números $p$ -ádicos

Al definir la aplicación  $d_p : \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{R}_+$  dada por  $d_p(x, y) = |x - y|_p$ , tenemos que  $d_p$  es una métrica (no arquimediana) que satisface

$$\begin{aligned} d_p(x, y) &= |x - y|_p \\ &= |(x - z) + (z - y)|_p \\ &\leq \max \{ |x - z|_p, |z - y|_p \} \\ &= \max \{ d(x, z), d(z, y) \} \end{aligned}$$

para todo  $x, y, z \in \mathbb{Q}_p$ . Dado que la norma  $p$ -ádica toma el conjunto discreto de valores  $\{p^\gamma : \gamma \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ , las bolas y las esferas consideradas en este contexto ( $p$ -ádico) son de radio  $p^\gamma, \gamma \in \mathbb{Z}$ .

**Definición 6** Sean  $a \in \mathbb{Q}_p$  y  $\gamma \in \mathbb{Z}$  arbitrarios. Denotaremos y definiremos:

1. La bola de centro en  $a$  y radio  $p^\gamma$  como

$$B_\gamma(a) := \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p \leq p^\gamma \right\} \text{ y}$$

2. la esfera de centro en  $a$  y radio  $p^\gamma$  como

$$S_\gamma(a) := \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p = p^\gamma\}.$$

**Observación 8 .**

1. En el contexto  $p$ -ádico es irrelevante distinguir entre bola abierta y bola cerrada, ya que

$$B_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p \leq p^\gamma\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p < p^{\gamma+1}\}.$$

Así que toda bola  $B_\gamma(a)$  es un conjunto abierto y cerrado de forma simultánea (Clopen).

2. Para el caso particular en que  $a = 0$ , escribimos  $B_\gamma$  y  $S_\gamma$  para referirnos, respectivamente, a la bola centrada en 0 y de radio  $p^\gamma$  y la esfera centrada en 0 y de radio  $p^\gamma$ .

3. Tenemos que  $B_\gamma(a) \subseteq B_{\gamma'}(a)$  si  $\gamma \leq \gamma'$ . Entonces, la esfera  $S_\gamma(a)$  satisface:  
 $S_\gamma(a) = B_\gamma(a) \setminus B_{\gamma-1}(a)$ .

4. Para cualquier  $a \in \mathbb{Q}_p$  y  $\gamma \in \mathbb{Z}$ , se tiene que

$$B_\gamma(a) = \bigcup_{l \leq \gamma} S_l(a).$$

**Teorema 5 .**

1. Cualquier punto de la bola  $B_\gamma(a)$  es su centro.
2. Dos bolas en  $\mathbb{Q}_p$  tienen intersección no vacía si y solo si una contiene a la otra, esto es,  $B_\gamma(a) \cap B_{\gamma'}(b) \neq \emptyset \Leftrightarrow B_\gamma(a) \subseteq B_{\gamma'}(b)$  ó  $B_{\gamma'}(b) \subseteq B_\gamma(a)$ .
3. Tres puntos cualesquiera en  $\mathbb{Q}_p$  determinan un triangulo isósceles.

**Demostración.**

1. Sea  $b \in B_\gamma(a)$  cualquiera pero fijo. Entonces, por la definición de bola se cumple que

$$|a - b|_p \leq p^\gamma$$

Luego, para cualquier  $x \in B_\gamma(a)$  se cumple

$$|x - b|_p = |(x - a) + (a - b)|_p \leq \text{máx} \{|x - a|_p, |a - b|_p\} \leq p^\gamma,$$

esto es,  $x \in B_\gamma(b)$ .

De la arbitrariedad de  $x$  se cumple que  $B_\gamma(a) \subseteq B_\gamma(b)$ . La contención  $B_\gamma(b) \subseteq B_\gamma(a)$  se muestra de forma análoga.

2. Si una bola está contenida en la otra, tienen una intersección no vacía. Para probar lo contrario, asumimos que  $\gamma \leq \gamma'$  y  $y \in B_\gamma(a) \cap B_{\gamma'}(b)$ . Entonces, según el enunciado (1) de este teorema,  $B_\gamma(a) = B_\gamma(y)$  y  $B_{\gamma'}(b) = B_{\gamma'}(y)$ . Como  $B_\gamma(y) \subset B_{\gamma'}(y)$ , tenemos la inclusión requerida.

3. Sean  $a, b, c$  puntos distintos en  $\mathbb{Q}_p$ . Entonces  $d_p(a, b)$ ,  $d_p(b, c)$  y  $d_p(a, c)$  son longitudes de los lados del triángulo determinados por esos puntos.

Si  $d_p(a, b) = d_p(b, c)$ , el triángulo es isósceles.

Si  $d_p(a, b) \neq d_p(b, c)$ ,  $|a - b|_p \neq |b - c|_p$ .

Notemos que  $(a - b) + (b - c) = a - c$ . Por definición tenemos

$$|a - c|_p = \text{máx} \{|a - b|_p, |b - c|_p\}.$$

En otras palabras,  $d_p(a, c) = d_p(a, b)$  ó  $d_p(a, c) = d_p(b, c)$ .

Por lo tanto el triángulo es isósceles. □

**Proposición 3** El conjunto de todas las bolas en  $\mathbb{Q}_p$  es contable.

**Demostración.**

Escribamos el centro de la bola  $B_\gamma(a)$  como

$a = \tilde{a} + p^\gamma \xi$ , donde  $\tilde{a} = \sum_{k=-m}^{-\gamma-1} a_k p^k$  es un número racional,  $\xi \in \mathbb{Z}_p$ . Entonces

$$\begin{aligned} B_\gamma(a) &= \{x : |x - a|_p \leq p^\gamma\} \\ &= \{x : |p^\gamma(x - a)|_p \leq 1\} \\ &= \{x : |p^\gamma(x - \tilde{a}) + \xi|_p \leq 1\} \\ &= \{x : |p^\gamma(x - \tilde{a})|_p \leq 1\} \\ &= B_\gamma(\tilde{a}). \end{aligned}$$

Así, para cada bola se puede caracterizar por un par de números  $(\tilde{a}, \gamma)$  donde ambos números pertenecen a conjuntos contables.

Por lo tanto el conjunto de todos los pares  $(\tilde{a}, \gamma)$  también es contable y también lo es el conjunto de todas las bolas en  $\mathbb{Q}_p$ .  $\square$

**Proposición 4** [1] Todo conjunto abierto en  $\mathbb{Q}_p$  es una unión a lo sumo de un conjunto contable de bolas disjuntas.

**Definición 7** (a) Un espacio topológico  $X$  se llama *disconexo* si puede ser representado como una unión de dos subconjuntos abiertos disjuntos no vacíos. De manera equivalente, se puede representar como una unión de dos subconjuntos cerrados disjuntos no vacíos.

(b) Si (a) no se cumple,  $X$  se denomina *espacio topológico conexo*.

(c) Un subconjunto  $A$  de  $X$  se llama *conexo* si es un espacio conexo en la topología inducida.

(d) El espacio topológico  $X$  se llama *totalmente desconexo* si el único conexo subconjuntos de  $X$  son el conjunto vacío y los puntos  $\{a\}$ ,  $a \in X$ . En otras palabras, el componente conexo de cualquier punto coincide con este punto.

**Teorema 6** El espacio  $\mathbb{Q}_p$  esta totalmente desconexo.

**Demostración.** Tenemos que, para cada  $a \in \mathbb{Q}_p$  y  $\gamma \in \mathbb{N}$  el conjunto

$$\begin{aligned} B_\gamma(a) &= \{x \in \mathbb{Q} : |x - a|_p \leq p^{-\gamma}\} \\ &= \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p < p^{-\gamma+1}\} \\ &= B_{-\gamma+1}^-(a) \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $B_{-\gamma}(a) = B_{-\gamma+1}(a)$  es un entorno abierto y cerrado del punto  $x = a$ . Por demostrar que  $\mathbb{Q}_p$  es desconexo.

Supongamos que no es desconexo. Entonces existe un elemento de  $A$  de  $\mathbb{Q}_p$  el cual no es un conjunto unitario. Supongamos que  $a \in A$  tal que  $A \neq \{a\}$ . Entonces existe  $\gamma \in \mathbb{N}$  tal que

$$B_{-\gamma}(a) \cap A = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p \leq p^{-\gamma}\} \cap A \neq A.$$

Por lo tanto,  $A$  contiene los puntos en  $\mathbb{Q}_p - B_{-\gamma}(a)$ .

Así, podemos escribir  $A$  como,

$$A = (B_{-\gamma}(a) \cap A) \cup ((\mathbb{Q}_p - B_{-\gamma}(a)) \cap A),$$

donde  $B_{-\gamma}(a)$  es abierto y no vacío, y  $B_{-\gamma}(a) \cap A \neq A$  entonces  $\mathbb{Q}_p - B_{-\gamma}(a)$  es abierto y no vacío.

Por lo tanto,  $A$  se puede escribir como unión disjunta de dos conjuntos abiertos no vacíos, esto implica que  $A$  no es conexo.

En consecuencia, la aplicación continua del argumento anterior podemos escribir  $A$  como una unión contable de conjuntos unitarios, así  $\mathbb{Q}_p$  es desconexo.  $\square$

**Definición 8** (a) Un espacio topológico  $X$  (o un subconjunto  $K$  de  $X$ ) se llama compacto si cada una de sus cubiertas abiertas contiene una subcubierta finita.

(b) Si (a) no se cumple, entonces  $X$  (o  $K$ ) se llama no compacto.

(c) Un espacio topológico  $X$  se llama localmente compacto si todo punto de  $X$  tiene una vecindad compacta.

**Teorema 7** [1] Un conjunto  $K \subset \mathbb{Q}_p$  es compacto en  $\mathbb{Q}_p$  si y solo si es cerrado y acotado en  $\mathbb{Q}_p$ .

**Corolario 1** .

1. Toda bola  $B_\gamma(a)$  y toda esfera  $S_\gamma(a)$  es compacta. En particular, el conjunto  $\mathbb{Z}_p$  es compacto.
2. El espacio  $\mathbb{Q}_p$  es localmente compacto.
3. En el espacio  $\mathbb{Q}_p$  es válido el lema de Heine-Borel: para todo infinito cobertura de un  $K$  compacto es posible elegir una cobertura finita de  $K$

**Proposición 5** [1] Todo compacto en  $\mathbb{Q}_p$  puede ser cubierto por un número finito de bolas disjuntas de un radio fijo.

**Proposición 6** Una esfera  $S_\gamma$  está representada por la unión de  $(p-1)p^{\gamma-\gamma'-1}$  bolas disjuntas  $B_{\gamma'}(a)$ ,  $\gamma' < \gamma$  :

$$S_\gamma = \bigcup_a B_{\gamma'}(a), \gamma' < \gamma$$

Donde

$$a = p^{-\gamma}(a_0 + a_1p + \dots + a_{\gamma-\gamma'-1}p^{\gamma-\gamma'-1}),$$

$$0 \leq a_j \leq p-1, a_0 \neq 0.$$

En particular,

$$S_\gamma = \bigcup_{a_0=1}^{p-1} B_{\gamma-1}(p^{-\gamma}a_0)$$

y

$$S_0 = \{|x|_p = 1\} = \bigcup_{r=1}^{p-1} B_{-1}(r),$$

Donde

$$B_{-1}(r) = \{x \in \mathbb{Z}_p : x_0 = r\} = r + p\mathbb{Z}_p, r = 1, \dots, p-1$$

**Demostración.** Cualquier punto  $x = p^{-\gamma}(x_0 + x_1p + \dots) \in S_\gamma$  se puede representar de forma única en la forma  $x = a + x'$ , donde  $a$  viene dada por

$$a = p^{-\gamma}(a_0 + a_1p + \dots + a_{\gamma-\gamma'-1}p^{\gamma-\gamma'-1})$$

y  $x' \in B_{-\gamma}$ . Por lo tanto

$$S_\gamma = \bigcup_a \{a + B_{\gamma'}\} = \bigcup_a B_{\gamma'}(a)$$

El número de bolas  $B_{\gamma'}(a)$  es  $(p-1)p^{\gamma-\gamma'-1}$  y en vista del teorema 5, estas bolas se separan.

**Proposición 7** La Bola  $B_\gamma$  esta representada por la unión de  $p^{\gamma-\gamma'}$  disjunta de bolas  $B_{\gamma'}(a)$ ,  $\gamma' < \gamma$  :

$$B_\gamma = B_{\gamma'} \bigcup_a B_{\gamma'}(a),$$

donde  $a = 0$  y  $a = a_{-r}p^{-r} + a_{-r+1}p^{-r+1} + \dots + a_{-\gamma'-1}p^{-\gamma'-1}$  son los centros de las bolas

$B_{\gamma'}, 0 \leq a_j \leq p-1, j = -r, -r+1, \dots, -\gamma'-1, a_{-r} \neq 0, r = \gamma'+1, \gamma'+2, \dots, \gamma+1, \gamma$ .

En particular, la bola  $B_0$  esta representada por la unión de  $p$  bolas disjuntas

$$B_0 = B_{-1} \bigcup_{r=1}^{p-1} B_{-1}(r),$$

donde

$$B_{-1}(r) = \{x \in \mathbb{Z}_p : x_0 = r\} = r + p\mathbb{Z}_p, r = 1, \dots, p-1;$$

$$B_{-1} = \{|x|_p \leq p^{-1}\} = p\mathbb{Z}_p.$$

**Demostración.** La demostración se sigue de la Proposición 6, si tenemos en cuenta que

$$B_\gamma = B_{\gamma'} \cup \bigcup_{r=\gamma'+1}^{\gamma} S_r$$

donde los conjuntos  $B_{\gamma'}$  y  $S_r$ ,  $r = \gamma' + 1, \gamma' + 2, \dots, \gamma$ , son disjuntos. El número de bolas son

$$1 + (p-1) \sum_{r=\gamma'+1}^{\gamma} p^{r-\gamma'-1} = 1 + (p-1) \frac{1-p^{\gamma-\gamma'}}{1-p} = p^{\gamma-\gamma'}$$

### 3.1. El espacio $\mathbb{Q}_p^n$

El espacio  $\mathbb{Q}_p^n = \mathbb{Q}_p \times \dots \times \mathbb{Q}_p$  consiste de todos los puntos  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , donde  $x_j \in \mathbb{Q}_p$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $n \geq 2$ .

La norma  $p$ -ádica sobre  $\mathbb{Q}_p^n$  se denota y define como sigue:

$$\|x\|_p := \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|_p, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n$$

Esta norma es no-arquimediana, ya que para cualesquiera  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{Q}_p^n$ .

Se tiene

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p &= \|(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)\| \\ &= \max_{1 \leq j \leq n} \{|x_j + y_j|_p\} \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq n} \max\{|x_j|_p, |y_j|_p\} \\ &= \max\left\{ \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|_p, \max_{1 \leq j \leq n} |y_j|_p \right\} \\ &= \max\left\{ \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|_p, \max_{1 \leq j \leq n} |y_j|_p \right\} \end{aligned}$$

El espacio  $\mathbb{Q}_p^n$  es un espacio dotado con una distancia  $d$  dada por  $d(x, y) = \|x - y\|_p$ ,  $x, y \in \mathbb{Q}_p^n$ .

Además

$$\begin{aligned} d(x, y) = \|x - y\|_p &= \|(x - z) + (z - y)\|_p \\ &\leq \max\{\|x - z\|_p, \|z - y\|_p\} \\ &= \max\{d(x, z), d(z, y)\}, \end{aligned}$$

Para cualquiera  $x, y, z \in \mathbb{Q}_p^n$ .

**Teorema 8** Sea  $\gamma \in \mathbb{Z}$  y  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}_p^n$  cualquiera. Entonces

$$B_\gamma^n = B_\gamma(a_1) \times B_\gamma(a_2) \times \dots \times B_\gamma(a_n)$$

**Demostración.** Sea  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_\gamma(a)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow d(x, a) &= \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - a_j|_p \leq p^{-\gamma} \\ \Leftrightarrow d_j(x_j, a_j) &\leq p^{-\gamma} \quad (\text{para } 1 \leq j \leq n) \\ \Leftrightarrow x_j &\in B_\gamma(a_j) \quad (\text{para } 1 \leq j \leq n) \\ \Leftrightarrow x &\in B_\gamma(a_1) \times B_\gamma(a_2) \times \dots \times B_\gamma(a_n) \\ \Leftrightarrow x &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_\gamma(a_1) \times B_\gamma(a_2) \times \dots \times B_\gamma(a_n) \end{aligned}$$

□

## 4. Integración p-ádica

Como  $\mathbb{Q}_p$  es un grupo abeliano topológico localmente compacto, se tiene que existe una medida de Haar,  $dx$ , que es invariante bajo traslaciones (es decir que  $dx = d(x + a)$  para todo  $a \in \mathbb{Q}_p$ ); dicha medida es única si se normaliza mediante la relación

$$\int_{\mathbb{Z}_p} dx = 1,$$

donde  $\mathbb{Z}_p = B_0(0)$  es el anillo de los enteros p-ádicos.

Además, si  $a \in \mathbb{Q}_p^n \setminus \{0\}$ , entonces  $d^n(ax) = \|a\|_p^n d^n x$ .

Recordemos. Sea  $\Omega$  un grupo abeliano localmente compacto. Una medida de Haar en  $\Omega$  es una medida  $m$ , positiva que satisface las siguientes propiedades:

i)  $m(E) < \infty$  si  $E \subset \Omega$  es compacto.

ii)  $m(E + x) = m(E)$  para todo  $x \in \Omega$  y  $E \subset \Omega$  compacto, es decir,  $m$  es invariante bajo traslaciones.

iii)  $m(\Omega) > 0$ .

**Ejemplo 4** 1.

$$\begin{aligned}
 \int_{B_\gamma^n} d^n x &= \int_{\|x\|_p \leq p^\gamma} d^n x \\
 &= \int_{B_\gamma^n} d^n x \\
 &= \int_{p^{-\gamma}\|x\|_p \leq 1} d^n x \\
 &= \int_{\|p^\gamma x\|_p \leq 1} d^n x
 \end{aligned}$$

Sea  $u = p^\gamma x$  luego aplicamos la medida a ambos lados

$$\begin{aligned}
 d^n u &= \|p^\gamma\|^n d^n x \\
 &= p^{-n\gamma} d^n x \\
 &= p^{n\gamma} \int_{\|u\|_p \leq 1} d^n u \\
 &= p^{n\gamma}
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \int_{S_\gamma^n} d^n x &= \int_{B_\gamma^n} d^n x - \int_{B_{\gamma-1}^n} d^n x \\
 &= p^{n\gamma} - p^{n(\gamma-1)}(1 - p^{-n})
 \end{aligned}$$

3. **Definición 9** Una función  $f$  definida en  $\mathbb{Q}_p^n$  es radial si dado  $\gamma \in \mathbb{Z}$  se cumple:

$$f(x) = f(y) \text{ para todo } x, y \in S_\gamma^n.$$

En otras palabras,  $f$  es radial si es constante sobre esferas. Además, para indicar la dependencia de la norma  $p$ -adica escribimos  $f(\|x\|_p)$  en lugar de  $f(x)$ .

**Ejemplo 5** 1.

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(|x|_p) dx$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{Q}_p} f(|x|_p) dx &= \sum_{-\infty < \gamma < \infty} f(p^\gamma) dx \int_{|x|_p = p^\gamma} dx \\
 &= \sum_{-\infty < \gamma < \infty} f(p^\gamma) (1 - p^{-1}) p^\gamma \\
 &= (1 - p^{-1}) \sum_{-\infty < \gamma < \infty} f(p^\gamma) p^\gamma.
 \end{aligned}$$

2.

$$\int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^{\alpha-1} dx$$

***Demostración.***

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^{\alpha-1} dx &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{|x|_p=p^{-j}} |x|_p^{\alpha-1} dx, \quad \alpha > 0. \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} p^{-j(\alpha-1)} \int_{|x|_p=p^{-j}} dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} p^{-j(\alpha-1)} (1 - p^{-1}) p^{-j} \\ &= (1 - p^{-1}) \sum_{j=0}^{\infty} p^{-j(\alpha-1)} p^{-j} \\ &= (1 - p^{-1}) \sum_{j=0}^{\infty} p^{-j\alpha} \\ &= (1 - p^{-1}) \frac{1}{1 - p^{-\alpha}}. \end{aligned}$$

***Ejemplo 6*** si  $s > -1$ , entonces

$$\int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^s dx = \frac{1 - p^{-1}}{1 - p^{-(s+1)}}$$

***Demostración.***

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^s dx &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{|x|_p=p^{-j}} |x|_p^s dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} p^{-js} \int_{|x|_p=p^{-j}} dx \\ &= (1 - p^{-1}) \sum_{j=0}^{\infty} p^{-js} p^{-j} \\ &= (1 - p^{-1}) \sum_{j=0}^{\infty} p^{-j(s+1)} \\ &= \frac{1 - p^{-1}}{1 - p^{-(s+1)}} \end{aligned}$$

**Ejemplo 7** Supongamos que  $s > 1$ . Demuestre que

$$\int_{\mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p} \frac{dx}{|x|_p^s} < \infty$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p} \frac{dx}{|x|_p^s} &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{|x|_p=p^j} \frac{dx}{|x|_p^s} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{|x|_p=p^j} \frac{dx}{p^{js}} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} p^{-js} \int_{|x|_p=p^j} dx \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} p^{-js} (1 - p^{-1}) p^j \\ &= (1 - p^{-1}) \sum_{j=1}^{\infty} p^{j(1-s)} \\ &= (1 - p^{-1}) \sum_{j=1}^{\infty} (p^{(1-s)})^j < \infty. \end{aligned}$$

**Definición 10** Para  $x \in \mathbb{Q}_p$ , denotamos y definimos la parte fraccionaria de  $x$ , como:

$$\{x\}_p := \begin{cases} 0, & \text{si } \text{ord}_p(x) \geq 0 \text{ ó } x = 0 \\ p^{\text{ord}_p(x)} \sum_{j=0}^{|\text{ord}_p(x)|-1} x_j p^j, & \text{si } \text{ord}_p(x) < 0 \end{cases}$$

es decir,  $\{x\}_p$  es la suma de términos que involucran potencias negativas de  $p$  en la expansión  $p$ -ádica de  $x$ .

**Ejemplo 8** Tomemos  $p = 3$ .

a) si  $x = 2 \cdot 3^{-4} + 1 \cdot 3^{-3} + 1 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-1} + 2 \dots$ , entonces

$$\{x\}_3 = 2 \cdot 3^{-4} + 1 \cdot 3^{-3} + 1 \cdot 3^{-2}.$$

b) si  $y = 2 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^7 + \dots$ , entonces  $\{y\}_3 = 0$ .

**Definición 11** Un carácter aditivo del cuerpo  $\mathbb{Q}_p$  es una función que denotaremos  $\chi(x)$  definida en  $\mathbb{Q}_p$ , continua y valuada compleja que satisface las siguientes condiciones:

$$\chi(x + y) = \chi(x)\chi(y), \quad |\chi(x)| = 1, \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{Q}_p$$

**Lema 4** Si  $\chi(x)$  es un carácter aditivo, entonces

1.  $\chi(0) = 1$
2.  $\chi(-x) = \overline{\chi(x)} = \chi^{-1}(x)$
3.  $\chi(nx) = (\chi(x))^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

**Demostración.**

1.  $\chi(x) = \chi(0 + 0) = \chi(0)\chi(0)$ , ya que  $|\chi(0)| = 1$ , se sigue que  $\chi(0) = 1$ .
2.  $\chi(-x) = \chi(0 - x) = \chi(0)\chi(-x)$  ya que  $\chi(0) = 1$ , tenemos que

$$\chi(-x) = \overline{\chi(x)}$$

para mostrar que  $\chi(-x) = \chi^{-1}(x)$ , tenemos,

$$\chi(x)\chi^{-1} = \chi(x - x) = \chi(0) = 1$$

por lo tanto,  $\chi^{-1}(x) = \overline{\chi(x)} = \chi(-x)$ .

3. Para  $n = 0$ , el enunciado es trivialmente verdadero, supongamos que se cumple para algún  $n \in \mathbb{Z}$ . Entonces

$$\chi((n + 1)x) = \chi(nx + x) = \chi(nx)\chi(x) = (\chi(x))^n\chi(x) = (\chi(x))^{n+1}.$$

**Lema 5** [1] Cualquier carácter aditivo  $\chi(x)$  tiene la forma  $\chi_p(x\xi) = e^{2\pi i\{x\xi\}_p}$  para algún  $\xi \in \mathbb{Q}_p$ .

**Ejemplo 9**

$$\int_{B_\gamma} \chi_p(\xi x) = \begin{cases} p^\gamma, & |\xi|_p \leq p^{-\gamma} \\ 0, & |\xi|_p \geq p^{-\gamma+1}, \gamma \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Sean  $\xi \in \mathbb{Q}_p$  y  $\gamma \in \mathbb{Z}$  arbitrarias pero fijos. Consideremos los siguientes casos:

i) Caso 1.  $|\xi|_p \leq p^{-\gamma}$ . Para  $x \in B_\gamma$  tenemos  $|\xi x|_p = |\xi|_p |x|_p \leq 1$ , así que  $\xi x \in \mathbb{Z}_p$  y en consecuencia  $\chi_p(\xi x) = e^{2\pi i\{\xi x\}_p}$  porque  $\{\xi x\}_p = 0$ .

Luego,

$$\int_{B_\gamma} \chi_p(\xi x) dx = \int_{B_\gamma} dx = p^\gamma.$$

Caso 2.  $|\xi|_p \geq p^{-\gamma+1}$ . Tomemos  $x \in S_\gamma$  arbitrario.

Entonces  $|\xi x'|_p = |\xi|_p |x'|_p \geq p^{-\gamma+1} \cdot p^\gamma = p$  y por lo tanto  $\chi_p(\xi x') \neq 1$ . Hagamos el cambio de variable  $x = y - x'$ , entonces  $dx = dy$ .

Luego,

$$\begin{aligned} \int_{B_\gamma} \chi_p(\xi x) dx &= \int_{B_\gamma} \chi_p(\xi(y - x')) dy = \int_{B_\gamma} \chi_p(\xi y - \xi x') dy \\ &= \int_{B_\gamma} \chi_p(\xi y) \chi_p(-\xi x') dy = \chi_p(-\xi x') \int_{B_\gamma} \chi_p(\xi y) dy \\ &= \chi_p(-\xi x') \int_{B_\gamma} \chi_p(\xi x) dx. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} &= \int_{B_\gamma} \chi_p(\xi x) dx - \chi_p(-\xi x') \int_{B_\gamma} (\xi x) dx = 0 \\ &= \int_{B_\gamma} \chi_p(\xi x) dx [1 - \chi_p(-\xi \cdot x')] = 0 \end{aligned}$$

Entonces,

$$= \int_{B_\gamma} \chi_p(\xi x) dx = 0.$$

Hemos demostrado .

$$\int_{B_\gamma} \chi_p(\xi x) = \begin{cases} p^\gamma, & |\xi|_p \leq p^{-\gamma} \\ 0, & |\xi|_p \geq p^{-\gamma+1}, \gamma \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

### **Ejemplo 10**

$$\int_{S_\gamma} \chi_p(\xi x) dx = \begin{cases} p^\gamma(1 - p^{-1}), & |\xi|_p \leq p^{-\gamma} \\ -p^{\gamma-1}, & |\xi|_p = p^{-\gamma+1} \\ 0, & |\xi|_p = p^{-\gamma+2} \end{cases}$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} \int_{S_\gamma} \chi_p(\xi x) dx &= \int_{B_\gamma} \chi_p(\xi x) dx - \int_{B_{\gamma-1}} \chi_p(\xi x) \\ &= \begin{cases} p^\gamma, & |\xi| \leq p^{-\gamma} \\ 0, & |\xi|_p \geq p^{-\gamma+1} \end{cases} - \begin{cases} p^{\gamma-1}, & |\xi| \leq p^{-\gamma+1} \\ 0, & |\xi|_p \geq p^{-\gamma+2} \end{cases} \\ \int_{S_\gamma} \chi_p(\xi x) dx &= \begin{cases} p^\gamma(1 - p^{-1}), & |\xi|_p \leq p^{-\gamma} \\ -p^{\gamma-1}, & |\xi|_p = p^{-\gamma+1} \\ 0, & |\xi|_p = p^{-\gamma+2} \end{cases} \end{aligned}$$

## 5. Algunas aplicaciones de la integración $p$ -ádica

La teoría de la integración  $p$ -ádica es esencial para definir el concepto de transformada de Fourier de funciones integrables sobre los  $p$ -ádicos.

Es decir, si  $f \in L^1(\mathbb{Q}_p)$  ( $L^1(\mathbb{Q}_p)$  denota las funciones integrables, entonces la transformada de Fourier de  $f$  se denota y define como sigue

$$\hat{f}(\zeta) := \hat{f}(f)(\zeta) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(\zeta \cdot \chi) f(x) dx$$

En la actualidad la integración  $p$ -ádica ha permitido desarrollar intensamente la teoría de operadores pseudo-diferenciales no arquimedianos.

Un operador pseudo diferencial  $f(\partial)$  es una aplicación de la forma

$$f(\partial)\varphi(x) = \int \chi_p(\chi \cdot \zeta) a(\zeta) \hat{\varphi}(\zeta) d\zeta,$$

Donde  $\varphi$  es una función definida sobre el espacio de las funciones localmente constantes con soporte compacto (denotado  $D(\mathbb{Q}_p)$ ) y  $a : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$  es el símbolo del operador  $f(\partial)$ .

### 5.1. La transformada de Fourier de las funciones de prueba

La transformada de Fourier de una función de prueba  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$  se define por la fórmula

$$\hat{\varphi}(\xi) = F[\varphi](\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \chi_p(\xi \cdot x) \varphi(x) d^n x, \quad \xi \in \mathbb{Q}_p^n,$$

Donde

$$\chi_p(\xi \cdot x) = \chi_p(\xi_1 x_1) \dots \chi_p(\xi_n x_n) = e^{2\pi i \sum_{j=1}^n \{\xi_j x_j\}_p}, \quad \xi \cdot x$$

es el escalar producto de vectores, y la función

$$\chi_p(\xi_j x_j) = e^{2\pi i \sum_{r=0}^{j-1} \{\xi_j x_j\}_p}$$

para todo  $\xi_j \in \mathbb{Q}_p$  fijo es un carácter aditivo del campo  $\mathbb{Q}_p$ ,  $\{\xi_j x_j\}_p$  es la parte fraccionaria de un número  $\xi_j x_j$  definido por

$$\{x\} := \begin{cases} 0, & \text{si } \gamma(x) \geq 0 \text{ o } x = 0 \\ p^\gamma \sum_{r=0}^{|\gamma|-1} & \text{si } \gamma(x) < 0 \end{cases}$$

$j = 1, \dots, n$ .

## 5.2. Operadores Pseudo-diferenciales en el campo de los numeros $p$ -ádicos

Un operador  $A$  es pseudo-diferencial si es de la forma

$$(Af)(x) = \mathcal{F}_{\zeta \rightarrow x}^{-1}(a(\zeta)\widehat{f}(\zeta)) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(-x\zeta)a(\zeta)\widehat{f}(\zeta)d\zeta, \quad f \in \text{Dom}(A)$$

Donde  $a(\gamma)$  es llamada el símbolo del operador de  $A$ .

**Ejemplo 11** Consideremos la función  $J : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{R}_+$ , Radial y con

$$\int_{\mathbb{Q}_p} J(|x|_p)dx = 1.$$

Si definimos  $(A\varphi)(x) := \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(-x\zeta)(1 - \widehat{J}(\|\zeta\|_p))\varphi(\zeta)d\zeta$ , tenemos que  $A$  es operador pseudodiferencial.

# Referencias

## Referencias

- [1] Albeverio S., Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M., *Theory of p-adic distributions: linear and nonlinear models*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 370. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [2] Antoniouk A.V., Oleschko K., Kochubei A.N. Khrennikov A.Y., *A stochastic p-adic model of the capillary flow in porous random medium*. *Physica A Stat. Mech. Appl.* 505, 763–777 (2018)
- [3] Avetisov V. A., Bikulov A. Kh., Osipov V. A., *p-adic description of characteristic relaxation in complex systems*, *J. Phys. A* 36 (15), 4239–4246 (2003).
- [4] Chacón-Cortés L. F., Gutiérrez García I., Torresblanca-Badillo A., Vargas A., *Finite time blow-up for a p-adic nonlocal semilinear ultradiffusion equation*. *J. Math. Anal. Appl.* (2021), <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124599>
- [5] Courrège Ph., *Sur la forme intégro-différentielle des opérateurs de  $C_k^\infty$  dans  $C$  satisfaisant au principe du maximum*. Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 10, no 1 (1965-1966), exp. no 2, p. 1-38.
- [6] Frauenfelder H., McMahon B. H., Fenimore P. W., *Myoglobin: the hydrogen atom of biology and paradigm of complexity*, *PNAS* 100 (15), 8615–8617 (2003).
- [7] Gutiérrez García I., Torresblanca-Badillo A., *Strong Markov processes and negative definite functions associated with non-Archimedean elliptic pseudo-differential operators*. *J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.* (2019), 1-18.
- [8] Gutiérrez García I., Torresblanca-Badillo A., *Some classes of non-archimedean pseudo-differential operators related to Bessel potentials*, *J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.* (2020) DOI: 10.1007/s11868-020-00333-3
- [9] Ireland K., Rosen M., *A Classical Introduction to Modern Number Theory, Second Edition*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [10] Jacob N., *Pseudo differential operators and Markov processes. Vol. I. Fourier analysis and semigroups*. Imperial College Press, London, 2001.

- [11] Khrennikov A. Yu., *Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models*. Kluwer, Dordrecht (1997).
- [12] Khrennikov A., Oleschko K., Correa López M., *Modeling Fluid's Dynamics with Master Equations in Ultrametric Spaces Representing the Treelike Structure of Capillary Networks*. *Entropy* 2016, 18, 249; doi: 10.3390/e18070249
- [13] LeVeque W., *Fundamentals of Number Theory*, Claremont Graduate School, Addison-Wesley Publishing Company, 1977.
- [14] Schilling R. L., *Dirichlet operators and the positive maximum principle*, *Integr. Equ. Oper. Theory* 41 (2001), 74-92.
- [15] Taibleson M. H., *Harmonic analysis on n-dimensional vector spaces over local fields. I. Basic results on fractional integration*, *Math. Annalen* 176, 191--207 (1968).
- [16] Taibleson M. H., *Fourier analysis on local fields*. Princeton University Press, (1975).
- [17] Torresblanca-Badillo A., Zúñiga-Galindo W. A., *Non-Archimedean Pseudodifferential Operators and Feller Semigroups, p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, Vol. 10, No. 1, pp. 57-73, (2018).
- [18] Torresblanca-Badillo, A. *Non-archimedean pseudo-differential operators on Sobolev spaces related to negative definite functions*. *J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.* 12, 7 (2021). <https://doi.org/10.1007/s11868-021-00385-z>
- [19] Torresblanca-Badillo A., Zúñiga-Galindo W. A., *Ultrametric Diffusion, exponential landscapes, and the first passage time problem*, *Acta Appl Math* (2018), 157:93.
- [20] Vladimirov V. S., Volovich I. V., Zelenov E. I., *p-adic analysis and mathematical physics*. World Scientific, Singapore (1994).
- [21] Vladimirov V. S., Volovich I. V., Zelenov E.I., *Spectral theory in p-adic quantum mechanics and representation theory*. *Soviet Math. Dokl.* 41(1), 40—44 (1990).
- [22] Volovich I. V., *p-Adic string*. *Class. Quantum Grav.* 4(4), L83-L87 (1987).
- [23] Volovich I. V., *Number theory as the ultimate physical theory*. *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.* 2(1), 77-87 (2010). This paper corresponds to the preprint CERN-TH. 4781/87, Geneva, 1987, 11 pp.

- [24] Zelenov E.I., *Quantum approximation theorem.  $p$ -Adic Numbers Ultramet. Anal. Appl.* 1(1), 88—90 (2009).
- [25] Zúñiga-Galindo W. A., *Fundamental solutions of pseudo-differential operators over  $p$ -adic fields. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 109, 241-245 (2003).
- [26] Zúñiga-Galindo W. A., *Pseudodifferential Equations Over Non-Archimedean Spaces. Lecture Notes in Mathematics 2174, Springer International Publishing, 2016.*