 Universidad del Atlántico	CÓDIGO: FOR-DO-109
	VERSIÓN: 0
	FECHA: 03/06/2020
AUTORIZACIÓN DE LOS AUTORES PARA LA CONSULTA, LA REPRODUCCIÓN PARCIAL O TOTAL, Y PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DEL TEXTO COMPLETO	

Puerto Colombia, 12 de diciembre de 2024

Señores

DEPARTAMENTO DE BIBLIOTECAS

Universidad del Atlántico

Cordial saludo,

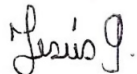
Asunto: Autorización Trabajo de Grado

Yo, **JESÚS ANDRÉS GONZÁLEZ MENESES**, identificado(a) con **C.C. No. 1.002.210.292** de **BARRANQUILLA**, autor(a) del trabajo de grado titulado **ANÁLISIS DEL PROBLEMA DEL MOMENTO MAGNÉTICO ANÓMALO DEL MUÓN EN UN MODELO U(1)D ADICIONAL AL MODELO ESTÁNDAR** presentado y aprobado en el año **2024** como requisito para optar al título Profesional de **FÍSICO**; autorizo al Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico para que, con fines académicos, la producción académica, literaria, intelectual de la Universidad del Atlántico sea divulgada a nivel nacional e internacional a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios del Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico pueden consultar el contenido de este trabajo de grado en la página Web institucional, en el Repositorio Digital y en las redes de información del país y del exterior, con las cuales tenga convenio la Universidad del Atlántico.
- Permitir consulta, reproducción y citación a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato CD-ROM o digital desde Internet, Intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer.

Esto de conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

Atentamente,



Firma

Jesús Andrés González Meneses

C.C. No. 1002210292 de Barranquilla



Universidad
del Atlántico

CÓDIGO: FOR-DO-110

VERSIÓN: 01

FECHA: 02/DIC/2020

DECLARACIÓN DE AUSENCIA DE PLAGIO EN TRABAJO ACADÉMICO PARA GRADO

Este documento debe ser diligenciado de manera clara y completa, sin tachaduras o enmendaduras y las firmas consignadas deben corresponder al (los) autor (es) identificado en el mismo.

Puerto Colombia, **12 de diciembre de 2024**

Una vez obtenido el visto bueno del director del trabajo y los evaluadores, presento al **Departamento de Bibliotecas** el resultado académico de mi formación profesional o posgradual. Asimismo, declaro y entiendo lo siguiente:

- El trabajo académico es original y se realizó sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, en consecuencia, la obra es de mi exclusiva autoría y detento la titularidad sobre la misma.
- Asumo total responsabilidad por el contenido del trabajo académico.
- Eximo a la Universidad del Atlántico, quien actúa como un tercero de buena fe, contra cualquier daño o perjuicio originado en la reclamación de los derechos de este documento, por parte de terceros.
- Las fuentes citadas han sido debidamente referenciadas en el mismo.
- El (los) autor (es) declara (n) que conoce (n) lo consignado en el trabajo académico debido a que contribuyeron en su elaboración y aprobaron esta versión adjunta.

Título del trabajo académico:	ANÁLISIS DEL PROBLEMA DEL MOMENTO MAGNÉTICO ANÓMALO DEL MUÓN EN UN MODELO U(1)d ADICIONAL AL MODELO ESTÁNDAR
Programa académico:	FÍSICA

Firma de Autor 1:							
Nombres y Apellidos:	JESÚS ANDRÉS GONZÁLEZ MENESES						
Documento de Identificación:	CC	X	CE		PA	Número:	1002210292
Nacionalidad:	COLOMBIANO				Lugar de residencia:	BARRANQUILLA	
Dirección de residencia:	CALLE 45C #16-36 SAN JOSÉ						
Teléfono:	NO APLICA				Celular:	3102031039	



Universidad
del Atlántico

CÓDIGO: FOR-DO-111

VERSIÓN: 0

FECHA: 03/06/2020

FORMULARIO DESCRIPTIVO DEL TRABAJO DE GRADO

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO DE GRADO	ANÁLISIS DEL PROBLEMA DEL MOMENTO MAGNÉTICO ANÓMALO DEL MUÓN EN UN MODELO U(1)_d ADICIONAL AL MODELO ESTÁNDAR
AUTOR(A) (ES)	JESÚS ANDRÉS GONZÁLEZ MENESES
DIRECTOR (A)	SAIR ENRIQUE ARQUEZ MENDOZA
CO-DIRECTOR (A)	JORGE LUIS NAVARRO ESTRADA
JURADOS	MARIO ANDRÉS ACERO ORTEGA PABLO ROIG GARCÉS
TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE	FÍSICO
PROGRAMA	FISICA
PREGRADO / POSTGRADO	PREGRADO
FACULTAD	CIENCIAS BÁSICAS
SEDE INSTITUCIONAL	SEDE NORTE
AÑO DE PRESENTACIÓN DEL TRABAJO DE GRADO	2024
NÚMERO DE PÁGINAS	78
TIPO DE ILUSTRACIONES	TABLAS, GRÁFICOS Y DIAGRAMAS
MATERIAL ANEXO (VÍDEO, AUDIO, MULTIMEDIA O PRODUCCIÓN ELECTRÓNICA)	NO APLICA
PREMIO O RECONOCIMIENTO	MERITORIA



**ANÁLISIS DEL PROBLEMA DEL MOMENTO MAGNÉTICO ANÓMALO DEL MUÓN EN
UN MODELO $U(1)_d$ ADICIONAL AL MODELO ESTÁNDAR**

**JESÚS ANDRÉS GONZÁLEZ MENESES
TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO**

**PROGRAMA DE FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO
PUERTO COLOMBIA
2024**

**ANÁLISIS DEL PROBLEMA DEL MOMENTO MAGNÉTICO
ANÓMALO DEL MUÓN EN UN MODELO $U(1)_d$ ADICIONAL AL
MODELO ESTÁNDAR**

JESÚS ANDRÉS GONZÁLEZ MENESES

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para aspirar al título de Físico

Director

CDr. Sair Enrique Arquez Mendoza

Codirector

Dr. Jorge Luis Navarro Estrada

**UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
PROGRAMA DE FÍSICA
PUERTO COLOMBIA
2024**

Nota de Aceptación

Firma del Presidente del jurado

Firma del jurado 1 - Evaluador

Firma del jurado 2 - Evaluador

Puerto Colombia, 12 de Noviembre de 2024

Dedicado a un joven yo que jamás dejó de soñar.

Quisiera expresar mi más profundo agradecimiento a todas las personas e instituciones que hicieron posible la realización de esta tesis.

En primer lugar, agradezco a mis asesores de tesis, el Mg. Sair Enrique Arquez Mendoza y el Dr. Jorge Luis Navarro Estrada, por su guía, paciencia y apoyo continuo durante el desarrollo de este trabajo. Su experiencia y consejos fueron fundamentales en cada etapa del proceso de investigación.

A mis profesores y colegas de la Universidad del Atlántico, por el conocimiento compartido, las discusiones constructivas y el ambiente de aprendizaje que enriquecieron mi formación académica y personal.

A mis compañeros y amigos, en especial a mi novia María Victoria Niebles, por su compañía, ánimo y por hacer más llevaderos los momentos difíciles.

A mi familia, especialmente a mis padres, mi tío y mi hermana, quienes siempre me han brindado su apoyo incondicional, su amor y comprensión. Gracias por creer en mí y motivarme a seguir adelante en cada momento de esta travesía.

Finalmente, me gustaría agradecer al semillero de investigación PEyCOS por mostrarme el camino.

CONTENIDO

	pág.
RESUMEN	
INTRODUCCIÓN	1
1. PARTÍCULAS ELEMENTALES Y MODELO ESTÁNDAR	5
1.1. Fermiones	5
1.2. Bosones	6
1.3. Simetrías	7
1.4. Lagrangianos	8
1.4.1. Lagrangiano de Klein-Gordon	9
1.4.2. Lagrangiano de Dirac	10
1.4.3. Lagrangiano de Proca	11
1.5. Campos de Yang-Mills	12
1.6. Propagadores	14
1.6.1. Propagador fermiónico	15
1.6.2. Propagador de Proca no masivo	17
1.6.3. Propagador de Proca masivo	20
1.7. Electrodinámica Cuántica	21
1.7.1. Reglas de Feynman para la QED	22
1.8. Rompimiento espontáneo de la simetría	25
1.9. Problemas del Modelo Estándar	28
2. MODELO $U(1)_d$	29
2.1. Lagrangiano asociado al modelo $U(1)_d$	29
2.2. Propagador del bosón Z'	31
2.3. Restricciones a la masa y término de mezcla cinética del bosón Z'	31

3. MOMENTO MAGNÉTICO ANÓMALO DEL MUÓN	33
3.1. El muón	33
3.1.1. Propiedades principales	33
3.2. Momento magnético anómalo del muón	35
3.3. Forma de la función de corrección al vértice	37
3.4. Significado físico de los factores de forma	40
3.5. Medición experimental (Muon g-2)	43
3.6. Predicciones del Modelo Estándar	44
4. ANÁLISIS Y RESULTADOS	48
4.1. Contribución del bosón Z' al momento magnético anómalo del muón a 1-loop	48
4.2. Comparación con los datos experimentales de la colaboración Muon g-2	59
CONCLUSIONES	63
ANEXOS	64
A. Descomposición de Gordon	64
B. Identidad de Ward	64
C. Parametros de Feynman	65
D. Rotación de Wick	65
BIBLIOGRAFÍA	67

LISTA DE TABLAS

1.	Leptones en el Modelo Estándar.	6
2.	Bosones en el Modelo Estándar.	7
3.	Líneas externas.	23
4.	Propagadores y vértices.	48
5.	Rangos de nueva física para el momento magnético anómalo del muón.	59

LISTA DE FIGURAS

1.	Partículas elementales en el Modelo Estándar.	7
2.	Transformación de gauge local en el espacio de Minkowski.	12
3.	Propagador de un mesón en el espacio de Minkowski con $y^0 > x^0$	14
4.	Líneas externas en un diagrama de Feynman típico.	23
5.	Densidad de energía potencial $V(\Phi)$ en función de $ \Phi $	26
6.	Producción de antimuones en aceleradores de partículas.	34
7.	Producción de muones [antimuones] polarizados en el decaimiento del pión positivo [negativo].	34
8.	Decaimiento del muón a tres cuerpos.	35
9.	Producción de positrones [electrones] polarizados en el decaimiento del antimuón [muón].	35
10.	Interacción a orden árbol entre un leptón cargado y un campo electromagnético.	36
11.	Expansión de la corrección al vértice $\Gamma^\mu(p, p')$. (a) Contribución total. (b) Contribución a orden árbol. (c) Contribución a 1-loop.	37
12.	Predicciones experimentales y teóricas para el valor del $g - 2$ del muón.	46
13.	Predicciones experimentales y teóricas para el valor del $g - 2$ del muón considerando BMW'24.	47
14.	Interacción a 1-loop para la anomalía considerando un fotón oscuro.	48
15.	Contribución del bosón Z' a la anomalía.	58
16.	Contribución del bosón Z' a la anomalía (escala logarítmica).	59
17.	Comparación entre la contribución del bosón Z' a la anomalía y las predicciones teóricas.	60
18.	Comparación entre la contribución del bosón Z' a la anomalía y la predicción teórica de WP.	60
19.	Comparación entre la contribución del bosón Z' a la anomalía y la predicción teórica de CMD-3.	61
20.	Comparación entre la contribución del bosón Z' a la anomalía y la predicción teórica de BMW'24.	62
21.	Rotación de Wick con polos ubicados en l_+^0 y l_-^0	66

RESUMEN

Esta propuesta de grado aborda la investigación del momento magnético anómalo del muón en el contexto de un modelo teórico extendido que incorpora un grupo de simetría $U(1)_d$ adicional al Modelo Estándar de la física de partículas. El momento magnético anómalo del muón es un parámetro fundamental que mide la interacción magnética del muón con un campo electromagnético externo. Además, este valor será sensible a las partículas que existen en la naturaleza (incluyendo también partículas desconocidas). Recientemente se ha observado la existencia de discrepancias sutiles de los valores experimentales de este observable con las predicciones teóricas, lo cual podría ser un indicio de física más allá del Modelo Estándar. La investigación se enfoca en la formulación y análisis de un modelo $U(1)_d$ extendido, considerando sus implicaciones en la predicción del momento magnético anómalo del muon. Se emplearán herramientas matemáticas y teóricas avanzadas tales como la teoría de grupos, la teoría de Yang-Mills y cálculos para las correcciones radiativas que ayudarán a desarrollar una descripción detallada del modelo propuesto y evaluar su coherencia con las observaciones experimentales existentes. Se espera que los resultados de esta investigación proporcionen una comprensión más profunda de las posibles extensiones del Modelo Estándar y sus implicaciones en la física de partículas, contribuyendo así al avance del conocimiento en este campo.

PALABRAS CLAVES: Momento magnético anómalo, muón, Modelo Estándar, colaboración *Muon g-2*, Lagrangiano, grupos de simetría.

INTRODUCCIÓN

La física de partículas es un área de estudio que ha ido evolucionando con el pasar de los años, trayendo en conjunto con las mejoras tecnológicas, mayor precisión en la medición de las propiedades fundamentales de las partículas elementales que ayudan a corroborar la eficacia del eje central de este campo: el Modelo Estándar de la física de partículas. Actualmente, hay varias medidas experimentales que discrepan con las predicciones de este modelo e incógnitas que no responde. Algunos ejemplos de estas son: la materia oscura, el rompimiento de la simetría fundamental de partículas y antipartículas, la masa de los neutrinos y el momento magnético anómalo del muón. Es decir, el Modelo Estándar es incompleto. En ese sentido, este trabajo cobra una importancia fundamental, dado que el estudio del problema del momento magnético anómalo del muón puede ayudar a probar la consistencia del Modelo Estándar y comprender posibles desviaciones que podrían implicar física más allá de este.

En 2001, el Laboratorio Nacional de Brookhaven realizó la medida experimental del momento magnético anómalo del muón negativo $a_{\mu^-} = (g - 2)/2$ con mayor precisión hasta esa fecha, esta medida se logra usando la precesión del espín de los muones en un anillo de almacenamiento magnético con enfoque electrostático [1]. Este método también fue utilizado para realizar una medida del momento magnético de muones positivos en el 2000 [2]. Las dos medidas individuales poseían una precisión cercana de 0.7 ppm (en este contexto, ppm o “partes por millón” es una forma de cuantificar la exactitud y la calidad de las mediciones, lo cual en este caso significa que la medida puede variar en una cantidad de hasta 0.7 partes por millón con respecto al valor real), que al combinarlas daban una precisión de 0.5 ppm para el momento magnético del muón (esta medida es conocida como “Brookhaven E821”). El anillo de almacenamiento de Brookhaven presentó una precisión tan alta que fue transportado en una sola pieza en 2013 al Fermilab, que contaba con una mejor producción de paquetes de muones. Con esto se forma la colaboración *Muon g-2*, la cual tiene como objetivo mejorar la precisión de las medidas del momento magnético anómalo del muón y comparar estos resultados con las predicciones teóricas.

Con la venida de nuevas medidas experimentales más precisas por parte de la colaboración *Muon g-2*, nace la colaboración *The Muon g-2 Theory Initiative*. En la cual, los físicos teóricos se ponen en la tarea de actualizar las predicciones teóricas de este observable utilizando “papel y lápiz” en conjunto con métodos computacionales. En 2013 y 2014, la iniciativa realiza sus primeras contribuciones para mejorar la predicción del

Modelo Estándar, llegando a un resultado con una diferencia de 3-4 desviaciones estándar en comparación con los resultados de Brookhaven E821 [3, 4]. Seis años después, la misma iniciativa publica una nueva revisión del valor teórico del momento magnético del muón en el Modelo Estándar usando las medidas experimentales para la sección transversal del decaimiento de un par electrón-positrón a hadrones [5]. Esta publicación es de crucial importancia y se le conoce bajo el nombre de *White paper* (para simplificar, de ahora en adelante le llamaremos WP) en la comunidad de investigadores del problema del momento magnético anómalo del muón.

Ya en 2021 se publican los resultados de la primera corrida (*Run-1*) hecha en 2018 por la colaboración *Muon g-2* en el Fermilab, la cual poseía una precisión de 0.46 ppm y se encontraba a 3.3 desviaciones estándar con la predicción de WP. Esto, en conjunto con las medidas de Brookhaven E821, incrementaba la tensión entre el experimento y la teoría en 4.2 desviaciones estándar [6]. Dos años después, se hacen públicos los resultados de la segunda y tercera corrida (*Run 2/3*) con una notoria mejora en la precisión de 0.20 ppm, y una discrepancia de 5 desviaciones estándar con la predicción teórica realizada en WP [7].

Sin embargo, cabe mencionar dos predicciones recientes que entran en conflicto con la predicción del WP. La primera corresponde al cálculo de la colaboración BMW (Budapest-Marseille-Wuppertal) desarrollado con herramientas computacionales tales como el *Lattice QCD* (*Quantum Chromo-Dynamics*), que proporciona una predicción para los aportes en HVP (*Hadronic Vacuum Polarization*) [8, 9]. La segunda, pertenece a un arreglo obtenido mediante una nueva medida preliminar del proceso $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ por la colaboración CMD-3 (*Cryogenic Magnetic Detector*) [10, 11]. Debido a esta ambigüedad en las predicciones teóricas, se propone seguir desarrollando y estudiando las técnicas utilizadas. Y, sí se revelan tensiones significativas entre los resultados basados en datos experimentales y los del *Lattice QCD* en la HVP, será necesario un esfuerzo continuo para comprender de dónde surgen estas [12].

Si bien los valores experimentales difieren en 5 sigmas con los valores del WP, lo cual a primeras puede implicar una discrepancia significativa, debido a la ambigüedad teórica se debe manejar el tema con prudencia. Por eso, aún es posible que esta discrepancia se trate de una fluctuación estadística, lo que implica que se debe seguir revisando las predicciones teóricas y continuar mejorando la precisión en futuros experimentos. Por otro lado, existe la posibilidad de que el muón al interactuar con el campo magnético

externo produzca partículas desconocidas, y las nuevas contribuciones asociadas a estas partículas aumenten el factor g , acercándolo a los valores experimentales. Es decir, que exista física más allá del Modelo Estándar [3].

Hay muchas formas de acoplar nuevas partículas e interacciones al Modelo Estándar, pero las más populares son las que coinciden con varios experimentos y a su vez resuelven otras incógnitas del Modelo Estándar. Por ejemplo, la(s) partícula(s) asociada(s) a la materia oscura. En un estudio publicado en 2021, se analizan propuestas de diversos modelos candidatos a solucionar esta problemática. Algunas de estas propuestas son modelos en los que se añaden de 1 a 3 nuevos campos y modelos de supersimetría con énfasis en el MSSM (*Minimal Supersymmetric Standard Model*) [13]. Entre las extensiones de un único campo se encuentran modelos como: la adición de un nuevo campo de gauge Z_d que surge de un nuevo grupo de simetría gauge $U(1)_d$ [14], la adición de un doblete de dos Higgs [15], y la adición de leptosquarks escalares [16].

El objetivo principal de este trabajo es proponer una solución al problema del momento magnético anómalo del muón usando un grupo de simetría $U(1)_d$ adicional al Modelo Estándar. Para cumplir dicho objetivo se plantearon cuatro objetivos específicos. El primero es analizar trabajos previos relacionados con el momento magnético anómalo del muón, prestando especial atención a las discrepancias entre las mediciones experimentales y las predicciones teóricas del Modelo Estándar. El segundo es estudiar la viabilidad del Lagrangiano asociado al grupo de simetría $U(1)_d$ para resolver el problema del momento magnético anómalo de muón. El tercero es realizar cálculos teóricos detallados para las predicciones del momento magnético anómalo del muón aplicando el Lagrangiano asociado a $U(1)_d$. Finalmente, el cuarto objetivo específico es comparar los resultados obtenidos del Lagrangiano asociado a $U(1)_d$ con los valores derivados a partir del Modelo Estándar y los datos experimentales de la colaboración *Muon $g-2$* .

Este trabajo de grado consta de 4 capítulos. El contenido del primer capítulo es acerca del Modelo Estándar y la física de partículas elementales, en el cual se explica de manera general; aspectos del Modelo Estándar y algunas limitaciones que presenta actualmente.

En el segundo capítulo se desarrolla el modelo $U(1)_d$ junto con su construcción matemática y se obtiene el propagador del bosón Z' del Lagrangiano asociado a $U(1)_d$. Además, se analizan las restricciones de la masa y el término de mezcla cinética del bosón Z' .

En el tercer capítulo se explica la física del muón y sus propiedades principales, centrada esencialmente en el momento magnético anómalo de este. Se halla la forma general de la función de corrección al vértice para este caso. Finalmente, se profundiza sobre los valores dados por el Modelo Estándar (WP, CMD-3 y BMW'24) y la colaboración *Muon g-2*.

En el cuarto capítulo se muestra la contribución del Modelo $U(1)_d$ al momento magnético anómalo del muón a *1-loop*, la cual se compara con los valores experimentales de la colaboración *Muon g-2* y los resultados del Modelo Estándar.

Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo.

1. PARTÍCULAS ELEMENTALES Y MODELO ESTÁNDAR

La física fundamental de las altas energías ha traído consigo una gran variedad de modelos teóricos para dar explicación a los diversos experimentos. Especialmente, el Modelo Estándar ha tenido un éxito notable en predecir y explicar la física subatómica. Este logra dar una descripción precisa de las partículas fundamentales y sus interacciones usando como herramienta la teoría cuántica de campos.

Las partículas elementales son los constituyentes fundamentales de toda la materia, estas se consideran puntuales y sin estructura. Es decir, no ocupan un volumen en el espacio. En el Modelo Estándar se caracterizan en dos grandes grupos: los fermiones y los bosones.

1.1. Fermiones

Estas partículas elementales siguen la estadística de Fermi-Dirac y obedecen el principio de exclusión de Pauli. Es decir, dos fermiones no pueden ocupar el mismo estado cuántico. Además, se caracterizan por tener valores de espín semi-entero. Actualmente, en el Modelo Estándar todos los fermiones tienen espín $1/2$. En otras palabras, sus campos asociados tendrán naturaleza espinorial.

Los fermiones en el Modelo Estándar están conformados por dos familias: los quarks y los leptones. La principal diferencia entre ellos es que los quarks pueden sentir la fuerza fuerte (poseen carga de color) y los leptones no (no poseen carga de color).

Los leptones pueden tener carga eléctrica, como en el caso del electrón, el muón y el tau. O ser eléctricamente neutros, como ocurre con los neutrinos. Cada uno de los leptones cargados tienen una antipartícula similar a ellos, pero con carga eléctrica diferente. Es decir, son fermiones de Dirac. Por otro lado, los leptones neutros al no poseer carga, podría darse la posibilidad de que sean su propia antipartícula. Por ende, constituirían fermiones de Majorana.

En el Modelo Estándar los neutrinos no poseen masa. Sin embargo, pruebas experimentales indican que cuentan con masas muy pequeñas que implican oscilaciones entre

estos. Por otro lado, los leptones cargados se caracterizan principalmente por la diferencia existente en su masa y vida media, tal como se puede ver en la Tabla 1.

Tabla 1. Leptones en el Modelo Estándar.

Leptón	Masa [MeV/c^2]	Vida Media [s]
Electrón e^-	0.511	∞
Neutrino electrónico ν_e	0	∞
Muón μ^-	105.658	2.197×10^{-6}
Neutrino muónico ν_μ	0	∞
Tau τ^-	1777	$(291.0 \pm 1.5) \times 10^{-15}$
Neutrino taónico ν_τ	0	∞

Experimentalmente no se ha podido encontrar un quark en estado libre, naturalmente se les encuentra en estados ligados llamados hadrones. Los Hadrones se clasifican en mesones (estado ligado de un par quark-antiquark) y bariones (estado ligado de tres quarks).

1.2. Bosones

Estas partículas elementales siguen la estadística de Bose-Einstein y no obedecen el principio de exclusión de Pauli. Es decir, dos bosones pueden ocupar el mismo estado cuántico. Actualmente, en el Modelo Estándar existe un bosón con espín 0 (es de naturaleza escalar) y cuatro bosones portadores de fuerza con espín 1 (sin tener en cuenta las 8 variaciones de gluones y las dos variaciones del W).

Los bosones portadores de fuerza (o también llamados bosones mediadores) del Modelo Estándar son: El fotón γ que se encarga de transmitir la interacción electromagnética, los bosones Z^0 , W^+ y W^- que se encargan de mediar la interacción débil, y los ocho tipos de gluones G^a ($a = 1, 2, \dots, 8$) que median la interacción fuerte. A diferencia del fotón y los gluones, los bosones transmisores de la interacción débil tienen masa. Esta es obtenida mediante un proceso de ruptura espontánea de simetría que involucra un bosón escalar (bosón de Higgs).

Las principales características de los bosones en el Modelo Estándar se encuentran en la tabla 2.

Tabla 2. Bosones en el Modelo Estándar.

Bosón	Masa [GeV/c^2]	Espín	Interacción
fotón γ	0	1	Electromagnética
Gluón $G_n (n = 1, 2, \dots, 8)$	0	1	Fuerte
Z^0	91.1876 ± 0.0021	1	Debíl neutra
W^\pm	80.377 ± 0.012	1	Debíl cargada
Higgs H^0	25.25 ± 0.17	0	-

En resumen, se pueden organizar las partículas elementales en el Modelo Estándar teniendo en cuenta sus propiedades principales tal como se ve en la Figura 1.

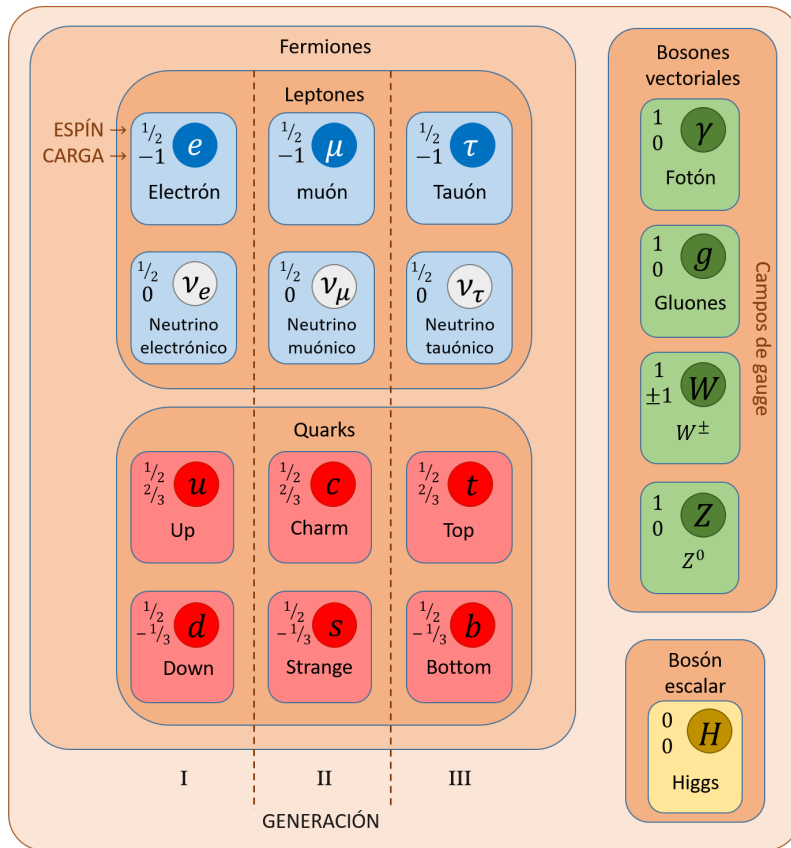


Figura 1. Partículas elementales en el Modelo Estándar.

1.3. Simetrías

Una simetría en física corresponde a cuando ciertas propiedades de un sistema se mantienen invariantes bajo ciertas transformaciones. Existen dos formas de caracterizar las simetrías que se encuentran en la naturaleza:

- **Las simetrías discretas:** Corresponden a las simetrías que presenta un sistema bajo transformaciones no continuas. Por ejemplo, la simetría que tiene un cuadrado al ser rotado en ángulos de 90° .
- **Las simetrías continuas:** Corresponden a las simetrías que presenta un sistema bajo transformaciones continuas. Por ejemplo, la simetría que tiene un círculo bajo rotaciones continuas.

En física es de gran importancia el uso de las simetrías continuas para la descripción de sistemas. Ya que en esta área usualmente se trabaja con transformaciones continuas en el espacio tiempo. Sin embargo, existen otro tipo de simetrías continuas menos conocidas llamadas simetrías internas. Las simetrías internas actúan directamente en los campos que forman las partículas que conocemos, por lo que su interpretación suele ser más abstractas. Las simetrías internas pueden clasificarse en dos tipos:

- **Las simetrías globales:** Los parámetros de la transformación no dependen de las coordenadas en el espacio tiempo. Es decir, cada objeto del espacio tiempo transforma de la misma manera.
- **Las simetrías locales:** Los parámetros de la transformación dependen de las coordenadas en el espacio tiempo. Es decir, los objetos en el espacio tiempo transforman de manera independiente.

1.4. Lagrangianos

Si se considera un sistema cuyos grados de libertad vienen dados por distintos campos arbitrarios ϕ_n que dependen del 4-vector x^μ (el cual, a partir de este momento, denotaremos como x para simplificar la notación). La densidad Lagrangiana de este sistema tomará la siguiente forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[\phi_n(x), \partial_\mu \phi_n(x)], \quad (1)$$

donde, para respetar la relatividad especial, \mathcal{L} debe ser un escalar bajo transformaciones de Lorentz. Es decir, todas las cantidades que aparezcan en la densidad Lagrangiana deben ser 4-escalares.

La acción S para una región arbitraria Ω del espacio-tiempo se define como:

$$S[\phi_n, \Omega] = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}[\phi_n(x), \partial_\mu \phi_n(x)]. \quad (2)$$

Es posible obtener las ecuaciones de campo mediante la minimización de la acción teniendo en cuenta las siguientes variaciones de los campos y sus derivadas¹:

$$\begin{aligned}\phi_n &\rightarrow \phi_n + \delta\phi_n, \\ \partial_\mu\phi_n &\rightarrow \partial_\mu\phi_n + \partial_\mu\delta\phi_n,\end{aligned}\tag{3}$$

de modo que

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_n}\delta\phi_n + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_n)}\partial_\mu\delta\phi_n \right] = 0.\tag{4}$$

Expresando el segundo término como la derivada de un producto y considerando que ϕ_n es arbitrario, se llega a las ecuaciones de Euler-Lagrange para campos:

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_n)} \right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_n} = 0.\tag{5}$$

A partir de este momento, se hará referencia a la densidad Lagrangiana simplemente como Lagrangiano.

1.4.1. Lagrangiano de Klein-Gordon

El Lagrangiano asociado a un campo escalar complejo se expresa como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi^\dagger\partial^\mu\Phi - \frac{1}{2}m^2|\Phi|^2.\tag{6}$$

En este caso, el sistema cuenta con 2 grados de libertad dados por la parte real e imaginaria de Φ :

$$\Phi = \phi_1 + i\phi_2.\tag{7}$$

Usando el principio variacional (las ecuaciones de Euler-Lagrange), al considerar la variación de la acción con respecto al campo Φ , se obtiene la ecuación de Klein-Gordon:

$$(\square + m^2)\Phi = 0,\tag{8}$$

donde $\square = \partial_\mu\partial^\mu$ es el operador d'Alembertiano.

Las soluciones en onda plana para la ecuación de Klein-Gordon con los operadores de creación y aniquilación son:

¹Las variaciones del campo y sus derivadas deben ser nulas en la frontera.

$$\phi_1(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a_{p,1}e^{-ipx} + a_{p,1}^\dagger e^{ipx}], \quad (9)$$

$$\phi_2(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a_{p,2}e^{-ipx} + a_{p,2}^\dagger e^{ipx}]. \quad (10)$$

Por otro lado, también es posible escribir el campo complejo $\Phi = \phi_1 + i\phi_2$ como un doblete real:

$$\vec{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{j=1}^2 [\vec{\epsilon}_j a_{p,j} e^{-ipx} + \vec{\epsilon}_j^\dagger a_{p,j}^\dagger e^{ipx}]. \quad (11)$$

donde $\vec{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{\epsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pueden ser interpretados como la polarización del campo escalar complejo.

1.4.2. Lagrangiano de Dirac

El Lagrangiano encargado de describir partículas masivas de espín $\frac{1}{2}$ se expresa como:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (12)$$

El cual, al igual que el campo escalar complejo, cuenta con dos grados de libertad ψ y $\bar{\psi}$.

Usando el principio variacional (las ecuaciones de Euler-Lagrange), al considerar la variación de la acción con respecto al campo ψ , se obtiene la ecuación de Dirac:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (13)$$

Y, usando nuevamente el principio variacional, pero esta vez variando la acción respecto a $\bar{\psi}$, se obtiene la ecuación de Dirac adjunta:

$$\bar{\psi}(i\overleftarrow{\gamma}^\mu\partial_\mu + m) = 0. \quad (14)$$

Las soluciones generales en onda plana para la ecuación de Dirac y la ecuación de Dirac adjunta con los operadores de creación y aniquilación son:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 [u_s(p)c_{p,s}e^{-ipx} + v_s(p)d_{p,s}^\dagger e^{ipx}], \quad (15)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 [\bar{v}_s(p) d_{p,s} e^{-ipx} + \bar{u}_s(p) c_{p,s}^\dagger e^{ipx}]. \quad (16)$$

En las cuales, $u_s(p)$ y $v_s(p)$ son la base de soluciones de la ecuación de Dirac con momento arbitrario p , que describen electrones y positrones respectivamente:

$$u_s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi_s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi_s \end{pmatrix}, \quad v_s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta_s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta_s \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Para los cuales, ξ y η son una base de espinores constantes de dos componentes.

1.4.3. Lagrangiano de Proca

El Lagrangiano asociado a un campo vectorial masivo se expresa como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_A^2 A^\mu A_\mu, \quad (18)$$

donde $F^{\mu\nu} = (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$. En este caso, el sistema solo cuenta con un grado de libertad asociado al campo A^μ .

Usando el principio variacional (las ecuaciones de Euler-Lagrange), al considerar la variación de la acción con respecto al campo A^μ , se obtiene la ecuación de Proca:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_A^2 A^\nu = 0. \quad (19)$$

La cual presenta dos soluciones en onda plana dependiendo de si se considera nulo o no el término masivo m_A . La solución general para un campo vectorial sin masa ($m_A = 0$) es:

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{j=1}^2 [\epsilon_\mu^j(p) a_{p,j} e^{-ipx} + \epsilon_\mu^{j*}(p) a_{p,j}^\dagger e^{ipx}]. \quad (20)$$

Por otro lado, la solución general para un campo vectorial con masa ($m_A > 0$) es:

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{j=1}^3 [\epsilon_\mu^j(p) a_{p,j} e^{-ipx} + \epsilon_\mu^{j*}(p) a_{p,j}^\dagger e^{ipx}]. \quad (21)$$

En ambos casos es necesario que los vectores de polarización estén expresados en una base de cuatro componentes al igual que A^μ . Adicionalmente, cuando existe presencia de masa en el lagrangiano, el campo adquiere una nueva polarización longitudinal.

1.5. Campos de Yang-Mills

En teoría cuántica de campos, los campos de las partículas que causan las interacciones nacen de las simetrías de gauge. Las cuales son un tipo de simetría interna asociada a las transformaciones de gauge. Una transformación de gauge corresponde a un cambio de base en el espacio interno de los campos. Ahora, una transformación de gauge local es un cambio de base en un espacio interno distinto en cada punto de este. Como se puede observar en la Figura 2, al realizarse una transformación de gauge local $U(x)$ sobre un vector $|\psi(x)\rangle$, la transformación cambiará tanto la base $|e_a(x)\rangle$ como las componentes $|\psi^a(x)\rangle$ de este. Sin embargo, se seguirá describiendo el mismo vector $|\psi(x)\rangle$.

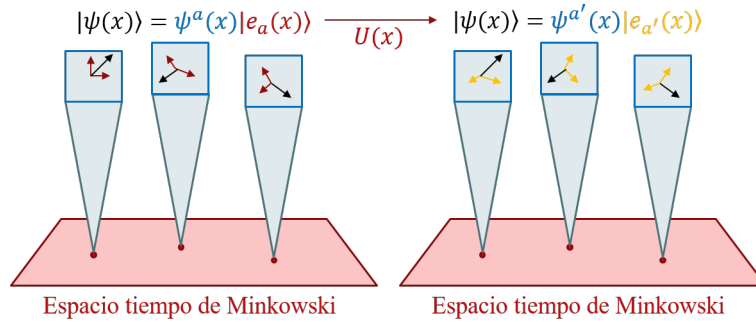


Figura 2. Transformación de gauge local en el espacio de Minkowski.

Las transformaciones de gauge vienen dadas por matrices unitarias que pertenecen a cierto grupo de Lie $U(1)$ o $SU(N)$. Debido a esto, las matrices de transformación pueden representarse como:

$$U_\alpha(x) = e^{i\alpha^a(x)T_a}, \quad (22)$$

donde $\alpha^a(x)$ es un parámetro real de la transformación (que puede o no depender de las coordenadas) y T_a son los generadores del grupo asociados a esa representación. Estos generadores deben obedecer el siguiente álgebra de Lie:

$$[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c, \quad (23)$$

siendo f_{ab}^c las constantes de estructura del grupo. Que al tratarse de grupos semisimples y compactos serán completamente antisimétricas.

Un claro ejemplo de invariancia de gauge global bajo la transformación $\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\alpha^a T_a} \Psi$ se encuentra presente en el Lagrangiano de Dirac visto en la sección 1.4.2:

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - \bar{\Psi}M\Psi, \quad (24)$$

donde, se esta considerando el caso general para un campo multicomponente Ψ :

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_n(x) \end{pmatrix} \quad x \in \mathcal{M}. \quad (25)$$

Y, la matriz de masas:

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{pmatrix}. \quad (26)$$

A comienzos de los años 50, los físicos Chen Ning Yang y Robert Mills quisieron determinar si al igual que el Lagrangiano de Dirac poseía una invariancia de gauge global, también exista la posibilidad de que posea una invariancia de gauge local [17]. Sin embargo, se dieron cuenta que al aplicar la transformación de gauge local $\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\alpha^a(x)T_a}\Psi$ al Lagrangiano de Dirac, este no permanecía invariante:

$$\mathcal{L}' = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - (\partial_\mu\alpha^a)\bar{\Psi}\gamma^\mu T_a\Psi - \bar{\Psi}M\Psi. \quad (27)$$

Para este punto es conveniente redefinir $\alpha^a(x) = -q\theta^a(x)$, donde q es la carga de la partícula descrita por el campo Ψ . De este modo, la transformación de gauge local sería:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{-iq\theta^a(x)T_a}\Psi. \quad (28)$$

Y, por ende

$$\mathcal{L}' = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + q(\partial_\mu\theta^a)\bar{\Psi}\gamma^\mu T_a\Psi - \bar{\Psi}M\Psi. \quad (29)$$

Ahora, para lograr que este nuevo Lagrangiano sea invariante bajo transformaciones de gauge locales es necesario añadir un nuevo término al Lagrangiano original

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - \bar{\Psi}M\Psi - q\bar{\Psi}\gamma^\mu T_a\Psi A_\mu^a. \quad (30)$$

En el cual, A_μ^a son nuevos campos no masivos llamados campos gauge, que además, cambian bajo transformaciones de gauge locales de la siguiente forma:

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu'^a = A_\mu^a + \partial_\mu \theta^a + iq f_{bc}^a \theta^b A_\mu^c. \quad (31)$$

Adicionalmente, debe añadirse un Lagrangiano libre (también llamado Lagrangiano de Yang-Mills en este contexto) asociado a cada uno de los nuevos campos vectoriales A_μ^a :

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a, \quad (32)$$

donde $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + q f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c$.

Finalmente, definiendo la derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu + iq T_a A_\mu^a$, el Lagrangiano total de la teoría se puede escribir como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu\Psi - \bar{\Psi}M\Psi. \quad (33)$$

1.6. Propagadores

En el contexto de la teoría cuántica de campos, el propagador corresponde a la amplitud de probabilidad asociada a que estando una partícula en un punto del espacio-tiempo x pase a estar en un punto del espacio-tiempo y . En el caso de tratarse con el propagador de un mesón, su representación corresponde a la mostrada en la Figura 3.

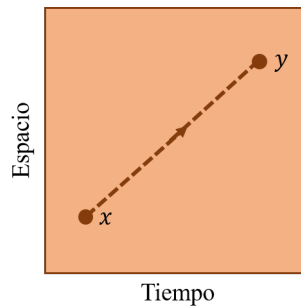


Figura 3. Propagador de un mesón en el espacio de Minkowski con $y^0 > x^0$.

Matemáticamente, el propagador de un campo puede ser escrito como el valor esperado en el vacío del ordenamiento temporal de dos operadores de campo. Es decir,

$$D_F(y-x) = \langle 0|T\{\phi(y)\phi(x)\}|0\rangle, \quad (34)$$

donde se define el operador de ordenamiento temporal² como:

$$T\{\phi(y)\phi(x)\} = \begin{cases} \phi(y)\phi(x), & \text{si } y^0 > x^0 \\ \phi(x)\phi(y), & \text{si } y^0 < x^0 \end{cases}. \quad (35)$$

O, usando la función escalón de Heaviside:

$$T\{\phi(y)\phi(x)\} = \theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x) + \theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y). \quad (36)$$

En este caso, $D_F(y-x)$ (34) también es conocido como el propagador de Feynman para los mesones del campo de Klein-Gordon. En las siguientes secciones profundizaremos en la forma del propagador de Feynman aplicado al campo de Dirac y al campo de Proca (masivo y no masivo).

1.6.1. Propagador fermiónico

Definiendo el propagador fermiónico como:

$$D_F(y-x) = \langle 0|T\{\psi(y)\bar{\psi}(x)\}|0\rangle, \quad (37)$$

donde $\psi(y)$ y $\bar{\psi}(x)$ son las soluciones en onda plana de la ecuación de Dirac. Y, considerando que $y^0 > x^0$. Entonces,

$$D_F(y-x) = \langle 0|\psi(y)\bar{\psi}(x)|0\rangle. \quad (38)$$

De modo que

$$\begin{aligned} \langle 0|\psi(y)\bar{\psi}(x)|0\rangle &= \langle 0|\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{j=1}^2 [u_j(p)c_{p,j}e^{-ipy} + v_j(p)d_{p,j}^\dagger e^{ipy}] \\ &\quad \times \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \sum_{k=1}^2 [\bar{v}_k(q)d_{q,k}e^{-iqx} + \bar{u}_k(q)c_{q,k}^\dagger e^{iqx}] |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_p E_q}} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \langle 0|[u_j(p)c_{p,j}e^{-ipy} \\ &\quad + v_j(p)d_{p,j}^\dagger e^{ipy}][\bar{v}_k(q)d_{q,k}e^{-iqx} + \bar{u}_k(q)c_{q,k}^\dagger e^{iqx}]|0\rangle. \end{aligned} \quad (39)$$

²Esta definición cambia para el caso de los fermiones, como se mostrará más adelante.

Es fácil ver que, debido a la ortogonalidad de los estados, ciertas combinaciones de operadores de creación y aniquilación no van a aportar nada al resultado. Por ende,

$$\begin{aligned}
\langle 0|\psi(y)\bar{\psi}(x)|0\rangle &= \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \int \frac{dq^3}{(2\pi)^3} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2\sqrt{E_p E_q}} \\
&\times \langle 0| [u_j(p)c_{p,j}e^{-ipy}] [\bar{u}_k(q)c_{q,k}^\dagger e^{iqx}] |0\rangle \\
&= \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \int \frac{dq^3}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ipy}e^{iqx}}{2\sqrt{E_p E_q}} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 u_j(p)\bar{u}_k(q) \\
&\times \langle 0| c_{p,j}c_{q,k}^\dagger |0\rangle.
\end{aligned} \tag{40}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la siguiente relación de anticonmutación para los operadores de creación y aniquilación de electrones:

$$\{c_{p,j}, c_{q,k}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta_{jk} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}). \tag{41}$$

Es posible simplificar la expresión (40) a:

$$\begin{aligned}
\langle 0|\psi(y)\bar{\psi}(x)|0\rangle &= \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \int \frac{dq^3}{(2\pi)^3} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{u_j(p)\bar{u}_k(q)e^{-ipy}e^{iqx}}{2\sqrt{E_p E_q}} \\
&\times \langle 0| [(2\pi)^3 \delta_{jk} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) - c_{q,k}^\dagger c_{p,j}] |0\rangle \\
&= \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \int \frac{dq^3}{(2\pi)^3} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{u_j(p)\bar{u}_k(q)e^{-ipy}e^{iqx}}{2\sqrt{E_p E_q}} \\
&\times (2\pi)^3 \delta_{jk} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \langle 0|0\rangle.
\end{aligned} \tag{42}$$

La cual, aplicando las propiedades de la delta de Dirac y la delta de Kronecker se reduce a:

$$\begin{aligned}
\langle 0|\psi(y)\bar{\psi}(x)|0\rangle &= \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip(y-x)}}{2E_p} \sum_{j=1}^2 u_j(p)\bar{u}_j(p) \\
&= \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \frac{(\gamma^\mu p_\mu + m)}{2E_p} e^{-ip(y-x)}.
\end{aligned} \tag{43}$$

Llegado este punto, es conveniente expresar la expresión (43) en el espacio de momentos de 4 dimensiones. Por lo tanto, se reescribe el integrando como:

$$\begin{aligned}\langle 0|\psi(y)\bar{\psi}(x)|0\rangle &= \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \frac{(\gamma^\mu p_\mu + m)}{2E_p} e^{-ip_a(y^a-x^a)-ip_0(y^0-x^0)} \\ &= \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \frac{(\gamma^\mu p_\mu + m)}{2E_p} e^{-ip_a(y^a-x^a)} e^{-iE_p(y^0-x^0)}.\end{aligned}\quad (44)$$

Ahora, usando la siguiente formula de integración compleja:

$$\frac{e^{-ib|a|}}{2b} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-iaz}}{z^2 - b^2 + i\epsilon}, \quad (45)$$

donde, para este caso, $b = E_p$, $z = p_0$ y $a = y^0 - x^0$. Entonces,

$$\frac{e^{-iE_p|y^0-x^0|}}{2E_p} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{e^{-ip_0(y^0-x^0)}}{p_0^2 - E_p^2 + i\epsilon}. \quad (46)$$

Además, como se está considerando $y^0 > x^0$, se debe cumplir que $|y^0 - x^0| = y^0 - x^0$. De manera que, reemplazando (46) en (44) se obtiene:

$$\begin{aligned}\langle 0|\psi(y)\bar{\psi}(x)|0\rangle &= \int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} \frac{i(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p_0^2 - E_p^2 + i\epsilon} e^{-ip_a(y^a-x^a)-ip_0(y^0-x^0)} \\ &= \int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} \frac{i(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p_0^2 - E_p^2 + i\epsilon} e^{-ip(y-x)}.\end{aligned}\quad (47)$$

Adicionalmente, recordando que $E_p^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$. Entonces,

$$\langle 0|\psi(y)\bar{\psi}(x)|0\rangle = \int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} \frac{i(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(y-x)}. \quad (48)$$

Finalmente, al pasar al espacio de momento, el propagador de Feynman asociado al campo fermiónico de espín $\frac{1}{2}$ es:

$$D_F(y-x) = \frac{i(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (49)$$

1.6.2. Propagador de Proca no masivo

Definiendo el propagador de Proca no masivo como:

$$D_F(y-x) = \langle 0|T\{A_\mu(y)A_\nu(x)\}|0\rangle, \quad (50)$$

donde $A_\mu(y)$ y $A_\nu(x)$ son las soluciones en onda plana de la ecuación de Proca no masiva. Y, considerando que $y^0 > x^0$. Entonces,

$$D_F(y-x) = \langle 0|A_\mu(y)A_\nu(x)|0\rangle. \quad (51)$$

De modo que

$$\begin{aligned} \langle 0|A_\mu(y)A_\nu(x)|0\rangle &= \langle 0|\int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{j=1}^2 [\epsilon_\mu^j(p)a_{p,j}e^{-ipy} + \epsilon_\mu^{j*}(p)a_{p,j}^\dagger e^{ipy}] \\ &\times \int \frac{dq^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \sum_{k=1}^2 [\epsilon_\nu^k(q)a_{q,k}e^{-iqx} + \epsilon_\nu^{k*}(q)a_{q,k}^\dagger e^{iqx}] |0\rangle \\ &= \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \int \frac{dq^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_pE_q}} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \langle 0| [\epsilon_\mu^j(p)a_{p,j}e^{-ipy} \\ &+ \epsilon_\mu^{j*}(p)a_{p,j}^\dagger e^{ipy}] [\epsilon_\nu^k(q)a_{q,k}e^{-iqx} + \epsilon_\nu^{k*}(q)a_{q,k}^\dagger e^{iqx}] |0\rangle. \end{aligned} \quad (52)$$

Es fácil ver que, debido a la ortogonalidad de los estados, ciertas combinaciones de operadores de creación y aniquilación no van a aportar nada al resultado. Por ende,

$$\begin{aligned} \langle 0|A_\mu(y)A_\nu(x)|0\rangle &= \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \int \frac{dq^3}{(2\pi)^3} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2\sqrt{E_pE_q}} \\ &\times \langle 0| [\epsilon_\mu^j(p)a_{p,j}e^{-ipy}] [\epsilon_\nu^{k*}(q)a_{q,k}^\dagger e^{iqx}] |0\rangle \\ &= \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \int \frac{dq^3}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ipy}e^{iqx}}{2\sqrt{E_pE_q}} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \epsilon_\mu^j(p)\epsilon_\nu^{k*}(q) \\ &\times \langle 0| a_{p,j}a_{q,k}^\dagger |0\rangle. \end{aligned} \quad (53)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la siguiente relación de anticonmutación para los operadores de creación y aniquilación de fotones:

$$[a_{p,j}, a_{q,k}^\dagger] = -(2\pi)^3 g_{jk} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}). \quad (54)$$

Es posible simplificar la expresión (53) a:

$$\begin{aligned}
\langle 0|A_\mu(y)A_\nu(x)|0\rangle &= \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \int \frac{dq^3}{(2\pi)^3} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{\epsilon_\mu^j(p)\epsilon_\nu^{k*}(q)e^{-ipy}e^{iqx}}{2\sqrt{E_p E_q}} \\
&\times \langle 0|[a_{q,k}^\dagger a_{p,j} - (2\pi)^3 g_{jk} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})]|0\rangle \\
&= - \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \int \frac{dq^3}{(2\pi)^3} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{\epsilon_\mu^j(p)\epsilon_\nu^{k*}(q)e^{-ipy}e^{iqx}}{2\sqrt{E_p E_q}} \\
&\times (2\pi)^3 g_{jk} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \langle 0|0\rangle.
\end{aligned} \tag{55}$$

La cual, aplicando las propiedades de la delta de Dirac se reduce a:

$$\begin{aligned}
\langle 0|A_\mu(y)A_\nu(x)|0\rangle &= - \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip(y-x)}}{2E_p} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \epsilon_\mu^j(p)\epsilon_\nu^{k*}(p) g_{jk} \\
&= \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \frac{-g_{\mu\nu}}{2E_p} e^{-ip(y-x)}.
\end{aligned} \tag{56}$$

Llegado este punto, es conveniente expresar la expresión (56) en el espacio de momentos de 4 dimensiones. Por lo tanto, se reescribe el integrando como:

$$\begin{aligned}
\langle 0|A_\mu(y)A_\nu(x)|0\rangle &= \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \frac{-g_{\mu\nu}}{2E_p} e^{-ip_a(y^a - x^a) - ip_0(y^0 - x^0)} \\
&= \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \frac{-g_{\mu\nu}}{2E_p} e^{-ip_a(y^a - x^a)} e^{-iE_p(y^0 - x^0)}.
\end{aligned} \tag{57}$$

Ahora, usando la ecuación (45) con $b = E_p$, $z = p_0$ y $a = y^0 - x^0$. Entonces,

$$\frac{e^{-iE_p|y^0 - x^0|}}{2E_p} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{e^{-ip_0(y^0 - x^0)}}{p_0^2 - E_p^2 + i\epsilon}. \tag{58}$$

Además, como se esta considerando $y^0 > x^0$, se debe cumplir que $|y^0 - x^0| = y^0 - x^0$. De manera que, reemplazando (58) en (57) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\langle 0|A_\mu(y)A_\nu(x)|0\rangle &= \int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{p_0^2 - E_p^2 + i\epsilon} e^{-ip_a(y^a - x^a) - ip_0(y^0 - x^0)} \\
&= \int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{p_0^2 - E_p^2 + i\epsilon} e^{-ip(y-x)}.
\end{aligned} \tag{59}$$

Adicionalmente, recordando que $E_p^2 = |\vec{p}|^2$. Entonces,

$$\langle 0|A_\mu(y)A_\nu(x)|0\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} e^{-ip(y-x)}. \quad (60)$$

Finalmente, al pasar al espacio de momento, el propagador de Feynman asociado al campo bosónico no masivo de espín 1 es:

$$D_F(y-x) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}. \quad (61)$$

1.6.3. Propagador de Proca masivo

Definiendo el propagador de Proca masivo como:

$$D_F(y-x) = \langle 0|T\{A_\mu(y)A_\nu(x)\}|0\rangle, \quad (62)$$

donde, en este caso, $A_\mu(y)$ y $A_\nu(x)$ son las soluciones en onda plana de la ecuación de Proca masiva. Y, considerando que $y_0 > x_0$. Entonces,

$$D_F(y-x) = \langle 0|A_\mu(y)A_\nu(x)|0\rangle. \quad (63)$$

Ahora, realizando un procedimiento análogo al de la sección 1.6.2 se tiene:

$$\begin{aligned} \langle 0|A_\mu(y)A_\nu(x)|0\rangle &= - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip(y-x)}}{2E_p} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_\mu^j(p) \epsilon_\nu^{k*}(p) g_{jk} \\ &= - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip(y-x)}}{2E_p} \left[\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \epsilon_\mu^j(p) \epsilon_\nu^{k*}(p) g_{jk} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right] \\ &= - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip(y-x)}}{2E_p} \left[g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right]. \end{aligned} \quad (64)$$

Nuevamente, es conveniente expresar la expresión (64) en el espacio de momentos de 4 dimensiones. Por lo tanto, se reescribe el integrando como:

$$\begin{aligned} \langle 0|A_\mu(y)A_\nu(x)|0\rangle &= - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip_a(y^a-x^a)} e^{-ip_0(y^0-x^0)}}{2E_p} \left[g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right] \\ &= - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip_a(y^a-x^a)} e^{-iE_p(y^0-x^0)}}{2E_p} \left[g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right]. \end{aligned} \quad (65)$$

Y, usando nuevamente la ecuación (45) con $b = E_p$, $z = p_0$ y $a = y^0 - x^0$. Entonces,

$$\langle 0|A^\mu(y)A^\nu(x)|0\rangle = \int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} \frac{-ie^{-ip(y-x)}}{p_0^2 - E_p^2 + i\epsilon} \left[g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{m^2} \right], \quad (66)$$

con la diferencia de que en este caso la relación de energía es $E_p^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$,

$$\langle 0|A_\mu(y)A_\nu(x)|0\rangle = \int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} \frac{-ie^{-ip(y-x)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right]. \quad (67)$$

Finalmente, al pasar al espacio de momento, el propagador de Feynman asociado al campo bosónico masivo de espín 1 es:

$$D_F(y-x) = \frac{-i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right]. \quad (68)$$

1.7. Electrodinámica Cuántica

El ejemplo más simple de aplicación de la teoría de Yang-Mills se da en el caso de la electrodinámica cuántica. La cual, solo precisa del grupo de Lie abeliano $U(1)$ con la matriz identidad en cuatro dimensiones como único generador. Adicionalmente, por simplicidad, se considerará únicamente un campo fermiónico asociado a los electrones. Sin embargo, la teoría puede extenderse a un mayor número de campos fermiónicos:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (69)$$

Como se vio en la sección 1.5, el Lagrangiano no se ve afectado por la transformación global $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha}\psi$. No obstante, nuevamente el Lagrangiano no cuenta con invariancia bajo transformaciones de gauge locales $\psi \rightarrow \psi' = e^{-iq\theta(x)}\psi$:

$$\mathcal{L}' = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + q(\partial_\mu\theta)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (70)$$

Por ende, es necesario reemplazar la derivada convencional ∂_μ por la derivada covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu, \quad (71)$$

En la cual, A_μ corresponde a el 4-potencial electromagnético, que además, cambia bajo transformaciones de gauge locales de la siguiente forma:

$$A \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\theta. \quad (72)$$

Ahora, para obtener una teoría gauge completa debe añadirse un Lagrangiano de Yang-Mills asociado al 4-potencial electromagnético A_μ :

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (73)$$

donde $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ debido a que las constantes de estructura del grupo de Lie $U(1)$ abeliano son siempre nulas ($f_{bc}^a = 0$).

De este modo, el Lagrangiano total de la electrodinámica cuántica se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \end{aligned} \quad (74)$$

O, redefiniendo el 4-potencial A_μ como:

$$A_\mu \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi}}A_\mu, \quad (75)$$

el Lagrangiano puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + g_e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \quad (76)$$

donde $g_e = -q\sqrt{4\pi}$ es un parámetro adimensional llamado constante de acoplamiento electromagnética.

1.7.1. Reglas de Feynman para la QED

Para hallar la amplitud de dispersión \mathcal{M} de un proceso de QED asociado a un diagrama de Feynman particular, se deben seguir las siguientes reglas:

1. *Notación.* Etiquete los cuatro-momentos entrantes y salientes p_1, p_2, \dots, p_n , y los espines correspondientes s_1, s_2, \dots, s_n ; Etiquete los cuatro-momentos internos q_1, q_2, \dots . Asigne flechas a las líneas de la siguiente manera: las flechas en las líneas externas del fermión indican si se trata de un electrón o un positrón; Las flechas en las líneas internas de fermiones se asignan de modo que se preserve la "dirección del flujo" a través del diagrama (es decir, cada vértice debe tener al menos una flecha que entra y otra flecha que sale). Las flechas de las líneas

externas de los fotones apuntan "hacia afuera"; para líneas de fotones internas la elección es arbitraria. En el caso de que se trate con fotones externos, se debe hacer una línea ondulada con la dirección correspondiente, tal y como se muestra en la Figura 4.

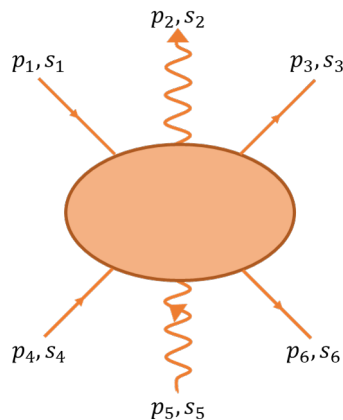


Figura 4. Líneas externas en un diagrama de Feynman típico.

2. *Líneas Externas.* Las líneas externas contribuyen con los siguientes factores:

Tabla 3. Líneas externas.

Partícula	Entrantes	Salientes
Electrones e^-	u	\bar{u}
Positrones e^+	\bar{v}	v
fotones γ	ϵ_μ	ϵ_μ^*

3. *Factores de Vértice.* Cada vértice contribuye en un factor

$$ig_e\gamma^\mu$$

Donde $g_e = e\sqrt{4\pi} = \sqrt{4\pi\alpha}$. Que, en unidades de Heaviside-Lorentz, g_e corresponde a la carga del positrón. De forma general, $g_e = -q\sqrt{4\pi}$ donde q es la carga de la partícula.

4. *Propagadores.* Cada línea interna contribuye en un factor de la siguiente manera:

$$\text{Electrones y positrones : } \frac{i(\gamma^\mu q_\mu + m)}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\text{fotones : } \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}$$

5. *Conservación de la Energía y el Momento.* Para cada vértice, escribe una función delta de la forma:

$$(2\pi)^2 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3)$$

Donde las k 's son los tres cuatro-momentos entrantes al vértice (si una flecha apunta hacia afuera, entonces su k correspondiente lleva un signo menos). Este factor impone la conservación de la energía y el impulso en el vértice.

6. *Integrar Sobre los Momentos Internos.* Para cada momento interno q , escribe un factor

$$\frac{d^4q}{(2\pi)^4}$$

y se integra en todo el espacio.

7. *Cancelar la Función Delta.* El resultado puede incluir un factor

$$(2\pi)^2 \delta^4(p_1 + p_2 + \dots - p_n)$$

correspondiente a evaluar la conservación total de la energía-momento. Cancele este factor y lo que quede es $-i\mathcal{M}$.

8. *Antisimetrización.* Incluya un signo menos entre diagramas que difieren sólo en el intercambio de dos electrones (o positrones) entrantes (o salientes), o de un electrón entrante con un positrón saliente (o viceversa).

El procedimiento consiste en anotar todos los diagramas que contribuyen al proceso en cuestión (hasta el orden deseado), calcular la amplitud \mathcal{M} de cada uno y sumarlos para obtener la amplitud total.

Estas reglas fueron extraídas de Griffiths (1987) [18].

1.8. Rompimiento espontáneo de la simetría

Tal como se vio en la sección 1.4.1, es posible describir un campo escalar complejo $\Phi = \phi_1 + i\phi_2$ a partir del siguiente Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) - \frac{1}{2}m^2|\Phi|^2, \quad (77)$$

donde $|\Phi|^2 = \Phi^\dagger \Phi$. Para este caso, considerando que Φ es constante en el espacio-tiempo, el mínimo de energía será cuando $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Es decir, existirá únicamente un estado de vacío ubicado en $\Phi = 0$.

Ahora, si se desea tener un sistema con mayor número de estados de vacío, se debe modificar el signo que multiplica al término $\frac{1}{2}m^2$. No obstante, esta transformación del Lagrangiano es inestable, ya que de este modo se tendrían estados de energía infinita. Para solucionar esto, es necesario agregar el término $-\frac{m^2}{4\phi_0^2}|\Phi|^4$ al Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) + \frac{1}{2}m^2|\Phi|^2 - \frac{m^2}{4\phi_0^2}|\Phi|^4, \quad (78)$$

en el cual, ϕ_0 es un parámetro real. Adicionalmente, es conveniente agregar un término constante al Lagrangiano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) + \frac{1}{2}m^2|\Phi|^2 - \frac{m^2}{4\phi_0^2}|\Phi|^4 - \frac{m^2}{4}\phi_0^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) - \frac{m^2}{4\phi_0^2} \left[|\Phi|^2 - \phi_0^2 \right]^2. \end{aligned} \quad (79)$$

A partir del Lagrangiano anterior se obtiene la densidad de energía potencial:

$$V(|\Phi|) = \frac{m^2}{4\phi_0^2} \left[|\Phi|^2 - \phi_0^2 \right]^2. \quad (80)$$

La cual, le corresponde la siguiente gráfica:

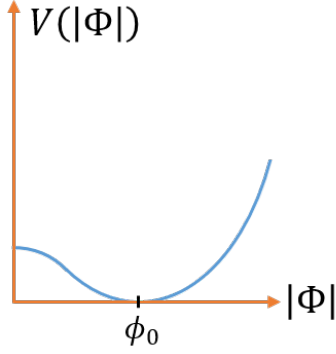


Figura 5. Densidad de energía potencial $V(|\Phi|)$ en función de $|\Phi|$.

Es fácil notar que, con esta configuración, existen un número infinito de estados de vacío en el círculo de radio $|\Phi| = \phi_0$ formado en el espacio de estados (ϕ_1, ϕ_2) .

Por construcción, el Lagrangiano de la expresión (79) posee una simetría global $U(1)$. Es decir, es invariante bajo transformaciones globales de $U(1)$: $\Phi \rightarrow \Phi' = e^{i\alpha}\Phi$, donde θ es un parámetro real que no depende de las coordenadas espacio-temporales. Esta transformación se traduce en rotar un estado a lo largo de un círculo de radio $|\Phi|^2 = k$ (k es una constante) en el espacio de estados (ϕ_1, ϕ_2) . Si se considera el caso en el que Φ sea real y el estado de vacío sea $(\phi_0, 0)$, se romperá la simetría global $U(1)$ de manera espontánea.

Desplazando Φ alrededor del estado de vacío $(\phi_0, 0)$ de la forma:

$$\Phi = \phi_0 + \chi + i\psi. \quad (81)$$

Y, reemplazando este resultado en el Lagrangiano original (79), se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)(\partial^\mu\chi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\psi)(\partial^\mu\psi) - \frac{m^2}{4\phi_0^2}[\chi^2 + \psi^2 + 2\chi\phi_0]^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)(\partial^\mu\chi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\psi)(\partial^\mu\psi) - m^2\chi^2 + \mathcal{L}_{int}. \end{aligned} \quad (82)$$

Nótese que, después de la ruptura espontánea de simetría $U(1)$, se pasa de tener un campo escalar complejo Φ a tener dos campos escalares reales χ y ψ . Además, el término proporcional a χ^2 implica que este posee una masa de $\sqrt{2}m$. En cambio, ψ no posee un término cuadrático, por ende, no tiene masa. Este último bosón escalar no masivo que nace de la ruptura espontánea de simetría global $U(1)$ es llamado bosón de Goldstone.

Lo anterior puede generalizarse imponiendo que el Lagrangiano posea una simetría local $U(1)$. Es decir, que este sea invariante bajo transformaciones locales de $U(1)$: $\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-iq\theta(x)}\Phi$, donde $\theta(x)$ es un parámetro real que depende de las coordenadas espacio-temporales.

La imposición de una simetría local $U(1)$ en el Lagrangiano induce el uso de la derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$. Y, por consiguiente, la adición del campo de gauge no masivo A_μ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu - iqA_\mu)\Phi^\dagger][(\partial^\mu + iqA^\mu)\Phi] - \frac{m^2}{4\phi_0^2} [|\Phi|^2 - \phi_0^2]^2 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (83)$$

donde el último término corresponde al término de campo libre asociado a A_μ .

De manera análoga al primer caso, la energía del campo corresponderá a un mínimo cuando no exista contribución alguna del campo A_μ y Φ sea constante. En este nuevo escenario, se vuelve a tener un número infinito de estados de vacío en el círculo $|\Phi| = \phi_0$.

Si se busca romper la simetría local $U(1)$ de forma espontánea, es "necesario" que Φ' sea real. Esto no es un problema, ya que siempre se podrá seleccionar un $\theta(x)$ de modo que $\Phi' = e^{-iq\theta(x)}\Phi$ sea real. Luego,

$$\Phi' = \phi_0 + h(x). \quad (84)$$

Finalmente, reemplazando este resultado en el Lagrangiano original (79), se encuentra:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu - iqA_\mu)(\phi_0 + h) \right] \left[(\partial^\mu + iqA^\mu)(\phi_0 + h) \right] \\ &\quad - \frac{m^2}{4\phi_0^2} \left[(\phi_0 + h)^2 - \phi_0^2 \right]^2 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) + \frac{q^2\phi_0^2}{2}A_\mu A^\mu - m^2 h^2 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \mathcal{L}_{int}. \end{aligned} \quad (85)$$

De este modo, gracias a la ruptura espontánea de simetría, se ha pasado de un campo escalar complejo $\Phi = \phi_1 + i\phi_2$ y un campo vectorial A_μ no masivo con dos polarizaciones transversales a un campo escalar real $h(x)$ con masa $m_h = \sqrt{2}m$ y un campo vectorial A_μ con tres polarizaciones (una polarización longitudinal adicional) y una masa de $m_A = q\phi_0$.

La partícula escalar masiva asociada al campo $h(x)$ es llamada bosón de Higgs. Por otro lado, como consecuencia de la ruptura espontánea de simetría local, el bosón de Goldstone obtenido anteriormente ha sido reemplazado por la polarización longitudinal del campo A_μ .

Este mecanismo que permite otorgar masa a los bosones mediadores es llamado "Mecanismo de Higgs" en honor a uno de sus principales inventores, Peter Higgs [19].

1.9. Problemas del Modelo Estándar

El Modelo Estándar de la física de partículas ha sido extremadamente exitoso al describir las interacciones fundamentales, pero presenta importantes lagunas que indican su incompletitud. Una de las preguntas fundamentales es por qué existen **tres familias de partículas**, cuya estructura no tiene una explicación teórica convincente. Además, el Modelo Estándar no incluye ninguna partícula que pueda explicar la **materia oscura**, que constituye aproximadamente el 27% del universo y cuya existencia es evidente en observaciones cosmológicas. Algo similar ocurre con la **energía oscura**, responsable del 68% del contenido del universo y principal causante de su expansión acelerada, algo que este modelo tampoco aborda.

El descubrimiento de las **oscilaciones de los neutrinos**, que implica que estos tienen masa, también desafía el Modelo Estándar, que originalmente los consideraba partículas sin masa. Por otro lado, **el problema de la antimateria**, o la razón por la cual el universo observable está compuesto casi exclusivamente de materia, no puede ser resuelto completamente por las actuales violaciones de CP previstas por el Modelo Estándar. Finalmente, el mayor obstáculo para una teoría completa es la falta de una **descripción cuántica de la gravedad**, ya que el Modelo Estándar no incluye esta fuerza fundamental, lo que ha motivado la búsqueda de teorías como la gravedad cuántica de bucles o la teoría de cuerdas.

Todos estos problemas señalan la necesidad de una nueva física más allá del Modelo Estándar que pueda unificar las fuerzas fundamentales y resolver los misterios más profundos del universo.

2. MODELO $U(1)_d$

El Modelo $U(1)_d$ es una extensión simple del Modelo Estándar mediante la adición de un nuevo campo de gauge asociado a una nueva simetría gauge. Este grupo de simetría cuenta únicamente con un solo generador, por lo que será similar al grupo de simetría $U(1)_Y$ del Modelo Estándar. Además, se supone un escenario para un fotón oscuro en el cual los quarks y leptones conocidos no poseen carga de $U(1)_d$. Es decir, no existe una interacción directa entre los fermiones del Modelo Estándar y este fotón oscuro.

2.1. Lagrangiano asociado al modelo $U(1)_d$

El Lagrangiano subyacente a la adición del grupo de simetría $U(1)_d$ al Modelo Estándar es:

$$\mathcal{L}_{ME+U(1)_d} = \mathcal{L}_{ME} - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\kappa B^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^Y + \mathcal{L}_{Higgs'} + \dots, \quad (86)$$

donde el primer término corresponde al Lagrangiano del modelo estándar y los demás términos corresponden a las contribuciones del nuevo campo. En particular, el segundo término compete al Lagrangiano de Yang-Mills asociado a $U(1)_d$ con

$$B^{\mu\nu} = \partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu. \quad (87)$$

Ahora, se busca que exista una nueva contribución al momento magnético anómalo del muón con la adición de este modelo. Por ende, una de las formas más sencillas de hacerlo es añadiendo un término de acople entre $U(1)_d$ y $U(1)_Y$ de la forma $\frac{1}{2}\kappa B^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^Y$, siendo κ un ángulo de mezcla cinético. Por otro lado, la forma específica del sector de Higgs de $U(1)_d$ en el cuarto término del Lagrangiano no es tan importante, de una forma simple se puede suponer que la ruptura espontánea de simetría se produce debido a algún campo de Higgs' elemental con un potencial en forma de sombrero mexicano [14].

Finalmente, es posible añadir nuevos términos al Lagrangiano asociados a interacciones del fotón oscuro con un “sector oscuro”. Por ejemplo, se pueden incluir partículas masivas débilmente interactuantes (o en sus siglas en inglés WIMPs) que interactúen bajo $U(1)_d$ [20].

Se puede obtener un Lagrangiano cinético a partir del Lagrangiano original de la ecuación (86):

$$\mathcal{L}_{kinetic} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\kappa B^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (88)$$

el cual posee los términos libres asociados al fotón del Modelo Estándar, al fotón oscuro y a la mezcla cinética entre ambos. Nótese que, el primer y el tercer término del Lagrangiano cinético de la teoría pueden ser obtenidos redefiniendo el 4-potencial electromagnético del Modelo Estándar de la forma:

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \kappa V^\mu, \quad (89)$$

donde V^μ es el 4-potencial del fotón oscuro. De esta redefinición se observa que cuando el parámetro de mezcla cinética κ es muy proximo a cero se recupera el electromagnetismo de Maxwell, lo cual debe suceder. Redefiniendo de la misma forma el tensor de Faraday para el fotón:

$$F^{\mu\nu} \rightarrow F^{\mu\nu} - \kappa B^{\mu\nu}. \quad (90)$$

De esta forma la contracción del tensor de Faraday queda como:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} &\rightarrow (F^{\mu\nu} - \kappa B^{\mu\nu})(F_{\mu\nu} - \kappa B_{\mu\nu}) \\ &= F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - 2\kappa B^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \kappa^2 B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (91)$$

Pero, debido a que se está considerando κ como un parámetro muy pequeño, el término de orden κ^2 es despreciable.

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \rightarrow -\frac{1}{4}F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\kappa B^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (92)$$

Esta redefinición del campo A^μ permite encontrar un Lagrangiano de interacción efectivo para la teoría:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{eff} &= g_e \bar{\psi} \gamma^\mu (A_\mu - \kappa V_\mu) \psi \\ &= g_e \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi - g_e \bar{\psi} \gamma^\mu \kappa V_\mu \psi, \end{aligned} \quad (93)$$

donde el primer término sigue describiendo una interacción fermiónica con el fotón del Modelo Estándar y el segundo término corresponde a una interacción efectiva entre los fermiones del Modelo Estándar con el fotón oscuro.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{U(1)_Y}^{int} &= g_e \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi \\ \mathcal{L}_{U(1)_d}^{int} &= -g_e \kappa \bar{\psi} \gamma^\mu V_\mu \psi. \end{aligned} \quad (94)$$

Ahora, asumiendo una ruptura espontánea de simetría bajo $U(1)_d$. El Lagrangiano efectivo del modelo será de la forma:

$$\mathcal{L}_{U(1)_d}^{eff} = -\frac{1}{4}B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_V^2 V^\mu V_\mu - g_e \kappa \bar{\psi} \gamma^\mu V_\mu \psi + \mathcal{L}_{h'} + \dots \quad (95)$$

2.2. Propagador del bosón Z'

Tomando los términos libres del Lagrangiano efectivo (95) asociados al campo V^μ , se encuentra un Lagrangiano del tipo Proca:

$$\mathcal{L}_{U(1)_d}^{Proca} = -\frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_V^2 V^\mu V_\mu, \quad (96)$$

donde m_V corresponde a la masa del bosón asociado al campo V^μ . Además, teniendo en cuenta lo desarrollado en sección 1.6.3, el propagador correspondiente a este es:

$$\langle 0|T\{V_\mu(y)V_\nu(x)\}|0\rangle = \frac{-i}{p^2 - m_V^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m_V^2} \right]. \quad (97)$$

Ahora, considerando el caso en el que la masa m_V es mucho mayor que la magnitud de los momentos $\|p_\mu p_\nu\|$, la expresión (97) puede simplificarse a:

$$\langle 0|T\{V_\mu(y)V_\nu(x)\}|0\rangle \approx \frac{-i g_{\mu\nu}}{p^2 - m_V^2 + i\epsilon}. \quad (98)$$

2.3. Restricciones a la masa y término de mezcla cinética del bosón Z'

Tanto la masa del fotón oscuro m_V como el ángulo de mezcla cinética κ son parámetros claves en el contexto del momento magnético anómalo del muón. Ya que ambos van a influir de manera directa en el valor de este observable.

Para que exista una contribución relevante al $g - 2$ del muón por parte de la masa del bosón Z' , en el rango de energía donde ocurren las mediciones experimentales, esta debe ser lo suficientemente baja. En general, la literatura sugiere masas en el rango de $1MeV$ a $1GeV$ [14].

Por otro lado, para explicar la discrepancia en el $g - 2$ del muón, κ debe estar en un rango específico, lo suficientemente grande para generar una contribución adicional significativa pero lo suficientemente pequeño para evitar conflictos con las búsquedas directas de fotones oscuros y con los experimentos de precisión electrodébiles.

Una de las restricciones mas importantes a tener en cuenta, es la ofrecida por la colaboración BaBar. La cual se encarga de estudiar los procesos $e^+e^- \rightarrow \gamma A$, $A \rightarrow e^+e^-/\mu^+\mu^-$ usando el detector BaBar. Sus resultados imponen límites superiores al ángulo de mezcla cinético en el rango de $\kappa \sim 10^{-3}$ a 10^{-4} para un rango de masas de $0.02 GeV$ a $10.2 GeV$ [21, 22].

Las restricciones en la masa del bosón Z' también se establecen a partir de límites de vida media, dado que si el bosón Z' es extremadamente ligero, puede tener una vida media lo suficientemente larga para no decaer dentro de los detectores y, en cambio, aparecer como una partícula "invisible". Esto ha llevado a que experimentos de intensidad, como NA64, excluya al bosón Z' como explicación de la anomalía del momento magnético del muón para las masas $m_V \lesssim 100 MeV$ [23].

3. MOMENTO MAGNÉTICO ANÓMALO DEL MUÓN

3.1. El muón

El muón es una partícula elemental que hace parte de la familia de los leptones cargados³. Usualmente suele representarse con la letra griega μ . Fue descubierta por los físicos Seth H. Neddermeyer y Carl D. Anderson en el año 1936, cuando estudiaban el comportamiento de los rayos cósmicos (protones de alta energía) en presencia de un campo magnético [24]. Sus observaciones indicaban la existencia de una partícula con carga eléctrica similar a la del electrón, pero con una masa mayor a la de un electrón libre y mucho menor a la masa de un protón [25]. El hecho de que su masa se encuentre entre la masa del electrón y la masa del protón, propició la elección inicial del nombre de mesotróon (del griego antiguo “mésos”, que significa: que se encuentra en medio). Añadido a esto, se asoció este descubrimiento a las partículas con características similares postuladas por el físico japonés Hideki Yukawa en 1935 para explicar la interacción nuclear fuerte entre protones y neutrones, los mesones. Sin embargo, en un experimento realizado en 1946 por Marcello Conversi, Oreste Piccioni y Ettore Pancini, se descubrió que los mesotrones (posteriormente llamados mesones μ para diferenciarlos de los mesones π) de los rayos cósmicos decaían sin ser capturados por núcleos atómicos, como se esperaba de los mesones de Yukawa. Debido a esto y a la posterior aparición de más mesones, se terminó renombrando al mesón μ como muón para diferenciarlo de los mesones.

3.1.1. Propiedades principales

Una de las principales ventajas de trabajar con el muón en el contexto del momento magnético anómalo es que las propiedades fundamentales de este gozan de una predicción teórica muy robusta en conjunto con mediciones de alta precisión experimental. Algunas de estas propiedades principales son:

- **Masa y vida media:** El muón es una partícula fundamental inestable que posee una vida media (τ_μ) de $2.2\mu s$. Además, su masa (m_μ), es la segunda masa más pequeña entre las partículas elementales del Modelo Estándar. Su valor actual es de $105.658 MeV/c^2$, lo que la hace aproximadamente 200 veces mayor a la masa del electrón (m_e).

³Específicamente, el muón pertenece a la segunda generación de los leptones cargados.

- Producción:** En esencia, los muones se generan en nuestra atmósfera mediante la interacción de los rayos cósmicos con los núcleos atómicos del aire. Por otro lado, estos también pueden ser producidos de manera controlada en centros de investigación: El proceso consiste en hacer incidir paquetes de protones de alta energía generados en aceleradores de partículas contra un objetivo de núcleos de carbono. De este proceso se obtienen inicialmente neutrones y piones, donde estos últimos, al ser inestables, decaen rápidamente en antimuones [muones] y neutrinos [antineutrinos] muónicos. Suponiendo el caso en el que se produzcan piones positivos⁴, el proceso corresponderá al de la Figura 6.

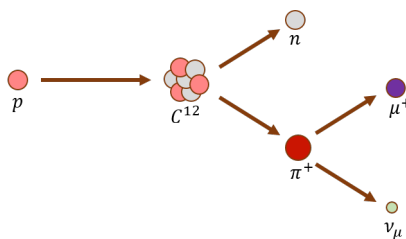


Figura 6. Producción de antimuones en aceleradores de partículas.

Gracias a la máxima violación de paridad de la corriente cargada débil en el decaimiento de los piones, los muones producidos siempre van a estar polarizados. Es decir, cuando se tenga el decaimiento de un pión positivo a un antimuón, el espín de este último siempre va a ser opuesto a su momento. Por otro lado, si se tiene el decaimiento de un pión negativo a un muón, el espín de este último va a estar alineado con su momento. La Figura 7 muestra ambos procesos a detalle.

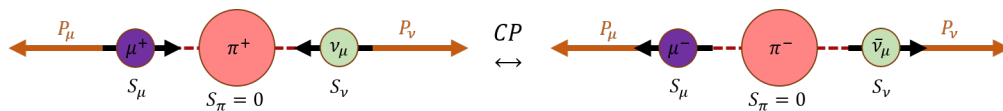


Figura 7. Producción de muones [antimuones] polarizados en el decaimiento del pión positivo [negativo].

- Decaimiento:** La desintegración del muón, en el Modelo Estándar, es vía corriente débil cargada. En este proceso (Figura 8), el muón produce un neutrino muónico, un electrón y un antineutrino electrónico. Por otro lado, su antipartícula, el antimuón, se desintegra en un positrón, un neutrino electrónico y un antineutrino muónico.

⁴En todos estos procesos se deben conservar los números cuánticos (carga, sabor, número leptónico, número bariónico, etc).

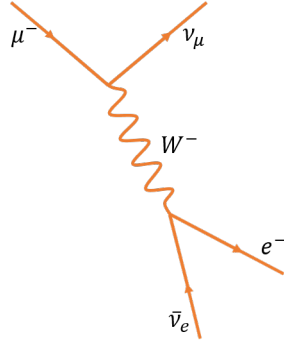


Figura 8. Decaimiento del muón a tres cuerpos.

Nuevamente, gracias a la máxima violación de paridad de la corriente cargada débil, cuando el antimuón decae, este emite un positrón preferentemente en la misma dirección de su espín. Sin embargo, experimentalmente la medición de un solo positrón no es suficiente para saber con certeza la dirección del espín del antimuón. Por lo tanto, en esos casos se debe hacer uso de distribuciones estadísticas en una muestra de muones con las mismas características para determinar un valor promedio de la dirección del espín. Por otro lado, si se trata del decaimiento de un muón, se emitirá un electrón preferentemente en la dirección opuesta al espín de este. La Figura 9 muestra ambos procesos a detalle.

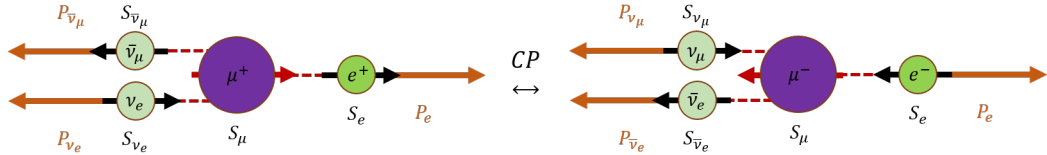


Figura 9. Producción de positrones [electrones] polarizados en el decaimiento del antimuón [muón].

3.2. Momento magnético anómalo del muón

El momento magnético es una propiedad intrínseca de las partículas que depende de su espín \vec{S} y su momento angular \vec{L} , y dice qué tan sensible son estas a un campo magnético externo \vec{B} . En el límite no relativista, la ecuación de Dirac en presencia de un campo magnético externo tiene el siguiente Hamiltoniano:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m_\mu} + V(r) + \frac{e}{2m_\mu} \vec{B} \cdot (\vec{L} + g_\mu \vec{S}), \quad (99)$$

donde $\vec{S} = \frac{\vec{\sigma}}{2}$, m_μ es la masa del muón y g_μ es su factor giromagnético⁵. De este Hamiltoniano se pueden identificar los términos asociados al momento magnético del muón:

$$\vec{\mu} = g_\mu \frac{e}{2m_\mu} \vec{S}. \quad (100)$$

En el caso de la interacción de una partícula de Dirac (como es el caso del muón) con un campo electromagnético clásico (lo que correspondería al diagrama de la Figura 10) el valor del factor g_μ (también llamado factor de Landé) será exactamente igual a 2.

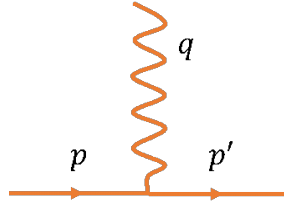


Figura 10. Interacción a orden árbol entre un leptón cargado y un campo electromagnético.

Para este proceso con transferencia de momento correspondiente a $q = p' - p$, la expresión de la amplitud utilizando las reglas de Feynman para la QED vistas en la Sección 1.7.1, y la descomposición de Gordon (ver el anexo A) es:

$$-i\mathcal{M}_0^\mu = ig_e \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) = ig_e \bar{u}(p') \left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m_\mu} + i \frac{\sigma^{\mu\nu} (p'_\nu - p_\nu)}{2m_\mu} \right] u(p) \quad (101)$$

Sin embargo, al introducir el tratamiento de la teoría cuántica de campos, la amplitud total del proceso será la superposición de todos los procesos posibles que respeten los estados iniciales y finales. Es decir, ya no solo hay que considerar el proceso a orden árbol sino que también se debe tener en cuenta las contribuciones de los procesos que poseen lazos (*loops*), tal como se puede ver en la Figura 11.

⁵Nótese que, tanto m_μ como g_μ son escalares, en este caso el índice μ es una etiqueta que hace referencia a que son magnitudes asociadas al muón.

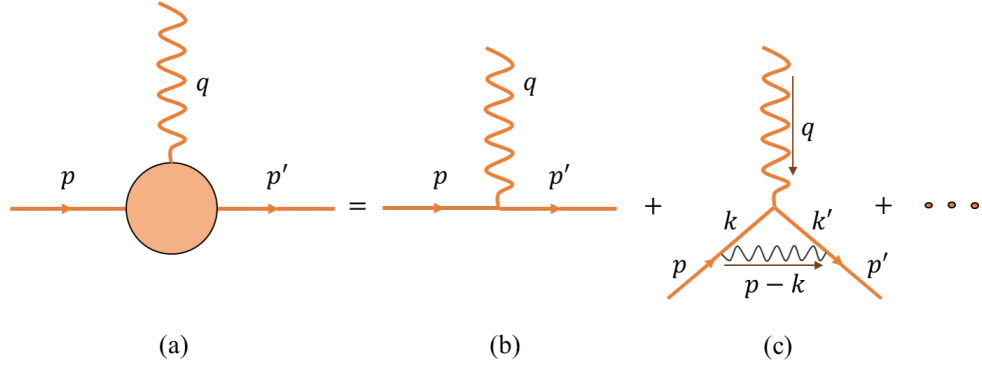


Figura 11. Expansión de la corrección al vértice $\Gamma^\mu(p, p')$. (a) Contribución total. (b) Contribución a orden árbol. (c) Contribución a 1-loop.

Ahora, para tener en cuenta las contribuciones de los nuevos procesos se debe considerar la siguiente corrección al vértice de QED:

$$ig_e\gamma^\mu \rightarrow ig_e\Gamma^\mu(p, p'), \quad (102)$$

donde se ha definido la función de corrección al vértice $\Gamma^\mu(p, p')$ como la suma de todas las contribuciones al vértice de orden superior al orden árbol. Es decir,

$$-i\mathcal{M}^\mu = -i\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_n^\mu = ig_e\sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}(p')\Gamma^{\mu(n)}(p, p')u(p). \quad (103)$$

O lo que es lo mismo

$$\Gamma^\mu(p, p') = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma^{\mu(n)}(p, p'). \quad (104)$$

Este conjunto de correcciones radiativas va a provocar una modificación del factor giromagnético del muón, lo que a su vez afectará su momento magnético. Por lo tanto, es conveniente definir la anomalía como:

$$a_\mu = \frac{g_\mu - 2}{2}. \quad (105)$$

3.3. Forma de la función de corrección al vértice

La dependencia de la función de corrección al vértice Γ^μ es restringida por las reglas de Feynman a:

$$\Gamma^\mu = \Gamma^\mu(p^\mu, p'^\mu, \gamma^\mu, m, e). \quad (106)$$

Además, debido a que Γ^μ es un cuádrivector, se puede escribir en términos de la base formada por los bilineales de Dirac $(1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5, \gamma^\mu\gamma^5)$:

$$\Gamma^\mu = A\gamma^\mu + Bp^\mu + Cp'^\mu + iDp_\nu\sigma^{\mu\nu} + iEp'_\nu\sigma^{\mu\nu}, \quad (107)$$

donde A, B, C, D y E son coeficientes a determinar. Asimismo, dado que Γ^μ depende de $p^\mu, p'^\mu, \gamma^\mu, m$ y e , los coeficientes deben depender de sus formas escalares

$$K = K(p^2, p'^2, p \cdot p', \gamma^\mu p_\mu, \gamma^\mu p'_\mu, m, e). \quad (108)$$

Esta dependencia se puede reducir teniendo en cuenta la ecuación de Dirac (13) y el invariante relativista $p^2 = p'^2 = m^2$

$$K = K(p \cdot p', m, e). \quad (109)$$

Por otro lado, considerando la conservación del cuádrimomento en el vértice ($q = p' - p$)

$$q^2 = (p' - p)^2 = p'^2 - 2p' \cdot p + p^2 = 2m^2 - 2p' \cdot p, \quad (110)$$

se puede reducir la dependencia de los coeficientes a un único parámetro

$$K = K(q^2). \quad (111)$$

Asimismo, también es posible deducir la relación que existe entre estos coeficientes considerando la siguiente identidad de Ward (ver el anexo B):

$$q_\mu \bar{u}(p') \Gamma^\mu(p, p') u(p) = 0. \quad (112)$$

Reemplazando la expresión general para la función de corrección al vértice Γ^μ (107) en la expresión anterior, se tiene:

$$q_\mu \bar{u}(p') [A\gamma^\mu + Bp^\mu + Cp'^\mu + iDp_\nu\sigma^{\mu\nu} + iEp'_\nu\sigma^{\mu\nu}] u(p) = 0. \quad (113)$$

Desarrollando el primer término de la forma

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') [(p'_\mu - p_\mu) A \gamma^\mu] u(p) &= \bar{u}(p') [A(\not{p}' - \not{p})] u(p) \\ &= \bar{u}(p') [A(m - m)] u(p) = 0. \end{aligned} \quad (114)$$

Desarrollando el segundo y tercer término de la forma

$$\begin{aligned}
q_\mu \bar{u}(p') [Bp^\mu + Cp'^\mu] u(p) &= (p'_\mu - p_\mu) \bar{u}(p') [Bp^\mu + Cp'^\mu] u(p) \\
&= \bar{u}(p') [Bp'_\mu p^\mu + Cp'_\mu p'^\mu - Bp_\mu p^\mu - Cp_\mu p'^\mu] u(p) \\
&= \bar{u}(p') [p'_\mu p^\mu (B - C) - m^2 (B - C)] u(p) \\
&= \bar{u}(p') [(B - C)(p'_\mu p^\mu - m^2)] u(p) = 0.
\end{aligned} \tag{115}$$

Por ende, para que la igualdad se satisfaga, se debe cumplir que $B = C$.

Desarrollando el cuarto y quinto término de la forma

$$\begin{aligned}
q_\mu \bar{u}(p') [iDp_\nu \sigma^{\mu\nu} + iEp'_\nu \sigma^{\mu\nu}] u(p) &= i(p'_\mu - p_\mu) \bar{u}(p') [Dp_\nu \sigma^{\mu\nu} + Ep'_\nu \sigma^{\mu\nu}] u(p) \\
&= i\bar{u}(p') [Dp'_\mu p_\nu \sigma^{\mu\nu} + \cancel{Ep'_\mu p'_\nu \sigma^{\mu\nu}}^0 \\
&\quad - \cancel{Dp_\mu p_\nu \sigma^{\mu\nu}}^0 - Ep_\mu p'_\nu \sigma^{\mu\nu}] u(p).
\end{aligned} \tag{116}$$

Ahora, usando la propiedad antisimétrica de $\sigma^{\mu\nu}$ y renombrando los índices mudos

$$\begin{aligned}
i\bar{u}(p') [Dp'_\mu p_\nu \sigma^{\mu\nu} - Ep_\mu p'_\nu \sigma^{\mu\nu}] u(p) &= i\bar{u}(p') [Dp'_\mu p_\nu \sigma^{\mu\nu} + Ep_\mu p'_\nu \sigma^{\nu\mu}] u(p) \\
&= i\bar{u}(p') [Dp'_\alpha p_\beta \sigma^{\alpha\beta} + Ep_\beta p'_\alpha \sigma^{\alpha\beta}] u(p) \\
&= i\bar{u}(p') [(D + E)p'_\alpha p_\beta \sigma^{\alpha\beta}] u(p) = 0.
\end{aligned} \tag{117}$$

Por ende, para que la igualdad se satisfaga, se debe cumplir que $D = -E$.

Reemplazando las condiciones obtenidas en la expresión general para la función de corrección al vértice Γ^μ (107), se llega a:

$$\begin{aligned}
\Gamma^\mu &= A\gamma^\mu + Bp^\mu + Bp'^\mu - iEp_\nu \sigma^{\mu\nu} + iEp'_\nu \sigma^{\mu\nu} \\
&= A\gamma^\mu + B(p^\mu + p'^\mu) + iE(p'_\nu - p_\nu) \sigma^{\mu\nu} \\
&= A\gamma^\mu + B(p^\mu + p'^\mu) + iEq_\nu \sigma^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{118}$$

O lo que es lo mismo

$$\bar{u}(p') \Gamma^\mu(p, p') u(p) = \bar{u}(p') [A\gamma^\mu + B(p^\mu + p'^\mu) + iEq_\nu \sigma^{\mu\nu}] u(p). \tag{119}$$

Esta última expresión puede simplificarse aún más si se considera nuevamente la descomposición de Gordon

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p') \Gamma^\mu(p, p') u(p) &= \bar{u}(p') [A\gamma^\mu + B(2m\gamma^\mu - iq_\nu \sigma^{\mu\nu}) + iEq_\nu \sigma^{\mu\nu}] u(p) \\
&= \bar{u}(p') [(A + 2mB)\gamma^\mu + i(E - B)q_\nu \sigma^{\mu\nu}] u(p).
\end{aligned} \tag{120}$$

Finalmente, redefiniendo los parámetros dependientes de q^2

$$\bar{u}(p')\Gamma^\mu(p, p')u(p) = \bar{u}(p')\left[F_1(q^2)\gamma^\mu + iF_2(q^2)\frac{q_\nu\sigma^{\mu\nu}}{2m}\right]u(p), \quad (121)$$

donde $F_1(q^2) = A + 2mB$ y $F_2(q^2) = 2m(E - B)$ son los llamados factores de forma. Los cuales se pueden asociar a cada una de las posibles contribuciones del proceso. Es decir,

$$\Gamma^\mu(p, p') = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma^{(n)\mu}(p, p') = \sum_{n=0}^{\infty} \left[F_1^{(n)}(q^2)\gamma^\mu + iF_2^{(n)}(q^2)\frac{q_\nu\sigma^{\mu\nu}}{2m} \right]. \quad (122)$$

3.4. Significado físico de los factores de forma

Para averiguar el significado físico de los factores de forma $F_1(q^2)$ y $F_2(q^2)$, consideraremos la interacción a orden árbol del proceso de dispersión de un muón con un campo electromagnético clásico $A_\mu^c(x)$ (Figura 10). En este caso, la amplitud de dispersión corresponde a:

$$-i\mathcal{M}_0 = -i\mathcal{M}_0^\mu \tilde{A}_\mu^c(q) = ig_e \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)\tilde{A}_\mu^c(q), \quad (123)$$

donde $\tilde{A}_\mu^c(q)$ es la transformada de Fourier del campo electromagnético $A_\mu^c(x)$:

$$\tilde{A}_\mu^c(q) = \int dx^4 e^{-iq \cdot x} A_\mu^c(x). \quad (124)$$

Si se considera a $A_\mu^c(q)$ como un campo electromagnético electrostático. Es decir, $A_\mu^c(x) = (\phi(\vec{x}), \vec{0})$. Entonces, la amplitud de dispersión será:

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M} &= ig_e \bar{u}(p')\Gamma^0(p, p')u(p)\tilde{A}_0^c(q) \\ &= ig_e \bar{u}(p')\Gamma^0(p, p')u(p) \int dx^4 e^{-iq \cdot x} \phi(\vec{x}) \\ &= 2\pi\delta(q_0)ig_e \bar{u}(p')\Gamma^0(p, p')u(p)\tilde{\phi}(\vec{q}), \end{aligned} \quad (125)$$

donde, el producto de espinores con la función de corrección al vértice corresponde a:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p')\Gamma^0(p, p')u(p) &= \bar{u}(p') \left[F_1(q^2)\gamma^0 + iF_2(q^2)\frac{q_\nu\sigma^{0\nu}}{2m} \right] u(p) \\
&= F_1(q^2)\bar{u}(p')\gamma^0 u(p) - F_2(q^2)\bar{u}(p') \left[\frac{q_\nu[\gamma^0, \gamma^\nu]}{4m} \right] u(p) \\
&= F_1(q^2)u^\dagger(p')\gamma^0\gamma^0 u(p) - F_2(q^2)\bar{u}(p') \left[\frac{q_0[\gamma^0, \gamma^0] + q_i[\gamma^0, \gamma^i]}{4m} \right] u(p) \\
&= F_1(q^2)u^\dagger(p')u(p) - \frac{F_2(q^2)}{2m} \bar{u}(p') \cancel{q_i[\gamma^0, \gamma^i]} u(p).
\end{aligned} \tag{126}$$

Por lo tanto, para este caso solo va a existir la contribución del factor de forma $F_1(q^2)$

$$-i\mathcal{M} = 2\pi\delta(q_0)ig_eF_1(q^2)u^\dagger(p')u(p)\tilde{\phi}(\vec{q}). \tag{127}$$

Además, teniendo en cuenta la forma explícita para los espinores en el límite de baja energía:

$$u(p) \approx \sqrt{m} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\sigma^j p_j}{2m}\right) \xi \\ \left(1 + \frac{\sigma^j p_j}{2m}\right) \xi \end{pmatrix}, \tag{128}$$

donde ξ es un espinor constante de dos componentes, la amplitud de dispersión de la expresión (127) puede reducirse a:

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{M} &= 2\pi\delta(q_0)ig_eF_1(0)2m\xi^\dagger \left[1 + \frac{\sigma^i\sigma^j p_i p_j}{4m^2} \right] \xi \tilde{\phi}(\vec{q}) \\
&\approx 2\pi\delta(q_0)ig_eF_1(0)\tilde{\phi}(\vec{q})2m\xi^\dagger \xi.
\end{aligned} \tag{129}$$

Esta ultima expresión corresponde a la aproximación de Born para la amplitud de dispersión de un potencial de la forma:

$$V(\vec{x}) = g_eF_1(0)\phi(\vec{x}). \tag{130}$$

Por consiguiente, se concluye que, el factor de forma $F_1(q^2)$ se encarga de otorgarle dependencia de la escala de energía a la carga eléctrica. Es decir, modifica el valor de esta en función de la escala de energía. Por lo tanto, como no existe una modificación de la carga eléctrica a bajas energías ($q^2 = 0$), se debe cumplir que $F(q^2 = 0) = 1$.

Ahora bien, para hallar el significado físico del segundo factor de forma, se va a considerar que $A_\mu^c(q)$ es un campo electromagnético magnetostático. Es decir, $A_\mu^c(x) = (0, A_i^c(\vec{x}))$. Entonces, la amplitud de dispersión será:

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{M} &= ig_e \bar{u}(p') \Gamma^i(p, p') u(p) \tilde{A}_i^c(q) \\
&= ig_e \bar{u}(p') \Gamma^i(p, p') u(p) \int dx^4 e^{-iq \cdot x} A_i^c(\vec{x}) \\
&= 2\pi \delta(q_0) ig_e \bar{u}(p') \Gamma^i(p, p') u(p) \tilde{A}_i^c(\vec{q}),
\end{aligned} \tag{131}$$

donde el producto de espinores con la función de corrección al vértice corresponde a:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p') \Gamma^i(p, p') u(p) &= \bar{u}(p') \left[F_1(q^2) \gamma^i + i F_2(q^2) \frac{q_\nu \sigma^{i\nu}}{2m} \right] u(p) \\
&= F_1(q^2) \bar{u}(p') \gamma^i u(p) - F_2(q^2) \bar{u}(p') \left[\frac{q_\nu [\gamma^i, \gamma^\nu]}{4m} \right] u(p) \\
&= F_1(q^2) u^\dagger(p') \gamma^0 \gamma^i u(p) - F_2(q^2) \bar{u}(p') \left[\frac{q_0 [\gamma^i, \gamma^0] + q_j [\gamma^i, \gamma^j]}{4m} \right] u(p) \\
&= F_1(q^2) u^\dagger(p') \gamma^0 \gamma^i u(p) + i \frac{F_2(q^2)}{2m} \bar{u}(p') q_j \frac{i[\gamma^i, \gamma^j]}{2} u(p).
\end{aligned} \tag{132}$$

Usando nuevamente la forma explícita para los espinores en el límite de baja energía en la expresión anterior, se tiene:

$$\bar{u}(p') \Gamma^i(p, p') u(p) = F_1(q^2) \xi'^\dagger \left[\sigma^j \sigma^i p'_j + \sigma^i \sigma^j p_j \right] \xi - i F_2(q^2) \xi'^\dagger \left[\epsilon^{ijk} q_j \sigma^k \right] \xi. \tag{133}$$

Y, aplicando la siguiente propiedad:

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k, \tag{134}$$

se llega a la expresión:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p') \Gamma^i(p, p') u(p) &= F_1(q^2) \xi'^\dagger \left[p'_i + p_i + i \epsilon^{jik} \sigma^k p'_j + i \epsilon^{ijk} \sigma^k p_j \right] \xi - i F_2(q^2) \xi'^\dagger \left[\epsilon^{ijk} q_j \sigma^k \right] \xi \\
&= F_1(q^2) \xi'^\dagger \left[p'_i + p_i - i \epsilon^{ijk} \sigma^k p'_j + i \epsilon^{ijk} \sigma^k p_j \right] \xi - i F_2(q^2) \xi'^\dagger \left[\epsilon^{ijk} q_j \sigma^k \right] \xi \\
&= F_1(q^2) \xi'^\dagger \left[p'_i + p_i - i \epsilon^{ijk} \sigma^k (p'_j - p_j) \right] \xi - F_2(q^2) \xi'^\dagger \left[i \epsilon^{ijk} q_j \sigma^k \right] \xi \\
&= F_1(q^2) \xi'^\dagger \left[p'_i + p_i - i \epsilon^{ijk} \sigma^k q_j \right] \xi - F_2(q^2) \xi'^\dagger \left[i \epsilon^{ijk} q_j \sigma^k \right] \xi.
\end{aligned} \tag{135}$$

Finalmente, considerando los términos lineales en q_j y el límite de baja energía, la amplitud de dispersión es:

$$-i\mathcal{M} = -2\pi\delta(q_0)ig_e\left(F_1(0) + F_2(0)\right)\xi^{\dagger}\sigma^k\xi i\epsilon^{ijk}q_j\tilde{A}_i^c(\vec{q}). \quad (136)$$

De esta expresión, se puede identificar la transformada de Fourier para un campo magnético ($\tilde{B}_k^c(\vec{q}) = i\epsilon^{ijk}q_j\tilde{A}_i^c(\vec{q})$). Y, el valor esperado del espín $\langle S^k \rangle = \frac{1}{2}\xi^{\dagger}\sigma^k\xi$. Reescribiendo la amplitud de dispersión se tiene:

$$-i\mathcal{M} = 2\pi(2m)\delta(q_0)i\frac{-g_e}{m}\left(F_1(0) + F_2(0)\right)\langle S^k \rangle\tilde{B}_k^c(\vec{q}). \quad (137)$$

Esta última expresión corresponde a la aproximación de Born para la amplitud de dispersión de un potencial de la forma:

$$V(\vec{x}) = -\langle \vec{\mu} \rangle \cdot \vec{B}(\vec{x}), \quad (138)$$

donde

$$\vec{\mu} = \frac{g_e}{2m}\left(2F_1(0) + 2F_2(0)\right)\vec{S}. \quad (139)$$

Ahora, recordando que $F_1(0) = 1$ y comparando esta expresión con la definición del momento magnético del muón (100), se infiere que el factor giromagnético del muón es:

$$g_\mu = 2 + 2F_2(0). \quad (140)$$

Por consiguiente, se concluye que, el factor de forma $F_2(0)$ corresponde a una corrección del momento magnético del muón.

3.5. Medición experimental (Muon g-2)

El concepto general para la medición de este observable fue inicialmente ideado en el CERN. Para ser posteriormente mejorado en el Brookhaven National Laboratory (BNL) y en el Fermilab (E989). La medición consiste en generar piones de cierta energía al hacer colisionar protones a un blanco de materia, llegado este punto, gracias a la violación máxima de paridad de la corriente cargada débil, es posible generar muones a partir de la desintegración del pión con un espín y momento bien definidos. Estos se inyectan en un anillo de almacenamiento magnético y se mueven en espiral bajo la influencia de un campo magnético. El espín de los muones precesa en el campo, y la diferencia entre la frecuencia de precesión y la frecuencia del movimiento de los muones da una medida muy precisa del a_μ . Esta detección se da gracias a que los muones tienen una

vida media corta y se desintegran en electrones y neutrinos. Al monitorear la dirección y la energía de los electrones emitidos, los investigadores pueden estudiar la precesión del espín y calcular el momento magnético anómalo. Con esta técnica el experimento E821 en el Brookhaven National Lab (BNL) encontró:

$$\begin{aligned} a_{\mu^+}^{Exp} &= 11659203(6)(5) \times 10^{-10}, \\ a_{\mu^-}^{Exp} &= 11659214(8)(3) \times 10^{-10}. \end{aligned} \quad (141)$$

Lo que da un promedio global de:

$$a_{\mu}^{Exp}(BNL) = 11659208(6) \times 10^{-10}. \quad (142)$$

Con la llegada del anillo de almacenamiento al Fermilab, el cual cuenta con una mejor producción de muones, la medición del observable mejoró. Obteniendo los siguientes valores para las corridas 1, 2 y 3:

$$\begin{aligned} a_{\mu}^{Exp}(Run1) &= 116592040(54) \times 10^{-11}, \\ a_{\mu}^{Exp}(Run2/3) &= 116592057(25) \times 10^{-11}. \end{aligned} \quad (143)$$

Y, combinando las dos medidas del Fermilab:

$$a_{\mu}^{Exp}(FNAL) = 116592055(24) \times 10^{-11}. \quad (144)$$

Lo que, en conjunto con la medida del BNL, da un promedio global del experimento de:

$$a_{\mu}^{Exp}(AVG) = 116592059(22) \times 10^{-11}. \quad (145)$$

3.6. Predicciones del Modelo Estándar

En el Modelo Estándar, la predicción al valor del momento magnético anómalo del muón a_{μ} puede dividirse en 3 componentes: la contribución electromagnética a_{μ}^{QED} , la contribución electrodébil a_{μ}^{EW} y la contribución hadrónica a_{μ}^{Had} . Entonces,

$$a_{\mu}^{SM} = a_{\mu}^{QED} + a_{\mu}^{EW} + a_{\mu}^{Had}. \quad (146)$$

- Contribución de QED.** La contribución de QED al momento magnético anómalo del muón es calculada mediante correcciones de orden superior en la constante de estructura fina, α , que incluyen diagramas de Feynman con múltiples bucles. a_{μ}^{QED} es una cantidad adimensional, por lo que presenta una dependencia con la

masa de los leptones de la forma:

$$a_{\mu}^{QED} = A_1 + A_2 \left(\frac{m_{\mu}}{m_e} \right) + A_3 \left(\frac{m_{\mu}}{m_e}, \frac{m_{\mu}}{m_{\tau}} \right), \quad (147)$$

donde m_{μ} , m_e y m_{τ} son las masas del muón, el electrón y el tau, respectivamente.

El término A_1 corresponde a los diagramas que unicamente cuentan con fotones y muones. Por otro lado, los términos A_2 Y A_3 corresponden a los diagramas que poseen también electrones y leptones tau. Además, las funciones A_i pueden expresarse como series de potencias en términos de $\frac{\alpha}{\pi}$:

$$A_i = A_i^{(2)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) + A_i^{(4)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + A_i^{(6)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + A_i^{(8)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 + \dots, \quad (148)$$

Actualmente, el cálculo de a_{μ}^{QED} se ha hecho hasta orden $\mathcal{O}(\alpha^5)$ con valores de α obtenidos de medidas de interferometría atómica del átomo de cesio (Cs) [26]. Lo que da un valor final para la contribución de QED al momento magnético anómalo del muón de:

$$a_{\mu}^{QED}(\alpha(Cs)) = 116584718.931(104) \times 10^{-11}. \quad (149)$$

- **Contribución Electrodébil.** La contribución electrodébil al momento magnético anómalo del muón proviene de la interacción del muón con los bosones W y Z , que son los mediadores de la fuerza débil en el Modelo Estándar. Esta contribución se ha calculado hasta el orden de *2-loops* y posee una contribución total estimada de [27]:

$$a_{\mu}^{EW} = 153.6(1.0) \times 10^{-11}. \quad (150)$$

- **Contribución Hadrónica.** La contribución hadrónica del momento magnético anómalo del muón surge de los diagramas de QED con participación de hadrones. La contribución para este proceso es obtenida principalmente haciendo uso de datos disponibles para la sección transversal del proceso $e^+ + e^- \rightarrow hadrones$ y técnicas aplicadas para la evaluación de la integral dispersiva del HVP.

Combinando la contribución de QED y la contribución Electrodébil junto con la contribución Hadrónica, se tiene un valor global para el momento magnético anómalo del muón de [5]:

$$a_{\mu}^{SM} = 116591810(43) \times 10^{-11}. \quad (151)$$

Esta predicción hecha por la *Theory initiative* en 2020 se ubica a exactamente 5σ de la medida realizada por el Fermilab en 2023 y a 5.1σ del promedio experimental (Fermilab + BNL), tal como se puede ver en la Figura 12. Lo que implica en un principio una discrepancia notable entre estas dos predicciones. Sin embargo, los cálculos de la contribución al HVP hecha por las colaboraciones CMD-3 y BMW'20 reducen esa discrepancia.

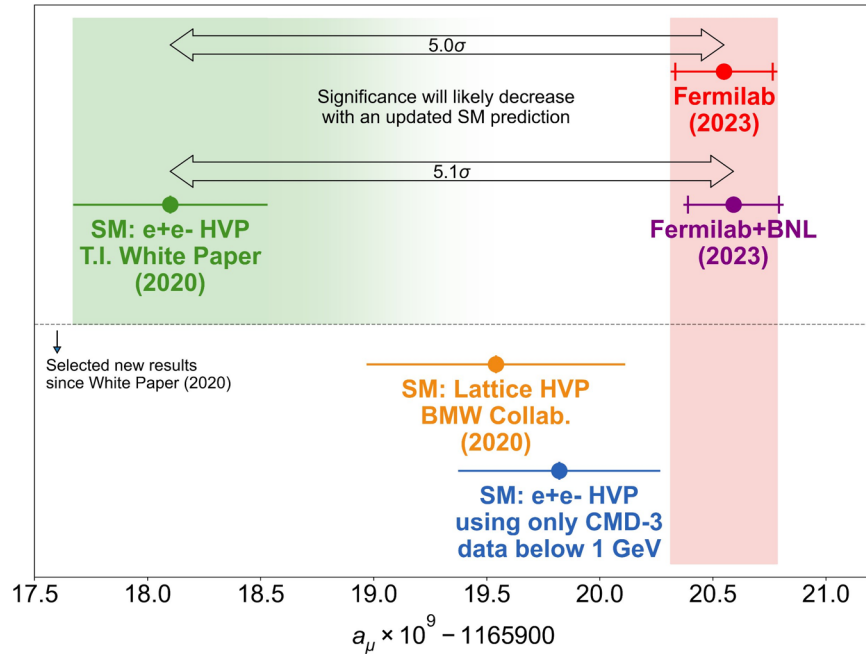


Figura 12. Predicciones experimentales y teóricas para el valor del $g - 2$ del muón.
Fuente: Fermilab(2023).

Adicionalmente, recientemente la colaboración BMW publicó su más reciente medición del HVP usando el método de *Lattice QCD* [9]. Esta última, ubica la predicción del Modelo Estándar solamente a 0.9σ del promedio experimental (Fermilab + BNL). Tal como se muestra en la Figura 13, bajo el nombre de "*This Work*".

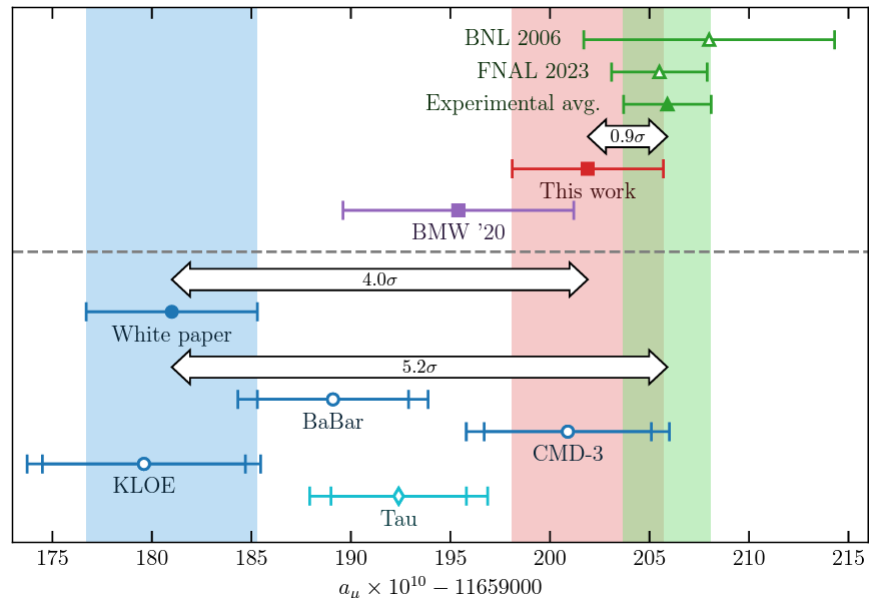


Figura 13. Predicciones experimentales y teóricas para el valor del $g - 2$ del muón considerando BMW'24.
Fuente: Colaboración BMW(2024).

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este capítulo se calcula la contribución de las interacciones del nuevo campo en el momento magnético anómalo del muón a 1-loop. Este resultado se compara con las predicciones teóricas de la colaboración BMW (2024), las correcciones obtenidas en el experimento CMD-3, el WP (2020) y los resultados más recientes de la colaboración *Muon g-2*.

4.1. Contribución del bosón Z' al momento magnético anómalo del muón a 1-loop

El diagrama de Feynman asociado a la contribución a 1-loop de la interacción efectiva entre el bosón Z' y el muón es:

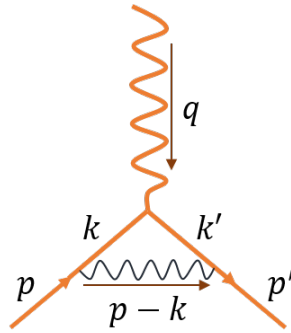


Figura 14. Interacción a 1-loop para la anomalía considerando un fotón oscuro.

Donde, los términos correspondientes al diagrama de Feynman son:

Factor	Contribución
Vértice QED	$i g_e \gamma^\mu$
Vértice efectivo	$-i \kappa g_e \gamma^\mu$
Propagador del muón	$\frac{i(\gamma^\mu k_\mu + m_\mu)}{k^2 - m_\mu^2 + i\epsilon}$
Propagador del bosón Z'	$\frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 - m_{Z'}^2 + i\epsilon}$

Tabla 4. Propagadores y vértices.

Con los cuales, se construye la amplitud de Feynman asociada a la contribución del bosón Z' a 1-loop:

$$\begin{aligned}
ig_e \bar{u}(p') \Gamma^{\mu(1)}(p', p) u(p) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') (-ig_e \kappa \gamma^\alpha) \frac{i(\not{k} + m_\mu)}{k'^2 - m_\mu^2 + i\epsilon} (ig_e \gamma^\mu) \\
&\times \frac{i(\not{k} + m_\mu)}{k^2 - m_\mu^2 + i\epsilon} (-ig_e \kappa \gamma^\sigma) u(p) \frac{-ig_{\alpha\sigma}}{(k-p)^2 - m_V^2 + i\epsilon} \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') \frac{(\gamma^\alpha)(\not{k} + m_\mu)(\gamma^\mu)(\not{k} + m_\mu)(\gamma_\alpha)}{(k'^2 - m_\mu^2 + i\epsilon)(k^2 - m_\mu^2 + i\epsilon)} u(p) \\
&\times \frac{-ig_e^2 \kappa^2}{(k-p)^2 - m_V^2 + i\epsilon}.
\end{aligned} \tag{152}$$

Despejando la función de corrección al vértice:

$$\bar{u}(p') \Gamma^{\mu(1)}(p', p) u(p) = -ig_e^2 \kappa^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') \frac{N}{D} u(p), \tag{153}$$

donde

$$N = (\gamma^\alpha)(\not{k} + m_\mu)(\gamma^\mu)(\not{k} + m_\mu)(\gamma_\alpha), \tag{154}$$

y

$$D = (k'^2 - m_\mu^2 + i\epsilon)(k^2 - m_\mu^2 + i\epsilon)[(k-p)^2 - m_V^2 + i\epsilon]. \tag{155}$$

Desarrollando el numerador:

$$\begin{aligned}
N &= \gamma^\alpha \not{k} \gamma^\mu \not{k} \gamma_\alpha + m_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu \not{k} \gamma_\alpha + m_\mu \gamma^\alpha \not{k} \gamma^\mu \gamma_\alpha + m_\mu^2 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_\alpha \\
&= \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma_\alpha k'_\nu k_\sigma + m_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\alpha k_\nu + m_\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\alpha k'_\nu + m_\mu^2 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_\alpha.
\end{aligned} \tag{156}$$

Y, utilizando las identidades de las matrices gamma:

$$\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_\alpha = -2\gamma^\mu, \quad \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\alpha = 4g^{\mu\nu}, \quad \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma_\alpha = -2\gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu, \tag{157}$$

el numerador puede simplificarse a:

$$\begin{aligned}
N &= -2\gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu k'_\nu k_\sigma + 4m_\mu g^{\mu\nu} k_\nu + 4m_\mu g^{\nu\mu} k'_\nu - 2m_\mu^2 \gamma^\mu \\
&= -2\not{k} \gamma^\mu \not{k}' + 4m_\mu (k'^\mu + k^\mu) - 2m_\mu^2 \gamma^\mu.
\end{aligned} \tag{158}$$

Por lo tanto

$$\bar{u}(p') \Gamma^{\mu(1)}(p', p) u(p) = 2ig_e^2 \kappa^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') \frac{\not{k} \gamma^\mu \not{k}' - 2m_\mu (k'^\mu + k^\mu) + m_\mu^2 \gamma^\mu}{D} u(p). \tag{159}$$

Esta última expresión contiene una integral muy difícil de evaluar usando los métodos convencionales; por lo tanto, se hará el uso del método de los parámetros de Feynman para el caso de $n = 3$ (ver el anexo C):

$$\frac{1}{A_1 A_2 A_3} = \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \frac{2}{(x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3)^3}, \quad (160)$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= (k'^2 - m_\mu^2 + i\epsilon), \\ A_2 &= (k^2 - m_\mu^2 + i\epsilon), \\ A_3 &= [(k - p)^2 - m_V^2 + i\epsilon]. \end{aligned} \quad (161)$$

De este modo

$$\frac{1}{D} = \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \frac{2}{D'^3}, \quad (162)$$

con

$$\begin{aligned} D' &= x_1(k'^2 - m_\mu^2 + i\epsilon) + x_2(k^2 - m_\mu^2 + i\epsilon) + x_3[(k - p)^2 - m_V^2 + i\epsilon] \\ &= x_1(k'^2 - m_\mu^2) + x_2(k^2 - m_\mu^2) + x_3[(k - p)^2 - m_V^2] + (x_1 + x_2 + x_3)i\epsilon. \end{aligned} \quad (163)$$

Por otro lado, considerando la conservación del momento en el vértice ($k' = k + q$), se tiene:

$$\begin{aligned} D' &= x_1(k + q)^2 + x_2 k^2 + x_3(k - p)^2 - m_\mu^2(x_1 + x_2) - m_V^2 x_3 + (x_1 + x_2 + x_3)i\epsilon \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)k^2 + 2k(x_1 q - x_3 p) + x_1 q^2 + x_3 p^2 - m_\mu^2(x_1 + x_2) - m_V^2 x_3 \\ &\quad + (x_1 + x_2 + x_3)i\epsilon. \end{aligned} \quad (164)$$

Además, debido a la delta de Dirac del integrando se debe cumplir que $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Entonces,

$$D' = k^2 + 2k(x_1 q - x_3 p) + x_1 q^2 + x_3 p^2 - m_\mu^2(x_1 + x_2) - m_V^2 x_3 + i\epsilon. \quad (165)$$

Ahora, es conveniente sumar y restar el término $(x_1 q - x_3 p)^2$ para completar el cuadrado

$$\begin{aligned} D' &= k^2 + 2k(x_1 q - x_3 p) + (x_1 q - x_3 p)^2 + x_1 q^2 + x_3 p^2 - m_\mu^2(x_1 + x_2) \\ &\quad - (x_1 q - x_3 p)^2 - m_V^2 x_3 + i\epsilon \\ &= (k + x_1 q - x_3 p)^2 + x_1 q^2 + x_3 p^2 - m_\mu^2(x_1 + x_2) - m_V^2 x_3 + i\epsilon \\ &\quad - x_1^2 q^2 + 2x_1 x_3 q \cdot p - x_3^2 p^2. \end{aligned} \quad (166)$$

Teniendo en cuenta la conservación global de momento:

$$p'^2 = m_\mu^2 = (p + q)^2 = p^2 + 2p \cdot q + q^2 = m_\mu^2 + 2p \cdot q + q^2 \quad (167)$$

$$\Rightarrow 2p \cdot q = -q^2. \quad (168)$$

Y, reemplazando esto en la expresión (166):

$$\begin{aligned} D' &= (k + x_1q - x_3p)^2 + x_1q^2 + x_3p^2 - m_\mu^2(x_1 + x_2) - m_V^2x_3 + i\epsilon \\ &\quad - x_1^2q^2 - x_1x_3q^2 - x_3^2p^2 \\ &= (k + x_1q - x_3p)^2 + x_3p^2(1 - x_3) - m_\mu^2(x_1 + x_2) - m_V^2x_3 + i\epsilon \\ &\quad + x_1q^2(1 - x_1 - x_3) \\ &= (k + x_1q - x_3p)^2 + x_3m_\mu^2(1 - x_3) - m_\mu^2(1 - x_3) - m_V^2x_3 + i\epsilon \\ &\quad + x_1x_2q^2 \\ &= (k + x_1q - x_3p)^2 - m_\mu^2(1 - x_3)^2 - m_V^2x_3 + x_1x_2q^2 + i\epsilon. \end{aligned} \quad (169)$$

Llegado este punto, es conveniente realizar los siguientes cambios de variable:

$$\begin{aligned} l &= k + x_1q - x_3p \\ \Delta &= m_\mu^2(1 - x_3)^2 + m_V^2x_3 - x_1x_2q^2. \end{aligned} \quad (170)$$

De modo que, el denominador del integrando será:

$$D' = l^2 - \Delta + i\epsilon. \quad (171)$$

Del mismo modo, se hace necesario escribir el numerador del integrando en función de la variable l :

$$N' = \mathcal{K}\gamma^\mu\mathcal{K}' - 2m_\mu(k'^\mu + k^\mu) + m_\mu^2\gamma^\mu. \quad (172)$$

Para el primer término, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\gamma^\mu\mathcal{K}' &= \mathcal{K}\gamma^\mu(\mathcal{K} + q) = (l - x_1q + x_3p)\gamma^\mu(l - x_1q + x_3p + q) \\ &= (l - x_1q + x_3p)\gamma^\mu[l + x_3p + (1 - x_1)q] \\ &= l\gamma^\mu l + l[\gamma^\mu x_3p + \gamma^\mu(1 - x_1)q] + [x_3p - x_1q]\gamma^\mu l \\ &\quad + [x_3p - x_1q]\gamma^\mu x_3p + [x_3p - x_1q]\gamma^\mu(1 - x_1)q. \end{aligned} \quad (173)$$

Para el segundo término, se tiene:

$$\begin{aligned}
-2m_\mu(k'^\mu + k^\mu) &= -2m_\mu(2k^\mu + q^\mu) = -2m_\mu[2(l^\mu - x_1q^\mu + x_3p^\mu) + q^\mu] \\
&= -2m_\mu[2l^\mu + (1 - 2x_1)q^\mu + 2x_3p^\mu] \\
&= -4m_\mu l^\mu - 2m_\mu[(1 - 2x_1)q^\mu + 2x_3p^\mu].
\end{aligned} \tag{174}$$

Por ende,

$$\begin{aligned}
N' &= l\gamma^\mu l + l[\gamma^\mu x_3\not{p} + \gamma^\mu(1 - x_1)\not{q}] + [x_3\not{p} - x_1\not{q}]\gamma^\mu l \\
&+ [x_3\not{p} - x_1\not{q}]\gamma^\mu[x_3\not{p} + (1 - x_1)\not{q}] - 4m_\mu l^\mu \\
&- 2m_\mu[(1 - 2x_1)q^\mu + 2x_3p^\mu] + m_\mu^2\gamma^\mu.
\end{aligned} \tag{175}$$

Lo que modifica la expresión general a:

$$\bar{u}(p')\Gamma^{\mu(1)}(p', p)u(p) = 4ig_e^2\kappa^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \bar{u}(p') \frac{N'}{D^3} u(p). \tag{176}$$

La cual, puede simplificarse aún más teniendo en cuenta las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu}{D^3} &= 0, \\
\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu l^\nu}{D^3} &= \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{4}g^{\mu\nu}l^2}{D^3}.
\end{aligned} \tag{177}$$

Para el primer término de la integral, se tiene:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l\gamma^\mu l}{D^3} &= \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta l_\alpha l_\beta}{D^3} = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{4}\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta g_{\alpha\beta} l^2}{D^3} \\
&= \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{4}\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_\alpha l^2}{D^3} = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{-\frac{1}{2}\gamma^\mu l^2}{D^3}.
\end{aligned} \tag{178}$$

Por otro lado, el segundo, tercer y quinto término de la integral se cancelan por la primera condición. Por ende,

$$N' = \frac{-1}{2}\gamma^\mu l^2 + [x_3\not{p} - x_1\not{q}]\gamma^\mu[x_3\not{p} + (1 - x_1)\not{q}] - 2m_\mu[(1 - 2x_1)q^\mu + 2x_3p^\mu] + m_\mu^2\gamma^\mu. \tag{179}$$

Ahora, considerando las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\not{p}\gamma^\mu &= 2p^\mu - \gamma^\mu\not{p}, \\
\not{p}u(p) &= u(p)m_\mu, \\
\bar{u}(p')\not{p}' &= \bar{u}(p')m_\mu, \\
u(p)\not{q}u(p) &= 0.
\end{aligned} \tag{180}$$

Se procede a calcular el segundo término del numerador $\bar{u}(p')N'u(p)$:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p')N'_2u(p) &= u(p') [x_3\not{p} - x_1\not{q}]\gamma^\mu [x_3\not{p} + (1 - x_1)\not{q}]u(p) \\
&= \bar{u}(p') [x_3\not{p}\gamma^\mu x_3\not{p} + x_3\not{p}\gamma^\mu(1 - x_1)\not{q} - x_1\not{q}\gamma^\mu x_3\not{p} - x_1\not{q}\gamma^\mu(1 - x_1)\not{q}]u(p) \\
&= \bar{u}(p') [x_3^2\not{p}\gamma^\mu m_\mu + x_3\not{p}\gamma^\mu(1 - x_1)\not{q} - x_1x_3\not{q}\gamma^\mu m_\mu - x_1\not{q}\gamma^\mu(1 - x_1)\not{q}]u(p) \\
&= \bar{u}(p') [x_3^2(2p^\mu - \gamma^\mu\not{p})m_\mu + x_3\not{p}\gamma^\mu(1 - x_1)\not{q} - x_1x_3\not{q}\gamma^\mu m_\mu \\
&\quad - x_1\not{q}\gamma^\mu(1 - x_1)\not{q}]u(p) \\
&= \bar{u}(p') [x_3^2(2p^\mu - \gamma^\mu m_\mu)m_\mu + x_3(1 - x_1)\not{p}\gamma^\mu\not{q} - x_1x_3\not{q}\gamma^\mu m_\mu \\
&\quad - x_1(1 - x_1)(2q^\mu - \gamma^\mu\not{q})\not{q}]u(p) \\
&= \bar{u}(p') [x_3^2(2p^\mu - \gamma^\mu m_\mu)m_\mu + x_3(1 - x_1)\not{p}\gamma^\mu\not{q} - x_1x_3\not{q}\gamma^\mu m_\mu \\
&\quad - x_1(1 - x_1)(2q^\mu\not{q} - \gamma^\mu q^2)]u(p).
\end{aligned} \tag{181}$$

Reemplazando la relación $\not{p} = \not{p}' - \not{q}$ en el segundo término:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p') [x_3(1 - x_1)(\not{p}' - \not{q})\gamma^\mu\not{q}]u(p) &= \bar{u}(p') [x_3(1 - x_1)(\not{p}'\gamma^\mu\not{q} - \not{q}\gamma^\mu\not{q})]u(p) \\
&= \bar{u}(p') [x_3(1 - x_1)(m_\mu\gamma^\mu\not{q} - \not{q}\gamma^\mu\not{q})]u(p) \\
&= \bar{u}(p') [x_3(1 - x_1)(m_\mu\gamma^\mu\not{q} - (2q^\mu - \gamma^\mu\not{q})\not{q})]u(p) \\
&= \bar{u}(p') [x_3(1 - x_1)(m_\mu\gamma^\mu\not{q} - 2q^\mu\not{q} + \gamma^\mu q^2)]u(p).
\end{aligned} \tag{182}$$

De modo que

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p')N'_2u(p) &= \bar{u}(p') \left[x_3^2(2p^\mu - \gamma^\mu m_\mu)m_\mu + x_3(1-x_1)(m_\mu\gamma^\mu\not{q} - 2q^\mu\not{q} + \gamma^\mu q^2) \right. \\
&\quad \left. - x_1x_3\not{q}\gamma^\mu m_\mu - x_1(1-x_1)(2q^\mu\not{q} - \gamma^\mu q^2) \right] u(p) \\
&= \bar{u}(p') \left[x_3^2(2p^\mu - \gamma^\mu m_\mu)m_\mu + x_3(1-x_1)(m_\mu\gamma^\mu\not{q} + \gamma^\mu q^2) \right. \\
&\quad \left. - x_1x_3\not{q}\gamma^\mu m_\mu + x_1(1-x_1)\gamma^\mu q^2 \right] u(p) \\
&= \bar{u}(p') \left[x_3^2(2p^\mu - \gamma^\mu m_\mu)m_\mu + x_3m_\mu\gamma^\mu\not{q} - x_3x_1m_\mu\gamma^\mu\not{q} + x_3(1-x_1)\gamma^\mu q^2 \right. \\
&\quad \left. - x_1x_3\not{q}\gamma^\mu m_\mu + x_1(1-x_1)\gamma^\mu q^2 \right] u(p) \\
&= \bar{u}(p') \left[x_3^2(2p^\mu - \gamma^\mu m_\mu)m_\mu + x_3m_\mu\gamma^\mu\not{q} - x_3x_1m_\mu(\gamma^\mu\not{q} + \not{q}\gamma^\mu) \right. \\
&\quad \left. + x_3(1-x_1)\gamma^\mu q^2 + x_1(1-x_1)\gamma^\mu q^2 \right] u(p) \\
&= \bar{u}(p') \left[x_3^2(2p^\mu - \gamma^\mu m_\mu)m_\mu + x_3m_\mu\gamma^\mu(\not{p}' - \not{p}) - 2x_3x_1m_\mu q^\mu \right. \\
&\quad \left. + x_3(1-x_1)\gamma^\mu q^2 + x_1(1-x_1)\gamma^\mu q^2 \right] u(p) \\
&= \bar{u}(p') \left[x_3^2(2p^\mu - \gamma^\mu m_\mu)m_\mu + x_3m_\mu(2p'^\mu - \not{p}'\gamma^\mu - \gamma^\mu m_\mu) - 2x_3x_1m_\mu q^\mu \right. \\
&\quad \left. + x_3(1-x_1)\gamma^\mu q^2 + x_1(1-x_1)\gamma^\mu q^2 \right] u(p) \\
&= \bar{u}(p') \left[x_3^2(2p^\mu - \gamma^\mu m_\mu)m_\mu + 2x_3m_\mu(p'^\mu - \gamma^\mu m_\mu) - 2x_3x_1m_\mu q^\mu \right. \\
&\quad \left. + x_3(1-x_1)\gamma^\mu q^2 + x_1(1-x_1)\gamma^\mu q^2 \right] u(p).
\end{aligned} \tag{183}$$

Luego, la expresión total del numerador será:

$$\begin{aligned}
N' &= \frac{-1}{2}\gamma^\mu l^2 + x_3^2(2p^\mu - \gamma^\mu m_\mu)m_\mu + 2x_3m_\mu(p'^\mu - \gamma^\mu m_\mu) - 2x_3x_1m_\mu q^\mu \\
&\quad + x_3(1-x_1)\gamma^\mu q^2 + x_1(1-x_1)\gamma^\mu q^2 - 2m_\mu[(1-2x_1)q^\mu + 2x_3p^\mu] + m_\mu^2\gamma^\mu.
\end{aligned} \tag{184}$$

O, factorizando γ^μ

$$\begin{aligned}
N' &= \left[\frac{-1}{2}l^2 + m_\mu^2 + x_3(1-x_1)q^2 + x_1(1-x_1)q^2 - x_3^2m_\mu^2 - 2x_3m_\mu^2 \right] \gamma^\mu \\
&\quad + x_3^22p^\mu m_\mu + 2x_3m_\mu p'^\mu - 2m_\mu[(1-2x_1)q^\mu + 2x_3p^\mu] - 2x_3x_1m_\mu q^\mu \\
&= \left[\frac{-1}{2}l^2 + m_\mu^2(1-x_3^2-2x_3) + (x_1+x_3)(1-x_1)q^2 \right] \gamma^\mu \\
&\quad + x_3^22p^\mu m_\mu + 2x_3m_\mu p'^\mu - 2m_\mu q^\mu + 4m_\mu x_1 q^\mu - 4m_\mu x_3 p^\mu - 2x_3x_1m_\mu q^\mu.
\end{aligned} \tag{185}$$

Reemplazando $x_1 + x_3 = 1 - x_2$, $p'^\mu = p^\mu + q^\mu$ y factorizando q^μ

$$\begin{aligned}
N' &= \left[\frac{-1}{2}l^2 + m_\mu^2(1 - x_3^2 - 2x_3) + (1 - x_2)(1 - x_1)q^2 \right] \gamma^\mu \\
&\quad + x_3^2 2m_\mu p^\mu + 2x_3 m_\mu (p^\mu + q^\mu) - 2m_\mu q^\mu + 4m_\mu x_1 q^\mu - 4m_\mu x_3 p^\mu - 2x_3 x_1 m_\mu q^\mu \\
&= \left[\frac{-1}{2}l^2 + m_\mu^2(1 - x_3^2 - 2x_3) + (1 - x_2)(1 - x_1)q^2 \right] \gamma^\mu \\
&\quad + x_3^2 2m_\mu p^\mu + 2x_3 m_\mu p^\mu - 4m_\mu x_3 p^\mu + [2x_3 m_\mu - 2m_\mu + 4m_\mu x_1 - 2x_3 x_1 m_\mu] q^\mu \\
&= \left[\frac{-1}{2}l^2 + m_\mu^2(1 - x_3^2 - 2x_3) + (1 - x_2)(1 - x_1)q^2 \right] \gamma^\mu \\
&\quad + 2x_3 m_\mu p^\mu (x_3 + 1) - 4m_\mu x_3 p^\mu + [2x_3 m_\mu (1 - x_1) - 2m_\mu (1 - 2x_1)] q^\mu.
\end{aligned} \tag{186}$$

Y, factorizando p^μ

$$\begin{aligned}
N' &= \left[\frac{-1}{2}l^2 + m_\mu^2(1 - x_3^2 - 2x_3) + (1 - x_2)(1 - x_1)q^2 \right] \gamma^\mu \\
&\quad + [2x_3 m_\mu (x_3 + 1) - 4m_\mu x_3] p^\mu + [2x_3 m_\mu (1 - x_1) - 2m_\mu (1 - 2x_1)] q^\mu \\
&= \left[\frac{-1}{2}l^2 + m_\mu^2(1 - x_3^2 - 2x_3) + (1 - x_2)(1 - x_1)q^2 \right] \gamma^\mu \\
&\quad + 2x_3 m_\mu (x_3 - 1) p^\mu + [2x_3 m_\mu (1 - x_1) - 2m_\mu (1 - 2x_1)] q^\mu.
\end{aligned} \tag{187}$$

Llegado este punto, es conveniente reemplazar $p^\mu = \frac{1}{2}(p^\mu + p'^\mu) - \frac{1}{2}q^\mu$. Entonces,

$$\begin{aligned}
N' &= \left[\frac{-1}{2}l^2 + m_\mu^2(1 - x_3^2 - 2x_3) + (1 - x_2)(1 - x_1)q^2 \right] \gamma^\mu \\
&\quad + 2x_3 m_\mu (x_3 - 1) \left[\frac{1}{2}(p^\mu + p'^\mu) - \frac{1}{2}q^\mu \right] + [2x_3 m_\mu (1 - x_1) - 2m_\mu (1 - 2x_1)] q^\mu \\
&= \left[\frac{-1}{2}l^2 + m_\mu^2(1 - x_3^2 - 2x_3) + (1 - x_2)(1 - x_1)q^2 \right] \gamma^\mu \\
&\quad + x_3 m_\mu (x_3 - 1) (p^\mu + p'^\mu) + [2x_3 m_\mu (1 - x_1) - x_3 m_\mu (x_3 - 1) - 2m_\mu (1 - 2x_1)] q^\mu \\
&= \left[\frac{-1}{2}l^2 + m_\mu^2(1 - x_3^2 - 2x_3) + (1 - x_2)(1 - x_1)q^2 \right] \gamma^\mu \\
&\quad + x_3 m_\mu (x_3 - 1) (p^\mu + p'^\mu) + m_\mu [2x_3 (1 - x_1) - x_3 (x_3 - 1) - 2(1 - 2x_1)] q^\mu.
\end{aligned} \tag{188}$$

Desarrollando el término que acompaña a q^μ , se tiene:

$$2x_3(1 - x_1) - x_3(x_3 - 1) - 2(1 - 2x_1) = 3x_3 - 2x_3x_1 - x_3^2 + 4x_1 - 2. \tag{189}$$

Y, reemplazando $x_3 = 1 - x_1 - x_2$:

$$\begin{aligned}
&= 3(1 - x_1 - x_2) - 2(1 - x_1 - x_2)x_1 - (1 - x_1 - x_2)^2 + 4x_1 - 2 \\
&= 1 - x_1 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2 - (1 - 2x_1 - 2x_2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) \\
&= x_1 - x_2 + x_1^2 - x_2^2 \\
&= x_1(x_1 + 1) - x_2(x_2 + 1) \\
&= x_1(2 - x_2 - x_3) - x_2(2 - x_1 - x_3) \\
&= 2x_1 - x_2x_1 - x_1x_3 - 2x_2 + x_2x_1 + x_2x_3 \\
&= -x_1(x_3 - 2) + x_2(x_3 - 2) \\
&= (x_3 - 2)(x_2 - x_1).
\end{aligned} \tag{190}$$

Por lo tanto, la expresión final del numerador será:

$$\begin{aligned}
N' &= \left[\frac{-1}{2}l^2 + m_\mu^2(1 - x_3^2 - 2x_3) + (1 - x_2)(1 - x_1)q^2 \right] \gamma^\mu \\
&\quad + x_3m_\mu(x_3 - 1)(p^\mu + p'^\mu) + m_\mu(x_3 - 2)(x_2 - x_1)q^\mu.
\end{aligned} \tag{191}$$

Al momento de integrar por x_1 y x_2 el término que acompaña a q^μ se anula, esto se debe a que el numerador es antisimétrico bajo el cambio $x_1 \rightarrow x_2$, mientras que el denominador D' es simétrico. Esto tiene sentido, ya que vimos que la función de corrección al vértice no depende explícitamente del momento q^μ . Entonces,

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p')N'u(p) &= \bar{u}(p') \left\{ \left[\frac{-1}{2}l^2 + m_\mu^2(1 - x_3^2 - 2x_3) + (1 - x_2)(1 - x_1)q^2 \right] \gamma^\mu \right. \\
&\quad \left. + x_3m_\mu(x_3 - 1)(p^\mu + p'^\mu) \right\} u(p).
\end{aligned} \tag{192}$$

Ahora, usando nuevamente la descomposición de Gordon:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p')N'u(p) &= \bar{u}(p') \left\{ \left[\frac{-1}{2}l^2 + m_\mu^2(1 - x_3^2 - 2x_3) + (1 - x_2)(1 - x_1)q^2 \right] \gamma^\mu \right. \\
&\quad \left. + x_3m_\mu(x_3 - 1) \left[2m_\mu\gamma^\mu - 2m_\mu \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_\mu} \right] \right\} u(p).
\end{aligned} \tag{193}$$

Y, reemplazando en la expresión general (176)

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p')\Gamma^{\mu(1)}(p', p)u(p) &= 2ig_e^2\kappa^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \frac{2}{D^{r3}} \\
&\times \bar{u}(p') \left\{ \left[\frac{-1}{2}l^2 + m_\mu^2(1 + x_3^2 - 4x_3) + (1 - x_2)(1 - x_1)q^2 \right] \gamma^\mu \right. \\
&\left. - 2x_3 m_\mu^2(x_3 - 1) \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_\mu} \right\} u(p).
\end{aligned} \tag{194}$$

Comparando la expresión (194) con la expresión de la función de corrección al vértice (122), se tiene:

$$F_2^{(1)}(q^2) = 2ig_e^2\kappa^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \frac{4x_3 m_\mu^2(1 - x_3)}{(l^2 - \Delta + i\epsilon)^3}. \tag{195}$$

Para resolver la integral asociada al momento l se usa el método de la rotación de Wick para $n = 3$ (ver el anexo D):

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \Delta + i\epsilon)^3} = \frac{-i}{2(4\pi)^2} \frac{1}{\Delta}. \tag{196}$$

De este modo

$$\begin{aligned}
F_2^{(1)}(q^2) &= 2g_e^2\kappa^2 \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \frac{2x_3 m_\mu^2(1 - x_3)}{(4\pi)^2 \Delta} \\
&= \frac{\alpha}{2\pi} \times \kappa^2 \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \frac{2x_3 m_\mu^2(1 - x_3)}{m_\mu^2(1 - x_3)^2 + m_V^2 x_3 - x_1 x_2 q^2}.
\end{aligned} \tag{197}$$

Finalmente, evaluando $F_2^{(1)}(q^2 = 0) = a_\mu^V$:

$$\begin{aligned}
a_\mu^V &= \frac{\alpha}{2\pi} \times \kappa^2 \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \frac{2x_3 m_\mu^2(1 - x_3)}{m_\mu^2(1 - x_3)^2 + m_V^2 x_3} \\
&= \frac{\alpha}{2\pi} \times \kappa^2 \int_0^1 dx_3 \int_0^{1-x_3} dx_1 \frac{2x_3 m_\mu^2(1 - x_3)}{m_\mu^2(1 - x_3)^2 + m_V^2 x_3} \\
&= \frac{\alpha}{2\pi} \times \kappa^2 \int_0^1 dx_3 \frac{2x_3 m_\mu^2(1 - x_3)^2}{m_\mu^2(1 - x_3)^2 + m_V^2 x_3}.
\end{aligned} \tag{198}$$

Esta ultima expresión corresponde a la corrección a 1-loop de la contribución del bosón Z' al momento magnético anómalo del muón. Como era de esperarse, a_μ^V posee una dependencia del ángulo de mezcla cinética κ y de la masa del bosón Z' .

En la Figura 15 se muestra la contribución a 1-loop del bosón Z' al momento magnético anómalo del muón a_μ^V como una función de la masa del bosón vectorial masivo Z' con limites superiores para $\kappa^2 \sim O(10^{-4} - 10^{-6})$. Para el cual se consideró un rango de masas entre 100MeV y 1000MeV .

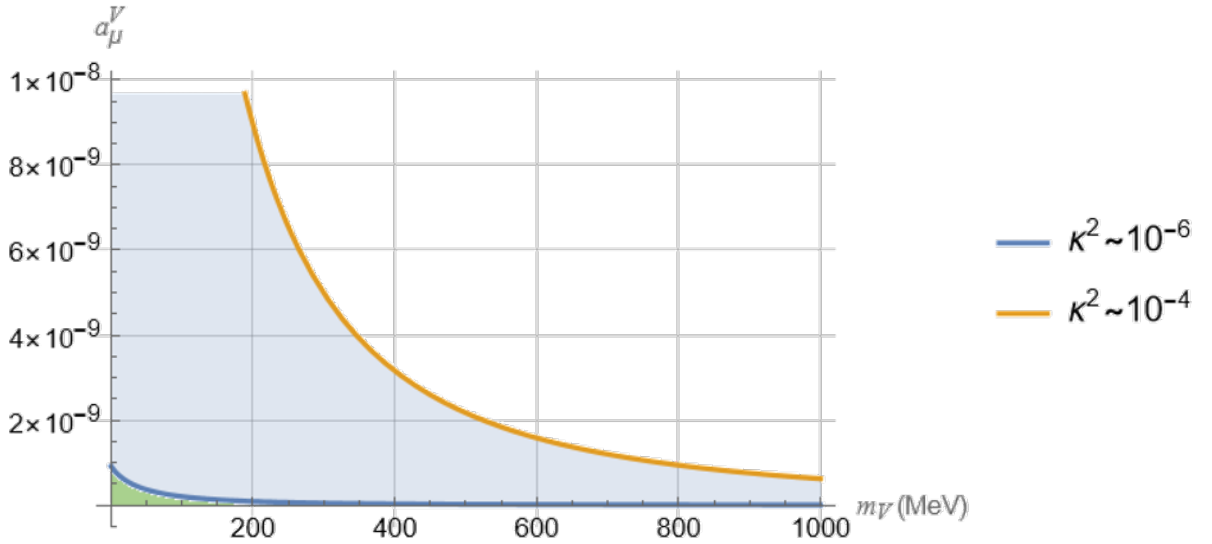


Figura 15. Contribución del bosón Z' a la anomalía.

Nótese que el ángulo de mezcla cinética κ contribuye puramente como un factor de escala en el orden de magnitud de la contribución. Es decir, no afecta directamente el comportamiento de a_μ^V , lo cual sí ocurre con m_V , que es inversamente proporcional al valor de a_μ^V . Esto se aprecia de una mejor manera en la Figura 16.

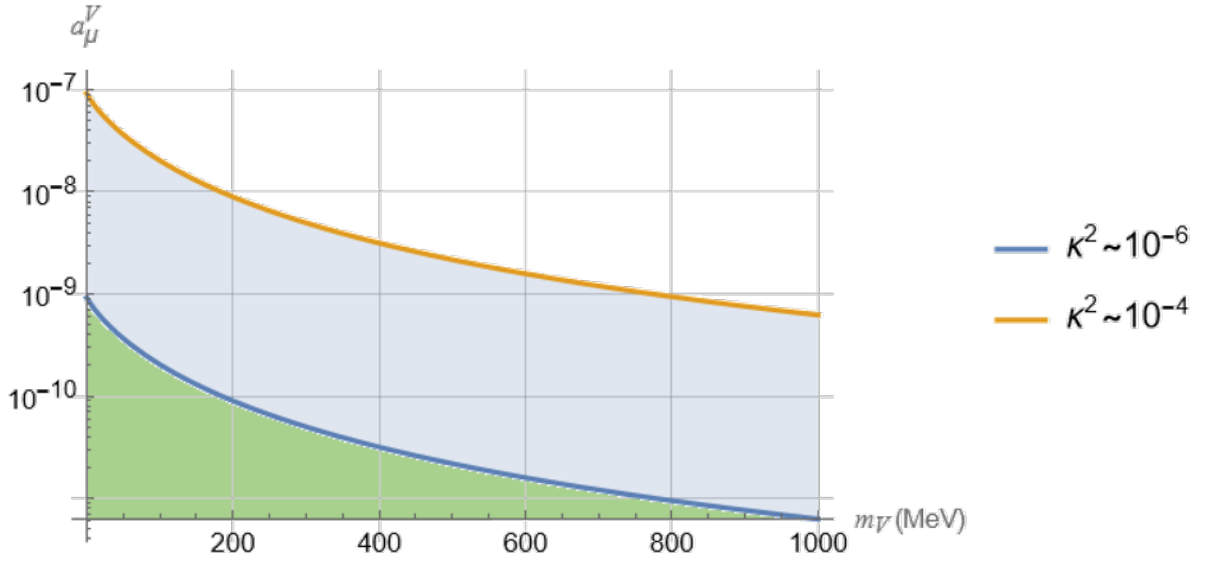


Figura 16. Contribución del bosón Z' a la anomalía (escala logarítmica).

La región verde corresponde a los valores de a_μ^V con $\kappa^2 < 10^{-6}$. Y, la región azul claro corresponde a los valores de a_μ^V con $10^{-4} < \kappa^2 < 10^{-6}$.

4.2. Comparación con los datos experimentales de la colaboración Muon g-2

Para este trabajo se tendrá en consideración las ventanas de nueva física asociadas al resultado del 2020 publicado por la *Theory initiative* (WP) [5], el resultado del 2024 de la colaboración CMD-3 [11] y el resultado de 2024 de la colaboración BMW'24 [9]. La ventana de nueva física es definida como:

$$a_\mu^{NP} = a_\mu^{Exp} - a_\mu^{SM}, \quad (199)$$

donde se ha tomado $a_\mu^{Exp} = 116592055(24) \times 10^{-11}$ (resultado del 2023 de *Fermilab*) [7] para el valor experimental del momento magnético anómalo del muón.

Colaboración	a_μ^{SM}	$a_\mu^{NP} = a_\mu^{Exp} - a_\mu^{SM}$
White Paper	$116\,591\,810(43) \times 10^{-11}$	$245(49) \times 10^{-11}$
CMD-3	$116\,592\,006(49) \times 10^{-11}$	$49(55) \times 10^{-11}$
BMW'24	$116\,592\,019(38) \times 10^{-11}$	$36(45) \times 10^{-11}$

Tabla 5. Rangos de nueva física para el momento magnético anómalo del muón.

A continuación, se muestran todas las regiones de nueva física consideradas en este trabajo junto con la contribución del bosón Z' al momento magnético anómalo del muón :

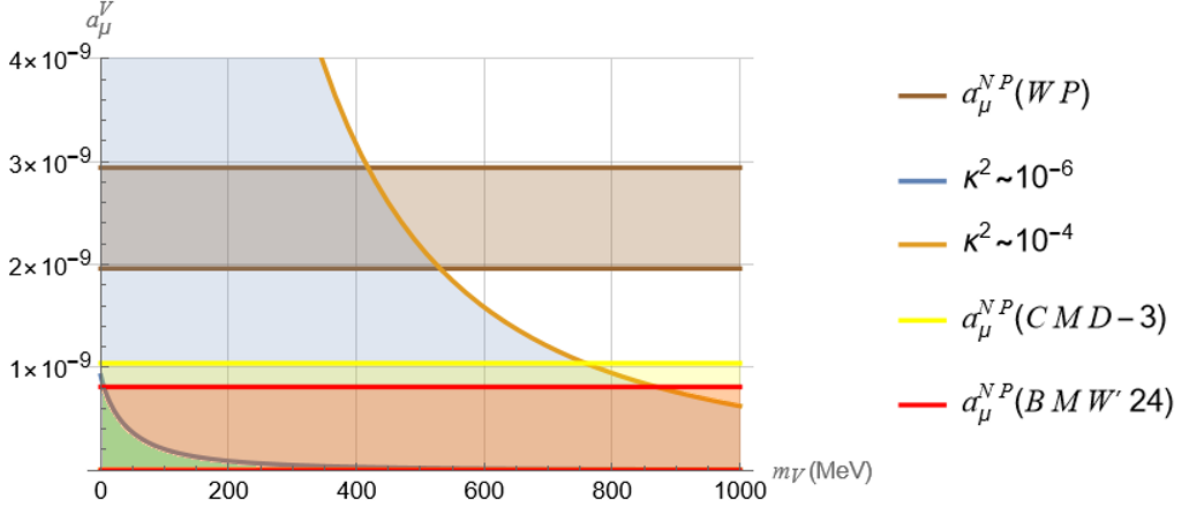


Figura 17. Comparación entre la contribución del bosón Z' a la anomalía y las predicciones teóricas.

Para realizar un mejor análisis, se procedió a realizar gráficas individuales para cada una de las ventanas de nueva física:

- Ventana de nueva física considerando el resultado del *White Paper*(2020)

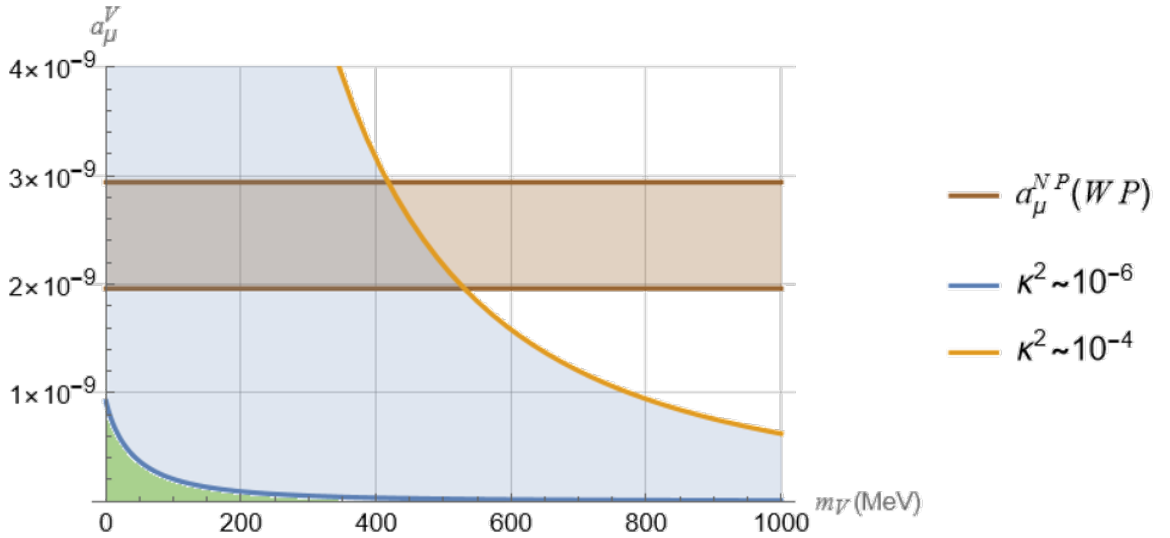


Figura 18. Comparación entre la contribución del bosón Z' a la anomalía y la predicción teórica de WP.

De la Figura 18 se puede concluir que para un bosón Z' con una masa entre el rango de $100\text{MeV} < m_V < 500\text{MeV}$ y un ángulo de mezcla cinética en el rango $10^{-6} < \kappa^2 < 10^{-4}$ es posible encontrar una concordancia entre la predicción del Modelo Estándar del *White Paper* (2020) y los resultados de la colaboración *Muon g-2* (2023) a 1σ . Por otro lado, no es posible explicar la discrepancia presentada entre el *White Paper* y la colaboración *Muon g-2* considerando un ángulo de mezcla cinética $\kappa^2 < 10^{-6}$ a 1σ .

■ **Ventana de nueva física considerando el resultado de CMD-3 (2024)**

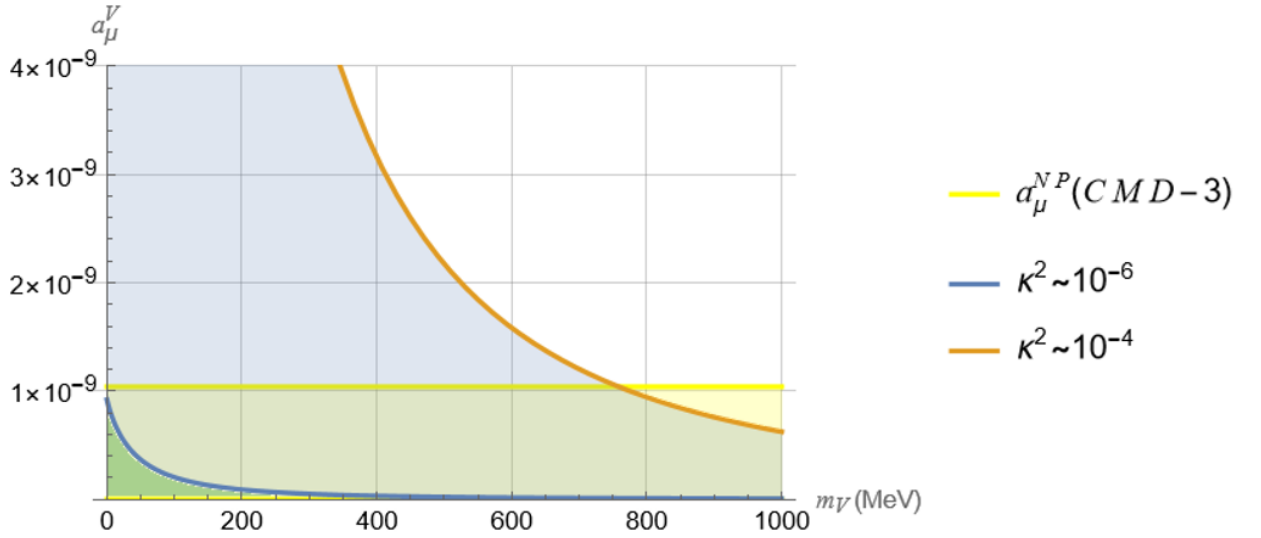


Figura 19. Comparación entre la contribución del bosón Z' a la anomalía y la predicción teórica de CMD-3.

De la Figura 19 se puede concluir que para un bosón Z' con una masa $m_V > 100\text{MeV}$ y un ángulo de mezcla cinética $\kappa^2 < 10^{-6}$ es posible encontrar una concordancia entre la predicción del Modelo Estándar de la colaboración CMD-3 (2024) y los resultados de la colaboración *Muon g-2* (2023) a 1σ . Sin embargo, esta contribución al g-2 del muón es muy pequeña ($a_\mu^V < 2.5 \times 10^{-10}$).

- Ventana de nueva física considerando el resultado de BMW'24 (2024)

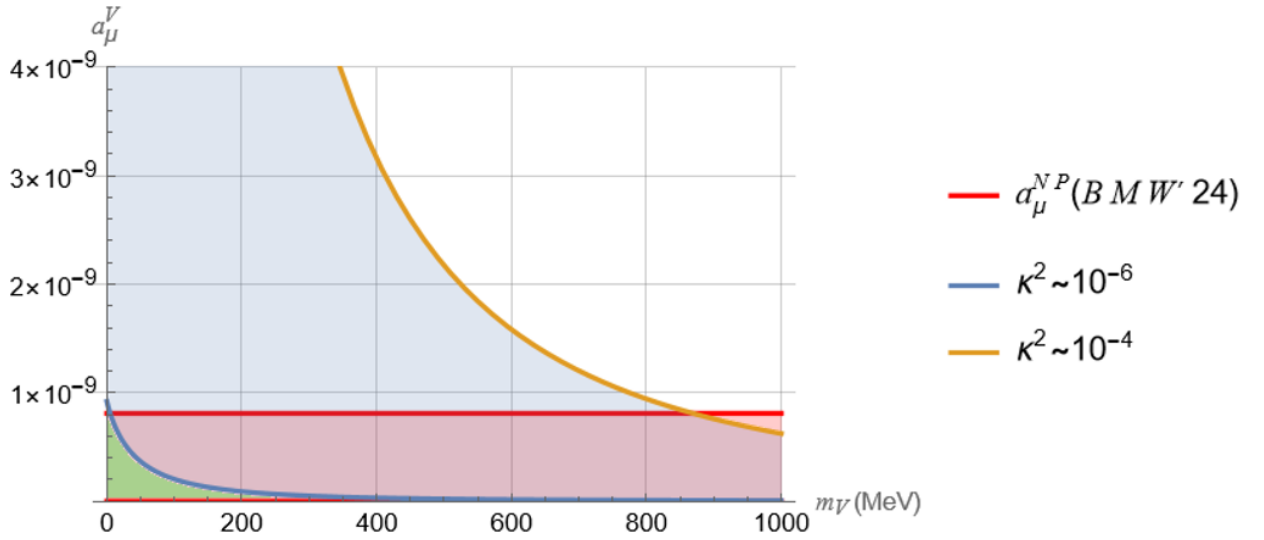


Figura 20. Comparación entre la contribución del bosón Z' a la anomalía y la predicción teórica de BMW'24.

De la Figura 20 se puede concluir que para un bosón Z' con una masa $m_V > 100 \text{ MeV}$ y un ángulo de mezcla cinética $\kappa^2 < 10^{-6}$ es posible encontrar una concordancia entre la predicción del Modelo Estándar de la colaboración BMW'24 (2024) y los resultados de la colaboración *Muon g-2* (2023) a 1σ . Sin embargo, esta contribución al g-2 del muón es muy pequeña ($a_\mu^V < 2.5 \times 10^{-10}$).

CONCLUSIONES

Este proyecto investigó la contribución de una extensión del Modelo Estándar mediante un bosón gauge adicional Z' , asociado a una simetría $U(1)_d$, en el contexto del momento magnético anómalo del muón. La motivación principal fue abordar la discrepancia existente entre las predicciones teóricas y experimentales de a_μ , explorando si la introducción de este bosón mediador masivo podría cerrar esa diferencia. Se analizó los efectos del bosón Z' en función de su masa y su mezcla cinética con el fotón del Modelo Estándar.

Al calcular la contribución del bosón Z' al momento magnético anómalo del muón, se encontró que para un rango de masas de entre 100MeV y 500MeV , y un ángulo de mezcla cinética κ^2 en el rango de 10^{-6} y 10^{-4} , la contribución posee un orden de magnitud comparable al orden de magnitud de nueva física $a_\mu^{NP}(WP)$. Sin embargo, considerando los límites superiores establecidos por la colaboración BaBar para el ángulo de mezcla cinética $\kappa^2 \sim 10^{-6}$, no existe una contribución significativa al orden de magnitud de nueva física $a_\mu^{NP}(WP)$.

Por otro lado, se concluyó que para un bosón Z' con una masa $m_V > 100\text{MeV}$ y un ángulo de mezcla cinética $\kappa^2 < 10^{-6}$ es posible encontrar una concordancia entre las predicciones del Modelo Estándar de la colaboración BMW'24 (2024) y la colaboración CMD-3 (2024) con los resultados de la colaboración *Muon g-2* (2023) a 1σ . Sin embargo, estas contribuciones al g-2 del muón son muy pequeñas ($a_\mu^V < 2.5 \cdot 10^{-10}$).

Si bien la adición del grupo de simetría $U(1)_d$ al Modelo Estándar puede contribuir significativamente al valor del momento magnético anómalo del muón, se requieren estudios adicionales para evaluar posibles efectos en otros observables leptónicos. Además, sería conveniente estudiar posibles interacciones entre el bosón Z' y partículas del sector oscuro, lo cual podría abrir una vía hacia una descripción más completa de la física más allá del Modelo Estándar.

Finalmente, vale la pena resaltar que el desarrollo de este trabajo contribuyó en mi formación en el ámbito de la física de partículas. Principalmente en la comprensión de las teorías de Yang-Mills, en el entendimiento del momento magnético anómalo del muón y en los desarrollos de cálculos de correcciones radiativas.

ANEXOS

A. Descomposición de Gordon

Para cualesquiera soluciones $u(p)$ y $\bar{u}(p')$ de la ecuación masiva de Dirac, se cumple:

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[\frac{(p+p')^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}(p'-p)_\nu}{2m} \right] u(p) \quad (200)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p') \left[\frac{(p+p')^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}(p'-p)_\nu}{2m} \right] u(p) \\ &= \frac{1}{2m} \bar{u}(p') \left[p^\mu + p'^\mu - \frac{[\gamma^\mu, \gamma^\nu]}{2} (p'-p)_\nu \right] u(p) \\ &= \frac{1}{2m} \bar{u}(p') \left[p^\mu + p'^\mu - \frac{1}{2} \left(\gamma^\mu \not{p}' - \gamma^\mu \not{p} - \not{p}' \gamma^\mu + \not{p} \gamma^\mu \right) \right] u(p) \\ &= \frac{1}{2m} \bar{u}(p') \left[p^\mu + p'^\mu - \frac{1}{2} \left(\gamma^\mu \not{p}' - 2m\gamma^\mu + \not{p} \gamma^\mu \right) \right] u(p). \end{aligned} \quad (201)$$

Ahora, considerando la propiedad $\not{p}\gamma^\mu = 2p^\mu - \gamma^\mu \not{p}$:

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p') \left[\frac{(p+p')^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}(p'-p)_\nu}{2m} \right] u(p) \\ &= \frac{1}{2m} \bar{u}(p') \left[p^\mu + p'^\mu - \frac{1}{2} \left(2p'^\mu + 2p^\mu - 4m\gamma^\mu \right) \right] u(p) \\ &= \frac{1}{2m} \bar{u}(p') \left[2m\gamma^\mu \right] u(p) = \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p). \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (202)$$

B. Identidad de Ward

Si se tiene algún proceso en electrodinámica cuántica que involucre algún fotón externo con momento q y vector de polarización ϵ_μ , este tendrá una amplitud de dispersión de Feynman asociada de la forma:

$$\mathcal{M}(q) = \epsilon_\mu(q) M^\mu(q), \quad (203)$$

para la cual siempre se cumplirá que:

$$q_\mu M^\mu(q) = 0. \quad (204)$$

Es decir, no puede existir una polarización longitudinal física para el fotón.

C. Parametros de Feynman

El producto de dos factores A_1 y A_2 siempre cumple que:

$$\frac{1}{A_1 A_2} = \frac{1}{A_2 - A_1} \int_{A_1}^{A_2} \frac{dt}{t^2}. \quad (205)$$

Ahora, definiendo un nuevo parámetro x_1 (llamado parámetro de Feynman):

$$t = A_1 + (A_2 - A_1)x_1, \quad (206)$$

se puede reescribir la expresión (205) como:

$$\frac{1}{A_1 A_2} = \int_0^1 \frac{dx_1}{[A_1 + (A_2 - A_1)x_1]^2}. \quad (207)$$

O, usando la delta de Dirac

$$\frac{1}{A_1 A_2} = \int_0^1 dx_1 dx_2 \delta(x_1 + x_2 - 1) \frac{1}{[A_1 x_1 + A_2 x_2]^2}. \quad (208)$$

Esta última expresión puede ser fácilmente generalizada para el caso de A_n factores:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_n} = \int_0^1 dx_1 dx_2 \cdots dx_n \delta\left(\sum_{i=1}^n x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n]^n}. \quad (209)$$

D. Rotación de Wick

Generalmente, una vez utilizado el método de los parámetros de Feynman, las integrales resultantes sobre el espacio de momentos l^μ , asociadas a los propagadores de Feynman a 1-loop, tienen la forma:

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^n}, \quad (210)$$

donde se toma el caso para el cual $\Delta > 0$. Además, esta integral posee dos polos en $l_\pm^0 = \pm \sqrt{l^2 + \Delta} \mp i\epsilon$, como se muestra en la Figura 21.

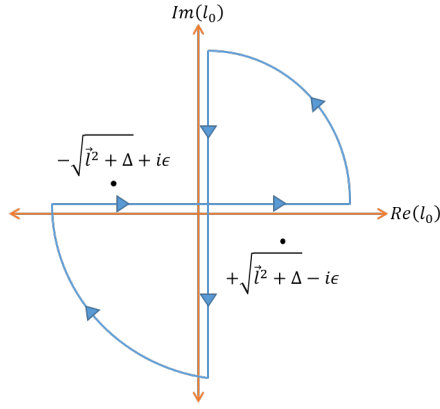


Figura 21. Rotación de Wick con polos ubicados en l_+^0 y l_-^0 .

Dado que los polos se encuentran en el segundo y cuarto cuadrante del plano complejo l_0 , la integración sobre el eje real y el eje complejo son iguales y opuestas.

Ahora, se procede a realizar la transformación $l^0 \rightarrow il_E^0$ en la componente temporal del momento l . Esta rotación (conocida como rotación de Wick) convierte la métrica de signatura lorentziana en una métrica euclidiana, donde todos los términos son positivos. Por otro lado, debido a que ϵ no juega un papel importante después de la rotación, se considera $\epsilon = 0$.

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^n} \xrightarrow{RW} i(-1)^n \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l_E^2 + \Delta]^n}, \quad (211)$$

donde $l_E^2 = (l_E^0)^2 + \vec{l}^2$. Una vez hecha la rotación de Wick, se debe evaluar la integral del área de una esfera 4-dimensional del espacio euclidiano:

$$\frac{i(-1)^n}{(2\pi)^4} \int d\Omega_4 \int_0^\infty \frac{dl_E}{[l_E^2 + \Delta]^n} = \frac{i(-1)^n}{8\pi^2} \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^3}{[l_E^2 + \Delta]^n}. \quad (212)$$

Lo que finalmente da:

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^n} = \frac{i(-1)^n}{(4\pi)^2} \frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{1}{\Delta^{n-2}}. \quad (213)$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] BENNETT, GW, *et al.* Measurement of the negative muon anomalous magnetic moment to 0.7 ppm. En: Physical review letters, tomo 92, N^o 16, 2004, pág. 161802. (document)
- [2] BENNETT, GW, *et al.* Measurement of the positive muon anomalous magnetic moment to 0.7 ppm. En: Physical Review Letters, tomo 89, N^o 10, 2002, pág. 101804. (document)
- [3] BLUM, Thomas, *et al.* The muon ($g-2$) theory value: present and future. En: arXiv preprint arXiv:13112198, 2013. (document)
- [4] BENAYOUN, Maurice, *et al.* Hadronic contributions to the muon anomalous magnetic moment Workshop. ($g-2$) _{μ} : Quo vadis? Workshop. Mini proceedings. En: arXiv preprint arXiv:14074021, 2014. (document)
- [5] AOYAMA, Tatsumi, *et al.* The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model. En: Physics reports, tomo 887, 2020, págs. 1–166. (document), 3.6, 4.2
- [6] ABI, Babak, *et al.* Measurement of the positive muon anomalous magnetic moment to 0.46 ppm. En: Physical Review Letters, tomo 126, N^o 14, 2021, pág. 141801. (document)
- [7] AGUILLARD, DP, *et al.* Measurement of the positive muon anomalous magnetic moment to 0.20 ppm. En: Physical review letters, tomo 131, N^o 16, 2023, pág. 161802. (document), 4.2
- [8] BORSANYI, Sz, *et al.* Leading hadronic contribution to the muon magnetic moment from lattice QCD. En: Nature, tomo 593, N^o 7857, 2021, págs. 51–55. (document)
- [9] BOCCALETTI, A, *et al.* High precision calculation of the hadronic vacuum polarisation contribution to the muon anomaly. En: arXiv preprint arXiv:240710913, 2024. (document), 3.6, 4.2
- [10] IGNATOV, FV, *et al.* Measurement of the e^+e^- to $\pi^+\pi^-$ cross section from threshold to 1.2 GeV with the CMD-3 detector. En: arXiv preprint arXiv:230208834, 2023. (document)

- [11] IGNATOV, FV, *et al.* Measurement of the pion form factor with CMD-3 detector and its implication to the hadronic contribution to muon ($g-2$). En: Physical Review Letters, tomo 132, N^o 23, 2024, pág. 231903. (document), 4.2
- [12] COLANGELO, G, *et al.* Prospects for precise predictions of a_μ in the Standard Model. En: arXiv preprint arXiv:220315810, 2022. (document)
- [13] ATHRON, Peter, *et al.* New physics explanations of a_μ in light of the FNAL muon $g-2$ measurement. En: Journal of High Energy Physics, tomo 2021, N^o 9, 2021, págs. 1–115. (document)
- [14] POSPELOV, Maxim. Secluded U (1) below the weak scale. En: Physical Review D, tomo 80, N^o 9, 2009, pág. 095002. (document), 2.1, 2.3
- [15] CHERCHIGLIA, Adriano; STÖCKINGER, Dominik y STÖCKINGER-KIM, Hyejung. Muon $g-2$ in the 2HDM: maximum results and detailed phenomenology. En: Physical Review D, tomo 98, N^o 3, 2018, pág. 035001. (document)
- [16] CHAKRAVERTY, Debrupa; CHOUDHURY, Debajyoti y DATTA, Anindya. A nonsupersymmetric resolution of the anomalous muon magnetic moment. En: Physics Letters B, tomo 506, N^o 1-2, 2001, págs. 103–108. (document)
- [17] YANG, Chen-Ning y MILLS, Robert L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. En: Physical review, tomo 96, N^o 1, 1954, pág. 191. 1.5
- [18] GRIFFITHS, David. Introduction to elementary particles. Jhon Wiley & Sons, 1987. 1.7.1
- [19] HIGGS, Peter W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. En: Physical review letters, tomo 13, N^o 16, 1964, pág. 508. 1.8
- [20] POSPELOV, Maxim; RITZ, Adam y VOLOSHIN, Mikhail. Secluded WIMP dark matter. En: Physics Letters B, tomo 662, N^o 1, 2008, págs. 53–61. 2.1
- [21] LEES, JP, *et al.* Search for a Dark Photon in e^+e^- Collisions at BABAR. En: Physical review letters, tomo 113, N^o 20, 2014, pág. 201801. 2.3
- [22] LEES, JP, *et al.* Search for invisible decays of a dark photon produced in e^+e^- collisions at BaBar. En: Physical review letters, tomo 119, N^o 13, 2017, pág. 131804. 2.3

- [23] BANERJEE, Dipanwita, *et al.* Search for invisible decays of sub-GeV dark photons in missing-energy events at the CERN SPS. En: Physical review letters, tomo 118, N° 1, 2017, pág. 011802. 2.3
- [24] ANDERSON, Carl D y NEDDERMEYER, Seth H. Cloud chamber observations of cosmic rays at 4300 meters elevation and near sea-level. En: Physical Review, tomo 50, N° 4, 1936, pág. 263. 3.1
- [25] NEDDERMEYER, Seth H y ANDERSON, Carl D. Note on the nature of cosmic-ray particles. En: Physical Review, tomo 51, N° 10, 1937, pág. 884. 3.1
- [26] PARKER, Richard H, *et al.* Measurement of the fine-structure constant as a test of the Standard Model. En: Science, tomo 360, N° 6385, 2018, págs. 191–195. 3.6
- [27] GNENDIGER, C; STÖCKINGER, D y STÖCKINGER-KIM, H. The electroweak contributions to $(g - 2)_\mu$ after the Higgs boson mass measurement. En: Phys Rev D, tomo 88. 3.6