



Universidad
del Atlántico

CÓDIGO: FOR-DO-109

VERSIÓN: 0

FECHA: 03/06/2020

**AUTORIZACIÓN DE LOS AUTORES PARA LA CONSULTA, LA
REPRODUCCIÓN PARCIAL O TOTAL, Y PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DEL
TEXTO COMPLETO**

Puerto Colombia, 19 de diciembre de 2022

Señores

DEPARTAMENTO DE BIBLIOTECAS

Universidad del Atlántico

Cuidad

Asunto: Autorización Trabajo de Grado

Cordial saludo,

Yo, **JESÚS DAVID MUÑOZ MUÑOZ.**, identificado(a) con **C.C. No. 1047363048** de **SANTO TOMÁS**, autor(a) del trabajo de grado titulado **MODOS NO LINEALES CON VORTICIDAD EN REDES FOTÓNICAS CIRCULARES** presentado y aprobado en el año **2022** como requisito para optar al título Profesional de **FÍSICO.**; autorizo al Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico para que, con fines académicos, la producción académica, literaria, intelectual de la Universidad del Atlántico sea divulgada a nivel nacional e internacional a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios del Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico pueden consultar el contenido de este trabajo de grado en la página Web institucional, en el Repositorio Digital y en las redes de información del país y del exterior, con las cuales tenga convenio la Universidad del Atlántico.
- Permitir consulta, reproducción y citación a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato CD-ROM o digital desde Internet, Intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer.

Esto de conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

Atentamente,

Firma *Jesús David Muñoz M.*

JESÚS DAVID MUÑOZ MUÑOZ.

C.C. No. 1047363048 de Santo Tomás

DECLARACIÓN DE AUSENCIA DE PLAGIO EN TRABAJO ACADÉMICO PARA GRADO


Este documento debe ser diligenciado de manera clara y completa, sin tachaduras o enmendaduras y las firmas consignadas deben corresponder al (los) autor (es) identificado en el mismo.

Puerto Colombia, **19/12/2022**

Una vez obtenido el visto bueno del director del trabajo y los evaluadores, presento al **Departamento de Bibliotecas** el resultado académico de mi formación profesional o posgradual. Asimismo, declaro y entiendo lo siguiente:

- El trabajo académico es original y se realizó sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, en consecuencia, la obra es de mi exclusiva autoría y detento la titularidad sobre la misma.
- Asumo total responsabilidad por el contenido del trabajo académico.
- Eximo a la Universidad del Atlántico, quien actúa como un tercero de buena fe, contra cualquier daño o perjuicio originado en la reclamación de los derechos de este documento, por parte de terceros.
- Las fuentes citadas han sido debidamente referenciadas en el mismo.
- El (los) autor (es) declara (n) que conoce (n) lo consignado en el trabajo académico debido a que contribuyeron en su elaboración y aprobaron esta versión adjunta.

Título del trabajo académico:	MODOS NO LINEALES CON VORTICIDAD EN REDES FOTÓNICAS CIRCULARES
Programa académico:	FÍSICA

Firma de Autor 1:							
Nombres y Apellidos:	JESÚS DAVID MUÑOZ MUÑOZ						
Documento de Identificación:	CC	X	CE		PA	Número:	1047363048
Nacionalidad:	COLOMBIANO			Lugar de residencia:		SANTO TOMÁS	
Dirección de residencia:	CI12 #10A-07						
Teléfono:	3008810346			Celular:		3008810346	



FORMULARIO DESCRIPTIVO DEL TRABAJO DE GRADO

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO DE GRADO	MODOS NO LINEALES CON VORTICIDAD EN REDES FOTÓNICAS CIRCULARES.
AUTOR(A) (ES)	JESÚS DAVID MUÑOZ MUÑOZ
DIRECTOR (A)	CRISTIAN CAMILO MEJÍA CORTÉS
CO-DIRECTOR (A)	Haga clic o pulse aquí para escribir texto.
JURADOS	JAIRO RICARDO CARDENAS NIETO JUAN CARLOS CARDONA GOMEZ
TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TITULO DE	FÍSICO
PROGRAMA	FÍSICA
PREGRADO / POSTGRADO	PREGRADO
FACULTAD	CIENCIAS BÁSICAS
SEDE INSTITUCIONAL	UNIVERSIDAD DEL ATLANTICO SEDE NORTE.
AÑO DE PRESENTACIÓN DEL TRABAJO DE GRADO	2022
NÚMERO DE PÁGINAS	57
TIPO DE ILUSTRACIONES	ILUSTRACIONES, GRAFICOS Y DIAGRAMAS
MATERIAL ANEXO (VÍDEO, AUDIO, MULTIMEDIA O PRODUCCIÓN ELECTRÓNICA)	NO APLICA
PREMIO O RECONOCIMIENTO	NO APLICA



MODOS NO LINEALES CON VORTICIDAD EN REDES FOTÓNICAS CIRCULARES

JESÚS DAVID MUÑOZ MUÑOZ

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

PROGRAMA DE FÍSICA

FACULTAD DE CIENCIAS BASICAS

UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

PUERTO COLOMBIA

2022

DEDICATORIA

A mis padres, quienes fueron un referente para alcanzar este logro; siempre me apoyaron y estuvieron prestos a suplir mis necesidades a lo largo de este proceso.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, a mis padres, profesores y amigos, quienes me alentaron en todo momento para seguir adelante.

**MODOS NO LINEALES CON VORTICIDAD EN REDES FOTÓNICAS
CIRCULARES**

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

PRESENTADO POR:

JESÚS DAVID MUÑOZ MUÑOZ

DIRECTOR:

Prof. Cristian Camilo Mejía Cortés, Ph. D.



Universidad del Atlántico

Facultad de Ciencias Básicas

Programa de Física

2022 - 2

Índice

Resumen	3
1. Introducción	5
1.1. Planteamiento del problema	6
1.2. Estado del Arte	7
2. Marco teórico	9
2.1. La ecuación no lineal de Schrödinger (ENLS) en óptica y fotónica	9
2.2. Ecuaciones de Maxwell	9
2.3. Aproximación paraxial de la óptica	11
2.4. Propagación de la luz en diferentes medios	13
2.4.1. Dieléctricos simples	14
2.4.2. Medios inhomogéneo	14
2.4.3. Medios anisotrópicos	15
2.4.4. Medios dispersivos	16
2.4.5. Medios no lineales	16
2.4.6. Propagación en un material dieléctrico	17
2.5. Óptica no lineal	17
2.5.1. Ecuación de onda no lineal	18
2.5.2. Óptica no lineal de segundo orden	18
2.5.3. Óptica no lineal de tercer orden	20
2.6. Solitones espaciales	22
3. Propagación de la luz en guías de onda	25
3.1. El teorema del vector de Poynting	26
3.2. Propagación de ondas en medios lineales	26
3.2.1. Propagación en una guía de onda lineal	27
3.3. Propagación no lineal	28
3.4. Teoría de modos acoplados	32
3.4.1. Acoplamiento direccional	35
4. Análisis y discusión de resultados	37
4.1. Forma matricial	38
4.2. Análisis de estabilidad lineal de las soluciones	39
4.3. Vórtices ópticos	40
4.4. Modos propios no lineales	42
4.4.1. Condiciones iniciales tipo deltas	42

4.4.2. Condiciones iniciales tipo vórtice	44
4.5. Estabilidad	46
4.5.1. Casos de tipo delta	47
4.5.2. Casos con vorticidad	48
5. Conclusiones	53
6. Anexos	54
6.1. Calculo de la estabilidad	54
7. Referencias bibliográficas	56

Resumen

En este trabajo de grado se realizó un estudio sobre la propagación de la luz en arreglos circulares de guías de ondas y respuesta no lineal de tipo Kerr, modelado matemáticamente por la ecuación discreta no lineal de Schrödinger. Inicialmente se hallaron los modos propios del sistema, entre ellos los de tipo vórtice y sus correspondientes familias de soluciones, todo esto con la finalidad de poder caracterizar e identificar las regiones en el espacio de parámetros en las cuales estos modos son estables. Adicionalmente, se procedió a corroborar la estabilidad de estos modos mediante una integración directa del modelo, es decir, resolver el problema de la dinámica, utilizando como condición inicial dichos modos. Finalmente se discutió sobre el efecto de introducir un potencial disipativo que cumpla con las características de simetría de paridad e inversión temporal (simetría \mathcal{PT}), en especial sobre su repercusión en la estabilidad de estas soluciones no lineales con vorticidad.

Los resultados mostraron que al considerar la vorticidad de los modos, la estabilidad en el sistema se verá afectada, es decir, la región en el espacio de parámetros para los modos estables, crece conforme haya más vorticidad. Al hablar de las variaciones de los parámetros, se encontró que mientras vaya disminuyendo el número de guías de ondas y más pequeño sea el valor del potencial disipativo, estos afectarán positivamente a la estabilidad del sistema, es decir, se presentarán más regiones para la estabilidad, en caso contrario (cuando el número de guías va aumentado y el valor del potencial también se incrementa), se presentaran más regiones de inestabilidad.

Palabras claves: Propagación de la luz, modos propios tipo vórtice, familias de soluciones, potencial disipativo, estabilidad de las soluciones.

Abstract

In this research, a study was carried out on the propagation of light in circular arrays of waveguides and Kerr-type nonlinear response, mathematically modeled by the nonlinear discrete Schrödinger equation. Initially, the normal modes of the system were found, including those of the vortex type and their corresponding families of solutions, all with the aim of being able to characterize and identify the regions in the space of parameters in which these modes are stable. Additionally, the stability of these modes was confirmed by means of a direct integration of the model, that is, solving the dynamics problem, using these modes as initial condition. Finally, the effect of introducing a dissipative potential that complies with the parity symmetry and time inversion (\mathcal{PT} symmetry) characteristics was discussed, especially its repercussion on the stability of these nonlinear solutions with vorticity.

The results showed that when considering the vorticity of the modes, the stability of the system will be affected, that is, the region in the space of parameters for the stable modes grows as there is more vorticity. When talking about the variations of the parameters, it was found that while the number of waveguides decreases and the value of the dissipative potential is smaller, these will positively affect the stability of the system, that means, more regions will be presented for stability, otherwise (when the number of guides increases and the value of the potential also increases), more regions of instability will appear.

Keywords: Light propagation, vortex-like eigenmodes, solution families, dissipative potential, solution stability.

1. Introducción

En las últimas décadas, la óptica no lineal se ha venido desarrollando como un fuerte campo de investigación, esto se debe principalmente a su gran potencial aplicativo en la fotoelectrónica y tecnología fotónica, en la cual se utilizan a los fotones como las partículas encargadas de guardar, procesar y transportar la información, trayendo consigo diferentes ventajas comparadas con la electrónica actual, por mencionar algunas como el aumento en la velocidad de respuesta y disminución de las interferencias magnéticas y eléctricas en el transporte y procesamiento de la información [1]. La fotoelectrónica y la fotónica tienen un futuro muy prometedor jugando un papel fundamental en la tecnología del siglo XXI. Cabe resaltar que la aplicabilidad de la fotónica y la óptica no lineal es muy versátil y amplia, ya que se puede ver presente en diferentes campos como: la computación óptica, litografía láser y procesamiento de imágenes [1, 2].

Como se mencionó anteriormente, la investigación en el área de la fotónica, aún tiene mucho trabajo por desarrollar y con ello se hace evidente que el estudio de algún tema en específico de esta área, puede llegar a tener un gran aporte e impacto en los nuevos avances tecnológicos en las décadas venideras. Al hacer un símil, se podría decir que la fotónica es en el siglo XXI lo que la electrónica fue para el siglo XX, por lo que lleva a pensar que los papeles que juegan la fotónica y la fotoelectrónica en conjunto con la óptica no lineal, son de suma importancia para los avances tecnológicos y la tecnología en general del siglo XXI.

Por dar un ejemplo, en los sistemas de telecomunicaciones se han realizado estudios sobre los solitones ópticos, en donde son definidos también como pulsos estables [3], que a lo largo de su propagación en un medio óptico (guías de onda o fibras ópticas) estos permanecen inalterados en su perfil temporal, espacial y en su espectro de frecuencias. Demostrando así que para ellos se da la conservación de cantidades como: la potencia óptica y energía total.

La primera observación registrada de un solitón en la historia, es gracias a los aportes de John Scott Russell. Él observó como en un canal de agua con un ancho pequeño y poca profundidad, al propagar una ola a lo largo de dicho canal, esta no sufría ninguna distorsión, es decir, conservaba su forma y su energía [4]. De este evento surgió el concepto de ondas solitarias que al ingresar las matemáticas fueron llamadas como soluciones tipo solitón, es decir, soluciones que cumplen con las características de conservar tanto su forma como la energía (entre otras cantidades conservadas del sistema).

Matemáticamente hablando, fue gracias a Korteweg y de Vries quienes modelaron el problema anterior de la onda viajera por medio de la ecuación KdV (en honor a sus nombres) [5]. Esta ecuación viene dada por:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0.$$

En esta ecuación se observan 3 términos, donde el segundo y tercero corresponden al término no lineal y al de dispersión respectivamente, siendo x la coordenada de propagación, t la variable temporal y v la amplitud. La ecuación KdV es una ecuación diferencial parcial no lineal que admite soluciones tipo solitones (onda solitaria) y de allí su importancia en la historia.

En la mayoría de estas aplicaciones, se utilizan elementos ópticos especiales para su propagación, como es el caso de las guías de ondas, conformadas por las interfaces entre materiales con diferentes índices de refracción y encargadas de confinar la energía electromagnética y guiarla a lo largo de su camino. Dichos arreglos pueden ser manipulados y moldeados a voluntad, usando desde arreglos unidimensionales, hasta bidimensionales y tridimensionales [**guías de onda**]. Esto es de suma importancia ya que para este trabajo, se propone estudiar la propagación de la luz en arreglos de guías de ondas bidimensionales con simetría circular y respuesta no lineal de tipo Kerr.

Cuando se habla de este tipo de arreglos como lo son los arreglos bidimensionales con geometría circular, sale a relucir un concepto muy importante y este concepto es la vorticidad o los vórtices en general. En términos muy generales, los vórtices son considerados como un flujo que rota alrededor de una singularidad, entre ellos se encuentran los remolinos, tornados, huracanes y hasta la rotación del polvo estelar de una galaxia en formación. Todos estos casos presentan vorticidad, sin embargo, cuando se habla de vórtices ópticos, se pueden definir como ondas que presentan en particular una singularidad en su fase y con ella un flujo rotatorio alrededor de la misma. Es gracias a los estudios recientes sobre los arreglos circulares de guías de ondas, que estos prometen grandes aportes en distintas áreas, entre las que se encuentran: la fabricación de matrices de guías de ondas impresas en materiales fotorrefractivos, que son de gran interés para el área de la biofotónica, ya que gracias a los vórtices estables generados por estas redes, pueden ser utilizados para afectar el movimiento de moléculas, virus y células vivas, además de presentar aplicación en otras áreas como en la comunicación de sistemas ópticos y espinoriales [6].

1.1. Planteamiento del problema

En este trabajo de grado, se propone analizar un arreglo fotónico compuesto por guías de ondas, con geometría circular y respuesta no lineal de tipo Kerr, $n(I) = n_o + n_2I$, en presencia de un potencial disipativo con simetría \mathcal{PT} , con el objetivo de encontrar aquellos modos tipo vórtice, y sus condiciones de existencia y estabilidad necesarias para una posible observación experimental.

Al abordar un estudio sobre los arreglos de guías de ondas y hallar su respectiva solución, se pueden encontrar los modos propios del sistema, entre ellos los de tipo vórtice y sus correspondientes familias de soluciones. Cabe resaltar la importancia de la existencia y estabilidad de estos modos ya que al considerar ahora ganancias y pérdidas equilibradas en el sistema al introducir un potencial disipativo que cumple con las características de simetría de paridad e inversión temporal (simetría \mathcal{PT}), este puede afectar la

estabilidad de dichas soluciones.

1.2. Estado del Arte

Al hablar de los solitones en fibras ópticas, aparecen diferentes artículos realizados en arreglos de guías de onda unidimensionales. Tal es el caso de Uta Naether, Rodrigo A. Vicencio y Milutin Stepíe [7], los cuales, por medio del estudio de la movilidad de los solitones en arreglos unidimensionales de guías de ondas, encontraron que gracias a su implementación por medio del estudio de la dinámica de haces de luz gaussianos de alta potencia, aparecen diferentes regiones donde se evidencia una notable mejora en el transporte de la luz. Por otra parte, siguiendo con los estudios en arreglos unidimensionales, Mejía-Cortés et al [8] realizaron un estudio sobre los regímenes de movilidad para los modos localizados de la ecuación DNLS, encontrando que la no linealidad cubico-quintica introducía aportes por separado al autoenfoco y al autodesenfoco respectivamente.

Anteriormente se ha hablado de arreglos unidimensionales, ahora al pasar a arreglos de dos dimensiones, se encontró que en un estudio sobre los modos no lineales para un arreglo de guías de ondas bidimensional, con geometría de redes de Lieb, Mejía-Cortés et al [6] analizaron la existencia y estabilidad de las soluciones tipo vórtice de dicho sistema.

Siguiendo con los arreglos bidimensionales, lo más cercano que se encontró referente al estudio de la propagación de la luz en arreglos circulares de guías de ondas y respuesta no lineal de tipo Kerr en presencia de un potencial disipativo que aporta ganancias y pérdidas equilibradas entre sí, fue un artículo realizado por Martínez et al [9] los cuales se basan en el estudio de la estabilidad, existencia y dinámica de los modos estacionarios lineales y no lineales, propagados en guías de ondas multinúcleo con simetría radial y ganancia y pérdidas equilibradas.

Para la realización del presente trabajo de grado se tuvo como objetivo general:

- Analizar y comprender la existencia y estabilidad de soluciones tipo vórtice en arreglos de guías de onda circulares con respuesta no lineal.

En este trabajo, se postularon una serie de objetivos específicos con la finalidad de alcanzar gradualmente el objetivo general, estos objetivos específicos fueron:

- Caracterizar los modos propios en un arreglo circular de guías de onda.
- Identificar las regiones en el espacio de parámetros para los modos estables.
- Determinar para qué valores de vorticidad existen los modos propios no lineales.

Este trabajo de grado cuenta con cinco secciones. En la primera sesión se encuentra la introducción, en la cual se muestra la importancia del área de estudio en las diferentes ramas de la ciencia en la que esta es de vital importancia, además de presentar el planteamiento del problema, el estado del arte y los respectivos objetivos planteados con la realización de dicho trabajo de grado. Luego se presenta el marco teórico donde se expone la física y modelos matemáticos que se utilizan y abordan en esta investigación, como lo son: las ecuaciones de Maxwell, la aproximación paraxial de la óptica, propagación de la luz en diferentes medios y la óptica no lineal, seguido de ello se expone la propagación de la luz en guías de onda en donde se termina de exponer toda la teoría y ecuaciones referentes y relacionadas con la realización de este trabajo. Aquí se hace evidente un enfoque mixto en la investigación, esto se debe a que los métodos utilizados para alcanzar el objetivo general de este trabajo son de carácter cuantitativo y cualitativo, esto se observa claramente a la hora de realizar los cálculos pertinentes para el estudio que se presenta en este trabajo, debido a que se utilizan métodos computacionales en el lenguaje de programación GNU Octave y a su vez se les realiza su respectivo análisis cualitativo a cada resultado obtenido en esta investigación, dando paso al análisis y discusión de resultados en donde se presenta una descripción de todos estos, para así poder finalizar con las conclusiones obtenidas en la realización de este trabajo.

2. Marco teórico

La ecuación no lineal de Schrödinger, también conocida como la ecuación NLS, es de suma importancia para el área de la física matemática, ya que gracias a ella se puede modelar y solucionar una gran cantidad de fenómenos de la naturaleza, como los presentes en: la óptica no lineal (donde es la encargada de expresar y describir la propagación del campo electromagnético en medios con índices de refracción no lineales de tipo Kerr), la mecánica cuántica y el famoso fenómeno del condensado de Bose-Einstein, entre muchos más [10].

A partir de la ecuación NLS se puede obtener y dar paso a la Ecuación Discreta no Lineal de Schrödinger, o conocida por sus siglas en inglés como la DNLS, para ello, el proceder sería obtener dicha ecuación por medio de las ecuaciones de Maxwell, ya que gracias a ellas se puede extraer la ecuación general de la onda, pasando por la ecuación paraxial de la óptica y finalmente llegar a la DNLS.

2.1. La ecuación no lineal de Schrödinger (ENLS) en óptica y fotónica

En la óptica, con la llegada de los LÁSER y su respectivo estudio, se dio lugar a observaciones novedosas que daban pie a un comportamiento no lineal de la luz al ser propagada, es decir, no se puede aplicar el principio de superposición. Esto dio como resultado que, al propagar un haz de luz LÁSER en un material con respuesta no lineal, llegado un momento los efectos de difracción debido a la propagación, puedan ser contrarrestados por la influencia de la respuesta no lineal del material.

2.2. Ecuaciones de Maxwell

Para dar pie a la obtención de la ecuación DNLS se empieza por lo más general, que para este ámbito de la óptica, son las ecuaciones de Maxwell expuestas a continuación:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (4)$$

Donde \vec{E} y \vec{H} son los vectores de campo eléctrico y magnético respectivamente, y \vec{D} y \vec{B} las densidades de flujo eléctrico y magnético (desplazamiento eléctrico e inducción magnética). Normalmente las guías de ondas son desarrolladas en medios dieléctricos no magnéticos, lo cual al usar estos materiales implica no tener cargas libres causantes de fuentes de campos electromagnéticos, por lo que conlleva a considerar que \vec{J} y ρ_f sean cero, siendo estas la densidad de corriente y de carga libre respectivamente. Por otro

lado, se tiene que las densidades de flujo se pueden escribir en función de la polarización eléctrica y la magnetización (\vec{P} y \vec{M}) de la siguiente manera:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (5)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}. \quad (6)$$

Estas expresiones se conocen como las relaciones de constitución, donde ϵ_0 y μ_0 son la permitividad y permeabilidad del vacío y \vec{P} y \vec{M} la respuesta eléctrica y magnética del medio respectivamente. Estas dos ecuaciones también son conocidas como las relaciones de constitución.

Ahora combinando la ecuación (3) con la ecuación (4), (5) y (6) además de utilizar las identidades vectoriales necesarias se puede llegar a obtener la ecuación que describe la evolución entre el campo eléctrico en un medio polarizado, dando como resultado la siguiente ecuación:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}. \quad (7)$$

De forma análoga se puede obtener la ecuación que describe la evolución del campo magnético y su magnetización.

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial t^2}. \quad (8)$$

La intensidad, potencia y energía, son cantidades que están relacionadas con el vector de Poynting

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}, \quad (9)$$

donde \vec{E} y \vec{H} son el campo eléctrico y magnético respectivamente.

Por otra parte, la intensidad óptica $I(\vec{r}, t)$, es el flujo de potencia normal a una unidad de área transversal al vector de poynting \vec{S} promediado lo que se expresa matemáticamente como: $I = \langle \vec{S} \rangle$.

De esta manera, al tener en cuenta las definiciones anteriores y usando la identidad vectorial

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{H} - (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{E},$$

se puede llegar a expresar el teorema de Poynting de la siguiente manera:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H}^2 \right) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \mu_0 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}, \quad (10)$$

donde el primer término corresponde a las densidades eléctricas y magnéticas por unidad de volumen almacenadas en los campos \vec{E} y \vec{H} y el segundo término a la densidad de energía almacenada en los dipolos eléctricos y magnéticos.

2.3. Aproximación paraxial de la óptica

La aproximación paraxial permite que el manejo de las ecuaciones y fórmulas sean más fácil de manipular y desarrollar, lo cual permitió que en la óptica de rayos, se usaran ecuaciones de propagación lineal, ya que las ondas son mucho más complejas que las ondas paraxiales (tienen la peculiaridad de que los rayos paraxiales sean las curvas normales a los frentes de ondas). Esto se debe, a que gracias a la implementación de estas ondas paraxiales, sea más simple el desarrollo teórico que conlleva este trabajo.

Al suponer que la luz se propaga en el vacío, puesto que no habría polarización en este medio la ecuación (8) se reduciría a:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (11)$$

Ahora al utilizar la ecuación (11) y asumir que la amplitud de la onda varía lentamente mientras esta se propaga (aproximación paraxial) y que los ángulos medidos respecto al eje óptico de los rayos de luz son pequeños (las ondas paraxiales se propagan prácticamente a lo largo del eje óptico), hacen que se puedan considerar a dichas ondas como ondas planas.

Al hablar de ondas planas directamente se consideran frentes de ondas planos con amplitud constante, pero al considerar las ondas paraxiales, estas modulan la amplitud de la onda plana, es decir, la amplitud varía suavemente ($A(\vec{r})$), por lo que se puede escribir la función de onda como:

$$U(\vec{r}) = A(\vec{r}) \exp(-ikz). \quad (12)$$

La variación de $A(\vec{r})$ y de su derivada con respecto a z debe ser muy suave en $z = \lambda = \frac{2\pi}{k}$.

Ahora bien, la amplitud de la onda debe satisfacer la ecuación diferencial que se obtiene al reemplazar (12) en la ecuación de Helmholtz así:

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = 0$$

$$\nabla_{\perp}^2 (A(\vec{r}) \exp(-ikz)) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (A(\vec{r}) \exp(-ikz)) + kA(\vec{r}) \exp(-ikz) = 0,$$

$$\text{con: } \nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad y$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial A(\vec{r})}{\partial z} \exp(-ikz) + A(\vec{r})(-ik) \exp(-ikz) \right] &= \frac{\partial^2 A(\vec{r})}{\partial z^2} \exp(-ikz) - ik \exp(-ikz) \frac{\partial A}{\partial z} \\ \frac{\partial A(\vec{r})}{\partial z} (-ik) \exp(-ikz) + A(\vec{r})(-k^2) \exp(-ikz) &= \frac{\partial^2 A(\vec{r})}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial A(\vec{r})}{\partial z} - k^2 A(\vec{r}). \end{aligned}$$

Que al reemplazarlo en la expresión anterior se obtiene que

$$\exp(-ikz)\nabla_{\perp}^2 A + \left[\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} - k^2 A \right] \exp(-ikz) + k^2 A \exp(-ikz) = 0$$

$$\nabla_{\perp}^2 A + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0.$$

Ahora al considerar que $\Delta z = \lambda$ con $\Delta A \ll A$ entonces:

$$\frac{\Delta A}{\Delta z} = \frac{\partial A}{\partial z}$$

$$\Delta A = \frac{\partial A}{\partial z} \Delta z = \frac{\partial A}{\partial z} \lambda = \Delta A.$$

se puede decir que

$$\frac{\partial A}{\partial z} \lambda \ll A \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial z} \ll \frac{A}{\lambda} \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial z} \ll kA,$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll \frac{\partial A}{\partial z}$$

con lo que se puede llegar a la siguiente expresión

$$\nabla_{\perp}^2 A - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0. \quad (13)$$

Con base en todo lo anterior, finalmente se puede escribir la ecuación paraxial de la óptica expuesta a continuación:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{1}{2k} \nabla_{\perp}^2 \Psi = 0, \quad \text{con: } \nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (14)$$

Ahora considerando que el campo está polarizado a lo largo del eje x, el operador de Laplace transversal se reescribe como $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, y por tanto la ecuación paraxial se reduce a

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0, \quad (15)$$

siendo esta última expresión la ecuación paraxial de la óptica en el vacío.

Las soluciones a esta ecuación deben evidenciar el fenómeno de la difracción que es un fenómeno universal en los sistemas ondulatorios que se hace presente en el ensanchamiento de la luz a lo largo de su propagación. Para poder encontrarle solución a dicha ecuación se procede de la siguiente manera:

$$\nabla_{\perp}^2 A - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0$$

$$\left(\nabla_{\perp}^2 - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) A = 0,$$

Donde A es la onda envolvente de U , que al despejar se puede escribir lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial z} A = \left(\frac{1}{2ik} \nabla_{\perp}^2 \right) A$$

$$\frac{\partial}{\partial z} A = \hat{M} A \quad \text{con: } \hat{M} = \frac{1}{2ik} \nabla_{\perp}^2.$$

$$\frac{\partial A}{A} = \hat{M} \partial z \quad \rightarrow \quad A = A(z=0) e^{\hat{M}z},$$

entonces se puede decir que

$$A(z) = e^{-iz \left(\frac{\nabla_{\perp}^2}{2k} \right)} A_o = e^{-iz \left(\frac{\partial_x^2 + \partial_y^2}{2k} \right)} A_o,$$

que al asumir una descomposición en ondas planas, se puede considerar $\partial_x \rightarrow ik_x$ y $\partial_y \rightarrow ik_y$, entonces

$$A(z) = e^{i \frac{z}{2k} (k_x^2 + k_y^2)} A_o.$$

Finalmente se puede escribir la solución como:

$$U(x, y, z) = A(x, y, z) e^{ikz} = e^{ikz} e^{i \frac{z}{2k} (k_x^2 + k_y^2)} A_o. \quad (16)$$

Siendo e^{ikz} un factor de fase.

2.4. Propagación de la luz en diferentes medios

Cuando se toca el tema de la propagación de la luz en un material surgen muchas situaciones, en donde dependiendo de la respuesta del medio y la relación que tengan la polarización con el campo eléctrico, se pueden encontrar diferentes tipos de medios como los siguientes:

- **Lineales:** Si $\vec{P}(\vec{r}, t)$ y $\vec{E}(\vec{r}, t)$ están relacionado de forma lineal $\vec{P} \propto \vec{E}$, entonces se dice que dicho medio es un medio lineal en donde el principio de superposición es válido.
- **No dispersivos:** Si la respuesta del medio se da o asume de forma instantánea se dice que el medio es no dispersivo.
- **Homogéneos:** Si la relación entre \vec{P} y \vec{E} es independiente de la posición \vec{r} , entonces se dice que el medio es homogéneo.
- **Isotrópico:** Si la relación entre \vec{P} y \vec{E} es independiente de la dirección del campo eléctrico, esto hace que el comportamiento sea igual para cualquier punto en cualquier dirección en el medio, lo que recibe el nombre de medio isotrópico.
- **Espacialmente no dispersivo:** Este tipo de medio se presenta cuando la relación entre \vec{P} y \vec{r} es local, es decir, si \vec{P} o \vec{E} solo se ven influenciados por el campo eléctrico en la misma posición \vec{r} .

2.4.1. Dieléctricos simples

Cuando se habla de un medio dieléctrico simple, no es más que un medio que sea lineal, no dispersivo, homogéneo e isotrópico, es decir, que tenga las características de esos cuatro tipos de medios.

Para estos casos se tiene que $\vec{P} = \epsilon_o \chi \vec{E}$, siendo χ la susceptibilidad eléctrica del medio, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, con $\epsilon = \epsilon_o(1 + \chi)$ como la permitividad del medio, se puede encontrar una cantidad muy importante para los materiales o medios por los cuales se propaga la luz, este es la constante dieléctrica del medio que viene dada por:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_o} = 1 + \chi. \quad (17)$$

Para el caso magnético, entonces se tiene que $\vec{B} = \mu \vec{H}$ que al utilizar la ecuación (3 y 4) con $\vec{J} = 0$, se llega a la siguiente ecuación:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (18)$$

donde $u = E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ y $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ (velocidad de la luz en el medio).

Al considerar un material de naturaleza no magnética se puede decir que $\mu \approx \mu_o$ por lo que se puede expresar una cantidad llamada índice de refracción:

$$\eta = \frac{c_o}{c} = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{\sqrt{\epsilon_o\mu_o}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_o}} = \sqrt{1 + \chi}. \quad (19)$$

2.4.2. Medios inhomogéneo

En un medio inhomogéneo, se presenta un cambio en el índice de refracción a lo largo del eje de propagación, es decir, tanto \vec{E} y \vec{P} dependen de r lo que implica que $E = E(\vec{r})$ y $P = P(\vec{r})$.

Al combinar las ecuaciones de Maxwell, considerando un medio no lineal, dispersivo, inhomogéneo o anisotrópico, se puede obtener las siguientes expresiones

$$\frac{\epsilon_o}{\epsilon} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{1}{c_o^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\epsilon_o}{\epsilon} \vec{\nabla} \times \vec{H} \right) = -\frac{1}{c_o^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2},$$

sabiendo que $\frac{1}{c_o^2} = \epsilon_o \mu_o$ y utilizando la identidad $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}$, se puede reescribir como

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\epsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) - \mu_o \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

teniendo en cuenta que $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 = \vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E}$, entonces se puede deducir

$$\vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E} = \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \epsilon \cdot \vec{E},$$

que al despejar se obtiene $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon} \vec{\nabla} \epsilon \cdot \vec{E}$ y además si se considera que $\epsilon(\vec{r})$ varía muy poco, entonces, este se puede asumir como constante en distancias con el mismo orden de magnitud de la longitud de onda, el cual permite despreciar el segundo término de la expresión (debido a que es muy pequeño comparado con el primer término), dando como resultado que:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2(\vec{r})} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \approx 0,$$

con

$$c(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \epsilon}} = \frac{c_o}{\eta(\vec{r})},$$

Siendo esta expresión válida para un medio débilmente inhomogeneo, donde $\eta(\vec{r}) \sqrt{\frac{\epsilon(\vec{r})}{\epsilon_o}}$.

Ahora bien si se considera un medio dieléctrico homogéneo con índice de refracción ' η ', con una pequeñísima perturbación $\Delta\eta$, es decir, $\eta \rightarrow \eta + \Delta\eta$, entonces se puede decir que:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2(\vec{r})} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \approx s, \quad s = -\mu_o \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial t^2}, \quad \Delta P = 2\epsilon_o \eta \Delta\eta E$$

$$\frac{1}{c^2(\vec{r})} = \frac{\eta^2(\vec{r})}{c_o^2} = \frac{1}{c^2(\vec{r})} = \frac{\eta^2 + 2\eta\Delta\eta}{c_o^2}.$$

Ahora, sabiendo que $\eta^2(\vec{r}) = (\eta + \Delta\eta)^2 = \eta^2 + 2\eta\Delta\eta + \Delta\eta^2$ se desprecia el termino al cuadrado por ser algo muy pequeño. Teniendo esto en cuenta entonces se puede decir que:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \left(\frac{\eta^2 + 2\eta\Delta\eta}{c_o^2} \right) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \approx 0$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \approx \frac{2\eta\Delta\eta}{c_o^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

pero sabiendo que $\vec{P} = \epsilon_o \chi \vec{E} = \epsilon_o \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_o} - 1 \right) \vec{E} = \epsilon_o (\eta^2 - 1) \vec{E}$, dando finalmente como resultado que:

$$\Delta \vec{P} = \epsilon_o (2\eta\Delta\eta) \vec{E}. \quad (20)$$

Siendo esta la relación entre la polarización y el campo eléctrico para medios y materiales inhomogeneos.

2.4.3. Medios anisotrópicos

Para la relación entre \vec{P} y \vec{E} en este caso, se parte de la siguiente definición:

$$\vec{P}_i = \sum_j \epsilon_o \chi_{ij} E_j \quad \text{con: } i = 1, 2, 3 \quad (21)$$

Donde χ_{ij} es el tensor de susceptibilidad dieléctrica. Luego entonces en términos más generales:

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_o \vec{E} + \epsilon_o \chi \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad \text{donde: } \epsilon = \epsilon_o (\hat{1} + \hat{\chi})$$

$$\text{con: } \hat{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix}$$

$$D_i = \sum_j \varepsilon_{ij} E_j$$

2.4.4. Medios dispersivos

Para este caso se presenta una relación dinámica entre $P(\vec{t})$ y $E(\vec{t})$, para el cual se suma una ecuación tipo oscilador forzado para este sistema [11] con la siguiente forma:

$$a_1 \frac{d^2 \vec{P}}{dt^2} + a_2 \frac{d\vec{P}}{dt} + a_3 \vec{P} = \vec{E},$$

donde todo campo eléctrico $\vec{E}(\vec{t})$ induce una densidad de polarización que es una superposición de los efectos $E(\vec{t}') \forall t' < t$, por lo que

$$P(\vec{t}) = \varepsilon_o \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-t') E(\vec{t}') dt'.$$

Donde $\varepsilon_o \chi(t)$ es la función de respuesta.

2.4.5. Medios no lineales

En estos medios, el principio de superposición no es válido y por ende no se puede utilizar, debido a que la relación entre el campo eléctrico y la polarización no es de forma lineal. Es por ello que se parte de la ecuación (18) usando las ecuaciones de Maxwell en el vacío, sabiendo que $\vec{B} = \mu_o \vec{H}$ entonces se puede deducir que $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_o \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}$, con lo cual se realiza lo siguiente:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}, \quad \text{como: } \vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P} \quad \text{y} \quad \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0,$$

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\varepsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_o \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2},$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c_o^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_o \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}.$$

Válida para los medios homogéneos e isotrópicos. Pero si el medio es no lineal, no dispersivo y no magnético, entonces \vec{P} puede ser escrito como una función no lineal de la forma $\vec{P} = \psi(\vec{E})$, por lo cual $\vec{P}(\vec{E}) = a_1 \vec{E} + a_2 |\vec{E}|^2$, dando como resultado que:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c_o^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_o \frac{\partial^2 \psi(\vec{E})}{\partial t^2}. \quad (22)$$

Siendo esta última una ecuación diferencial parcial no lineal.

2.4.6. Propagación en un material dieléctrico

Debido a la naturaleza de algunos materiales, estos pueden ver modificados su índice de refracción al hacer incidir sobre ellos un campo electromagnético (luz). Por lo tanto, dichos materiales cuentan con la capacidad de exhibir múltiples configuraciones de sus índices, lo cual depende directamente de la condición inicial que se vaya a considerar, además de la intensidad y frecuencia de la luz utilizada [12]. Por otra parte, cuando la intensidad de la luz es bastante alta, estos materiales pueden responder de manera no lineal en la dependencia de la polarización con el campo eléctrico, y por tanto, su índice de refracción se incrementa en las zonas en las que el haz de luz es más intensa [13].

Estos materiales son conocidos como materiales fotorrefractivos, esto se debe a que pueden modular espacialmente su índice de refracción mediante la redistribución de las cargas inducidas por la luz incidente sobre ellos, siendo así su índice de refracción variable debido a la presencia de un campo eléctrico, más conocido como el efecto Fotorrefractivo [14].

2.5. Óptica no lineal

Como se mencionó en la sección anterior, existen diferentes tipos de materiales o medios por donde se propaga la luz. Entre ellos se encuentran los medios lineales, en donde el índice de refracción es independiente de la intensidad de la luz, el principio de superposición se puede aplicar (siempre y cuando sea luz monocromática), la frecuencia de la luz nunca se ve alterada al atravesar el material y si hubiesen dos haces de luz en la misma región no interactuarían entre ellos.

En 1960 con la llegada de los LÁSER y las respectivas investigaciones y estudios referentes a ellos, se descubrió que en los medios no lineales, el índice de refracción era dependiente de la intensidad de la luz, es decir, era proporcional al módulo del campo al cuadrado $\eta \propto E^2$, el principio de superposición carecía de validez y por ende no era aplicable, además de que la frecuencia de la luz se ve alterada, es decir, cambia cuando ésta pasa a través del medio.

Esto se puede describir de manera general como

$$\mathcal{P} = a_1\mathcal{E} + \frac{1}{2}a_2\mathcal{E}^2 + \frac{1}{6}a_3\mathcal{E}^3 + \dots, \quad (23)$$

donde $a_{1,2,3}$ son las derivadas de \mathcal{P} (representación real de la polarización) con respecto a \mathcal{E} (representación real del campo eléctrico) para $\mathcal{E} = 0$, se pueden asociar a las características del medio.

En el caso lineal se tendría que $a_1 = \epsilon_o\chi$ y por ende se tendría que $\mathcal{P} = \epsilon_o\chi\mathcal{E}$, con $\eta^2 = \frac{\epsilon}{\epsilon_o} = 1 + \chi$ y finalmente para los efectos no lineales de segundo y tercer orden se tendría a_2 y a_3 respectivamente. Esto

se puede representar por medio de la siguiente expresión

$$\mathcal{P} = \epsilon_o \chi \mathcal{E} + 2d\mathcal{E}^2 + 4\chi^{(3)}\mathcal{E}^3 + \dots, \quad (24)$$

que al comparar los términos de las expresiones (23 y (24) se tendría que $d = \frac{a_2}{4}$ y $\chi^{(3)} = \frac{1}{24}a_3$ [15].

Como se ha venido mencionado los materiales o medios por donde se propaga la luz cumplen ciertas características, ahora también se considera que dicho medio posee una simetría de inversión, es decir, sus propiedades no cambian cuando $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$, también conocida como centrosimetría. Cuando esto sucede el coeficiente $a_2 = 0 = d$, lo que resultaría en

$$\mathcal{P}_i(2w, \vec{r}) = \epsilon_o \chi_{ijk}^{(2)}(2w) \mathcal{E}_j(w, \vec{r}) \mathcal{E}_k(w, \vec{r})$$

$$\mathcal{P}_i(2w, -\vec{r}) = \epsilon_o \chi_{ijk}^{(2)}(2w) \mathcal{E}_j(w, -\vec{r}) \mathcal{E}_k(w, -\vec{r})$$

$$-\mathcal{P}_i(2w, \vec{r}) = \epsilon_o \chi_{ijk}^{(2)}(2w) (-\mathcal{E}_j(w, \vec{r})) (-\mathcal{E}_k(w, \vec{r}))$$

$$\mathcal{P}_i(2w, -\vec{r}) = -\epsilon_o \chi_{ijk}^{(2)}(2w) \mathcal{E}_j(w, -\vec{r}) \mathcal{E}_k(w, -\vec{r}),$$

por ende

$$\chi_{ijk}^{(2)}(2w)[\vec{r}] = -\chi_{ijk}^{(2)}(w)[- \vec{r}] \quad \therefore \quad \chi_{ijk}^{(2)}(w) = 0. \quad (25)$$

Corroborando así la condición para un material o medio centrosimétrico.

2.5.1. Ecuación de onda no lineal

En esta parte se expondrá la ecuación de onda utilizando las condiciones y expresiones de los medios no lineales de la siguiente manera

$$\nabla^2 \mathcal{E} - \frac{1}{c_o^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = \mu_o \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2},$$

donde $\mathcal{P} = \epsilon_o \chi \mathcal{E} + \mathcal{P}_{NL}$ con $\mathcal{P}_{NL} = 2d\mathcal{E}^2 + 4\chi^{(3)}\mathcal{E}^3 + \dots$, además $c = \frac{c_o}{n}$, $\eta^2 = 1 + \chi$ y $c_o = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o \mu_o}}$, entonces se puede obtener qué

$$\nabla^2 \mathcal{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = -S \quad \text{con: } S = -\mu_o \frac{\partial^2 \mathcal{P}_{NL}}{\partial t^2} \quad (26)$$

2.5.2. Óptica no lineal de segundo orden

Se procede a realizar el desarrollo solo considerando los efectos de segundo orden, es decir, en un medio no lineal de segundo orden, lo que da como resultado lo siguiente

$$\mathcal{P}_{NL} = 2d\mathcal{E}^2 = \epsilon_o \chi^{(2)} \mathcal{E}^2, \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}_L + \mathcal{P}_{NL}, \quad \mathcal{P}_L = \epsilon_o \chi^{(1)} \mathcal{E}$$

$$\mathcal{E}(t) = R_e \{ E(\omega) e^{i\omega t} \} = \frac{1}{2} [E(\omega) e^{i\omega t} + E^*(\omega) e^{-i\omega t}]$$

$$\mathcal{P}_{NL}(t) = 2d \frac{1}{4} \{ E^2(\omega) e^{2i\omega t} + E^2(\omega) e^{-2i\omega t} + 2E(\omega) E^*(\omega) \}$$

$$\mathcal{P}_{NL}(t) = \frac{d}{2} 2E(\omega) E^*(\omega) + d \frac{1}{2} \{ E^2(\omega) e^{2i\omega t} + E^{*2}(\omega) e^{-2i\omega t} \}$$

$$\mathcal{P}_{NL}(t) = dE(\omega) E^*(\omega) + dR_e \{ E^2(\omega) e^{2i\omega t} \}$$

$$\mathcal{P}_{NL}(t) = P_{NL}(0) + R_e \{ P_{NL}(2\omega) e^{2i\omega t} \}.$$

Siendo esta la expresión final para el segundo orden con $P_{NL}(0) = dE(\omega) E^*(\omega)$ y $P_{NL}(2\omega) = dE^2(\omega)$.

Generación de segundo armónico

Partiendo de la ecuación (26), con la expresión

$$S(t) = -\mu_o \frac{\partial^2 \mathcal{P}_{NL}}{\partial t^2} \Rightarrow S(2\omega) = -\mu_o (2i\omega)^2 dE(\omega) E(\omega)$$

$$S(2\omega) = 4\mu_o (2i\omega)^2 dE(\omega) E(\omega) \quad \text{con: } \omega = 2k = c \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Siendo esta última expresión la radiación del medio no lineal a una frecuencia del doble de la radiación incidente. La radiación de respuesta posee una longitud de onda de la mitad de la radiación original.

Con base en todo lo anterior se puede decir que

$$S(2\omega) \rightarrow I(2\omega) \propto |S(2\omega)|^2,$$

ya que $I(2\omega) = \frac{|S(2\omega)|^2}{\eta}$, siendo η la impedancia del vacío.

Efecto electro-óptico

El efecto electro-óptico no es más que el cambio que sufren los materiales en sus propiedades ópticas debido a la influencia de un campo eléctrico que en comparación a la frecuencia de la luz, este varía muy lentamente. Para su desarrollo sabiendo que $\mathcal{E}(t) = E(0) + R_e \{ E(\omega) e^{i\omega t} \}$ y $P_{NL} = 2d\mathcal{E}^2$, se obtiene que:

$$P_{NL}(t) = P_{NL}^*(0) + R_e \{ P_{NL}(\omega) \exp(i\omega t) \}^2 + R_e \{ P_{NL}(2\omega) \exp(2i\omega t) \}^2.$$

$$P_{NL}(0) = d[2E^2(0) + |E^*(\omega)|^2],$$

$$P_{NL}(w) = 4dE(0)E(w),$$

$$P_{NL}(2w) = dE^2(w).$$

Como el campo óptico es sustancialmente menor en magnitud que el campo eléctrico ($E(0)$), entonces se puede decir que $|E(w)|^2 \ll |E(0)|^2$, por lo que la polarización del segundo armónico $P(2w)$ es despreciable en comparación a $P_{NL}(0)$ y $P_{NL}(w)$. Por lo cual

$$P_{NL}(w) = 4dE(0)E(w) = \epsilon_o \Delta\chi E(w) \quad \text{con: } \Delta\chi = \frac{4d}{\epsilon_o} E(0). \quad (27)$$

Sabiendo que $\eta^2 = \frac{\epsilon}{\epsilon_o} = 1 + \chi \rightarrow 2\eta\Delta\eta = \Delta\chi$, se puede deducir que

$$\Delta\eta = \frac{\Delta\chi}{2\eta} = \frac{2d}{\eta\epsilon_o} E(0).$$

Siendo esta última expresión la modificación del índice de refracción, es decir, $\eta \rightarrow \eta + \Delta\eta$, donde $\Delta\eta$ está controlada por $E(0)$, por lo tanto se dice que el medio no lineal exhibe el efecto electro-óptico, también llamado Efecto Pockels.

2.5.3. Óptica no lineal de tercer orden

Para esta parte se tendrá en cuenta solo el aporte de los efectos de tercer orden, es decir, medios no lineales de tercer orden en donde se generan terceros armónicos y el efecto Kerr óptico que gracias a ello también se les conoce como medios tipo Kerr. Se parte de la expresión

$$\mathcal{P}_{NL} = 4\chi^{(3)}\mathcal{E}^3,$$

donde $(\mathcal{P}, \mathcal{E})$ es la representación real y (P, E) la representación compleja.

Generación del tercer armónico

Para la generación del tercer armónico se toma un campo

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} [E(\omega)e^{i\omega t} + E^*(\omega)e^{-i\omega t}]$$

y se reemplaza en la expresión anterior, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{NL} &= 4x^{(3)} \left\{ \frac{1}{2} [E(\omega)e^{i\omega t} + E^*(\omega)e^{-i\omega t}] \right\}^3 \\ &= \frac{1}{2} x^{(3)} [E^2(\omega)e^{2i\omega t} + E^{*2}(\omega)e^{-2i\omega t} + 2E(\omega)E^*(\omega)] [E(\omega)e^{i\omega t} + E^*(\omega)e^{-i\omega t}] \\ &= \frac{x^{(3)}}{2} \{ E^3(\omega)e^{3i\omega t} + E^*(\omega)|E(\omega)|^2 e^{-i\omega t} + 2|E(\omega)|^2 E(\omega)e^{i\omega t} + \end{aligned}$$

$$|E(\omega)|^2 E(\omega) e^{i\omega t} + E^{*3}(\omega) e^{-3i\omega t} + 2|E(\omega)|^2 E^*(\omega) e^{-i\omega t} \}$$

$$\mathcal{P}_{NL} = \frac{x^{(3)}}{2} \{3|E(\omega)|^2 E(\omega) e^{i\omega t} + E^3(\omega) e^{3i\omega t} + E^3(\omega) e^{-3i\omega t} + 3|E(\omega)|^2 E^*(\omega) e^{-i\omega t}\}$$

$$\mathcal{P}_{NL} = \chi^{(3)} \frac{1}{2} [3 \cdot 2R_e \{|E(\omega)|^2 E(\omega) e^{i\omega t}\} + 2R_e \{E^3(\omega) e^{3i\omega t}\}],$$

Con base en todo lo anterior se puede decir que

$$P_{NL}(\omega) = 3\chi^{(3)} |E(\omega)|^2 E(\omega), \quad P_{NL}(3\omega) = \chi^{(3)} E^3(\omega).$$

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} [E(\omega) e^{i\omega t} + E^*(\omega) e^{-i\omega t}] = \frac{1}{2} [2R_e \{E(\omega) e^{i\omega t}\}] = R_e \{E(\omega) e^{i\omega t}\}.$$

Efeceto Kerr óptico

Ahora para la parte del efecto Kerr óptico, hay que tener en cuenta que $P \propto E \rightarrow P = \epsilon_o \chi E$, con $\mathcal{P}_{NL} = \mathcal{P}^L + \mathcal{P}^{NL}$, $\mathcal{P}_{NL} = \mathcal{P}^2 + \mathcal{P}^3$, por lo que se tendría que:

$$\frac{P_{NL}(\omega)}{E(\omega)} = 3\chi^{(3)} |E(\omega)|^2 = \epsilon_o \Delta\chi$$

$$I = \frac{|E(\omega)|^2}{2\eta}, \quad \eta \rightarrow \text{impedancia de la luz.}$$

$$3\chi^{(3)} I 2\eta = 6\chi^{(3)} \eta I,$$

usando $\eta^2 = 1 + \chi$ y $2\eta\Delta\eta = \Delta\chi$, entonces

$$3\chi^{(3)} \eta I = \epsilon_o \eta \Delta\eta$$

$$\Delta\eta = \frac{3\chi^{(3)} \eta}{\epsilon_o \eta} I$$

Siendo esta la modificación del índice de refracción debido a los efectos no lineales del sistema. En donde se puede reescribir como $\Delta\eta = \eta_2 I$, con $\eta_2 = \frac{3\eta}{\epsilon_o \eta} \chi^{(3)}$ como el índice de refracción no lineal y finalmente expresarlo como $\eta(I) = \eta + \eta_2 I$, donde se evidencia que el índice de refracción es función de I .

Automodulación de fase

Esta automodulación de fase se hace presente debido a la influencia del efecto de tipo Kerr óptico, para el desarrollo de esto se parte de la siguiente expresión

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

que al suponer una solución tipo onda viajera $\psi(z \pm vt)$, considerando $\psi^+(z + vt)$ si viaja hacia la izquierda y $\psi^-(z - vt)$ si va a la derecha, dicha solución se puede escribir como

$$\psi(kz - \omega t + \phi),$$

con kz como la propagación espacial y ωt como la evolución temporal.

Por otra parte también se sabe que $\vec{k} \cdot \vec{r} \rightarrow kz \rightarrow kL$, donde L es la longitud de un material no lineal, con $k_o = \frac{2\pi}{\lambda_o} \Rightarrow k_o \rightarrow \eta k_o$. Con base a eso se puede escribir entonces

$$\psi = -\eta(I)k_o L \rightarrow \psi = -\frac{2\pi}{\lambda_o} \eta(I)L$$

$$\psi = -\frac{2\pi}{\lambda_o} [\eta + \eta_2 I]L,$$

analizando las unidades de I se puede reescribir la expresión como

$$\psi = -\frac{2\pi}{\lambda_o} \left[\eta + \eta_2 \frac{P}{A} \right] L$$

$$\Delta\psi = -2\pi\eta_2 \frac{L}{\lambda_o A} P.$$

Siendo esta última expresión el cambio de fase que surge a raíz del efecto Kerr.

Auto-enfoque

Como se mencionó y demostró anteriormente, la luz al propagarse sufre un ensanchamiento debido a la difracción de la luz, sin embargo gracias a los estudios sobre los medios no lineales, se ha podido encontrar una forma de contrarrestar este ensanchamiento y es por medio de la propagación a través de los medios no lineales ya que se ha demostrado que debido a la influencia de estos medios, la luz sufre un fenómeno llamado auto-enfoque, que hace posible contrarrestar los efectos producidos por la difracción de la luz como lo es el ensanchamiento de un haz de luz al propagarse.

2.6. Solitones espaciales

Como ya se ha mencionado en ocasiones anteriores sobre las características y peculiaridades de los solitones, ahora se procederá a hacer el desarrollo matemático de sus ecuaciones, empezando por la ecuación de Helmholtz, teniendo lo siguiente

$$\nabla^2 E + \tau^2(I)k_o^2 E = 0$$

con $k_o = \frac{\omega}{c_o} \Rightarrow I = \frac{|E|^2}{2\eta}$, que al reescribir la ecuación

$$\nabla^2 E + \left(\eta + \eta_2 \frac{|E|^2}{2\eta} \right)^2 \frac{\omega}{c_o} E = 0.$$

Ahora sabiendo que $E = Ae^{-ikz} \Rightarrow E(x, y, z) = A(x, y, z)e^{-ikz}$, además usar a ∇^2 como $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ y aplicando la aproximación paraxial

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} [Ae^{-ikz}] \approx \left[-2ik \frac{\partial A}{\partial z} - k^2 A \right] e^{-ikz},$$

con $k^2 = \eta^2 k_o^2$, que al reemplazar se tiene que

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} + k_o^2 [\eta^2(I) - \eta^2] A = 0.$$

Como el efecto no lineal es pequeño entonces se puede considerar que $\eta_2 I \ll \eta$, entonces

$$[\eta^2(I) - \eta^2] = [\eta(I) - \eta][\eta(I) + \eta] \approx \eta_2 I 2\eta = \frac{2\eta\eta_2 I A^2}{2\eta}$$

$$[\eta^2(I) - \eta^2] = \frac{\eta^2 \eta_2}{\eta_o} |A|^2$$

que al retomar y reemplazarlo en la expresión

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} + k_o^2 \frac{\eta^2 \eta_2}{\eta_o} |A|^2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{k^2 \eta_2}{\eta_o} |A|^2 = 0$$

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{k \eta_2}{2\eta_o} |A|^2.$$

Siendo esta última expresión la ecuación no lineal de Schrödinger también conocida como la ENLS.

Los solitones espaciales pueden considerarse como el modo fundamental de las guías de ondas que presentan un cambio mayor en el centro del haz y que se reduce gradualmente mientras se acerca a los bordes del mismo, es decir, una guía de onda con índice graduado. La relación principal que se encuentra entre los solitones espaciales y la ENLS es que esta en particular es la ecuación principal que rige la evolución del campo óptico en un medio no lineal, que para este caso en específico sería la propagación de la luz o el haz a través de dicho medio (la guía de onda con índice graduado).

Si un haz de luz se propaga por un material con respuesta no lineal, esto conlleva a que propiedades como el índice de refracción, coeficiente de absorción, entre otras, se vean afectadas, lo cual se debe a la respuesta no lineal del material respecto a la propagación de dicho haz sobre éste. La presencia de estos cambios en el medio es de suma importancia, ya que gracias a ellos y a su manipulación, se puede utilizar el mecanismo de autoenfoco que puede llegar a contrarrestar los efectos de difracción que sufre cualquier haz de luz durante la propagación sobre un medio.

Al tener en cuenta todo lo anteriormente mencionado y además haciendo ciertas consideraciones, se puede asumir que dicho mecanismo cuenta con la capacidad de eliminar las diferencias de fases que se acumulan a lo largo del eje de propagación, permitiendo así que el haz pueda propagarse sin sufrir cambios en su perfil espacial y temporal, esto da como resultado la creación de solitones ópticos espaciales y temporales, los cuales conservan su amplitud, potencia y energía a lo largo de su propagación.

3. Propagación de la luz en guías de onda

Una guía de onda es la estructura física por la cual se propagan las ondas electromagnéticas que a su vez son guiadas por dicha estructura, además se pueden conformar arreglos de guías de ondas por medio de la agrupación de las mismas. En el caso más simple se pasa a analizar un sistema conformado por guías de ondas iguales, es decir, tienen la misma densidad, índice de refracción y con distancia de separación constante entre ellas.

Al considerar a las guías de ondas como dieléctricas y combinando las ecuaciones de Maxwell, se llega a lo siguiente:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = \mu_o \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2},$$

con $\mu_o \epsilon_o = \frac{1}{c^2}$ y $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}}) \propto 0$, se reescribe la expresión como

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = \mu_o \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (28)$$

En esta parte introduciremos a los haces como una herramienta para encontrar la solución a dicha ecuación tomando lo siguiente sea:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(x, y, z, t) &= R_e \left\{ \vec{E}(x, y, z, t) e^{-i\omega t} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \vec{E}(x, y, z, t) e^{-i\omega t} + \vec{E}^*(x, y, z, t) e^{i\omega t} \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{P}}(x, y, z, t) &= R_e \left\{ \vec{P}(x, y, z, t) e^{-i\omega t} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \vec{P}(x, y, z, t) e^{-i\omega t} + \vec{P}^*(x, y, z, t) e^{i\omega t} \right\}. \end{aligned}$$

Que al reemplazarlos en la ecuación anterior se obtiene lo siguiente

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - i2\omega \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \omega^2 \vec{E} \right\} = \mu_o \left\{ \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} - i2\omega \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \omega^2 \vec{P} \right\}$$

Para un $\vec{E}(x, y, z) e^{-i\omega t} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} = 0$, se tiene

$$\nabla^2 \vec{E} + \frac{1}{c^2} \omega^2 \vec{E} = -\mu_o \omega^2 \vec{P}, \quad K_0 = \omega/c = \omega \sqrt{\mu_o \epsilon_o}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} + K_0^2 \vec{E} = -\omega^2 \mu_o \vec{P}. \quad (29)$$

Siendo esta última expresión la ecuación de Helmholtz [11].

3.1. El teorema del vector de Poynting

Para enunciar este teorema se empieza por la siguiente expresión

$$\vec{S} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{H},$$

siendo esta el flujo instantáneo de potencia. Para campos con dependencia armónica y oscilaciones muy rápidas es útil definir la densidad del flujo de potencia como:

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*],$$

por lo tanto, la potencia transmitida resulta de integrar sobre el espacio transversal a la propagación:

$$P = \int \int \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] \cdot d\mathbf{A}.$$

3.2. Propagación de ondas en medios lineales

Al considerar un campo en un medio sin absorción con baja potencia tal que medio responde linealmente, entonces

$$\nabla^2 \vec{E} + k_0^2 \vec{E} = -\omega^2 \mu_0 \vec{P}^L,$$

que al considera $\vec{P}^{NL} = \vec{0}$, por lo que

$$P_i^L = \varepsilon_0 \sum_j X_{ij}^{(1)} \mathcal{E}_j(\omega).$$

Siendo $X_{ij}^{(1)}$ el elemento del tensor susceptibilidad y $\mathcal{E}_j(\omega)$ la componente del campo eléctrico a frecuencia ω . Ahora con $i, j, k = x, y, z$ se tendría que

$$\vec{\mathcal{E}} = \tilde{x}\mathcal{E}_x + \tilde{y}\mathcal{E}_y + \tilde{z}\mathcal{E}_z.$$

Pero ahora, para un material inhomogéneo resulta lo siguiente

$$\chi^{(1)}(x, y) = \begin{bmatrix} X_{xx}^{(1)}(x, y) & X_{xy}^{(1)}(x, y) & X_{xz}^{(1)}(x, y) \\ X_{yx}^{(1)}(x, y) & X_{yy}^{(1)}(x, y) & X_{yz}^{(1)}(x, y) \\ X_{zx}^{(1)}(x, y) & X_{zy}^{(1)}(x, y) & X_{zz}^{(1)}(x, y) \end{bmatrix}.$$

Este tensor puede ser diagonalizado apropiadamente seleccionando dos ejes coordenadas talque ellos correspondan con los ejes principales de la estructura cristalina del material, es decir

$$x^{(1)}(x, y) = \begin{bmatrix} X_{xx}^{(1)}(x, y) & 0 & 0 \\ 0 & X_{yy}^{(1)}(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & X_{zz}^{(1)}(x, y) \end{bmatrix}.$$

Donde $X_{xx}^{(1)}$, $X_{yy}^{(1)}$, $X_{zz}^{(1)}$ son los valores principales de susceptibilidad.

$$\vec{P}^L = \hat{x}\varepsilon_0\chi_{xx}^{(1)}(x, y)\mathcal{E}_x(\omega) + \hat{y}\varepsilon_0\chi_{yy}^{(1)}(x, y)\mathcal{E}_y(\omega) + \hat{z}\varepsilon_0\chi_{zz}^{(1)}(x, y)\mathcal{E}_z(\omega),$$

que al reescribir la anterior expresión en notación compleja entonces

$$\vec{P}^L = \hat{x}\varepsilon_0\chi_{xx}^{(1)}(x, y)E_x(\omega) + \hat{y}E\varepsilon_0\chi_{yy}^{(1)}(x, y)E_y(\omega) + \hat{z}\varepsilon_0\chi_{zz}^{(1)}(x, y)E_z(\omega),$$

y al sustituirlo en la ecuación para un medio lineal se obtiene que

$$\nabla^2 \vec{E} + k_0^2 \hat{n}^2(x, y) \vec{E} = 0$$

donde el índice \hat{n} es un tensor de segundo rango formado de términos de la constante dieléctrica, es decir,

$$\hat{\eta}^2(x, y) = \hat{\varepsilon}_r(x, y) = \hat{1} + \hat{\chi}^{(1)}(x, y)$$

$$\hat{\eta}^2(x, y) = \begin{bmatrix} \eta_{xx}^2(x, y) & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{yy}^2(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{zz}^2(x, y) \end{bmatrix}.$$

$$\vec{E} = \hat{x}\varphi_x(x, y, z)e^{ik_x z} + \hat{y}\varphi_y(x, y, z)e^{ik_y z}$$

donde φ_x y φ_y son las envolventes de las componentes de polarización en \hat{x} e \hat{y} , respectivamente. K_x y K_y son las constantes de propagación en estas dimensiones.

3.2.1. Propagación en una guía de onda lineal

Para ello se asume que la guía es isotrópica y sin pérdidas, es decir, $\eta = \eta_{xx} = \eta_{yy} \in \mathbb{R}$, entonces $\eta(x, y) = \eta(r) = \eta_o + \delta f(r)$, siendo $f(r)$ una función rectangular cilíndrica de radio a que describe al índice escalonado de la guía. En los sistemas típicos, se considera a $\delta \ll 1$ por ende

$$\eta^2(r) = \eta_o^2 + 2\eta_o\delta f(r)$$

ahora, si se consideran guías con un guiado muy débil entonces

$$k_i = k_o\eta_{oij}, \quad (30)$$

siendo η_{oii} el índice de refracción del recubrimiento del medio isotrópico, entonces

$$k = k_x = k_y = k_o\eta_o.$$

Luego entonces se puede escribir

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{2k}\nabla_1^2\varphi + k_o\delta f(r)\varphi = 0,$$

que al normalizar esta ecuación al rango de la región de guiado:

$$x = \frac{x}{a}, \quad y = \frac{y}{a}, \quad z = \frac{z}{ka^2},$$

quedando lo siguiente

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right\} + \gamma f(x)\varphi = 0 \quad (31)$$

donde $\gamma = k_o^2 a^2 \eta_o \delta$

3.3. Propagación no lineal

Para materiales centro-simétricos se tiene que

$$\nabla^2 \vec{E} + v_0^2 \vec{E} = -\omega^2 \mu_0 \left(\vec{\mathcal{P}}^L + \vec{\mathcal{P}}^{NL} \right),$$

pero al tener que $\vec{\mathcal{P}}^L = \varepsilon_0 \hat{\chi}^{(1)}(x, y) \vec{E}$, entonces

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} + k_0^2 \vec{E} = -\omega^2 \mu_0 \left(\varepsilon_0 \hat{\chi}^{(1)}(x, y) \vec{E} + \vec{\mathcal{P}}^{NL} \right).$$

$$\mathcal{P}_i^{NL} = \varepsilon_0 \left\{ \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)} \varepsilon_j(\omega_1) \varepsilon_k(\omega_2) + \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)} \varepsilon_j(\omega_1) \varepsilon_k(\omega_2) \varepsilon_l(\omega_3) + \dots \right\}. \quad (32)$$

Al no tener resonancias en el sistema, resulta ser que $\chi_{ijk}^{(2)}$ y $\chi_{ijkl}^{(3)}$ pertenecen a los reales y para el caso específico de materiales centro-simétricos entonces $\chi_{ijk}^{(2)} = 0$, por lo que la expresión anterior se reduce a

$$\mathcal{P}_i^{NL} = \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)} \varepsilon_j(\omega_1) \varepsilon_k(\omega_2) \varepsilon_l(\omega_3),$$

ahora si se asume que el campo eléctrico es monocromático $\vec{\varepsilon} = \hat{x}\varepsilon_x + \hat{y}\varepsilon_y + \hat{z}\varepsilon_z$, con $\hat{z}\varepsilon_z = 0$, debido a la aproximación paraxial entonces se tiene que

$$\vec{\mathcal{P}}^{NL} = \hat{x}\varepsilon_0 \sum_{jkl} \chi_{xjkl}^{(3)} \varepsilon_j(\omega_1) \varepsilon_k(\omega_2) \varepsilon_l(\omega_3) + \hat{y}\varepsilon_0 \sum_{jkl} \chi_{yjkl}^{(3)} \varepsilon_j(\omega_1) \varepsilon_k(\omega_2) \varepsilon_l(\omega_3).$$

Ahora al tener en cuenta la relación entre la notación real y compleja

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \frac{1}{2} \{ \vec{A}(x, y, z, t) e^{-i\omega t} + \vec{A}^*(x, y, z, t) e^{i\omega t} \},$$

se puede escribir todo como

$$\begin{aligned} \varepsilon_j(\omega_1) \varepsilon_k(\omega_2) \varepsilon_l(\omega_3) = \frac{1}{8} \{ & E_j(\omega_1) E_k(\omega_2) E_l(\omega_3) e^{-i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t} + \\ & E_j(\omega_1) E_l^*(\omega_2) E_l(\omega_3) e^{-i(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3)t} + \\ & E_j^*(\omega_1) E_k(\omega_2) E_l(\omega_3) e^{-i(-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t} + \\ & E_j^*(\omega_1) E_k^*(\omega_2) E_l(\omega_3) e^{-i(-\omega_1 - \omega_2 + \omega_3)t} + \\ & E_j(\omega_1) E_k(\omega_2) E_l^*(\omega_3) e^{-i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)t} + \\ & E_j(\omega_1) E_k^*(\omega_2) E_l^*(\omega_3) e^{-j(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)t} + \\ & E_j^*(\omega_1) E_k(\omega_2) E_l^*(\omega_3) e^{-i(-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)t} + \\ & E_j^*(\omega_1) E_l^*(\omega_2) E_l^*(\omega_3) e^{-i(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)t} \}. \end{aligned}$$

Como se asumió que el campo es monocromático entonces $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 \equiv \omega$, dando como resultado

$$\mathcal{P}_i^{NL} = \frac{\varepsilon_0}{8} \sum_{jll} \{ \chi_{ijkl}^{(3)}(-\omega; \omega, -\omega, \omega) E_j E_k^* E_l + \chi_{ijkl}^{(3)}(-\omega; -\omega, \omega, \omega) E_j^* E_k E_l +$$

$$\begin{aligned} & \chi_{ijkl}^{(3)}(-\omega; \omega, \omega, -\omega) E_j E_k E_l^* + \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega; -\omega, -\omega, \omega) E_j^* E_k^* E_l + \\ & \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega; \omega, -\omega, -\omega) E_j E_k^* E_l^* + \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, -\omega) E_j^* E_k E_l^* \} e^{i\omega t} \\ & \vec{\mathcal{P}}(\omega) = \frac{1}{2} \left\{ \vec{P} e^{-i\omega t} + \vec{P}^* e^{i\omega t} \right\} \quad \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i^{NL} = \frac{\varepsilon_0}{4} \sum_{jkl}^r \left\{ \chi_{ijkl}^{(3)}(-\omega; \omega, -\omega, \omega) E_j E_k^* E_l + \chi_{ijk\ell}^{(s)}(-\omega; -\omega, \omega, \omega) E_j^* E_k E_l + \right. \\ \left. \chi_{ijkl}^{(3)}(-\omega; \omega, \omega, -\omega) E_j E_k E_l^* \right\}. \end{aligned}$$

Recordando que

$$\mathcal{P}_i^{NL} = \varepsilon_0 \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)} \varepsilon_j(\omega_1) \varepsilon_k(\omega_2) \varepsilon_l(\omega_3), \quad (33)$$

se asume que el campo eléctrico al interior del material es monocromático, es decir, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 \equiv \omega$. Con esto solo los términos de \mathcal{P} que oscilan a ω se mantienen, entonces solo se tendrían i componentes de \mathcal{P}

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i^{NL} = \frac{\varepsilon_0}{8} \sum_{jkl} \left\{ \chi_{ijkl}^{(3)}(-\omega; \omega, -\omega, \omega) E_j E_k^* E_l \right. \\ + \chi_{ijkl}^{(3)}(-\omega; -\omega, \omega, \omega) E_j^* E_k E_l + \chi_{ijkl}^{(3)}(-\omega, \omega, \omega, -\omega) E_j E_k E_l^* \\ + \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega, -\omega, \omega, \omega) E_j^* E_k E_l^* + \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega, -\omega) E_j E_k E_l \\ \left. + \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega, -\omega, -\omega, \omega) E_j^* E_k^* E_l \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i^{NL} = \frac{\varepsilon_0}{4} \sum_{jkl} \left\{ \chi_{ijkl}^{(3)}(-\omega; \omega, -\omega, \omega) E_j E_k E_l \right. \\ \left. + \chi_{ijkl}^{(3)}(-\omega; -\omega, \omega, \omega) E_j^* E_k E_l + \chi_{ijkl}^{(3)}(-\omega, \omega, \omega, -\omega) E_j E_k E_l^* \right\}. \end{aligned}$$

Siendo esta última expresión la representación compleja (fasor). Por otra parte se puede decir que hay simetría de Kleinman si las frecuencias del campo están muy por debajo de las frecuencias de resonancia del material, es decir, $\chi_{ijkl}^{(3)}$ son cuasi-independientes de ω , y debido a esto se puede permutar los índices sin permutar las respectivas frecuencias, como por ejemplo:

$$\chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \chi_{ijkl}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3),$$

esto permite reducir enormemente el número de componentes independientes en el tensor $\chi_{ijkl}^{(3)}$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_x^{NL} = \frac{\varepsilon_0}{4} \left\{ 3\chi_{xxxx}^{(3)} |E_x|^2 |E_x| + \right. \\ \left. 2 \left(\chi_{xxxy}^{(3)} + \chi_{xyxy}^{(3)} + \chi_{yyxy}^{(3)} \right) |E_y|^2 E_x + \left(\chi_{xxyy}^{(3)} + \chi_{xyxy}^{(3)} + \chi_{xyyx}^{(3)} \right) E_y^2 E_x \right\} \end{aligned}$$

$$+3\chi_{xyyy}^{(3)} |E_y|^2 E_y + 2 \left(\chi_{xxxy}^{(3)} + \chi_{xyxx}^{(3)} + \chi_{xxyy}^{(3)} \right) |E_x|^2 E_y \\ + \left(\chi_{xxxy}^{(3)} + \chi_{xyxy}^{(3)} + \chi_{xyyx}^{(3)} \right) E_y^2 E_x^* \}.$$

Para materiales con simetría cúbica e isotrópicos, solamente hay cuatro componentes de $\hat{\chi}^{(3)}$ que tienen efecto sobre la polarización no lineal bajo la aproximación paraxial, es decir, $\chi_{xxxx}^{(3)} = \chi_{yyyy}^{(3)}$, luego entonces las cuatro componentes distintas de cero serían

$$\chi_{xxxx}^{(3)}, \quad \chi_{xxyy}^{(3)}, \quad \chi_{xyxy}^{(3)}, \quad \chi_{xyyx}^{(3)}.$$

Para materiales con simetría cúbica, cada uno de estos términos es independiente del otro. No obstante, si se tiene isotropía entonces $\chi_{xxxx}^{(3)}$ depende de los otros tres elementos

$$\chi_{xxxx}^{(3)} = \chi_{xxyy}^{(3)} + \chi_{xyxy}^{(3)} + \chi_{xyyx}^{(3)}.$$

Por lo tanto, la componente x de la polarización se simplifica y queda como

$$P_x^{NL} = \frac{3a\epsilon_0}{4} \left\{ |E_x|^2 E_x + \frac{2b}{3a} |E_y|^2 E_x + \frac{b}{3a} E_y^2 E_x^* \right\},$$

siendo $a = \chi_{xxxx}^{(3)}$, $b = \chi_{xxyy}^{(3)} + \chi_{xyxy}^{(3)} + \chi_{xyyx}^{(3)}$.

Análogamente para la componente de las y se tiene que

$$P_y^{NL} = \frac{3a\epsilon_0}{4} \left\{ |E_y|^2 E_y + \frac{2b}{3a} |E_x|^2 E_y + \frac{b}{3a} E_x^2 E_y^* \right\},$$

entonces se tendría que $P^{NL} = (P_x^{NL}, P_y^{NL})$, que al reemplazarlo en la ecuación de Helmholtz se obtiene lo siguiente

$$\nabla^2 E_x + k_o n_{xx}^2(x, y) E_x + \frac{3ak_o^2}{4} \left\{ |E_x|^2 E_x + \frac{2b}{3a} |E_y|^2 E_x + \frac{b}{3a} E_y^2 E_x^* \right\} = 0,$$

$$\nabla^2 E_y + k_o^2 \eta_{yy}(x, y) E_y + \frac{3ak_o^2}{4} \left\{ |E_y|^2 E_y + \frac{2b}{3a} |E_x|^2 E_y + \frac{b}{3a} E_x^2 E_y^* \right\} = 0.$$

absorbiendo el término aportado por el efecto Kerr, es decir, $|E_x|^2 E_x$ en el índice de refracción (tanto para x como para y quedaría como

$$\nabla^2 E_x + k_o n_{xx}^2(x, y) E_x + \frac{3ak_o^2}{4} \left\{ \frac{2b}{3a} |E_y|^2 E_x + \frac{b}{3a} E_y^2 E_x^* \right\} = 0,$$

$$\nabla^2 E_y + k_o^2 \eta_{yy}(x, y) E_y + \frac{3ak_o^2}{4} \left\{ \frac{2b}{3a} |E_x|^2 E_y + \frac{b}{3a} E_x^2 E_y^* \right\} = 0.$$

Donde $\hat{\eta}_{ii}(x, y) = \eta_{ii}^2(x, y) + \frac{3a}{4} |E_i|^2$, entonces

$$\hat{\eta}_{ii} = \eta_{2i}(x, y) + \eta_{ii}(x, y) |E_i|^2,$$

con η_2 como el índice de refracción no lineal, que al asumir $\hat{\eta}_{ii} \gg \eta_{2i}$, entonces

$$\hat{\eta}^2(x, y) = \hat{\eta}_{ii}^2(x, y) + 2\hat{\eta}_{ii}(x, y)\eta_{2i}(x, y) |E_i|^2$$

$$\hat{\eta}_{ii}^2(x, y) = \eta_{ii}^2(x, y).$$

Si $\eta_{2i} > 0$, da como resultado un material con la característica de autoenfoque.

Finalmente, con base en todo lo anterior, el sistema de ecuaciones quedaría como:

$$\nabla^2 E_x + K_0^2 \eta_{xx}^2(x, y) E_x + 2K_0^2 \eta_{xx}(x, y) \eta_{2x}(x, y) \left\{ |E_x|^2 E_x + \frac{2b}{3a} |E_y|^2 E_x + \frac{b}{3a} E_y^2 E_x \right\} = 0.$$

$$\nabla^2 E_y + K_0^2 \eta_{yy}^2(x, y) E_y + 2K_0^2 \eta_{yy}(x, y) \eta_{2y}(x, y) \left\{ |E_y|^2 E_y + \frac{2b}{3a} |E_x|^2 E_y + \frac{b}{3a} E_x^2 E_y \right\} = 0.$$

Considerando un haz óptico cuyo campo eléctrico tiene forma de onda plana en \tilde{z}

$$\vec{E} = \hat{x}\varphi_x(x, y, z)e^{ik_x z} + \hat{y}\varphi_y(x, y, z)e^{ik_y z},$$

donde φ_x, φ_y son las envolventes espaciales y K_x y K_y son las constantes de propagación de las componentes del campo, que al sustituirlo en el sistema de ecuaciones se tiene que

$$i\frac{\partial\varphi_x}{\partial z} + \frac{1}{2K_x}\nabla_{\perp}^2\varphi_x + \frac{1}{2K_x}\{K_o^2\eta_{xx}^2(x, y) - K_x^2\}\varphi_x + \eta_{xx}(x, y)\eta_{2x}(x, y)\frac{K_o^2}{K_x}\left\{|\varphi_x|^2\psi_x + \frac{2b}{3a}|\varphi_y|^2\varphi_x\frac{b}{3a}x_y^2\psi_x^*e^{-i2\Delta K_z}\right\} = 0.$$

$$i\frac{\partial\varphi_y}{\partial z} + \frac{1}{2K_y}\nabla_{\perp}^2\varphi_y + \frac{1}{2K_y}\{K_o^2\eta_{yy}^2(x, y) - K_y^2\}\varphi_y + n_{yy}(x, y)\eta_{2y}(x, y)\frac{K_o^2}{K_y}\left\{|\varphi_y|^2\psi_y + \frac{2b}{3a}|\varphi_x|^2\psi_y + \frac{b}{3a}\varphi_x^2\varphi_y^*e^{i2\Delta K_z}\right\} = 0.$$

Con $\Delta K_z = K_x - K_y$.

Ahora al suponer el caso simple de una onda polarizada a lo largo del eje \hat{x} , entonces se tiene que $\vec{E} = \hat{x}\varphi(x, y, z)e^{ikz}$, por lo tanto la ecuación de evolución quedaría como

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2K}\nabla_{\perp}^2\varphi + \frac{1}{2K}\{K_o^2\eta^2(x, y) - K^2\}\varphi + \eta\eta_2\frac{K_o^2}{K}|\varphi|^2\varphi = 0.$$

Para una guía de onda con

$$\eta^2(x, y) = \eta_{xx}^2(x, y) \approx \eta_o^2 + 2\eta_o\delta f(r)$$

si $\delta \ll \eta_o$, entonces se tiene que el índice de refracción no lineal es aproximadamente constante, es decir, $\eta_2 = \eta_{2x} = \frac{3a}{8\eta_o}$, donde $a = \chi_{xxxx}^{(3)}$, y con la limitación de estar débilmente guiado $K = K_x = K_o\eta_o$. Entonces se tendría que

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{2k}\nabla_{\perp}^2\varphi + K_o\delta f(r)\varphi + K_o\eta_2|\varphi|^2\varphi = 0.$$

si se considera a

$$X = \frac{x}{d}, \quad Y = \frac{y}{d} \quad y \quad Z = \frac{z}{Kd^2},$$

entonces se podría reescribir la ecuación como

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial Z} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial Y^2}\right\} + gf(r)\varphi + m|\varphi|^2\varphi = 0,$$

siendo esta la ecuación no lineal de Schrödinger con $gf(r)\varphi$ y $m|\varphi|^2\varphi$ como el potencial lineal y no lineal respectivamente. Siendo $g = k_o^2 d^2 \eta_o \delta$ y $m = K_o^2 d^2 \eta_o \eta_2$.

3.4. Teoría de modos acoplados

En esta parte se pasa a estudiar un sistema compuesto por un conjunto de guías de onda acopladas entre si, el cual estará inmerso en medio con índice de refracción constante, que debido a la cercanía de las ondas entre si en el arreglo, aparece una perturbación entre ella.

Al considerar una guía de onda no perturbada, se asume una dependencia armónica de la forma $E \propto e^{-i\omega t}$ (luz monocromática), se tendría

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega\mu_0\vec{H}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E}$$

con ε como la distribución de permitividad.

Si se pone una guía de onda cercana se tendría lo siguiente

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E}' &= -\omega\mu_0\vec{H}'. \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= -i\omega\left(\varepsilon'\vec{E}' + \vec{P}'^{NL}\right). \end{aligned}$$

Siendo \vec{P}'^{NL} las perturbaciones no lineales que resultan de los campos que se propagan.

Por otra parte, se tiene que para una guía de onda el campo no perturbado para el modo n es

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{e}_n(x, y)e^{i\beta_n z}. \\ \vec{H} &= \vec{h}_n(x, y)e^{i\beta_n z}. \end{aligned}$$

Siendo \vec{e}_n y \vec{h}_n los perfiles transversales del campo y β_n la constante de propagación del modo n .

Las guías de onda pueden soportar un numero finito de modos guiados cuya distribución espacial $\vec{E}(\vec{r}, t)$ es una solución de la ecuación de onda que satisface todas las condiciones de contorno apropiadas.

Para la potencia transportada por el nodo n , esta se ve expresada por la siguiente expresión

$$P_n = \frac{1}{2} \iint_S \left(\vec{e}_{nz} \times \vec{h}_{nz}^* \right) \cdot \hat{z} ds.$$

El campo perturbado se puede escribir como la superposición de los modos soportados por la guía, es decir,

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \sum_m a_m(z) \vec{e}_m(x, y) e^{i\beta_m z}. \\ \vec{H} &= \sum_m a_m(z) \vec{h}_m(x, y) e^{i\beta_m z}.\end{aligned}$$

Con $a_m(z)$ como la amplitud compleja del modo m .

Todo lo anteriormente mencionado, se hace con la finalidad de obtener una expresión que describa la evolución dinámica de las amplitudes complejas $a_m(z)$ de los modos normales del sistema. Para ello se usa el teorema de reciprocidad de Lorentz expuesto a continuación

$$\begin{aligned}& \iint_s \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \vec{E}_t^* \times \vec{H}_t + \vec{E}_t' \times \vec{H}_t^* \right\} \cdot \hat{z} ds \\ &= i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon' - \varepsilon) \vec{E}' \cdot \vec{E}^* dx dy + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{P}^{NL} \cdot \vec{E}^* dx dy \\ & \int_V \left[\vec{J}_1 \cdot \vec{E}_2 - \vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2 \right] dV = \oint_s \left[\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1 \right] \cdot d\vec{s}\end{aligned}\quad (34)$$

Siendo esta última expresión el teorema de reciprocidad de Lorentz.

Ahora al sustituir los campos perturbados expuestos anteriormente en el teorema de reciprocidad de Lorentz, se tendría que

$$\begin{aligned}& \sum_m \left[\frac{da_m}{dz} e^{-1(\beta_n - \beta_m)z} - i(\beta_n - \beta_m) a_m e^{-i(\beta_n - \beta_m)z} \right] \cdot \iint_0 \left(\vec{e}_{nt}^* \times \vec{h}_{mt} + \vec{e}_{mt} \times \vec{h}_{nt}^* \right) \cdot \hat{z} ds \\ & - i\omega \sum_m a_m e^{-i(\beta_n - \beta_m)z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon' - \varepsilon) \vec{e}_{mt} \cdot \vec{e}_{nt}^* dx dy + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{P}^{NL} \cdot \vec{e}_{nt}^* e^{-i\beta_n z} dx dy,\end{aligned}$$

debido a la ortogonalidad de los modos normales, se tiene que:

$$\iint_S \left(\vec{e}_{nt} \times \vec{h}_{m+t} + \vec{e}_{mt} \times \vec{h}_{nt}^* \right) \cdot \hat{z} ds = 0, \quad \text{para : } n \neq m$$

$$\begin{aligned}\frac{da_n}{dt} \iint_s \left(\vec{e}_{nt}^* \times \vec{h}_{nt} + \vec{e}_{nt} \times \vec{h}_{nt}^* \right) \cdot \hat{z} ds &= i\omega \sum_m a_m e^{-i(\beta_n - \beta_m)z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon' - \varepsilon) \vec{e}_{mt} \cdot \vec{e}_{nt}^* dx dy \\ & + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{P}^{NL} \cdot \vec{e}_{nt}^* e^{-i\beta_n z} dx dy \\ & \iint_s \left(\underbrace{\vec{l}_{nt}^* \times \vec{h}_{nt}}_{2P_n} + \underbrace{\vec{l}_{nt} \times \vec{h}_{nt}^*}_{2P_n} \right) \cdot \hat{z} ds = 4P_n \\ \frac{da_n}{dz} &= \frac{i\omega}{4P_n} \sum_n a_m e^{-i(\beta_n - \beta_m)z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon' - \varepsilon) \vec{e}_{mt} \cdot \vec{e}_{nt}^* dx dy + \frac{i\omega}{4P_n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{P}^{NL} \cdot \vec{e}_{nt}^* e^{-i\beta_n z} dx dy.\end{aligned}$$

Con lo que se puede definir el coeficiente de acoplamiento lineal R_{nm} como

$$R_{nm} = \frac{\omega}{4P_n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon' - \varepsilon) \vec{e}_{mt} \cdot \vec{e}_{nt}^* dx dy,$$

reduciendo la ecuación a

$$\frac{da_n}{dz} = i \sum_m R_{mn} a_m e^{-i(\beta_n - \beta_m)z} + \frac{i\omega}{4P_n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{P}'^{NL} \cdot \vec{e}_{nt}^* e^{-i\beta_n z} dx dy \quad (35)$$

$$P_x'^{NL} = \frac{3a_o \varepsilon_o}{4} \left\{ |E'_{tx}|^2 E'_{tx} + \frac{2b}{3a} |E'_{ty}|_{tx}^2 + \frac{b}{3a} E_{ty}'^2 E_{tx}'^* \right\}.$$

$$P_y'^{NL} = \frac{3a_o \varepsilon_o}{4} \left\{ |E'_{ty}|^2 E'_{ty} + \frac{2b}{3a} |E'_{tx}|^2 E'_{ty} + \frac{b}{3a} E_{tx}'^2 E_{ty}'^* \right\}.$$

Siendo estas últimas expresiones las responsables de la evolución dinámica de las amplitudes complejas de los modos normales del sistema.

Hasta el momento se ha argumentado que la perturbación no lineal en una guía de onda dada está dominada por las interacciones no lineales entre los modos dentro de esa guía en particular. Ahora se procede a asumir que las guías de onda son mono-modo (un solo modo), por lo tanto todas las contribuciones de los otros modos puede ser despreciadas, con lo cual se tendría que $\vec{P}'^{NL} \cdot \vec{e}_{nt}^* e^{i\beta_n z}$, entonces

$$P_x'^{NL} \cdot e_{ntx}^* e^{-i\beta_n z} = 2n_{xx}(x, y)n_{2x}(x, y) |e_{ntx}|^4 \cdot \left\{ |a_{nx}|^2 a_{nx} + \frac{2b}{3a} |a_{ny}|^2 a_{nx} + \frac{b}{3a} a_{ny}^2 a_{nx}^* e^{-i\Delta\beta_n z} \right\}.$$

$$P_y'^{NL} \cdot e_{nty}^* e^{-i\beta_n z} = 2n_{yy}(x, y)n_{2y}(x, y) |e_{nty}|^4 \cdot \left\{ |a_{ny}|^2 a_{ny} + \frac{2b}{3a} |a_{nx}|^2 a_{ny} + \frac{b}{3a} a_{nx}^2 a_{ny}^* e^{*i\beta_n z} \right\}.$$

Con la relación $\frac{3a}{4} = 2n_{ii}(x, y)n_{2i}(x, y)$ y recordando que $\vec{E}' = \sum_m a_m(z) \vec{e}_m e^{i\beta_m z}$, se sustituyen en la ecuación (35) obteniendo lo siguiente

$$i \frac{dE_{nx}}{dz} + \beta_{nx} E_{nx} + \sum_m R_{mnx} E_{mx} + \gamma_x \left\{ |E_{nx}|^2 E_{nx} + \frac{2b}{3a} |E_{ny}|^2 E_{nx} + \frac{b}{3a} E_{ny}^2 E_{nx}^* \right\} = 0.$$

$$\frac{dE_{ny}}{dz} + \beta_{ny} E_{ny} + \sum_{mny} R_{mny} E_{my} + \gamma_y \left\{ |E_{ny}|^2 E_{ny} + \frac{2b}{3a} |E_{nx}|^2 E_{ny} + \frac{b}{3a} E_{nx}^2 E_{ny}^* \right\} = 0.$$

Donde

$$E_{nx} = a_{nx} e^{i\beta_{nx} z} \quad \text{y} \quad E_{ny} = a_{ny} e^{i\beta_{ny} z},$$

$$\gamma_x = \frac{\omega \varepsilon_o}{2P_n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n_{xx}(x, y)n_{2x}(x, y) |e_{ntx}|^4 dx dy,$$

$$\gamma_y = \frac{\omega \varepsilon_o}{2P_n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n_{yy}(x, y)n_{2y}(x, y) |e_{nty}|^4 dx dy,$$

siendo estas últimas las respuestas no lineales con respecto a x y y .

3.4.1. Acoplamiento direccional

Si se considera un medio isotrópico y polarizado en \hat{x} , se tendría que

$$i\frac{dE_{nx}}{dz} + \beta_{nx}E_{nx} + \sum_m R_{mnx}E_{mx} + \gamma_x \left\{ |E_{nx}|^2 E_{nx} + \frac{2b}{3a} |E_{ny}|^2 E_{nx} + \frac{b}{3a} E_{ny}^2 E_{nx}^* \right\} = 0.$$

Entonces los términos $\frac{2b}{3a}|E_{ny}|^2 E_{nx}$ y $\frac{b}{3a}E_{ny}^2 E_{nx}^*$ son cero. Por ende

$$i\frac{dE_n}{dz} + \beta_n E_n + \sum_m R_{mn}E_m + \gamma |E_n|^2 E_n = 0. \quad (36)$$

Dando como resultado la ecuación discreta no lineal de Schrödinger, siendo $\sum_m R_{mn}E_m$ el termino lineal cinético y $\gamma |E_n|^2 E_n$ el termino no lineal.

para el caso particular de acoplamiento $N = 2$, es el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} i\frac{dE_1}{dt} + \beta_1 E_1 + R_{11}E_1 + R_{21}E_2 + \gamma |E_1|^2 E_1 &= 0. \\ i\frac{dE_2}{dt} + \beta_2 E_2 + R_{12}E_1 + R_{22}E_2 + \gamma |E_2|^2 E_2 &= 0. \end{aligned}$$

Luego entonces los coeficientes de acoplamiento quedarían así

$$\begin{aligned} R_{21} &= \frac{\omega}{4P_1} \iint_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon' - \varepsilon) e_2 e_1^* dx dy \\ R_{12} &= \frac{\omega}{4P_2} \iint_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon' - \varepsilon) e_1 e_2^* dx dy. \end{aligned}$$

Propagación lineal

Como se considera el caso lineal de la expresión obtenida anteriormente, se considera $\gamma = 0$, reduciendo el sistema de ecuaciones al siguiente

$$\begin{aligned} i\frac{dE_1}{dz} + \beta_1 E_1 + R_{21}E_2 &= 0 \\ i\frac{dE_2}{dz} + \beta_2 E_2 + R_{12}E_1 &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Siendo este el sistema de ecuaciones a solucionar cuando se vaya a estudiar un caso de propagación lineal.

Al suponer que los modos fundamentales tiene la forma $E_1 = a(z)e^{i\beta_1 z}$, $E_2 = b(z)e^{i\beta_2 z}$ y además se asume que las guías de ondas son similares $R_{12} = R_{21} = R$, entonces se obtendría que

$$\begin{aligned} a(z) &= e^{-i\frac{\delta z}{2}} \left\{ a_o \cos\left(\frac{R}{F}z\right) + iF \left(b_o + \frac{\delta}{2R}a_o\right) \sin\left(\frac{R}{F}z\right) \right\} \\ b(z) &= e^{-i\frac{\delta z}{2}} \left\{ b_o \cos\left(\frac{R}{F}z\right) + iF \left(b_o + \frac{\delta}{2R}b_o\right) \sin\left(\frac{R}{F}z\right) \right\}. \end{aligned}$$

Donde a_o y b_o son amplitudes modales inicialmente en $z = 0$, $\delta = \beta_2 - \beta_1$ y $F = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4R^2}}}$.

Ahora ¿Qué pasaría si inicialmente solo la guía “uno” es excitada?

Se tendría que $a_o \neq 0$ y $b_o = 0$ por ende

$$a(z) = e^{-i\frac{\delta z}{2}} \left\{ a_o \cos\left(\frac{R}{F}z\right) + iF\frac{\delta}{2k}a_o \sin\left(\frac{R}{F}z\right) \right\}$$

$$b(z) = e^{i\frac{\delta z}{2}} \left\{ iFa_o \sin\left(\frac{R}{F}z\right) \right\}.$$

Finalmente, de todo eso se puede deducir el valor

$$L_c = \frac{\pi}{2R}F,$$

correspondiente a la longitud de acoplamiento en z para que la transferencia de potencia sea máxima (este resultado se puede extraer gráficamente).

Propagación no lineal

Para el caso de la propagación no lineal, γ no se puede considera como cero, ya que, se le estaría quitando el aporte no lineal del sistema, quedando así el siguiente sistema de ecuaciones

$$i\frac{dE_1}{dz} + \beta_1 E_1 + R_{21}E_2 + \frac{K_o n_2}{2} |E_1|^2 E_1 = 0$$

$$i\frac{dE_2}{dz} + \beta_2 E_2 + R_{12}E_1 + \frac{K_o n_2}{2} |E_2|^2 E_2 = 0,$$

de manera más general dicha ecuación se puede reescribir de la siguiente manera

$$i\frac{\partial \Psi_n}{\partial z} + C(\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1}) + \gamma |\Psi_n|^2 \Psi_n = 0. \quad (38)$$

Cabe mencionar que esta ecuación, está relacionado con la llamada ecuación de auto-atrapamiento discreto, ya que a partir de su generalización, esta degenera en la ecuación anteriormente expuesta, es decir, la DNLS como acoplamientos de vecinos más cercanos [16].

4. Análisis y discusión de resultados

En la realización de este trabajo de grado se abordó el estudio de la propagación de la luz en medios ópticos no lineales, los cuales pueden ser representados por medio de arreglos fotónicos conformados por guías de ondas acopladas entre sí.

La expresión matemática que describe y modela el problema abordado en este trabajo es la ecuación discreta no lineal de Schrödinger, por medio de la cual se puede estudiar el fenómeno de la propagación de la luz y las cantidades conservadas del sistema tales como la potencia óptica y la energía, que son de suma importancia para la caracterización de las soluciones, y además dan garantía de que los cálculos son confiables.

Retomando con la ecuación discreta no lineal de Schrödinger

$$i\frac{\partial\Psi_n}{\partial z} + C(\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1}) + \gamma|\Psi_n|^2\Psi_n = 0.$$

Esta se utilizó para darle solución a dicho problema en el régimen estacionario, con lo cual se debe asumir que $\Psi_n = \Psi_n e^{i\lambda z}$, que al reemplazarlo da como resultado

$$\begin{aligned} i\frac{\partial(\Psi_n e^{i\lambda z})}{\partial z} + C(\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1})e^{i\lambda z} + \gamma|(\Psi_n e^{i\lambda z})|^2\Psi_n e^{i\lambda z} &= 0, \\ -\lambda\Psi_n e^{i\lambda z} + C(\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1})e^{i\lambda z} + \gamma|\Psi_n|^2\Psi_n e^{i\lambda z} &= 0. \end{aligned}$$

Llegando finalmente a lo siguiente

$$-\lambda\Psi_n + C(\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1}) + \gamma|\Psi_n|^2\Psi_n = 0. \quad (39)$$

Esta expresión describe de forma general el fenómeno que se estudió en este trabajo de grado, ya que dicha ecuación modela y describe la propagación de un haz de luz a lo largo del eje z sobre un arreglo de guías de ondas unidimensionales acopladas entre sí, en la cual se puede observar el factor C que es el responsable de los acoplamientos entre las guías de ondas (guía siguiente y anterior) y el factor γ responsable del aporte no lineal del sistema.

Para este trabajo también se tendrán en cuenta los aportes de un potencial disipativo con ganancias y pérdidas equilibradas, es decir, unas guías tendrán ganancias y otras pérdidas de forma alternada a lo largo de todo el arreglo, de tal manera que la suma total de todas las ganancias y pérdidas sean cero. Debido a esto, se le anexa un término más a la expresión anterior, dando como resultado lo siguiente:

$$i\frac{\partial\Psi_n}{\partial z} + C(\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1}) + i\rho_n\Psi_n + \gamma|\Psi_n|^2\Psi_n = 0, \quad (40)$$

que al proceder análogamente para el régimen estacionario se tiene que

$$-\lambda\Psi_n + C(\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1}) + i\rho_n\Psi_n + \gamma|\Psi_n|^2\Psi_n = 0.$$

En donde ρ_n es el encargado de representar los aportes de dicho potencial disipativo, el cual dependiendo de su forma puede afectar de diferentes maneras a la hora de realizar el cálculo de las soluciones. Para este estudio en específico se tomará como un vector de igual magnitud a lo largo de sus componentes y con signos alternados entre sí, lo cual representa un potencial disipativo con ganancias y pérdidas equilibradas, siempre y cuando el tamaño del arreglo sea un número par. Esto con la finalidad de observar el efecto que tiene a la hora de realizar el estudio sobre la estabilidad de estas soluciones.

En este problema se encuentran cantidades que se conservan a lo largo de la propagación que son de suma importancia para la solución de este, tales como: la potencia óptica P y la energía total del sistema, la cual viene expresada por el Hamiltoniano H del sistema. Estas cantidades conservadas del sistema son descritas por las siguientes expresiones.

$$P = \sum_n |\Psi_n|^2, \quad (41)$$

$$H = - \sum_n C(\Psi_n \Psi_{n+1}^* + \Psi_{n+1} \Psi_n^*) + \frac{\gamma}{2} |\Psi_n|^4. \quad (42)$$

4.1. Forma matricial

En esta parte, se pueden exponer dos casos particulares de este modelo, como lo son el Dímero y el Trímero (arreglos de guías de ondas conformadas por dos y tres guías de ondas respectivamente). Esto se hace con la finalidad de expresar este problema de forma matricial para que sea más sencilla su manipulación y solución. La forma matricial de estos casos en específicos sin tener en cuenta el aporte del potencial disipativo ρ_n , son las siguientes.

$$\frac{\partial}{\partial z} \vec{\phi} = \widehat{M} \vec{\phi}, \quad (43)$$

$$\widehat{M}_D = i \begin{bmatrix} \gamma |\phi_1|^2 & C \\ C & \gamma |\phi_2|^2 \end{bmatrix}, \quad \widehat{M}_T = i \begin{bmatrix} \gamma |\phi_1|^2 & C & 0 \\ C & \gamma |\phi_2|^2 & C \\ 0 & C & \gamma |\phi_3|^2 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Finalmente se puede escribir y expresar la ecuación que describe el caso al cual se le dará estudio en este trabajo que son los arreglos circulares, estos tienen como peculiaridad que las guías de ondas se acoplan de igual manera que lo hacían en el caso unidimensional, es decir, con su vecino más cercano siendo estas la guía siguiente y anterior a la guía de onda a estudiar, pero por ser un arreglo circular, sería un arreglo cerrado en el cual la primera guía y la última estarían acopladas ya que por la geometría del arreglo estas terminarían quedando juntas entre sí, que se puede expresar de forma matricial de la siguiente manera.

$$\frac{\partial}{\partial z} \vec{\Phi} = \widehat{M} \vec{\Phi}, \quad (45)$$

$$\widehat{M} = i \begin{bmatrix} \gamma |\phi_1|^2 & C & 0 & 0 & C \\ C & \gamma |\phi_2|^2 & C & \ddots & 0 \\ 0 & C & \gamma |\phi_3|^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & C \\ C & 0 & 0 & C & \gamma |\phi_n|^2 \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Ahora si consideramos el potencial disipativo, esta matriz quedaría de la siguiente manera:

$$\widehat{M} = i \begin{bmatrix} (i\rho_1 + \gamma) |\phi_1|^2 & C & 0 & 0 & C \\ C & (i\rho_2 + \gamma) |\phi_2|^2 & C & \ddots & 0 \\ 0 & C & (i\rho_3 + \gamma) |\phi_3|^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & C \\ C & 0 & 0 & C & (i\rho_n + \gamma) |\phi_n|^2 \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Siendo esta la matriz que representa el problema abordado en este trabajo de grado considerando que existe un potencial disipativo con ganancias y pérdidas equilibradas.

4.2. Análisis de estabilidad lineal de las soluciones

Al realizar el estudio sobre estos problemas y darles sus respectivas soluciones, se encuentra que no todas estas soluciones son estables, es decir, no todas las soluciones convergen manteniéndose inalteradas al propagarse.

Para el estudio de la estabilidad, se partirá del modelo más general que describe el problema, es decir, la DNLS considerando un potencial disipativo (40). Luego de encontrar las soluciones de esta ecuación, se propone realizar el estudio perturbando el sistema, con lo que se podría hallar la estabilidad lineal de estas soluciones. Esto se debe a que si la parte real de la perturbación permanece y crece exponencialmente, conllevaría a que las soluciones sean inestables, si por el contrario la perturbación decrece o permanece oscilando acotada en un intervalo de valores, se puede considerar que las soluciones son estables.

La perturbación se anexa a la solución de la siguiente manera:

$$\Psi = (\Psi + \delta\Psi(z))e^{i\lambda z}. \quad (48)$$

Al realizar el estudio sobre la perturbación, reemplazando (48) en (40) se llega al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales 2x2 (Ver Anexo 6.1)

$$\begin{aligned} \frac{dx_{(z)}}{dz} &= -(2\gamma uv + \rho)x_{(z)} - (C + \gamma u^2 + 3\gamma v^2 - \lambda)y_{(z)} \\ \frac{dy_{(z)}}{dz} &= (C + 3\gamma u^2 + \gamma v^2 - \lambda)x_{(z)} + (2\gamma uv - \rho)y_{(z)}. \end{aligned}$$

En el caso más general las soluciones son complejas, por ende se utiliza a u como la parte real, v como la parte imaginaria de las soluciones, a $x(z)$ como la parte real de la perturbación y a $y(z)$ como la parte imaginaria de la perturbación. Lo que finalmente se puede resumir en un problema de valores propios de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx(z)}{dz} \\ \frac{dy(z)}{dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2\gamma uv + \rho) & -(C + \gamma u^2 + 3\gamma v^2 - \lambda) \\ C + 3\gamma u^2 + \gamma v^2 - \lambda & 2\gamma uv - \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{d\vec{R}(z)}{dz} \right) = \hat{H} \left(\vec{R}(z) \right)$$

Para estos casos se asume que las soluciones para la perturbación son de la forma $A_n e^{\beta_n z}$, siendo β_n los autovalores de la matriz que en el caso más general son números complejos. Al hacer un pequeño análisis a esta expresión, se puede observar claramente que los únicos valores que presentarían inconsistencias en el sistema haciendo que la perturbación crezca y presente inestabilidad el sistema, sería cuando la parte real sea positiva, ya que habría un crecimiento exponencial positivo. Para los otros casos no habría ningún problema ya que para los negativos se presentaría un decrecimiento exponencial o en dado caso sea imaginario puro, entonces oscilen en un rango de valores, esto se debe a la característica de poder ser expresados en términos de senos y cosenos, es decir, funciones armónicas.

Con base en todo lo anteriormente mencionado, al hallar los valores propios de la matriz \hat{H} y analizando dichos autovalores, se puede saber si las soluciones encontradas son estables o no.

4.3. Vórtices ópticos

Cuando se habla sobre el estudio de la propagación de la luz, surgen muchos casos interesantes, que dependen del tipo de arreglo que se tome, además de las diferentes consideraciones que se tengan para el modelo a estudiar (tales como las que ya se han mencionado en sesiones anteriores). Todas estas consideraciones se hacen con la finalidad de darle solución al modelo, encontrando las soluciones permitidas y existentes de las ecuaciones de onda.

Una de las características que cabe resaltar, es que para los caso de dos y tres dimensiones, estas presentan singularidades ya sea en puntos o líneas del espacio, las cuales están estrechamente relacionadas con propiedades física de la onda, tal es el caso de los puntos en donde la fase es indeterminada y la amplitud de la onda se anula, a estos puntos se le conoce como singularidades de fase [17, 18].

Para esta área de estudio, los vórtices se consideran como ondas que en particular presentan singularidad en su fase y además un flujo rotatorio alrededor de dicha singularidad, en términos generales los vórtices se pueden llegar a representar por medio de una función escalar-compleja $\Psi(\vec{r}, z) = \rho(\vec{r}, z) e^{i\theta(\vec{r}, z)}$, donde $\rho(\vec{r}, z)$ es el módulo (amplitud) y $\theta(\vec{r}, z)$ la fase de la onda, con lo cual se puede definir la carga

topológica de los vórtices representada por la circulación alrededor de la singularidad S [18]. La expresión matemática que la describe es la siguiente:

$$S = \frac{1}{2\pi} \oint \vec{\nabla}\theta \cdot d\vec{r}, \quad (49)$$

en esta expresión S solo puede tomar valores enteros, entre los cuales pueden ser positivos, negativos o cero.

La carga topológica también llamada como vorticidad o número de giro, representará el sentido y las veces que se hará el giro alrededor de la singularidad en la fase, es decir, la fase tomará valores igualmente espaciados para completar el número de vueltas en el sentido indicado. Los valores positivos hacen referencias a giros completos positivos alrededor de dicha singularidad, por dar un ejemplo: para $S = 1$ entonces la fase tomaría valores comprendidos desde 0 hasta 2π indicando así una vuelta completa y positiva. Para los valores negativos, estos indicarían giros completos negativos alrededor de la singularidad en la fase, es decir, para $S = -1$ la fase tomará valores desde 2π hasta cero, lo que indica una vuelta completa y negativa. En el caso de ser cero, representará que la acumulación de la fase a través de la trayectoria cerrada sería cero, lo que daría como resultado una fase constante e igual a cero para cada uno de los sitios del arreglo.

A continuación, se presentará una tabla en la cual se encuentran los valores de la fase dependiendo del valor de la carga topológica:

Carga topológica S	-3	-2	-1	0	1	2	3
Valores de la fase	$[6\pi, 0)$	$[4\pi, 0)$	$[2\pi, 0)$	0	$[0, 2\pi)$	$[0, 4\pi)$	$[0, 6\pi)$

Cuadro 1: La carga topológica y los valores de la fase.

Al tener toda la información necesaria, se procede a realizar los cálculos numéricos de manera computacional, utilizando el programa y lenguaje de programación **GNU Octave**, el cual se utilizará para la implementación de todos los procedimientos cuantitativos referentes a la realización de dicho trabajo. Esto se debe a que el problema a abordar al estar constituido por guías de ondas, se tendrá la misma cantidad de ecuaciones diferenciales acopladas que el número de guías que se consideren para el arreglo, lo que hace que se vuelva prácticamente imposible darle solución sin acudir a los métodos numéricos o computacionales, tomando así gran importancia la física computacional en este trabajo.

Una vez teniendo las herramientas computacionales, se definen las condiciones iniciales sobre las cuales se realizará el estudio de este trabajo de grado, tales como: el caso del delta, el doble delta y vórtice

con carga topológica $S = 0, 1, 2, 3$, además de los diferentes parámetros iniciales. A las cuales se les hallará su respectiva solución por medio de la implementación del método de Newton Raphson en varias variables.

4.4. Modos propios no lineales

Principalmente se dio paso a la creación y programación de las condiciones iniciales o casos que se estudiarán en este trabajo de grado, los cuales son: delta, doble delta, onda plana o vórtice con carga topológica cero, vórtice con carga topológica uno y vórtice con carga topológica tres. A continuación, se presentarán las expresiones y gráficas de cada uno de estos casos en donde se presentan las amplitudes y fases de cada una de ellas.

4.4.1. Condiciones iniciales tipo deltas

Como su nombre lo indica las condiciones tipo delta deben tener el comportamiento de las funciones delta, que para estos casos en particular tenemos el de tipo delta y doble delta que hablando matemáticamente se tendría lo siguiente:

Delta

Para este caso en particular, la función solo tomara un único valor (correspondiente al valor de la amplitud) para un único sitio en el arreglo ubicado en el centro de este y para el resto de los sitios la función sería igual a cero, su expresión matemática sería

$$f(x) = \begin{cases} A, & \text{si } x = a, \text{ siendo } A \text{ la amplitud y } a \\ & \text{el sitio ubicado en la mitad del arreglo} \\ 0, & \text{si } x \neq a \end{cases}$$

Doble delta

Para el caso del doble delta, es muy similar al anterior solo que la función tomará un único valor (correspondiente al valor de la amplitud) para dos sitios en el arreglo, ubicados consecutivamente en el centro de este y para el resto de los sitios la función sería igual a cero. Su expresión matemática sería

$$g(x) = \begin{cases} A, & \text{si } x = a \text{ ó } b, \text{ siendo } A \text{ la amplitud y } a \\ & \text{y } b \text{ los sitios ubicados en la mitad del arreglo} \\ 0, & \text{si } x \neq a \text{ ó } b \end{cases}$$

Ya teniendo las funciones definidas se da paso a graficar estas condiciones tipo delta en el arreglo considerado para el estudio en este trabajo obteniendo lo siguiente

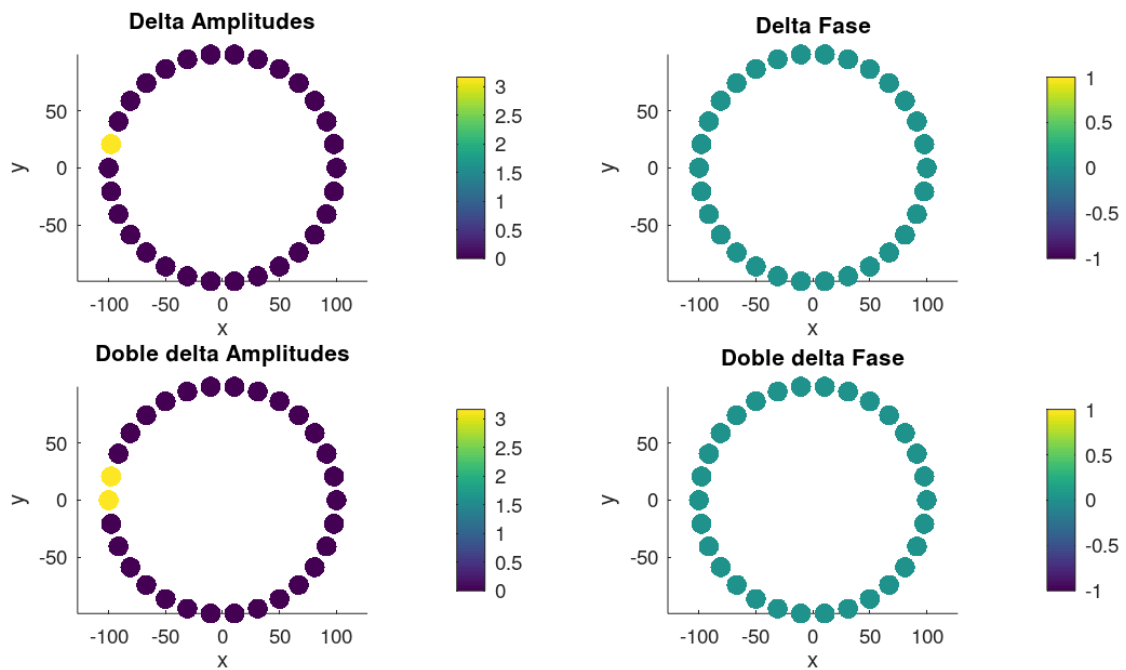


Figura 1: Condiciones iniciales de tipo delta y doble delta.

En la imagen anterior se puede ver representado de manera gráfica lo definido anteriormente, para el caso del delta se puede evidenciar que en todo el arreglo solo se encuentra el valor en una única guía de onda (sitio del arreglo) y para el doble delta en dos sitios de este. Por el lado de las fases se observa claramente que se tiene un valor de cero para todo el arreglo, esto se debe a que dicha fase para estos casos es igual a cero ya que esta resulta de calcular por medio de la función $angle()$ el ángulo entre el eje positivo de las x y una semirrecta desde el origen hasta el punto (x, y) en el plano xy , tomando a x como la parte real e y como la parte imaginaria y como estas funciones son reales, esta fase daría como resultado cero.

4.4.2. Condiciones iniciales tipo vórtice

Los vórtices se pueden representar como una función escalar-compleja, es decir, tienen parte real e imaginaria, además se consideran como ondas que en particular presentan singularidad en su fase que a su vez tiene un flujo rotatorio alrededor de dicha singularidad. Estos vórtices toman su nombre por el valor de su carga topológica en los cuales se encuentran los siguientes

Onda plana o vórtice con carga topológica $S = 0$

Cuando se habla de una onda plana, esta cumple con algunas características en particular; como lo es tener una frecuencia y amplitud constante. Matemáticamente hablando se puede describir por medio de una función constante, es decir, que para todas las guías de ondas que conforman el arreglo, se encontrara la misma amplitud. Esto se puede representar de la siguiente manera

$$F(n) = \begin{cases} A, & \forall n, \text{ siendo } A \text{ la amplitud y } n \text{ cualquier sitio del arreglo} \end{cases}$$

En estos casos cabe resaltar la fase, ya que es de suma importancia para las condiciones tipo vórtice, sin embargo, como este es el caso particular de ser un vórtice con carga topológica igual a cero, por lo explicado anteriormente para el caso de los deltas, aquí también da como resultado una fase igual a cero.

Vórtice con carga topológica $S \neq 0$

Para los vórtices con carga topológica uno, dos y tres, presentan el mismo comportamiento en la amplitud que para la onda plana, es decir, permanece la amplitud constante a lo largo de todo el arreglo, pero al tocar la parte de la fase es donde se diferencia, ya que estas presentarán su respectiva fase correspondiente. Esta fase se anexa a la función de onda plana multiplicándola por la exponencial $e^{(i\theta)}$ de la siguiente manera

$$h(n) = F(n)e^{(i\theta)},$$

donde $F(n)$ es la función de la onda plana y θ tomaría los valores de la fase inicial para cada caso en particular (ver tabla (1)). A continuación, se mostrará la representación gráfica de estas condiciones iniciales

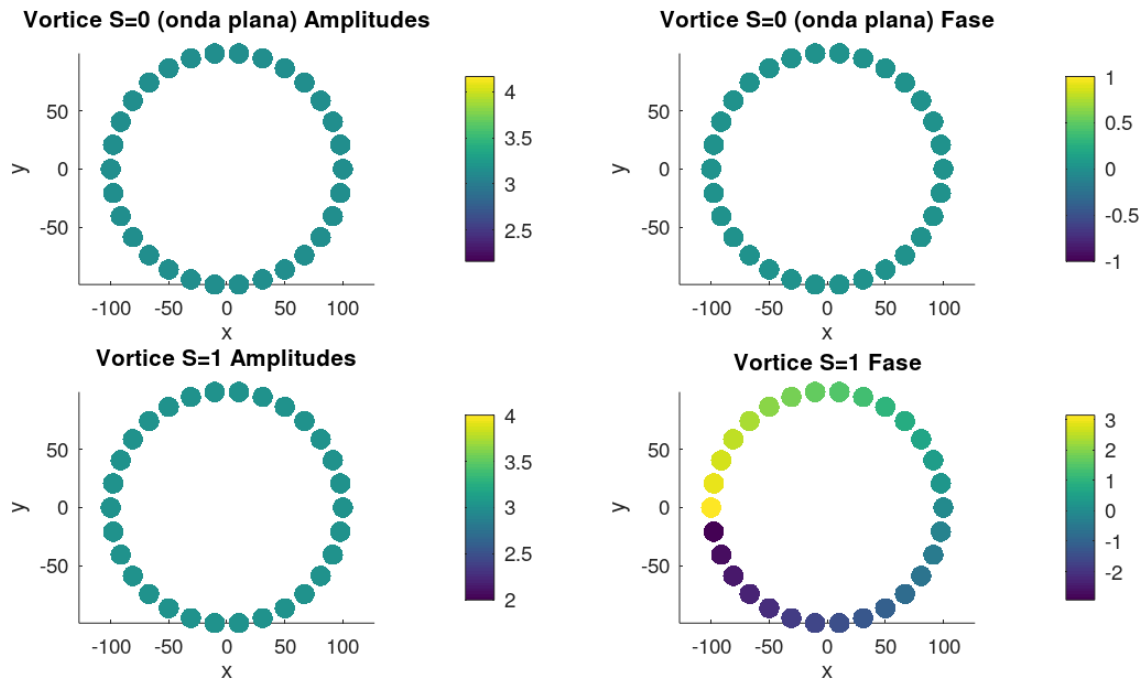


Figura 2: Condiciones iniciales de tipo vórtice con carga topológica $S = 0, 1$.

En esta gráfica se observa el caso de la onda plana donde las amplitud inicial es igual a lo largo de todo el arreglo con una fase igual a cero debido a que corresponde al vórtice de carga topológica igual a cero, luego se presenta el vórtice con carga topológica $S = 2$ que presenta nuevamente una amplitud inicial igual en todo el arreglo y en la fase ya se observa que presentan diferentes valores debido a la influencia de la vorticidad de dicho caso, en donde se evidencia que completa una vuelta a lo largo de todo el arreglo.

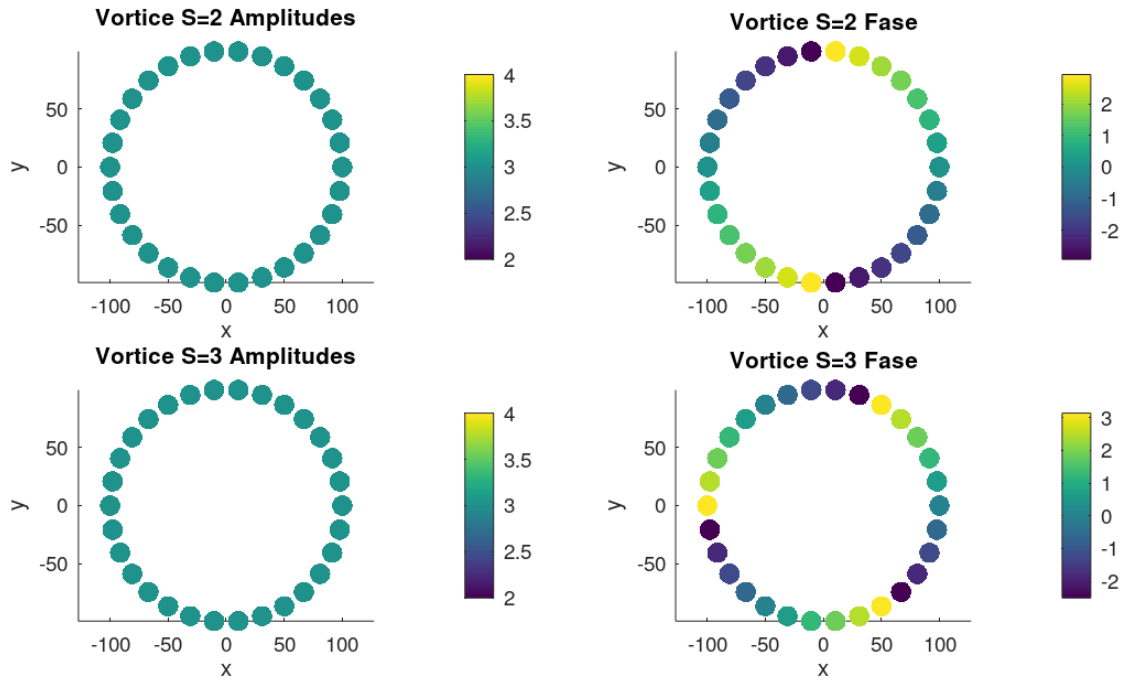


Figura 3: Condiciones iniciales de tipo vórtice con carga topológica $S = 2, 3$.

En esta parte con los vórtices de carga topológica dos y tres, se presenta las mismas características mencionadas anteriormente en la fase, es decir, un mismo valor inicial a lo largo de todo el arreglo y en la fase es donde se encuentra la diferencia, para $S = 2$ se puede observar que evidentemente completa dos vueltas a lo largo de los valores de la fase en todo el arreglo y de forma análoga para $S = 3$ completa tres vueltas a lo largo del arreglo.

4.5. Estabilidad

En estos casos, donde la expresión matemática que describe el problema es un sistema de ecuaciones diferenciales, sucede que al hallarles sus respectivas soluciones estas quedan en términos de una constante λ (los autovalores). Dichas soluciones se encuentran por medio de la implementación del método de Newton Raphson en varias variables, ya que gracias a él se pueden encontrar los ceros (las soluciones) del sistema modelado (47). Luego de calcular las soluciones, se procede, a realizarles su respectivo análisis de estabilidad por medio del estudio de la estabilidad lineal de dichas soluciones para así determinar para qué condiciones y parámetros son estables.

Como se mencionó en el marco teórico, para el cálculo de la estabilidad de las soluciones, se introdujo una perturbación en el sistema para así poder analizar su respectiva estabilidad lineal, realizando dicho proceso en cada uno de los casos. Una vez obtenido los resultados del cálculo de la estabilidad se representa por medio de un mapa de color en donde se expone la dependencia de la estabilidad en función del tamaño del arreglo y el valor del potencial disipativo ingresado al sistema con la finalidad de poder identificar las regiones en el espacio de parámetros para los modos estables. Este mapa de color lo que representa es que en las zonas oscuras o negras donde el valor propio máximo (h_{max}) es cero, son las regiones en el espacio de parámetros donde se cumple la estabilidad para las soluciones, es decir, los valores de N y ρ donde existe la estabilidad en sus soluciones. Para el tamaño del arreglo solamente se tomaron en cuenta los números pares debido a que el sistema debe tener el mismo número de ganancias y pérdidas aportadas por el potencial disipativo, cosa que no sucede al tener arreglos impares. Los resultados obtenidos se mostrarán a continuación.

4.5.1. Casos de tipo delta

- **Delta:** Para este caso en particular surgió un evento muy peculiar, el cual fue que, al intentar de hallar las soluciones para este caso y su respectiva estabilidad, no era posible. Las soluciones no convergen.
- **Doble-delta:** Al observar que tipo delta no arrojó lo que se buscaba se probó con el de doble delta, con la finalidad de equilibrar las ganancias y pérdidas en el sistema ya que al tener dos sitios los cuales se encontrarán excitados, estas se podrían equilibrar entre sí. Al realizar los respectivos cálculos de estabilidad, se propuso variar el número de guías de onda que conforma el arreglo además del valor del potencial disipativo con la finalidad de ver su dependencia ante estos parámetros arrojando así el siguiente mapa de color

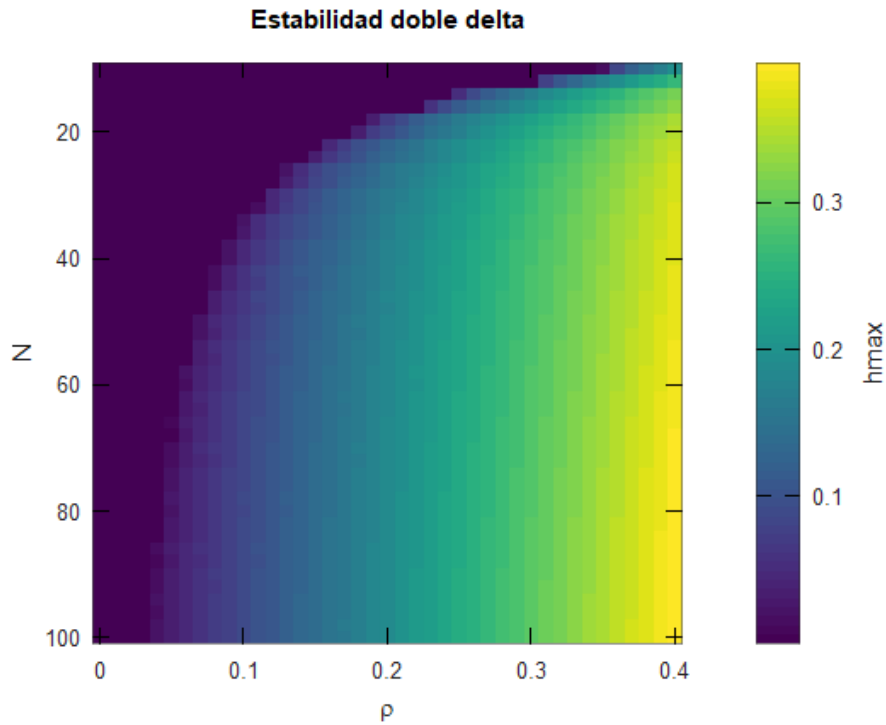


Figura 4: Coeficiente de estabilidad (h_{max}) en función del tamaño del arreglo (N) y el coeficiente del potencial (ρ) para el caso del doble delta

A primera vista el gráfico muestra que mientras más pequeño sea el valor del potencial disipativo se encontrarán zonas en donde las soluciones son estables y si además el tamaño del arreglo también es pequeño, entonces habrá más regiones en el espacio de parámetros en donde se cumpla la estabilidad para sus soluciones. En este caso en particular se puede evidenciar que las zonas estables son muy pocas y dicho sistema no soporta el potencial disipativo ya que para que pueda tener zonas estables este valor debe tender a cero a menos que el tamaño del arreglo sea pequeño. Esto lleva a pensar que no es una condición óptima para utilizar ya que tiene más zonas de inestabilidad.

4.5.2. Casos con vorticidad

- Wave plane or vortex with topological charge $S = 0$:** Como ya se mencionó anteriormente este caso en particular presenta una amplitud constante en todos los sitios del arreglo y es por esta razón que el tamaño del arreglo se varía únicamente en números pares para que los términos de ganancias y pérdidas se puedan equilibrar entre sí. Realizando el respectivo análisis de la estabilidad a este caso arrojó los siguiente

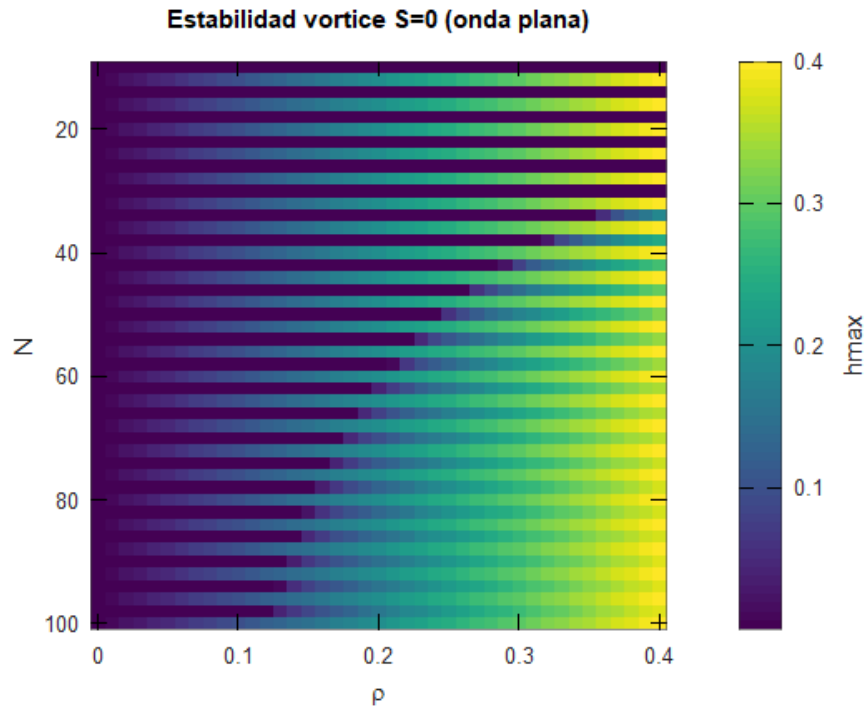


Figura 5: Coeficiente de estabilidad (h_{max}) en función del tamaño del arreglo (N) y el coeficiente del potencial (ρ) para el caso de la onda plana (vórtice con $S = 0$)

Lo principal y más llamativo en comparación al caso anterior es que se pueden observar franjas horizontales de estabilidad en este mapa de color. Esto indica que para ciertos valores del tamaño del arreglo, se presenta estabilidad sin importar el valor que tome el potencial disipativo, es decir, lo soporta completamente y al ir aumentando el tamaño del arreglo se hace notorio como soporta menos el valor del potencial, es decir, necesita que dicho aporte disminuya para que se siga presentando estabilidad en el arreglo. Además, se sigue cumpliendo que mientras más pequeño sea el valor del potencial disipativo, más zonas estables en el espacio de parámetros se encontrarán. Se puede observar que, para el caso de la onda plana, este presenta más zonas estables que el caso anterior y al analizar el tamaño del arreglo, se hace presente una cierta periodicidad en el sistema donde la estabilidad permanece cada dos número pares sin importar el valor que tome el potencial disipativo por medio de franjas horizontales de estabilidad.

Estas franjas encontradas en el resultado anterior hacen pensar en que sucedería al considerar la vorticidad en el sistema ya que este caso en particular no tiene valores en la fase y presenta franjas de estabilidad sin importar el valor del potencial por debajo de tamaños de 30, lo que resulta muy interesante ya que podrían crecer estas zonas conforme se le anexe vorticidad al sistema.

- **Vórtice con carga topológica $S = 1$:** A continuación se presentará el mapa de color correspondiente al análisis de estabilidad al considerar un vórtice con carga topológica $S = 1$

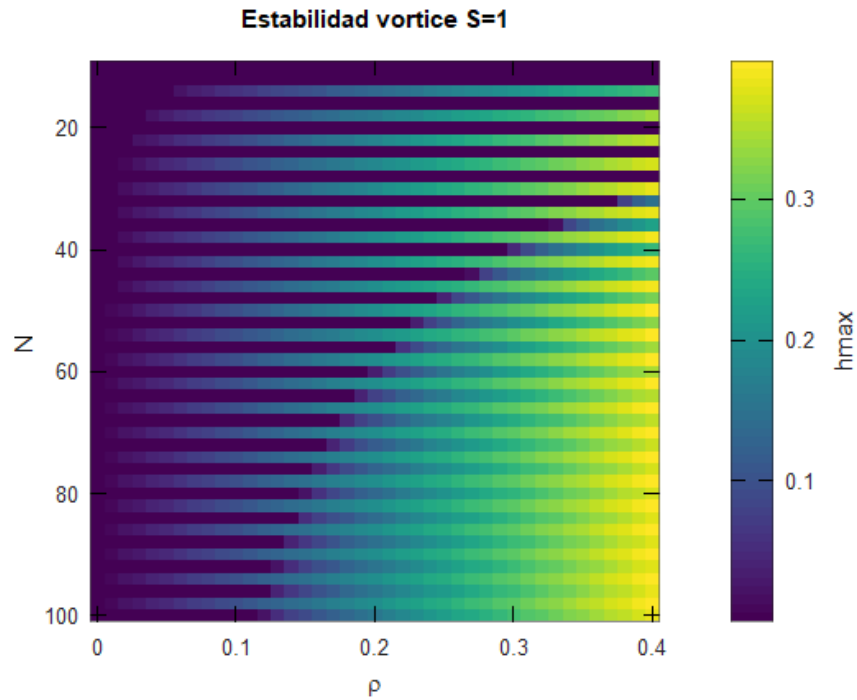


Figura 6: Coeficiente de estabilidad ($hmax$) en función del tamaño del arreglo (N) y el coeficiente del potencial (ρ) para el caso del vórtice con $S = 1$

Se puede apreciar como el comportamiento periódico de estabilidad sin importar el valor del potencial cada dos números pares en el tamaño del arreglo para números pequeños se conserva y además se alcanza a notar como para los arreglos más pequeños se pierde esta periodicidad para presentarse una zona continua de estabilidad. Al comparar este resultado con el caso anterior se observa algo bastante peculiar, lo cual es que la dependencia de la estabilidad en el espacio de parámetros es la misma, pero al anexarle la vorticidad, las zonas estables empiezan a aumentar mucho más, como se observa al encontrar dos franjas horizontales consecutivas de estabilidad al inicio del mapa de color.

Este resultado da mucho que pensar ya que se puede apreciar como efectivamente la vorticidad empieza a afectar positivamente a la estabilidad de las soluciones del sistema, lo que motiva a utilizar las siguientes condiciones tipo vórtice esperando a que estas presenten muchas más zonas estables en el espacio de parámetros.

- **Vórtice con carga topológica $S = 2$:** Al realizar el respectivo análisis de estabilidad considerando un vórtice con carga topológica $S = 2$. Debido a la tendencia de los resultados anteriores se esperaba a que este contribuyera de forma significativa en la estabilidad del sistema dando como resultado el siguiente mapa de color

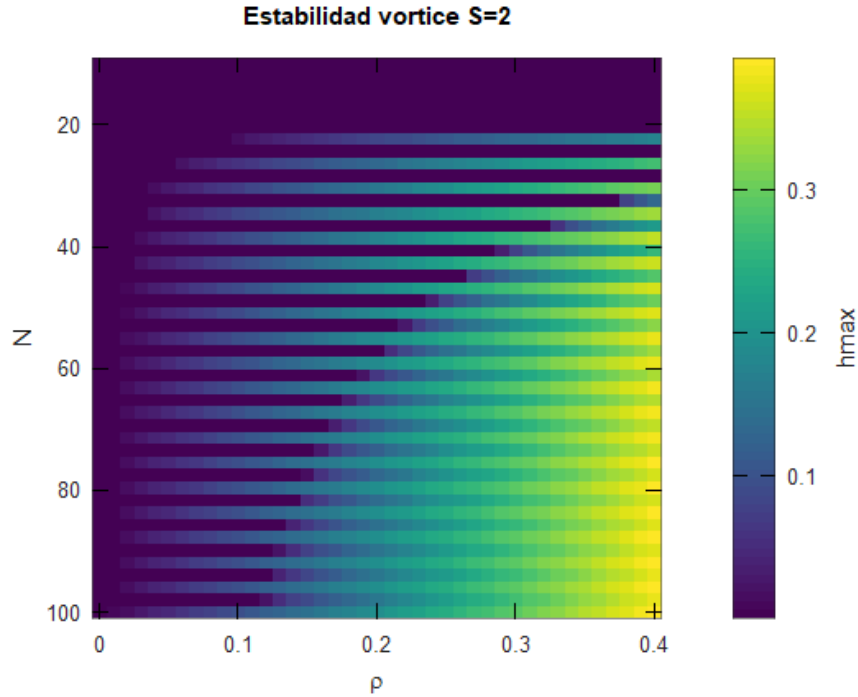


Figura 7: Coeficiente de estabilidad (h_{max}) en función del tamaño del arreglo (N) y el coeficiente del potencial (ρ) para el caso del vórtice con $S = 2$

Como se esperaba la vorticidad poco a poco va revelando más zonas estables, esto se debe a que si bien se observa la misma dependencia de la estabilidad en función de los parámetros, también se hace mucho más evidente el aumento de las zonas estables debido a la influencia de la vorticidad ya que se empieza a observar una zona continua de estabilidad para arreglos pares de tamaño menor o igual a 20, dando como resultado que las franjas horizontales consecutivas de estabilidad vayan incrementando y trayendo con sígo más zonas estables en el espacio de parámetros.

Cabe mencionar que para la obtención de estos resultados conforme se aumentaba la vorticidad, también tocaba aumentar el tamaño mínimo del arreglo ya que para arreglos muy pequeños se perdía completamente la estabilidad del sistema, algo muy relevante ya que se podría pensar en aumentar la vorticidad sin límite alguno, pero esta condición entraría a tomar mucha más relevancia mientras más vorticidad se considere en el sistema.

- **Vórtice con carga topológica $S = 3$:** Finalmente se decidió tomar como última condición inicial un vórtice con carga topológica igual a tres para observar que tanto mejoraría la estabilidad del

sistema, lo que dio como resultado el siguiente mapa de color

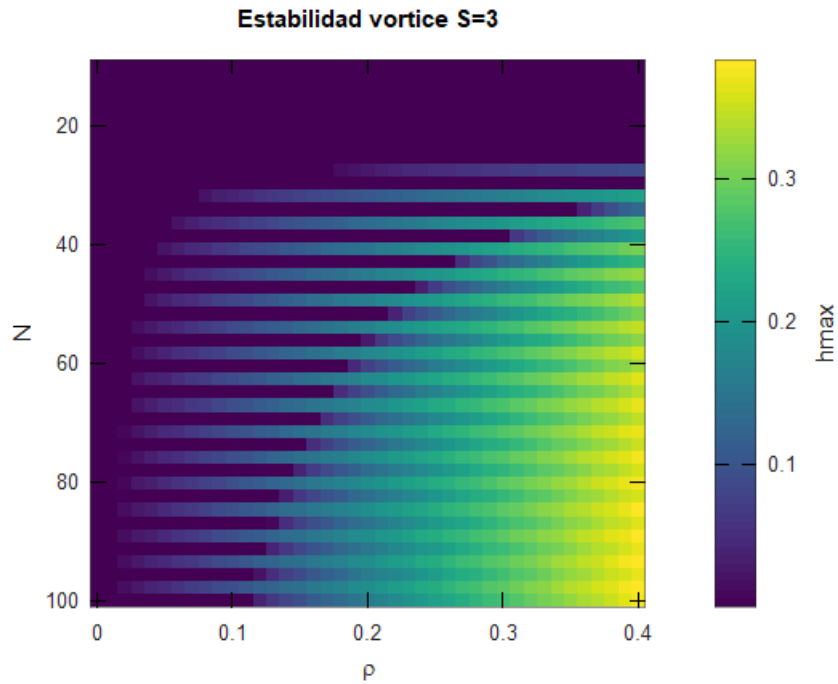


Figura 8: Coeficiente de estabilidad (h_{max}) en función del tamaño del arreglo (N) y el coeficiente del potencial (ρ) para el caso del vórtice con $S = 3$

Al analizar este gráfico se hace evidente lo que se sospechaba de los resultados anteriores, es decir, las zonas estables en el espacio de parámetros aumentan con forme se le ingrese más vorticidad al sistema, es decir, nuevamente se presenta la misma dependencia de la estabilidad en función del tamaño del arreglo y el valor del potencial disipativo y el aumento de las zonas estables continuas gracias al aumento de la vorticidad en el sistema. Tanto así que se encuentran zonas completamente estables por encima de la franja del arreglo con $N = 20$.

Estos resultados son muy prometedores, ya que esta periodicidad y además ese aumento en las zonas de estabilidad llaman mucho la atención y llevan a pensar que pueden ser muy útiles y aplicables en distintas áreas de investigación.

5. Conclusiones

En este trabajo de grado se estudió la propagación de la luz en arreglos de guías de onda con respuesta no lineal de tipo Kerr, dicho estudio se realizó por medio de la ecuación discreta no lineal de Schrödinger considerando un potencial disipativo con simetría \mathcal{PT} , solucionando el problema en el régimen estacionario y teniendo en cuenta las características de estas soluciones en dicho régimen.

Para este estudio se consideraron seis modos propios no lineales o condiciones iniciales, tales como, el tipo delta, el doble delta, onda plana y los vórtices con carga topológica $S = 1, 2, 3$. Sobre ellos se implementó el método de Newton Raphson en varias variables hallando así sus respectivas soluciones y realizarle a cada una de ellas el análisis de estabilidad lineal.

Gracias a los datos obtenidos por medio de la realización de este trabajo, se pudo concluir que, para el caso del delta, al ser una condición tan particular y definida con una sola guía de onda excitada por la luz, las ganancias y pérdidas no se podrían equilibrar ya que solo se tendría ganancia o en caso contrario pérdida, provocando de esta manera que no se pueda encontrar la estabilidad para dicho sistema. Es por esto que, al considerar el caso del doble delta, el análisis de estabilidad a las soluciones se le puede realizar sin ningún problema, dando como resultado que las zonas estables se vean presente a medida que el tamaño del arreglo y el aporte del potencial se hacen cada vez más pequeños.

Al realizar el estudio sobre los modos propios tipo vórtices, se pudo demostrar que cuando se le ingresa vórticidad al sistema, éste se verá afectado de forma significativa y positiva en su estabilidad, es decir, las regiones en el espacio de parámetros para los modos estables crece cuando hay vórticidad, además de presentar franjas horizontales de estabilidad con un comportamiento periódico cada dos números pares en el tamaño del arreglo y para ciertos tamaños pequeños estas líneas de estabilidad se hacen independiente del valor del potencial. Cuando se consideran los casos de vórtice con carga topológica uno dos y tres, se observó que conforme mayor sea la vorticidad, empezarán a aparecer franjas horizontales de estabilidad consecutivas para tamaños pequeños del arreglo, provocando que esta zona en el espacio de parámetros para la cual los modos son estables crezca aún más. Finalmente se puede decir que, a la hora de hablar de las variaciones de los parámetros, se encontró que mientras vaya disminuyendo el número de guías de ondas y más pequeño sea el valor del potencial disipativo, estos afectarán positivamente a la estabilidad del sistema, es decir, se presentarán más regiones para la estabilidad, en caso contrario (cuando el número de guías va aumentado y el valor del potencial también se incrementa), se presentarán más regiones de inestabilidad.

6. Anexos

6.1. Calculo de la estabilidad

Para realizar el respectivo análisis de la estabilidad lineal del sistema se parte por considera una perturbación de la siguiente manera

$$\Psi = (\varphi + \delta\varphi(z))e^{i\beta z}. \quad (50)$$

Dicha perturbación se pasa a reemplazar en la DNLS considerando un potencial disipativo, es decir, la ecuación (40)

$$i\frac{\partial\Psi_n}{\partial z} + C(\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1}) + i\rho_n\Psi_n + \gamma|\Psi_n|^2\Psi_n = 0.$$

Una vez hecho ese reemplazo se empieza a operar considerando a $C(\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1}) = V\Psi$, llegando al siguiente resultado

$$\begin{aligned} &V\varphi e^{iz\beta} + V\delta\varphi(z)e^{iz\beta} - \beta\varphi e^{iz\beta} - \beta\delta\varphi(z)e^{iz\beta} + \gamma\varphi^2 e^{iz\beta}\bar{\varphi} + \gamma\varphi^2 e^{iz\beta}\overline{\delta\varphi(z)} + \\ &2\gamma\varphi\delta\varphi(z)e^{iz\beta}\bar{\varphi} + 2\gamma\varphi\delta\varphi(z)e^{iz\beta}\overline{\delta\varphi(z)} + \gamma\delta\varphi^2(z)e^{iz\beta}\bar{\varphi} + \\ &\gamma\delta\varphi^2(z)e^{iz\beta}\overline{\delta\varphi(z)} + i\rho\varphi e^{iz\beta} + i\rho\delta\varphi(z)e^{iz\beta} + ie^{iz\beta}\frac{d}{dz}\delta\varphi(z) = 0. \end{aligned}$$

Al considerando a $\delta\varphi \ll 1$, entonces $\delta\varphi^2 \rightarrow 0$ y $|\delta\varphi^2| \rightarrow 0$, con lo que se pueden cancelar algunos términos de la expresión anterior quedando lo siguiente

$$V\varphi + V\delta\varphi(z) - \beta\varphi - \beta\delta\varphi(z) + \gamma\varphi^2\bar{\varphi} + \gamma\varphi^2\overline{\delta\varphi(z)} + 2\gamma\varphi\delta\varphi(z)\bar{\varphi} + i\rho\varphi + i\rho\delta\varphi(z) + i\frac{d}{dz}\delta\varphi(z)$$

Ahora de (38) se puede deducir que $-\beta\Psi + V\Psi + \gamma\Psi^3 = 0$, por lo que se pueden cancelar otros tres términos más dando como resultado

$$V\delta\varphi(z) - \beta\delta\varphi(z) + \gamma\varphi^2\overline{\delta\varphi(z)} + 2\gamma\varphi\delta\varphi(z)\bar{\varphi} + i\rho\delta\varphi(z) + i\frac{d}{dz}\delta\varphi(z) = 0.$$

Ahora si se considera a Ψ y φ en términos generales como funciones complejas, entonces estas funciones se pueden reescribir como $\Psi = u + iv$ y $\varphi = x(z) + iy(z)$ con lo cual se puede reescribir todo como

$$\begin{aligned} &Vx(z) + iVy(z) + 3u^2\gamma x(z) + iu^2\gamma y(z) + 2iuv\gamma x(z) + 2uv\gamma y(z) + v^2\gamma x(z) + 3iv^2\gamma y(z) \\ &-\beta x(z) - i\beta y(z) + i\rho x(z) - \rho y(z) + i\frac{d}{dz}x(z) - \frac{d}{dz}y(z). \end{aligned}$$

En este punto se da paso a separar en dos partes el problema, es decir, se separa la parte real de la imaginaria para una mayor organización y facilidad a la hora de abordar la solución, llegando así al siguiente sistema de ecuaciones 2x2

$$\begin{aligned} & Vx(z) + 3u^2\gamma x(z) + 2uv\gamma y(z) + v^2\gamma x(z) - \beta x(z) - \rho y(z) - \operatorname{re} \left(\frac{d}{dz} y(z) \right) \\ & Vy(z) + u^2\gamma y(z) + 2uv\gamma x(z) + 3v^2\gamma y(z) - \beta y(z) + \rho x(z) + \operatorname{re} \left(\frac{d}{dz} x(z) \right), \end{aligned}$$

que al factorizar los términos semejantes y organizando un poco cada termino se podría expresar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & (2uv\gamma + \rho)x(z) + (V + u^2\gamma + 3v^2\gamma - \beta) y(z) + \operatorname{re} \left(\frac{d}{dz} x(z) \right) \\ & (2uv\gamma - \rho)y(z) + (V + 3u^2\gamma + v^2\gamma - \beta) x(z) - \operatorname{re} \left(\frac{d}{dz} y(z) \right). \end{aligned}$$

Finalmente todo esto se puede expresar en forma matricial para poder llevarlo a un problema de valores propios de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{dx(z)}{dz} \\ \frac{dy(z)}{dz} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -(2uv\gamma + \rho) & -(V + u^2\gamma + 3v^2\gamma - \beta) \\ V + 3u^2\gamma + v^2\gamma - \beta & 2uv\gamma - \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix} \\ \left(\frac{dR(z)}{dz} \right) &= \hat{H} (R(z)) \end{aligned}$$

7. Referencias bibliográficas

Referencias

- [1] Gema de la Torre, Luis Sanchez y Nazario Martín León. “Compuestos orgánicos con propiedades ópticas no lineales: hacia las nuevas tecnologías fotónica y fotoelectrónica”. En: *Anales de la Real Sociedad Española de Química*. 4. Real Sociedad Española de Química. 2002, págs. 5-17.
- [2] José Antonio Martín Pereda. “La fotónica: Ayer y mañana”. En: *DYNA* 89.5 (2014), págs. 501-503.
- [3] E Arévalo, C Ramírez y A Guzmán. “Solitones en fibras ópticas”. En: *Momento* 11 (1995), págs. 9-16.
- [4] Robin K Bullough y PJ Caudrey. “The soliton and its history”. En: *Solitons*. Springer, 1980, págs. 1-64.
- [5] Marcos Caso Huerta y col. “La ecuación de Korteweg-De Vries: Un ejemplo práctico de integrabilidad”. En: (2018).
- [6] Cristian Mejía-Cortés, Jorge Castillo-Barake y Mario I Molina. “Localized vortex beams in anisotropic Lieb lattices”. En: *Optics Letters* 45.13 (2020), págs. 3569-3572.
- [7] Uta Naether, Rodrigo A. Vicencio y Milutin Stepić. “Mobility of high-power solitons in saturable nonlinear photonic lattices”. En: *Optics Letters* 36.8 (2011), págs. 1467-1469.
- [8] Cristian Mejía-Cortés, Rodrigo A Vicencio y Boris A Malomed. “Mobility of solitons in one-dimensional lattices with the cubic-quintic nonlinearity”. En: *Physical Review E* 88.5 (2013), pág. 052901.
- [9] Alejandro J Martínez y col. “Nonlinear multicore waveguiding structures with balanced gain and loss”. En: *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* 91.2 (2015), págs. 1-8.
- [10] Juan Gabriel y Belmonte Beitia. *Ecuaciones de schrödinger no lineales con no linealidad espacialmente inhomogénea*. 2009. ISBN: 9788484276784.
- [11] Bahaa EA Saleh y Malvin Carl Teich. *Fundamentals of photonics*. John Wiley & sons, 2019.
- [12] MP Sampedro y col. “Generación periódica del índice de refracción en un cristal Bi₁₂TiO₂₀”. En: *Superficies y vacío* 17.1 (2004), págs. 42-45.
- [13] Arredondo Santos. “Caracterización de las Propiedades Ópticas no Lineales de Vidrios de Telurio (TeO₂) con Nanocristales Embebidos por Medio de la Técnica Z-scan”. Tesis de maestría. Centro de Investigaciones en Óptica, A.C. León, Guanajuato, 2014.
- [14] Fernando Fernández Lázaro y Angela Sastre Santos. “Materiales fotorrefractivos orgánicos”. En: *Anales de la Real Sociedad Española de Química*. 1. Real Sociedad Española de Química. 2002, págs. 5-13.
- [15] Bahaa EA Saleh y Malvin Carl Teich. *Fundamentals of photonics*. John Wiley & sons, 2019, pág. 1018.

- [16] Panayotis G Kevrekidis. *The discrete nonlinear Schrödinger equation: mathematical analysis, numerical computations and physical perspectives*. Vol. 232. Springer Science & Business Media, 2009.
- [17] Vladimir Tikhonenko y col. “Vortex solitons in a saturable optical medium”. En: *JOSA B* 15.1 (1998), págs. 79-86.
- [18] Anton S Desyatnikov, Lluís Torner y Yuri S Kivshar. “Optical vortices and vortex solitons”. En: *arXiv preprint nlin/0501026* (2005).