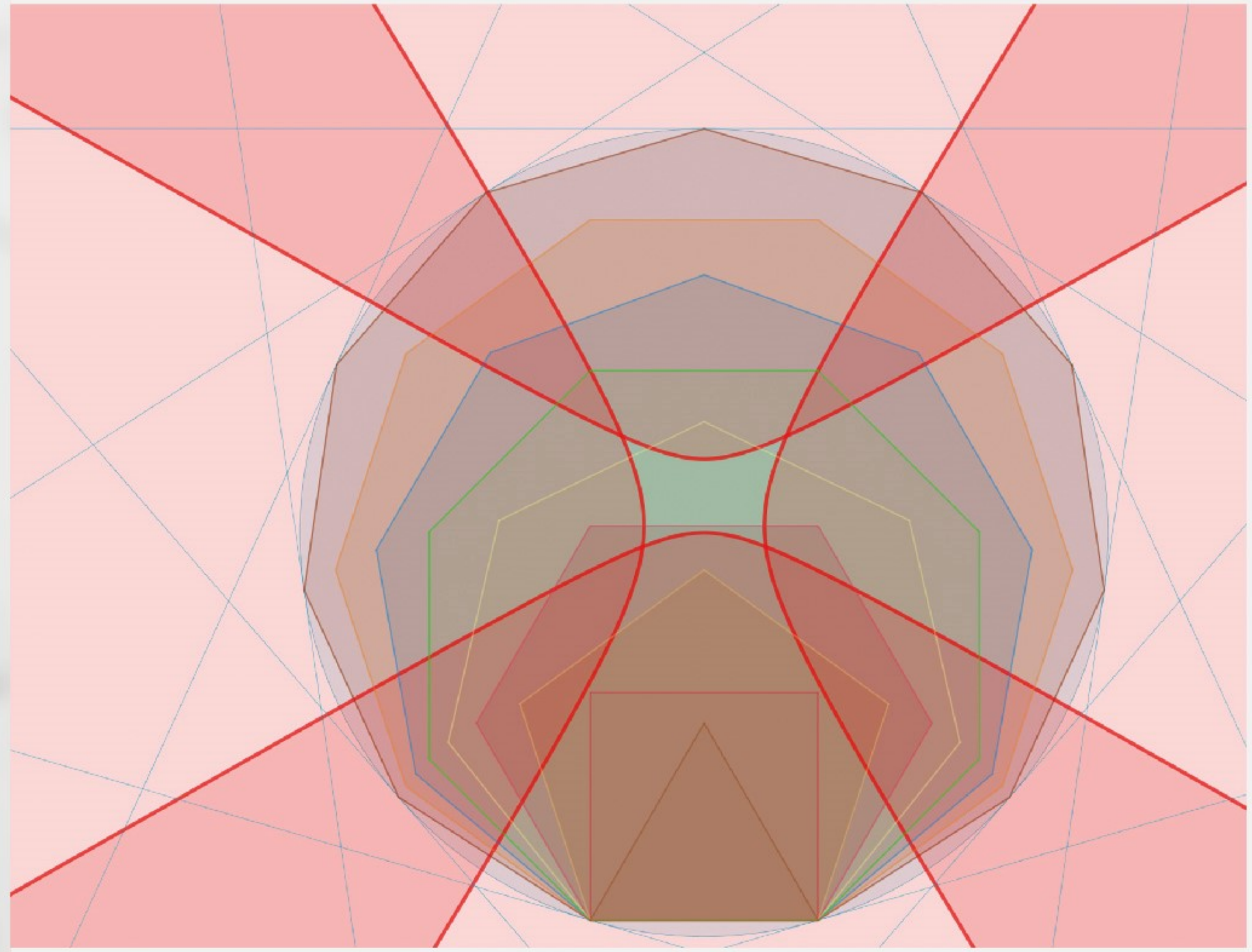
El libro de *Cálculo Diferencial con Aplicaciones*, fue escrito por los docentes de matemáticas: Julio Cesar Romero Pabon, Gabriel Mauricio Vergara Ríos y Alberto Mario Reyes Linero, el cual fue diseñado para el estudio, comprensión y aplicación del cálculo diferencial, con el objeto que el estudiante o lector desarrolle las competencias del cálculo de una variable. Brindando así una estrategia para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El libro contiene conceptos, ilustraciones, gráficos y problemas de aplicación de las otras ciencias que implican el uso del cálculo diferencial, los cuales se encuentran detallados en los XXI capítulos que trata esta obra, los cuales inician con el capítulo I sobre desigualdades e intervalos y finalizan con el capítulo XXI de máximos y mínimos de una función.

Escanée el código QR para conocer más títulos publicados por el Sello Editorial Universidad del Atlántico

ISBN 978-958-5525-42-9
9 789585 525429 >

Universidad del Atlántico

Sello Editorial
UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO



Cálculo diferencial con aplicaciones

Julio Cesar **Romero Pabon**
Gabriel Mauricio **Vergara Ríos**
Alberto Mario **Reyes Linero**

Cálculo diferencial
con aplicaciones

Julio Cesar **Romero Pabon**
Gabriel Mauricio **Vergara Ríos**
Alberto Mario **Reyes Linero**

Universidad del Atlántico

ACREDITACIÓN INSTITUCIONAL DE ALTA CALIDAD

Cálculo diferencial con aplicaciones

Julio Cesar **Romero Pabon**
Gabriel Mauricio **Vergara Ríos**
Alberto Mario **Reyes Linero**

Sello Editorial
UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

Catalogación en la publicación. Universidad del Atlántico. Departamento de Bibliotecas
Romero Pabón, Julio Cesar
Cálculo diferencial : con aplicaciones / Julio Cesar Romero Pabón, Gabriel Mauricio Vergara Ríos, Alberto Mario Reyes Linero – Barranquilla: Sello Editorial Universidad del Atlántico, 2018.
193 páginas. Tamaño 21 x 27 centímetros. Ilustraciones. Incluye bibliografía.
ISBN 978-958-5525-42-9 (Libro descargable PDF)
1.Cálculo diferencial 2. Cálculo diferencial – problemas – ejercicios – etc
I. Julio Cesar Romero Pabón II. Gabriel Mauricio Vergara Ríos III. Alberto Mario Reyes Linero.
CDD: 515.33 R763

CÁLCULO DIFERENCIAL CON APLICACIONES
Autores: Julio Cesar Romero Pabón • Gabriel Mauricio Vergara Ríos • Alberto Mario Reyes Linero

Edición:
Sello Editorial Universidad del Atlántico
Km 7 Vía Puerto Colombia (Atlántico)
www.uniatlantico.edu.co
publicaciones@mail.uniatlantico.edu.co

Impresión:
Calidad Gráfica S.A.
Av. Circunvalar Calle 110 No. 6QSN-522
PBX: 336 8000
lsalcedo@calidadgrafica.com.co
Barranquilla, Colombia

Publicación Electrónica
Barranquilla (Colombia), 2018

Cómo citar este libro:
Romero Pabón, J. C., Vergara Ríos, G. M., & Reyes Linero, A. M. (2018). *Cálculo diferencial con aplicaciones*. Barranquilla: Ediciones Universidad del Atlántico.

Dedicatoria

A nuestros padres:

Con respeto y admiración; por su fe, cariño, sacrificio, esfuerzo, enseñanza, orientación y ejemplo. Porque han infundido en nosotros sabiduría de las Sagradas Escrituras, haciendo que hoy tengamos el conocimiento de lo que somos.

A nuestros hermanos:

Por el apoyo que siempre nos han brindado con su impulso, fuerza y tenacidad que son parte de mi formación. Como muestra de gratitud les dedico este trabajo.

A nuestras esposas:

Por su amor, por todo su apoyo y confianza.

A nuestros hijos:

Porque son el aliento que nos da ánimo para seguir siempre adelante.

AGRADECIMIENTOS

A Dios:

Por su misericordia y protección, por las bendiciones recibidas, por ayudarme a terminar un proyecto más en mi vida, y por darme las fuerzas para seguir adelante. Gracias Dios mío por estar siempre conmigo.

A nuestras familias:

Por su amor y apoyo recibido.

A los profesores y directivos de la Universidad del Atlántico:

Por su amabilidad, confianza, cooperación y todas las atenciones que han tenido con nosotros; su ayuda fue de gran utilidad en el desarrollo de este trabajo.

Con todo respeto y gratitud a quienes de una u otra manera nos han apoyado y nos han transmitido su valioso conocimiento y experiencia, también por todas las facilidades prestadas para la realización de este proyecto.

A los amigos:

Por compartir sus experiencias en el transcurso de este proyecto de investigación. Y por su apoyo incondicional.

A la Universidad del Atlántico:

Por brindarnos la oportunidad de ampliar y difundir nuestros conocimientos en tan prestigiosa institución.

C O N T E N I D O

DEDICATORIA 5

AGRADECIMIENTOS 7

PRÓLOGO 17

PRESENTACIÓN 19

INTRODUCCIÓN 21

Capítulo I

DESIGUALDADES E INTERVALOS 25

INTRODUCCIÓN A DESIGUALDADES E INTERVALOS 25

Capítulo II

VALOR ABSOLUTO 39

CONCEPTOS BÁSICOS DEL VALOR 39

Capítulo III

PLANO CARTESIANO 51

EL SISTEMA RECTANGULAR DE COORDENADAS 51

Capítulo IV

FUNCIONES 59

CONCEPTO DE FUNCIÓN 59

Capítulo V

FUNCIÓN LINEAL 69

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN LINEAL 69

Capitulo VI

FUNCION CUADRÁTICA 79

DEFINICION DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA 79

Capítulo VII

SUCESIONES 87

SUCESIONES INFINITAS 87

Capítulo VIII

LÍMITE DE FUNCIONES 101

ANÁLISIS DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN 101

Capítulo IX

DERIVADA DE FUNCIONES 121

CONCEPTO DE LA DERIVADA 121

Capítulo X

REGLAS DE DERIVACIÓN 127

ANÁLISIS DE LAS REGLAS DE DERIVACIÓN 127

Capítulo XI
REGLA DE LA CADENA 133
TEOREMA REGLA DE LA CADENA 133
Capítulo XII
DERIVACIÓN IMPLÍCITA 139
DEFINICIÓN DE LA DERIVADA IMPLÍCITA 139
Capítulo XIII
APLICACIONES DE LA DERIVADA 145
LA DERIVADA EN OTRAS CIENCIAS 145
Capítulo XIV
DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS 155
TEOREMAS SOBRE LA DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS 155
Capítulo XV
DERIVADA DE UN LOGARITMO 161
DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN LOGARÍTMICA 161
Capítulo XVI
DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES 165
DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL 165
Capítulo XVII
DERIVADA DE FUNCIONES CON VALOR ABSOLUTO 169
DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN CON VALOR ABSOLUTO 169
Capítulo XVIII
DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS 171
DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS 171
Capítulo XIX
DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR 175
DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR 175
Capítulo XX
APLICACIONES DE LA DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR 177
APLICACIONES DE LA DERIVADA. LAS FUNCIONES Y LOS CRITERIOS DE LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA 177
Capítulo XXI
MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FUNCIONES 183
PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS 183
CONCLUSIONES 187
RECOMENDACIONES 189
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 191
ACERCA DE LOS AUTORES 193

LISTA DE GRÁFICAS

Fórmulas de área 22

Fórmulas de volumen 23

Gráfica 1. Intervalo cerrado 28

Gráfica 2. Intervalo cerrado 28

Gráfica 3. Intervalo abierto 28

Gráfica 4. Intervalo abierto 29

Gráfica 5. Intervalo abierto a la derecha 29

Gráfica 6. Intervalo abierto a la derecha 29

Gráfica 7. Intervalo abierto a la izquierda 29

Gráfica 8. Intervalo abierto a la izquierda 30

Gráfica 9. Intervalo infinito 30

Gráfica 10. Intervalo infinito 30

Gráfica 11. Intervalo infinito 30

Gráfica 12. Intervalo infinito 30

Gráfica 13. Intervalo infinito 31

Gráfica 14. Intervalo infinito 31

Gráfica 15. Intervalo infinito 31

Gráfica 16. Intervalo infinito 31

Gráfica 17. Operación con intervalos 32

Gráfica 18. Operación con intervalos 32

Gráfica 19. Desigualdades e intervalos 35

Gráfica 20. Desigualdades e intervalos 36

Gráfica 21. Desigualdades e intervalos 46

Gráfica 22. El plano cartesiano 51

Gráfica 23. Puntos en el plano cartesiano 52

Gráfica 24. Cuadrantes en el plano cartesiano 53

Gráfica 25. Distancia entre dos puntos 53

Gráfica 26. Distancia entre dos puntos 54

Gráfica 27. Distancia entre dos puntos 55

Gráfica 28. Punto medio 56

Gráfica 29. Triángulo isósceles 57

Gráfica 30. Relación entre conjuntos que no es una función 59

Gráfica 31. Relación entre conjuntos que no es una función 60

Gráfica 32. Relación entre conjuntos que es una función 60

Gráfica 33. Función entre conjuntos 62

Gráfica 34. Función entre conjuntos 63

Gráfica 35. Función lineal 64

Gráfica 36. Función lineal 65

Gráfica 37. Función lineal 66

Gráfica 38. Función lineal 67

Gráfica 39. Función lineal 70

Gráfica 40. Función lineal 72

Gráfica 41. Función lineal 75

Gráfica 42. Función cuadrática 80

Gráfica 43. Función cuadrática 82

Gráfica 44. Función cuadrática 84

Gráfica 45. Función cuadrática 88

Gráfica 46. Función cuadrática 89

Gráfica 47. Entorno 90

Gráfica 48. Sucesiones 91

Gráfica 49. Sucesiones 92

Gráfica 50. Límite sucesiones........ 93

Gráfica 51. Límite sucesiones........ 94

Gráfica 52. Límite sucesiones........ 94

Gráfica 53. Límite de funciones........ 101

Gráfica 54. Límite de funciones........ 102

Gráfica 55. Límite de funciones........ 103

Gráfica 56. Límite de funciones........ 105

Gráfica 57. Límite de funciones........ 107

Gráfica 58. Límite de funciones trigonométricas 113

Gráfica 59. Continuidad puntual........ 116

Gráfica 60. Continuidad puntual........ 117

Gráfica 61. Continuidad puntual........ 118

Gráfica 62. La derivada 121

Gráfica 63. De la secante a la tangente........ 122

Gráfica 64. Recta tangente a una curva........ 123

Gráfica 65. Recta tangente a una curva........ 124

Gráfica 66. Recta tangente a una curva........ 128

Gráfica 67. Recta tangente a una curva........ 136

Gráfica 68. Recta tangente y normal a una curva 142

Gráfica 69. Razón de cambio 147

Gráfica 70. Razón de cambio en la alberca........ 148

Gráfica 71. Circuito RC 149

Gráfica 72. Razón de cambio 152

Gráfica 73. Graficando con la derivada 179

Gráfica 74. Graficando con la derivada 180

Gráfica 75. Graficando con la derivada 182

Gráfica 76. Área del corral........ 183

Gráfica 77. Área de un cilindro circular recto 184

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Desigualdad con valor absoluto 47

Tabla 2. Desigualdad con valor absoluto 47

Tabla 3. Valores de x vs y 69

Tabla 4. Valores de x vs y de una parábola 80

Tabla 5. Valores de x vs y de una parábola 81

Tabla 6. Valores de x vs y de una parábola 84

Tabla 7. Valores de x vs y de una parábola 150

Tabla 8. Aplicación del criterio de la primera derivada 178

Tabla 9. Aplicación del criterio de la primera derivada 180

Tabla 10. Aplicación del criterio de la primera y segunda derivada 181

Resumen

El uso y aplicación del cálculo diferencial en los estudiantes de la universidad permite que desarrollen competencias en el planteamiento, análisis, modelación y aplicación de problemas que impliquen el conocimiento matemático para la solución de problemas presentes tanto en los proyectos de investigaciones como en su campo laboral. Es por eso que esta obra se ha realizado, con el objeto de brindar al estudiante o investigador una herramienta que le facilite la comprensión y aplicación del cálculo diferencial como son los temas de desigualdades, funciones, sucesiones, límite y derivada de funciones. Teniendo en cuenta lo anterior se ha diseñado este libro con el objeto de brindar al lector la comprensión de estos tópicos que son fundamentales y muy significativos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ciencias y en especial de las matemáticas.

Abstract

The use and application of differential calculus in university students allows them to develop skills in the approach, analysis, modeling and application of problems involving mathematical knowledge for the solution of problems present in both research projects and in their field of work. Because of that this work has been carried out, in order to provide the student or researcher with a tool that facilitates the understanding and application of differential calculus arccy such as inequality, functions, successions, limit and derivative of functions. Taking into account the above, this book has been designed with the aim of providing the reader with an understanding of these topics that are fundamental and very significant in the teaching and learning processes of sciences and especially, of mathematics.

Prólogo

Esta obra sobre el cálculo diferencial ha sido diseñada como una guía de estudio para los estudiantes y docentes que estén cursando o necesiten aplicar los tópicos fundamentales del cálculo diferencial. Los conceptos, ejercicios y problemas son tratados didácticamente, lo cual se puede evidenciar cuando se analiza o resuelve un problema, el cual es realizado paso a paso en cada uno de los temas tratados en esta obra. Además, se incorporan definiciones y teoremas que son fundamentales para abordar la solución de los problemas.

Nuestra experiencia como docentes de matemática durante muchos años, nos ha demostrado que esta disciplina es difícil de aprender sin practicarla, por tal motivo, se han incorporado al final de cada capítulo un grupo de problemas propuestos, con el fin de que el estudiante reconstruya los esquemas cognitivos por medio de las situaciones (ejercicios o talleres) de interacción que sean significativas de acuerdo con su nivel de desarrollo.

LOS AUTORES

Presentación

Esta obra está orientada a fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial en las instituciones de educación superior. Para que los estudiantes y docentes dispongan de un material bibliográfico cuando estén solucionando un problema en sus investigaciones o en el trabajo, el libro contempla métodos y técnicas útiles para todos los campos del conocimiento, porque con ellos es posible comprender y aplicar tópicos del cálculo diferencial como desigualdades, funciones, sucesiones, límite y derivada de funciones.

La intención de esta obra es presentar un material de cálculo diferencial completo, fácil de comprender, para llegar no solo a los interesados en entender el cálculo diferencial, que tanto se usa y se aplica en la realidad, sino también a los estudiantes que no estén interesados en el cálculo diferencial como disciplina, pero sí como herramienta útil en otras áreas de conocimiento.

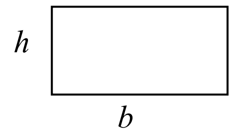
El mayor esfuerzo de este proyecto sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial va dirigido al estudiante, pues en el libro los temas son presentados con una gran variedad de estrategias encaminadas a brindar un escenario significativo para el aprendizaje del cálculo. Es por estas razones que los ejemplos fueron diseñados y seleccionados para que el estudiante o lector comprenda y aplique fácilmente cada uno de los tópicos tratados en esta obra.

Profesores se encargaron de la revisión de: la teoría, los ejemplos, los talleres y aplicaciones, que contribuyeran con potenciar este proyecto de matemáticas. Es por esto, que hoy consideramos conveniente presentar esta obra, porque cada uno de sus capítulos fue elaborado para que el lector conciba y aplique cada uno de los temas del cálculo diferencial tratados en este libro.

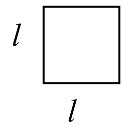
Introducción

En el mundo actual están presentes los cálculos, por ejemplo: el análisis y evolución de un sistema, la modelación matemática de un fenómeno o situación, minimizar o maximizar funciones que rigen un suceso o evento; todos estos casos mencionados son ejemplos cruciales de la importancia del cálculo diferencial en esta era. Los aportes del cálculo han sido las bases para el desarrollo de la ciencia, en especial para los ingenieros, matemáticos, físicos, contadores, economistas e investigadores que aplican y estudian esta importante **área del conocimiento**. Un ejemplo de esto es como el cálculo ha avanzado tanto que hoy en día se habla de su importancia y transversalidad en casi todas las profesiones.

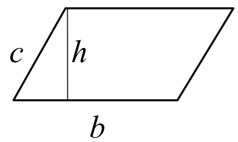
Es importante resaltar que el cálculo diferencial es una de las piedras que forman la base para la construcción de la ciencia. Esa es una de las razones por la cual es indispensable su enseñanza en las instituciones de educación superior. Es de resaltar que los modelos matemáticos son esquemas capaces de simbolizar, mediante funciones, fenómenos o sucesos presentes en la naturaleza o en otras ciencias. El cálculo se ocupa de la construcción de los modelos matemáticos que ayudan a tomar decisiones sujetas a las condiciones del problema que se está estudiando. Las reglas o métodos matemáticos son un conjunto de conocimientos útiles para todos los otros campos del saber, porque con ellos podemos modelar, organizar, describir y realizar inferencias de una investigación o estudio.



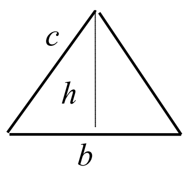
Área de un rectángulo $A = b\,h$



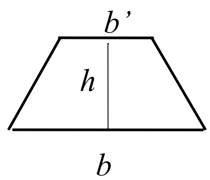
Área del cuadrado $A = l^2$



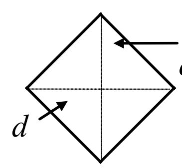
Área de un paralelogramo $A = b\,h$



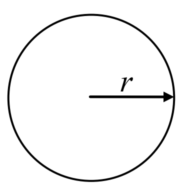
Área del triángulo $A = \frac{1}{2}bh$



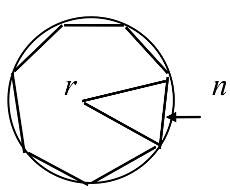
Área de un trapezoide $A = \frac{1}{2}h\,(b + b')$



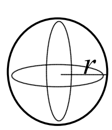
Área de un rombo $A = \frac{1}{2}dd'$



Área del círculo $A = \pi r^2$

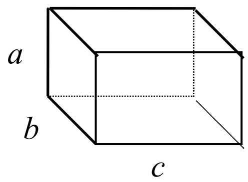


Área de un sector circular $A = \frac{n}{360}\pi\, r^2$

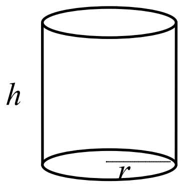


Área de la esfera $A = 4\,\pi r^2$

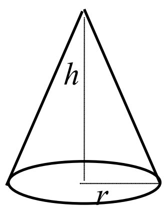
Fórmulas de área



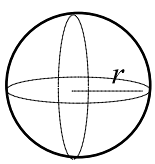
Volumen del paralelepípedo $V = a\,b\,c$



Volumen del cilindro $V = \pi r^{2} h$



Volumen del cono $V = \frac{1}{3}\pi\ r^{2}h$



Volumen de la esfera $V = \frac{4}{3}\pi\ r^{3}$

Fórmulas de volumen

Capítulo I

Desigualdades e intervalos

INTRODUCCIÓN A DESIGUALDADES E INTERVALOS

En este capítulo estudiaremos las desigualdades entre números reales con sus propiedades y repasaremos también las inecuaciones. Veremos cómo los procedimientos seguidos en la solución de desigualdades son similares a los usados en la solución de ecuaciones, aunque, existen ciertas excepciones.

Desigualdades

La afirmación de que una expresión algebraica es mayor que (o menor que), otra expresión algebraica se llama desigualdad [1]. Las expresiones, llamadas *miembros de la desigualdad*. Deben ser números reales. Los símbolos usuales de desigualdad son > y < y se leen, respectivamente, *es mayor que* y *es menor que.*

Si a y b son números reales, la desigualdad a es mayor que b escrita a > b significa que a - b es un número real positivo.

La desigualdad *a es menor que b*, escrita $a < b$ significa que $b - a$ es un número real positivo.

Propiedades de las desigualdades

Sean $a, b \in$ **R. Si** *a < b y b < c, entonces a < c*

En efecto, $a < b$ *y* $b < c \Rightarrow (b - a) \in \mathbf{R}^{+\text{ y }(c - b) \in \mathbf{R}+}$

$[(b - a) + (c - b)] \in \mathbf{R}^{+}$

$[(b - a + c - b)] \in \mathbf{R}^{+}$

$[(-a+c)] \in \mathbf{R}^+$

$[(c-a)] \in \mathbf{R}^+$

$a < c$

Esta propiedad se conoce como *ley transitiva* de la relación <.

- El sentido de una desigualdad no cambia si se suman a ambos miembros de la desigualdad un mismo número real; en símbolos: si $a < b$ entonces $a + c < b + c\ \forall a, b, c \in \mathbf{R}$.

En efecto, puesto que $a < b \Rightarrow (b - a) \in \mathbf{R}^+$ entonces para todo número real c, se verifica que: $b - a = b + c - c - a = (b + c) - (c + a)$. Luego $[(b + c) - (c + a)] \in \mathbf{R}^+$ y podemos concluir que $a + c < b + c\ \forall a, b, c \in \mathbf{R}$.

Esta propiedad nos permite afirmar que los términos de una desigualdad se pueden trasponer en la misma forma que en una ecuación.

- El sentido de una desigualdad no cambia si ambos miembros se multiplican por un mismo número real positivo. Esto es, si $a < b$, entonces $ac < bc$ $\forall\ c \in \mathbf{R}^+$.

En consecuencia, si se tiene que $a < b$, entonces $(b - a) \in \mathbf{R}^+$ puesto que $c \in \mathbf{R}^+$, se sigue que $(b - a)\ c \in \mathbf{R}^+$. Multiplicando tenemos que $bc\text{-}ac \in \mathbf{R}^+$, y de aquí se concluye que $ac < bc\ \forall\ c \in \mathbf{R}^+$.

- El sentido de una desigualdad cambia o se invierte si ambos miembros se multiplican por un mismo número real negativo. Esto es, si $a < b$, entonces $ac > bc\ \forall\ c \in \mathbf{R}^-$

En efecto, si $a < b$, $(b - a) \in \mathbf{R}^+$ puesto que $c \in \mathbf{R}^-$, se sigue que $(b - a)\ c \in \mathbf{R}^-$. Multiplicando tenemos que $bc\text{-}ac \in \mathbf{R}^-$, luego $ac\text{-}bc \in \mathbf{R}^+$ y de aquí se concluye que $ac > bc\ \forall\ c \in \mathbf{R}^-$

Muchos teoremas son consecuencias de la definición y de las propiedades anteriores.

TEOREMA 1. *Sean a, b, c, d ∈ **R**. Si a < b y c < d, entonces a + c < b + d.*

Demostración:

$a < b$ y $c < d \Rightarrow (b - a) \in \mathbf{R}^+$ y $(d - c) \in \mathbf{R}^+$

$\Rightarrow [(b - a) + (d - c)] \in \mathbf{R}^+$

$\Rightarrow [(b - a + d - c)] \in \mathbf{R}^+$

$\Rightarrow [(b + d - a - c)] \in \mathbf{R}^+$

$\Rightarrow [(b + d) - (a + c)] \in \mathbf{R}^+$

$a + c < b + d$

TEOREMA 2. *Sean $a, b \in \mathbf{R}$. Si $a\,b > 0$, entonces $(a > 0$ y $b > 0)$ o $(a < 0$ y $b < 0)$*

Demostración:

Vamos a realizar una demostración por integración.

Caso 1. Ni a ni b pueden ser cero, puesto que si uno de ellos fuera cero se tendría que $ab = 0$, lo cual es contrario a nuestra hipótesis.

Caso 2. Si a o b es positivo, digamos $a > 0$ y si $b < 0$, entonces $ab < 0$, lo cual es contrario a la hipótesis. Se sigue entonces que si a es positivo, entonces b es positivo y si b es positivo, entonces a es positivo.

Caso 3. Si a o b es negativo, digamos $a > 0$, y si $b < 0$, entonces $ab < 0$, lo cual es contrario a la hipótesis. Se sigue pues que si a es negativo o b es negativo, entonces el otro debe ser negativo.

Intervalos finitos.

Si se tiene que $a, b, c \in \mathbf{R}$ con la condición que $a < b$ y $b < c$, se puede expresar esto de la forma $a < b < c$. Cuando esto ocurra decimos que b está entre a y c.

Ejemplo 1.1.

Sabemos que $-1 < 4$ y también que $4 < 7$, entonces $-1 < 4 < 7$, esto es, 4 está entre -1 y 7.

Indicamos que $a \leq b$ si sucede una de las siguientes circunstancias: $a < b$ (1); $a = b$ (2), es decir que a es menor que b o a es igual a b.

En forma análoga a la anterior $a \geq b$ representa que $a > b$ o $a = b$.

Si se tienen las desigualdades $a \leq b$ y $b \leq c$, se pueden escribir como $a \leq b \leq c$.

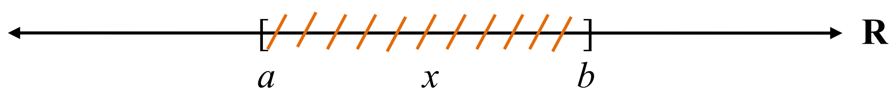
Estudiaremos ahora ciertos tipos de subconjuntos del conjunto de **R** de los números reales que son de gran importancia en el cálculo diferencial e integral.

Puesto que hemos identificado los reales con los puntos de una recta, estos subconjuntos pueden ser mirados como subconjuntos de dicha recta, y estarán determinados por desigualdades y algunos de ellos recibirán el nombre de *intervalos.*

Intervalo cerrado.

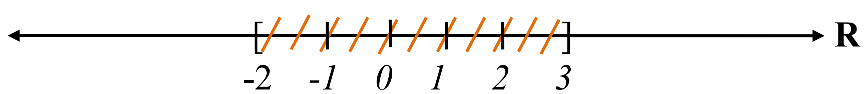
Sean a, b números reales tales que $a < b$. si x es un número real tal que $a \leq x$ y $x \leq b$, es decir, $a \leq x \leq b$, entonces el conjunto $\{x \in \mathbf{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$ es el conjunto de todos los números reales que se caracterizan por ser mayores o iguales que a y ser menores o iguales que b se llama ***intervalo cerrado*** de extremos a y b y se denota por $\mathbf{[a, b]}$.

Luego $\mathbf{[a, b] = \{x \in R \ / \ a \leq x \leq b\}}$



Gráfica 1. Intervalo cerrado

Ejemplo 1.2 El intervalo cerrado de extremos -2 y 3 es $[-2, 3] = \{x \in \mathbf{R} \ / \ -2 \leq x \leq 3\}$ Gráficamente, en la recta numérica sería:

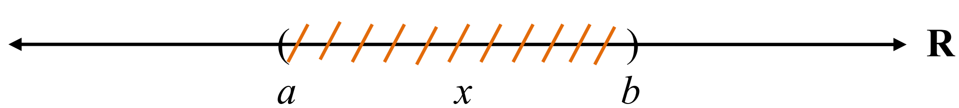


Gráfica 2. Intervalo cerrado

Intervalo abierto.

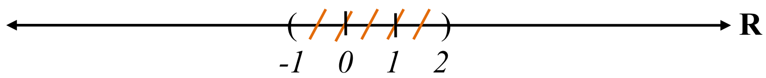
Sean a, b números reales tales que $a < b$. si x es un número real tal que $a < x$ y $x < b$, es decir, $a < x < b$, entonces el conjunto $\{x \in \mathbf{R} \ / \ a < x < b\}$ es el conjunto de todos los números reales que se caracterizan por ser mayores que a y ser menores que b se llama ***intervalo abierto*** de extremos a y b y se denota por $\mathbf{(a, b)}$.

Luego $\mathbf{(a, b) = \{x \in R \ / \ a < x < b\}}$



Gráfica 3. Intervalo abierto

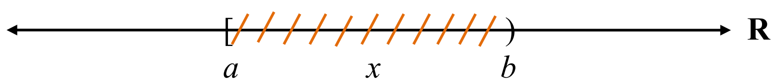
Ejemplo 1.3. El intervalo abierto de extremos -1 y 2 es (-1, 2) = {**x** ∈ **R** / -1 < *x* < 2} Gráficamente, en la recta numérica sería:



Gráfica 4. Intervalo abierto

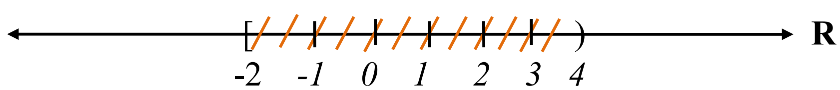
Intervalo abierto a la derecha.

Sean *a, b* números reales tales que *a* < *b.* si *x* es un número real tal que *a* ≤ *x* y *x* < *b*, es decir, *a* ≤ *x* < *b,* entonces el conjunto {*x* ∈ **R** / *a* ≤ *x* < *b*} es el conjunto de todos los números reales que se caracterizan por ser mayores o iguales que *a* y ser menores que *b* se llama ***intervalo abierto a la derecha*** de extremos *a* y *b* y se denota por **[*a, b*).** Luego [*a, b*) = {*x* ∈ *R* / *a* ≤ *x* < *b*}.



Gráfica 5. Intervalo abierto a la derecha

Ejemplo 1.4. El intervalo abierto a la derecha de extremos -2 y 4 es [-2, 4) = {*x*∈**R** / -2 ≤ *x* < 4} Gráficamente, en la recta numérica sería:

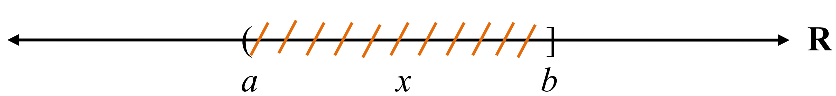


Gráfica 6. Intervalo abierto a la derecha

Intervalo abierto a la izquierda.

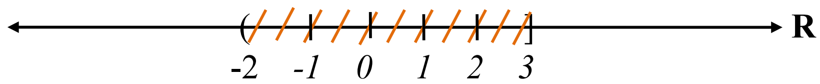
Sean *a, b* números reales tales que *a* < *b,* si *x* es un número real tal que *a* < *x* y *x* ≤ *b*, es decir, *a* < *x* ≤ *b,* entonces el conjunto {*x* ∈ **R** / *a* < *x* ≤ *b*} es el conjunto de todos los números reales que se caracterizan por ser mayores que *a* y ser menores o iguales que *b* se llama ***intervalo abierto a la izquierda*** de extremos *a* y *b* y se denota por **(*a, b*].**

Luego **(a, b] = {x ∈ R / a < x ≤ b}**



Gráfica 7. Intervalo abierto a la izquierda

Ejemplo 1.5. El intervalo abierto a la izquierda de extremos -2 y 3 es (-2, 3] = $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R} \ / \ -2 < x \leq 3\}$ Gráficamente, en la recta numérica sería:

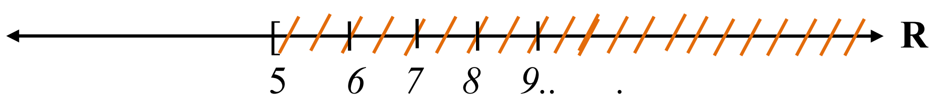


Gráfica 8. Intervalo abierto a la izquierda

Intervalos infinitos.

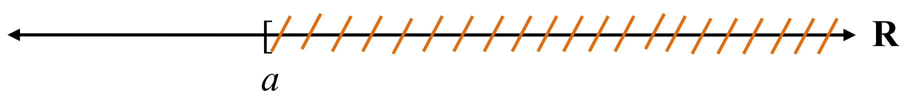
- Sea $a \in \mathbf{R}$, el conjunto de todos los números reales que se caracterizan por ser mayores o iguales que a, es decir $\{x \in \mathbf{R} \ / \ a \leq x\}$ se denota por $[a. \infty]$

Ejemplo 1.6. El conjunto de todos los números reales mayores o iguales que 5 lo representamos por [5, ∞], gráficamente, en la recta numérica, tendríamos:



Gráfica 9. Intervalo infinito

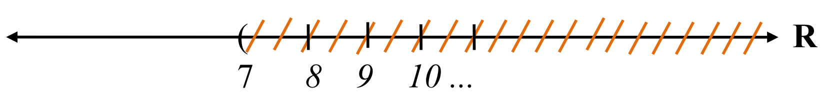
El intervalo $[a. \infty]$ lo mostramos en la siguiente recta numérica:



Gráfica 10. Intervalo infinito

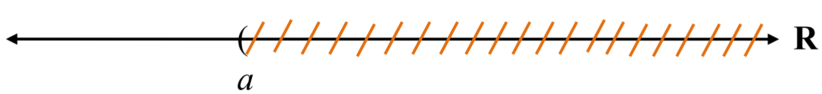
- Sea $a \in \mathbf{R}$, el conjunto de todos los números reales que son mayores que a, es decir $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R} / \ a < x\}$ se denota por $(a. \infty)$.

Ejemplo 1.7. El conjunto de todos los números reales mayores que 7 lo representamos por (7, ∞), gráficamente, en la recta numérica, sería:



Gráfica 11. Intervalo infinito

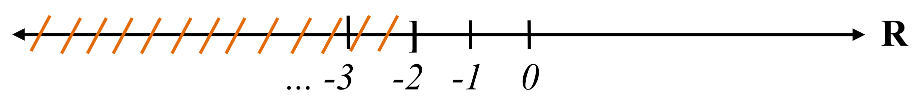
El intervalo $(a. \infty)$ lo mostramos en la siguiente recta numérica:



Gráfica 12. Intervalo infinito

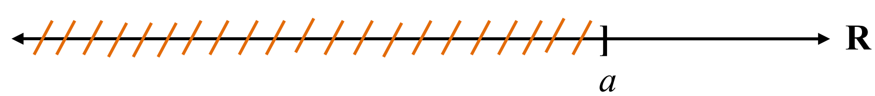
- Sea $a \in \mathbf{R}$, el conjunto de todos los números reales que son menores o iguales que a, es decir $\{x \in \mathbf{R} \ / \ x \leq a\}$ se denota por $(- \infty, a]$.

Ejemplo 1.8. El conjunto de todos los números reales menores o iguales que - 2 lo representamos por $(- \infty, -2]$, gráficamente, en la recta numérica, tendríamos:



Gráfica 13. Intervalo infinito

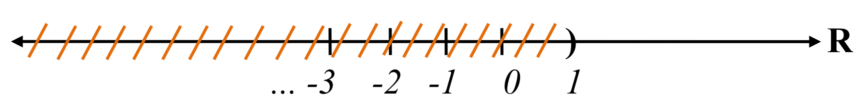
El intervalo $(- \infty, a]$ lo mostramos en la siguiente recta numérica:



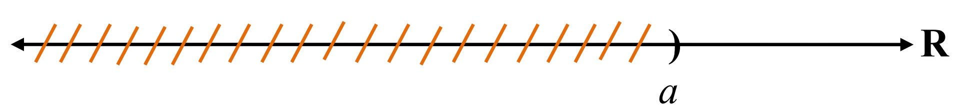
Gráfica 14. Intervalo infinito

- Sea $a \in \mathbf{R}$, el conjunto de todos los números reales que son menores que a, es decir $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R} \ / \ x < a\}$ se denota por $(- \infty, a)$.

Ejemplo 1.9. El conjunto de todos los números reales menores que 1 lo representamos por $(- \infty, 1)$, gráficamente, en la recta numérica, tendríamos:



Gráfica 15. Intervalo infinito



Gráfica 16. Intervalo infinito

Operaciones con intervalos.

Por ser los intervalos subconjuntos de los **R** (números reales) están definidas para ellos las operaciones entre conjuntos, es decir, la unión, intersección, diferencias y diferencia simétrica. Ejemplos:

Ejemplo 1.10. Sean A = [2, 5] y B = [-1, 4]

Hallar: a) A∪B b) A∩B c) A - B d) B - A y e) A Δ B

Solución:

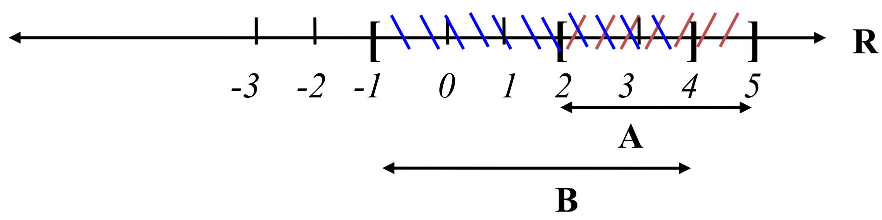
a) A∪B = [2, 5] ∪ [-1, 4] = [-1, 5] (ver la gráfica)

b) A∩B = [2, 5] ∩ [-1, 4] = [2, 4] (ver la gráfica)

c) A - B = [2, 5] - [-1, 4] = (4, 5] (ver la gráfica)

d) B - A = [-1, 4] - [2, 5] = [-1, 2) (ver la gráfica)

e) A Δ B = [2, 5] Δ [-1, 4] = (A∪B) - (A∩B) = [-1, 2) ∪ (4, 5]



Gráfica 17. Operación con intervalos

Ejemplo 1.11. Sean A = (0, 6] y B = (2, 5)

Hallar: a) A∪B b) A∩B c) A - B d) B - A y e) A Δ B

Solución:

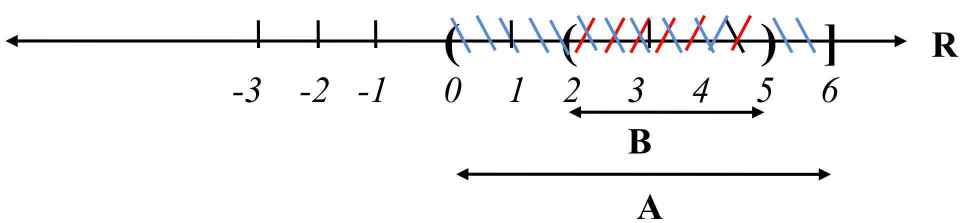
a) A∪B = (0, 6] ∪ (2, 5) = (0, 6] (ver la gráfica)

b) A∩B = (0, 6] ∩ (2, 5) = (2, 5) (ver la gráfica)

c) A - B = (0, 6] - (2, 5) = (0, 2] ∪ [5, 6] (ver la gráfica)

d) B - A = (2, 5) - (0, 6] = ∅ (ver la gráfica)

e) A Δ B = (0, 6] Δ (2, 5) = (A∪B) - (A∩B) = (0, 2] ∪ [5, 6]



Gráfica 18. Operación con intervalos

Desigualdades condicionales.

Una desigualdad es condicional si es satisfecha por algunos números reales solamente, es decir por todos los elementos de un subconjunto propio de **R.**

Ejemplo 1.12.

$x + 7 > 0$ es una desigualdad condicionada ya que el conjunto solución es ***S*={**$x \in \mathbf{R} \,/\, x > -7$}.

Los siguientes ejemplos ilustran el uso de las propiedades en la solución de desigualdades condicionales que llamamos *inecuaciones.*

Ejemplos 1.13.

1. Hallar el conjunto solución de la desigualdad $3x + 2 < 2x + 4$.

Solución:

$3x + 2 < 2x + 4 \Leftrightarrow 3x < 2x + 2$ sumando - 2 a ambos miembros.

$\Leftrightarrow x < 2$ sumando $-2x$ a ambos miembros.

Luego el conjunto solución es ***S*={**$x \in \mathbf{R} \,/\, x < 2$} = $(-\infty, 2)$.

Ejemplos 1.14. Hallar el conjunto solución de $4x - 2 > 6$.

Solución:

$4x - 2 > 10 \Leftrightarrow 4x > 12$ sumando 2 a ambos miembros.

$\Leftrightarrow x > 3$ multiplicando ambos miembros por ¼.

Luego el conjunto solución es ***S*={**$x \in \mathbf{R} \,/\, x > 3$} = $(3, \infty)$.

Ejemplos 1.15. Hallar el conjunto solución de $2x - 3 \geq -2$.

Solución:

$2x - 3 \geq -2 \Leftrightarrow 2x \geq 1$ sumando 3 a ambos miembros.

$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$ multiplicando ambos miembros por ½.

Luego el conjunto solución es ***S*={**$x \in \mathbf{R} \,/\, x \geq \frac{1}{2}$ } = $[\frac{1}{2}, \infty)$.

Ejemplos 1.16. Hallar el conjunto solución de la inecuación $(2x + 5)(x - 3) > 0$.

Solución:

Por el teorema 1 sabemos que $a\,b > 0$, entonces ($a > 0$ y $b > 0$) o ($a < 0$ y $b < 0$).

Si $(2x + 5)(x - 3) > 0$, entonces se tiene que:

$$(2x+5)(x-3)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5>0 \\ \text{y} \\ x-3>0 \end{cases} (1) \quad \text{o} \quad \begin{cases} 2x+5<0 \\ \text{y} \\ x-3<0 \end{cases} (2)$$

Por tanto,

$$(2x+5)(x-3)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{5}{2} \\ \text{y} \\ x>3 \end{cases} (1) \quad \text{o} \quad \begin{cases} x<-\dfrac{5}{2} \\ \text{y} \\ x<3 \end{cases} (2)$$

Seguidamente buscamos los valores de x que satisfacen las desigualdades:

$x > -5/2$ y $x > 3$, el conjunto solución de las inecuaciones obtenidas en (1) es:

S1 = $(-5/2, \infty) \cap (3, \infty) = (3, \infty)$.

ó

$x < -5/2$ y $x < 3$, el conjunto solución de las inecuaciones obtenidas en (2) es:

S2 = $(-\infty, -5/2) \cap (-\infty, 3) = (-\infty, -5/2)$.

Por último, el conjunto solución es: **S = S1** ∪ **S2 =** $(-\infty, -5/2) \cup (3, \infty)$.

Un método alternativo para encontrar la solución de la inecuación $(2x + 5)(x - 3) > 0$ ***es el siguiente:***

Representamos gráficamente cada uno de los factores de la inecuación.

Observamos los valores de x que hacen que el producto cumpla con la desigualdad pedida.

Se representa en una recta numérica el conjunto solución.

Así, buscamos los ceros relativos:

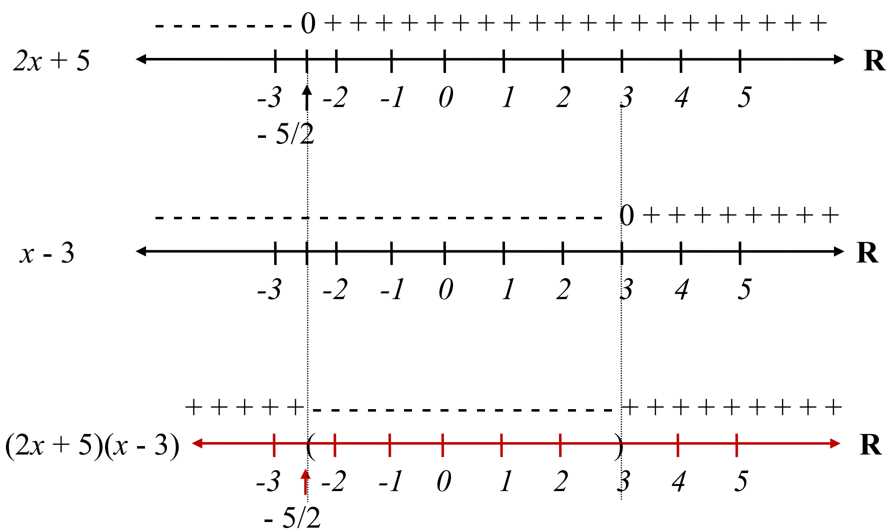
$2x + 5 > 0$ para todos los valores $x > -5/2$.

$2x + 5 < 0$ para todos los valores $x < -5/2$.

$x - 3 > 0$ para todos los valores $x > 3$.

$x - 3 < 0$ para todos los valores $x < 3$.

Gráficamente sería:



Gráfica 19. Desigualdades e intervalos

Por último el conjunto solución es: **S =** $(-\infty, -5/2) \cup (3, \infty)$, los cuales cumplen con la condición de que $(2x + 5)(x - 3) > 0$.

Ejemplos 1.17. Hallar el conjunto solución de la inecuación.

$$\frac{x-4}{x+7} \geq 0$$

Solución:

Es necesario observar que x no puede tomar el valor de -7.

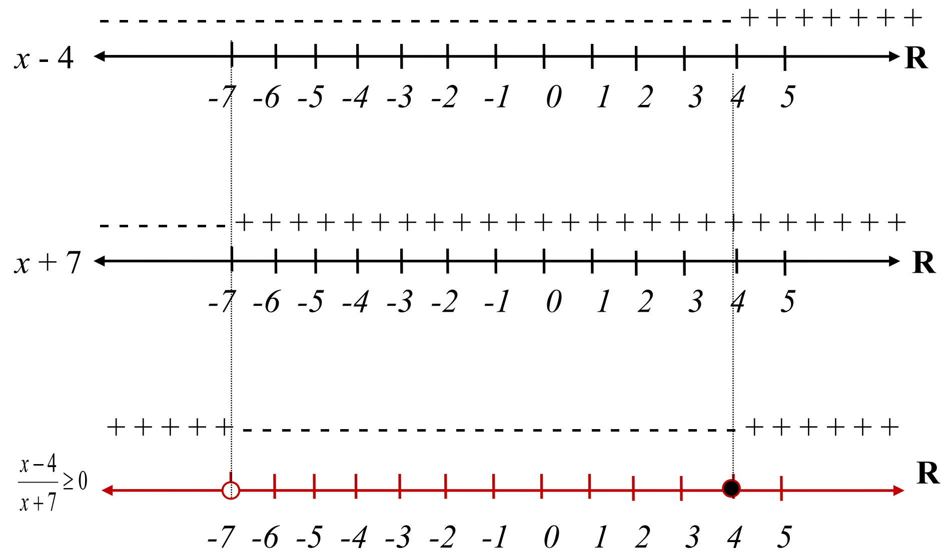
$x - 4 \geq 0$ para todos los valores $x \geq 4$.

$x - 4 \leq 0$ para todos los valores $x \leq 4$.

$x + 7 > 0$ para todos los valores $x > -7$.

$x + 7 < 0$ para todos los valores $x < -7$.

Gráficamente sería:



Gráfica 20. Desigualdades e intervalos

Por último el conjunto solución es: **S =** (- ∞, - 7) ∪ [4, ∞), los cuales cumplen con la condición de que $\frac{x-4}{x+7} \geq 0$

TALLER 1

1. Utilizando la notación de intervalos, encontrar en cada uno de los siguientes ejercicios el conjunto correspondiente y represéntalo gráficamente.

a) $[-3,7]\cup[2,6]$
b) $[2,4]\cup[3,10]$
c) $[0,3]\cup[-7,1]$
d) $[2,6]-(-3,7)$
e) $(6,9]\cap[7,10)$
f) $(-\infty,8)\cup[-5,0]$
g) $\left(-\frac{1}{2},5\right)\cap\left[\frac{3}{2},9\right]$
h) $\left[\frac{-3}{4},2\right]\Delta[-1,5]$
i) $[-8,3)\Delta[3,5)$
j $[-3,6)\Delta(6,10]$
k) $[-7,5/3]-[1/2,3]$
l) $[-8,0]-(0,5)$
m) $[1,4)\Delta(2,5]$
n) $(1,5)\Delta(1,5)$
o) $[-7,0]\Delta[-2,3]$

2. Hallar los ceros relativos de los siguientes factores lineales y representar los signos en la recta numérica (real).

a) $3x-4$ b) $16x+8$ c) $x+7$ d) $\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$

3. Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

a) $2x+4>3x+2$
b) $3x-5<4$
c) $x+5<\frac{1}{2}x-8$
d) $-x+3\leq\frac{-2}{3}x-9$
e) $-5x-\frac{1}{4}\geq 3-x$
f) $\frac{2-7x}{-3}\leq\frac{2x-3}{4}$
g) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}>7$
h) $\frac{5x-3}{-4}\leq\frac{4x-5}{3}$
l) $x^2-5x+6>0$
m) $(x+3)(x-5)(x+2)<0$
n) $x^2+x-12<0$
o) $2x^2+5x-3>0$
p) $2x^2+7x-15\geq 0$
q) $x^3-5x^2-6x<0$
r) $4x^2-5x-6<0$

Capítulo II

Valor Absoluto

CONCEPTOS BÁSICOS DEL VALOR

Valor absoluto de un numero real.

Con cada número real *a* existe asociado un número real no negativo llamado ***el valor absoluto de a***, el cual se denota por $|a|$ y se define como sigue:

$$a = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Claramente en términos de esta definición se tiene que $|3| = 3$, $|-7| = -(-7) = 7$, $|0| = 0$. Geométricamente el valor absoluto de un número real *a*, es interpretado como la distancia entre el origen 0 y el punto que representa al número real *a* sobre la recta numérica [2].

TEOREMA 1. $\forall a \in \mathbf{R}$, $|a| \geq 0$

Demostración:

Caso 1. *a > 0*. $a > 0 \Rightarrow |a| = a$. Concluimos que $|a| > 0$.

Caso 2. *a = 0*. $a = 0 \Rightarrow |a| = |0| = 0$.

Caso 3. *a < 0*. $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$. Por ser $a < 0$, entonces $-a > 0$ y concluimos que $|a| > 0$.

Integrando los tres casos anteriores se tiene que: $\forall a \in \mathbf{R}$, $|a| \geq 0$.

TEOREMA 2. $\forall a \in \mathbf{R}$, $a \leq |a|$.

Demostración:

Caso 1. *a ≥ 0*. $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$.

Caso 2. $\boldsymbol{a < 0}$. $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$. Por ser $a < 0$, entonces $-a > 0$ Por tanto $a < 0 < -a = |a|$.

Integrando los casos 1 y 2 concluimos que $\forall \boldsymbol{a} \in \mathbf{R}$, $a \leq |a|$.

TEOREMA 3. $\forall \boldsymbol{a} \in \mathbf{R}$, $|a|^2 = a^2$.

Demostración:

Sabemos que $|a|^2 = |a| . |a|$.

Caso 1. $\boldsymbol{a \geq 0}$. $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$. Entonces, $|a|2 = |a|\ |a| = a . a = a2$

Caso 2. $\boldsymbol{a < 0}$. $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$. Entonces, $|a|2 = |a|\ |a| = (-a).(-a) = a2.$

Integrando los casos 1 y 2 concluimos que $\forall \boldsymbol{a} \in \mathbf{R}$, $|a|^2 = a^2$.

TEOREMA 4. "$\boldsymbol{a, b} \in \mathbf{R}$, $|a\,b| = |a|\ |b|$.

Demostración:

Por definición tenemos:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$|b| = \begin{cases} b, & \text{si } b \geq 0 \\ -b, & \text{si } b < 0 \end{cases}$$

Y en consecuencia existen cuatro casos posibles a saber:

Caso 1. $\boldsymbol{a \geq 0}$ **y** $\boldsymbol{b \geq 0}$.

$a \geq 0$ y $b \geq 0 \Rightarrow a\,b \geq 0$. Entonces por definición $|a\,b| = a\,b$ y como $|a| = a$ y $|b| = b$, claramente se tiene que $|a\,b| = a\,b = |a|\ |b|$.

Caso 2. $\boldsymbol{a \geq 0}$ **y** $\boldsymbol{b < 0}$.

De $a \geq 0$ y $b < 0$. Vemos que $a\,b \leq 0$. Entonces $|a\,b| = -a\,b = a\,(-b)$ y como $|a| = a$ y $|b| = -b$, claramente se sigue que $|a\,b| = |a|\ |b|$.

Caso 3. $\boldsymbol{a < 0}$ **y** $\boldsymbol{b \geq 0}$.

De $a < 0$ y $b \geq 0$. Se tiene que $a\,b \leq 0$. Entonces $|a\,b| = -a\,b = (-a)\,b$ y como $|a| = -a$ y $|b| = b$, entonces $|a\,b| = (-a)\,b = |a|\ |b|$.

Caso 4. $\boldsymbol{a < 0}$ **y** $\boldsymbol{b < 0}$.

De $a < 0$ y $b < 0$ se sigue que $a\,b > 0$ y por tanto $|a\,b| = a\,b = (-a)(-b)$. Entonces, como $|a| = -a$ y $|b| = -b$, entonces $|a\,b| = (-a)\,(-b) = |a|\ |b|$.

Hemos demostrado que el valor absoluto de un producto de dos números reales es igual al producto de los valores absolutos, es decir, ***a, b*** $\in$**R,** $|ab| = |a|\,|b|$.

TEOREMA 5. $\forall$***a, b*** $\in$**R,** $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Demostración

Sabemos por el ***teorema 3*** que $|a+b|2 = (a+b)2$ (1).

Y por el ***teorema 2***, que $a\,b \leq |a\,b|$. Además por el ***teorema 4***, se tiene que $a\,b \leq |a\,b| .= |a|\ |b|$ (2).

De (1) tenemos que:

$|a+b|2 = (a+b)2 = a2 + 2\,a\,b + b2 = |a|2 + 2\,a\,b + |b|2$.

Utilizando (2) tenemos que:

$|a|2 + 2\,a\,b + |b|2 \leq |a|2 + 2|a|\ |b| + |b|2 = (|a| + |b|)2$.

De lo anterior se obtiene que, $|a+b|2 \leq (|a| + |b|)2$, De donde se puede concluir, teniendo en cuenta el ***teorema 1*** que $|a+b| \leq |a| + |b|$.

TEOREMA 6. $\forall$***a*** $\in$**R,** $-|a| \leq a \leq |a|$.

Demostración:

Caso 1. (*a* ≥ 0)

$a \geq 0 \Rightarrow |a| .= a$. Entonces, $|a| \geq 0$ y multiplicando ambos miembros por - 1, tenemos $-|a| \leq 0$ y así $-|a| \leq 0 \leq a = |a|$ esto implica que $-|a| \leq a \leq |a|$.

Caso 2. (*a* < 0)

$a < 0 \Rightarrow |a| .= -a$. y por supuesto $-a > 0$, en consecuencia $|a| > 0$.

Entonces, $-|a| < 0$ y $-|a|\ \ a < 0 < -a = |a|$ podemos concluir que $-|a| \leq a$ £$|a|$.

Por integración de los casos 1 y 2 se obtiene que $\forall$***a*** $\in$**R,** $-|a| \leq a \leq |a|$.

TEOREMA 7. ***b*** **≥ 0,** $|a| \leq b \quad \Leftrightarrow \quad -b \leq a \leq b$.

Demostración:

$\Rightarrow$ Supongamos primero que $|a| \leq \underline{b}$.

Como $a \leq |a|$ $\forall a \in$ **R** por teorema 2, y $|a| \leq b$, tenemos por transitividad que $a \leq b$ (1).

También multiplicando ambos miembros de $|a| \leq b$ por -1 se tiene que $-|a| \geq -b$. Sabemos por el ***teorema 6*** que $-|a| \leq a$. Aplicando transitividad concluimos que $-b \leq a$ (2). De (1) y de (2) concluimos que $-b \leq a \leq b$.

$\Leftarrow$ Inversamente, supongamos que $b \geq 0$ y $-b \leq a \leq b$. Probemos que $|a| \leq b$.

Si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$ y como $a \leq b$ tenemos que $|a| \leq b$.

Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$ y como $-b \leq a$ tenemos que $b \geq -a$, y por consiguiente $|a| \leq b$.

Concluimos que $|a| \leq b$.

De $\Rightarrow$ y $\Leftarrow$ se demuestra que: $\boldsymbol{b \geq 0}$, $|a| \leq b \quad \Leftrightarrow \quad -b \leq a \leq b$.

TEOREMA 8. $\boldsymbol{b \geq 0}$, $|a| \geq b \quad \Leftrightarrow \quad -b \geq a \quad$ ó $\quad a \geq b$.

TEOREMA 9. $|a| = |b| \quad \Leftrightarrow \quad a = b \quad$ ó $\quad a = -b$.

Las demostraciones de los teoremas 8, 9 se dejan al lector.

Ecuaciones con valor absoluto.

Ejemplo 2.1.

Hallar el conjunto solución de la ecuación $|x| = 7$.

Solución:

De acuerdo con la definición de valor absoluto tenemos:

$$|x| = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7, & \text{si } x \geq 0 \\ -x = 7, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Con base a lo anterior tenemos las siguientes soluciones: $x = 7$ ó $x = -7$, es decir:

S = { -7, 7 }

Ejemplo 2.2.

Hallar el conjunto solución de la ecuación $|x - 5| = 2$.

Solución:

De acuerdo con la definición de valor absoluto tenemos:

$$|x-5| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 = 2, & \text{si } (x-5) \geq 0 \\ -(x-5) = 2, & \text{si } (x-5) < 0 \end{cases}$$

Con base a lo anterior tenemos las siguientes soluciones:

$x - 5 = 2$ despejando x de esta ecuación se obtiene que $x = 7$

$-(x - 5) = 2$, es decir, $-x + 5 = 2$, de donde se obtiene que $x = 3$.

Luego el conjunto solución es S = { 3, 7 }

Ejemplo 2.3.

Hallar el conjunto solución de la ecuación $|2x + 3| = x + 1$.

Solución:

De acuerdo con la definición de valor absoluto tenemos:

$$|2x+3| = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 = x+1, \quad \text{si } (2x+3) \geq 0 \\ -(2x+3) = x+1, \text{si } (2x+3) < 0 \end{cases}$$

Con base a lo anterior tenemos las siguientes soluciones:

$2x + 3 = x + 1$ despejando x de esta ecuación se obtiene que;

$2x - x = 1 - 3$

$x = - 2$

$-(2x + 3) = x + 1$, es decir, $- 2x - 3 = x + 1$, de donde se obtiene que

$- 2x - x = 1 - 3$

$- 3x = - 2$

$x = -\dfrac{2}{3}$

Luego el conjunto solución es S = { - 2, 2/3 }.

Ejemplo 2.4.

Hallar el conjunto solución de la ecuación $|x + 4| = |x + 2|$.

Solución:

De acuerdo con el teorema 9 tenemos:

$$|x+4| = |x+2| \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 = x+2 & (1) \\ \quad \vee & \\ x+4 = -(x+2) & (2) \end{cases}$$

La solución de (1) es ϕ, y la solución de (2) es $x = - 3$,

Luego el conjunto solución es S = { - 3 }.

Inecuaciones con valor absoluto

En la solución de inecuaciones con valor absoluto generalmente se utilizan los teoremas 7 y 8, los cuales han sido demostrados anteriormente. El proceso a seguir es el usado en el capítulo anterior. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.5.

Hallar el conjunto solución de la inecuación $|x| < 4$.

Solución:

De acuerdo con el ***teorema 7,*** se tiene que $|x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4$.

Luego $x \in (-4, 4)$. Entonces el conjunto solución es S = $(-4, 4)$.

Ejemplo 2.6.

Hallar el conjunto solución de la inecuación $|5x| \leq 2$.

Solución:

De acuerdo con el ***teorema 7,*** se tiene que:

$|5x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 5x \leq 2.$

$\Leftrightarrow -2/5 \leq x \leq 2/5.$

$\Leftrightarrow x \in [-2/5, 2/5].$

Luego el conjunto solución es S = $[-2/5, 2/5]$.

Ejemplo 2.7.

Hallar el conjunto solución de la inecuación $|3x - 2| \leq 1/2$.

Solución:

De acuerdo con el ***teorema 7,*** se tiene que:

$|3x - 2| \leq 1/2 \Leftrightarrow -1/2 \leq 3x - 2 \leq 1/2.$

$\Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2} \leq 3x \leq 2 + \frac{1}{2}.$

$\Leftrightarrow 3/2 \leq 3x \leq 5/2.$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 5/6.$

$\Leftrightarrow x \in [\frac{1}{2}, 5/6].$

Luego el conjunto solución es S = $[\frac{1}{2}, 5/6]$.

Ejemplo 2.8.

Hallar el conjunto solución de la inecuación $|2x - 3| \leq x + 1$.

Solución:

De acuerdo con el ***teorema 7,*** se tiene que:

$$|2x-3| \leq x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 & (1) \\ \wedge & \\ -(x+1) \leq 2x-3 \leq x+1 & (2) \end{cases}$$

De (1) se sigue que $x \geq -1 \Rightarrow x \in [-1, \infty)$.

Resolviendo (2) vemos que hay dos inecuaciones simultáneas:

$-x - 1 \leq 2x - 3$ y $2x - 3 \leq x + 1$.

Al resolverlas encontramos que:

$-x - 1 \leq 2x - 3 \Leftrightarrow 2 \leq 3x,$

$\Leftrightarrow 2/3 \leq x,$

$\Leftrightarrow x \in [2/3, \infty)$.

Y su conjunto solución es A = $[2/3, \infty)$.

También, $2x - 3 \leq x + 1 \Leftrightarrow x \leq 4,$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 4],$

Y su conjunto solución es B = $(-\infty, 4]$.

Luego la solución de (2) es $A \cap B = [2/3, \infty) \cap (-\infty, 4] = [2/3, 4]$.

Finalmente el conjunto solución S está constituido por los números x que satisfacen (1) y (2). Luego, S $= [-1, \infty) \cap [2/3, 4] = [2/3, 4]$.

Ejemplo 2.9.

Hallar el conjunto solución de la inecuación $\left|\dfrac{x+3}{x+1}\right| \leq 1$

Solución:

Sabemos que x no puede tomar el valor de - 1 puesto que $x + 1 = 0$ y se tendría una división por cero.

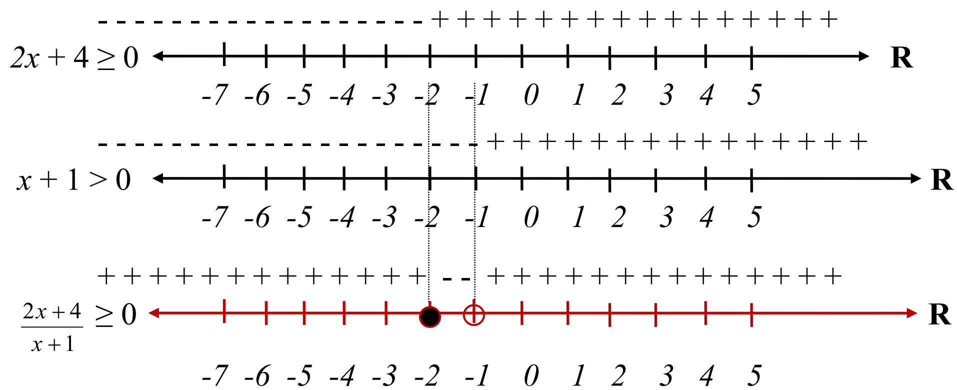
Del ***teorema 7,*** se sigue que: $\left|\dfrac{x+3}{x+1}\right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq \dfrac{x+3}{x+1} \leq 1$

Tenemos en consecuencia dos inecuaciones simultáneas, a saber:

$$(1) \quad -1 \leq \frac{x+3}{x+1} \qquad\qquad (2) \quad \frac{x+3}{x+1} \leq 1$$

Resolvamos (1). Sumemos 1 a ambos miembros para obtener:

$$\frac{x+3}{x+1} + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+4}{x+1} \geq 0$$



Gráfica 21. Desigualdades e intervalos

$$A = \left\{ x \in R / \frac{2x+4}{x+1} \geq 0 \right\} = (-\infty, 2] \cup (-1, \infty)$$

Ahora debemos resolver (2). Tenemos:

$$\frac{x+3}{x+1} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+3}{x+1} - 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{x+1} \leq 0$$

Como 2 > 0, se sigue que $x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1)$.

Entonces el conjunto solución está constituido por todos los valores x que satisfacen (1) y (2). Es decir:

$$S = A \cap (-\infty, -1) = ((-\infty, -2] \cup (-1, \infty)) \cap (-\infty, -1) = (-\infty, -2]$$

Ejemplo 2.10.

Hallar el conjunto solución de la inecuación $|3x + 1| < 2|x - 6|$.

Solución:

Esta desigualdad la manejaremos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |3x+1| < 2|x-6| \quad &\Leftrightarrow \quad |3x+1| < |2x-12| \\ &\Leftrightarrow \quad (3x+1)^2 < (2x-12)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 9x^2 + 3x + 1 < 4x^2 - 48x + 144 \\ &\Leftrightarrow \quad 5x^2 + 54x - 143 < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (5x-11)(x+13) < 0 \end{aligned}$$

Los puntos de separación para esta desigualdad cuadrática son - 13 y 11/5; ellos dividen al eje en tres intervalos (- ∞, - 13), (- 13, 11/5) y (11/5, ∞). Donde sólo los puntos de (- 13, 11/5) satisfacen la desigualdad.

Ejemplo 2.11.

Hallar el conjunto solución de la inecuación.

Solución:

Esta desigualdad la manejaremos de la siguiente forma:

Tabla 1. Desigualdad con valor absoluto

$\|x-4\|+2x \geq 10$	
$x-4 \leq 0$ o cuando $x \in (-\infty, 4]$	$x-4 \geq 0$ o cuando $x \in [4, \infty)$
$-(x-4)+2x \geq 10$ $-x+4+2x \geq 10$ $x \geq 6$	$(x-4)+2x \geq 10$ $x-4+2x \geq 10$ $x \geq \frac{14}{3}$
$S_1 = [6, \infty)$	$S_2 = \left[\frac{14}{3}, \infty\right)$

Luego el conjunto solución es: $S = S_1 \cap\ S_2 \cap\ S_3 = [\ 6, \infty\ ) \cup [\frac{14}{3}, \infty\ \Big)$

Ejemplo 2.12

Hallar el conjunto solución de la inecuación

Solución:

Esta desigualdad la manejaremos de la siguiente forma:

Tabla 2. Desigualdad con valor absoluto

$\|x-4\|+\|x+3\| < 8$		
$x-4 \leq 0 \ \wedge\ x+3 \leq 0$ o cuando $x \in (-\infty, -3]$	$x-4 \leq 0 \ \wedge\ x+3 \geq 0$ o cuando $x \in [-3, 4]$	$x-4 \geq 0 \ \wedge\ x+3 \geq 0$ o cuando $x \in [4, \infty)$
$-(x-4)+(-(x+3)) < 8$ $-x+4-x-3 < 8$ $-2x+1 < 8$ $-\frac{7}{2} < x$	$-(x-4)+(x+3) < 8$ $-x+4+x+3 < 8$ $7 < 8$ Proposición verdadera	$(x-4)+(x+3) < 8$ $x-4+x+3 < 8$ $2x-1 < 8$ $x < \frac{9}{2}$
$S_1 = \left(-\frac{7}{2}, \infty\right)$	$S_2 = [-3, 4]$	$S_3 = \left(-\infty, \frac{9}{2}\right)$

Luego el conjunto solución es:

$$S = S_1 \cap\ S_2 \cap\ S_3 = \left(-\frac{7}{2}, \infty\right) \cap\ [-3, 4] \cap \left(-\infty, \frac{9}{2}\right) =\ [-3, 4]$$

TALLER 2

Repaso de conceptos.

1. La desigualdad $|x - 2| \leq 3$ es equivalente a: ______________________________

2. La desigualdad del triángulo dice :____

3. ¿Cuál de los equivalentes enunciados son siempre ciertos?

a) $|-x| = x$ b) $|x|^2 = x^2$

c) $|x\,y| = |x|\,|y|$ d) $|x - y| \geq |x| - |y|$

e) $|x| \leq |x - y| + |y|$ f) $\sqrt{x^2} = x$

4. Para estar seguros de que $|5x - 20| < 0{,}2$ necesitamos que $|x - 4| <$________

PROBLEMAS

En los problemas del 1 al 12 encuentre el conjunto solución de las desigualdades dadas:

1. $|x+1| < 4$ 2. $|x-2| < 5$ 3. $|3x+4| < 8$

4. $|2x-7| < 3$ 5. $\left|\dfrac{x}{3} - 2\right| \leq 6$ 6. $\left|\dfrac{3x}{5} + 1\right| \leq 4$

7. $|2x-7| > 3$ 8. $|5x-6| > 1$ 9. $|4x+2| \geq 10$

10. $\left|\dfrac{x}{2} + 7\right| \geq 2$ 11. $\left|2 + \dfrac{5}{x}\right| > 1$ 12. $\left|\dfrac{1}{x} - 3\right| > 6$

13. $|x-3| + |2x-8| < 10$ 14. $|3x+10| + 6x \geq 5$ 15. $|4x| + |2x-6| \geq 3x$

En los problemas del 13 al 16 demuestre que la implicación indicada es verdadera.

13. $|x-3|<0{,}5 \quad \Rightarrow \quad |5x-15|<2{,}5$

14. $|x+2|<0{,}3 \quad \Rightarrow \quad |4x+8|<1{,}2$

15. $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{6} \quad \Rightarrow \quad |6x-12|<\varepsilon$

16. $|x+4|<\dfrac{\varepsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad |2x+8|<\varepsilon$

En los problemas del 17 al 20 encuentre δ, (que dependa de ε) de modo que la implicación sea verdadera.

17. $|x - 5|<\delta \quad \Rightarrow \quad |3x-15|<\varepsilon$

18. $|x - 2|<\delta \quad \Rightarrow \quad |4x-8|<\varepsilon$

19. $|x+6|<\delta \quad \Rightarrow \quad |6x+36|<\varepsilon$

20). $|x+5|<\delta \quad \Rightarrow \quad |5x+25|<\varepsilon$

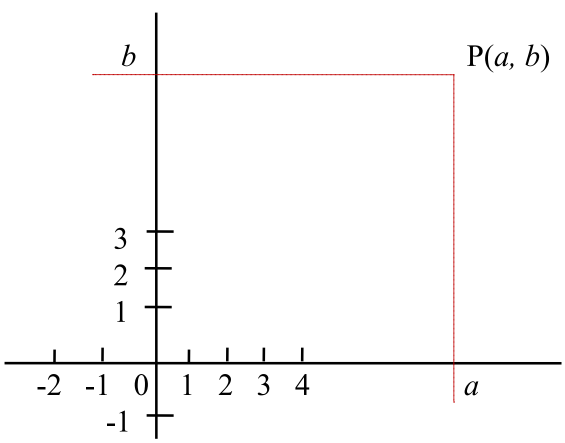
Capítulo III

Plano Cartesiano

EL SISTEMA RECTANGULAR DE COORDENADAS

Ejes de coordenadas.

En un plano ***P*** escojamos un par de rectas perpendiculares, una horizontal y otra vertical. La horizontal se llama el eje ***x*** y la vertical el eje ***y*** (Ver la gráfica 22 siguiente)



Gráfica 22. El plano cartesiano

Ahora tomamos un sistema lineal de coordenadas sobre cada una de ellas, con las condiciones siguientes: El origen para ambas será el punto ***0*** donde se cortan. El eje ***x*** está orientado de izquierda a derecha y el eje ***y*** de abajo arriba. La parte del eje *x* con coordenadas positivas (la derecha) se llama ***eje x positivo*** y la parte del eje *y* con coordenadas positivas (la superior) se llama ***eje y positivo.*** Estableceremos una correspondencia entre los puntos del plano ***P*** y los pares de números reales.

Coordenadas.

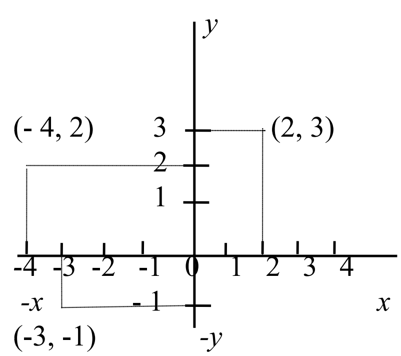
Sea **P** cualquier punto del plano (ver figura anterior). La recta vertical que pasa por **P** corta al eje x en un solo punto; sea a la coordenada de este punto sobre x. El número a se llama coordenada x de **P** (*o abscisa de* **P**). La recta horizontal que pasa por **P** corta al eje y en un solo punto, sea b su coordenada sobre el eje y. El número b se llama *coordenada y* de **P** (*u ordenada de* **P**). De esta forma, todo punto **P** tiene un único par (a, b) de números reales asociados con él. Recíprocamente, todo par (a, b) de números reales está asociado con un único punto en el plano [3].

Ejemplo 3.1. En el sistema de coordenadas:

Para hallar el punto de coordenadas (2, 3) partimos del origen, no movemos dos unidades a la *derecha* y luego tres *hacia arriba*.

Para hallar el punto de coordenadas (- 4, 2) partimos del origen, nos movemos cuatro unidades a la *izquierda* y luego dos hacia *arriba.*

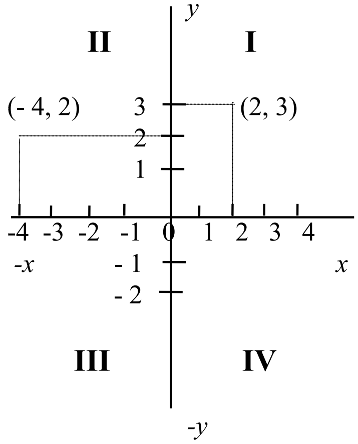
Para localizar el punto (- 3, - 1) partimos del origen, nos movemos tres unidades a la *izquierda* y luego una *hacia abajo.*



Gráfica 23. Puntos en el plano cartesiano

Cuadrantes.

Sea un plano **P** en el que hemos definido un sistema de coordenadas. El plano, exceptuados los ejes coordenados, se puede dividir en cuatro partes iguales, llamadas *cuadrantes*. Todos los puntos con ambas coordenadas positivas forman el primer cuadrante, *o Cuadrante I*, en la parte superior derecha. El *Cuadrante II* es el de los puntos con coordenada x negativa y coordenada y positiva. *Los cuadrantes III y IV* se indican en la siguiente figura:

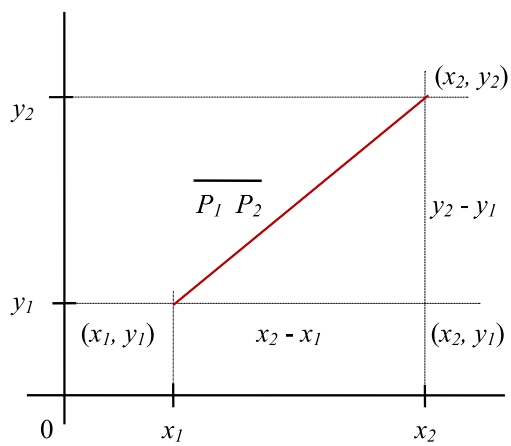


Gráfica 24. Cuadrantes en el plano cartesiano

Fórmula de la distancia.

La distancia $\overline{P_1P_2}$ entre los puntos *P1* y *P2* con coordenadas (*x1*, *y1*) y (*x2*, *y2*) es:

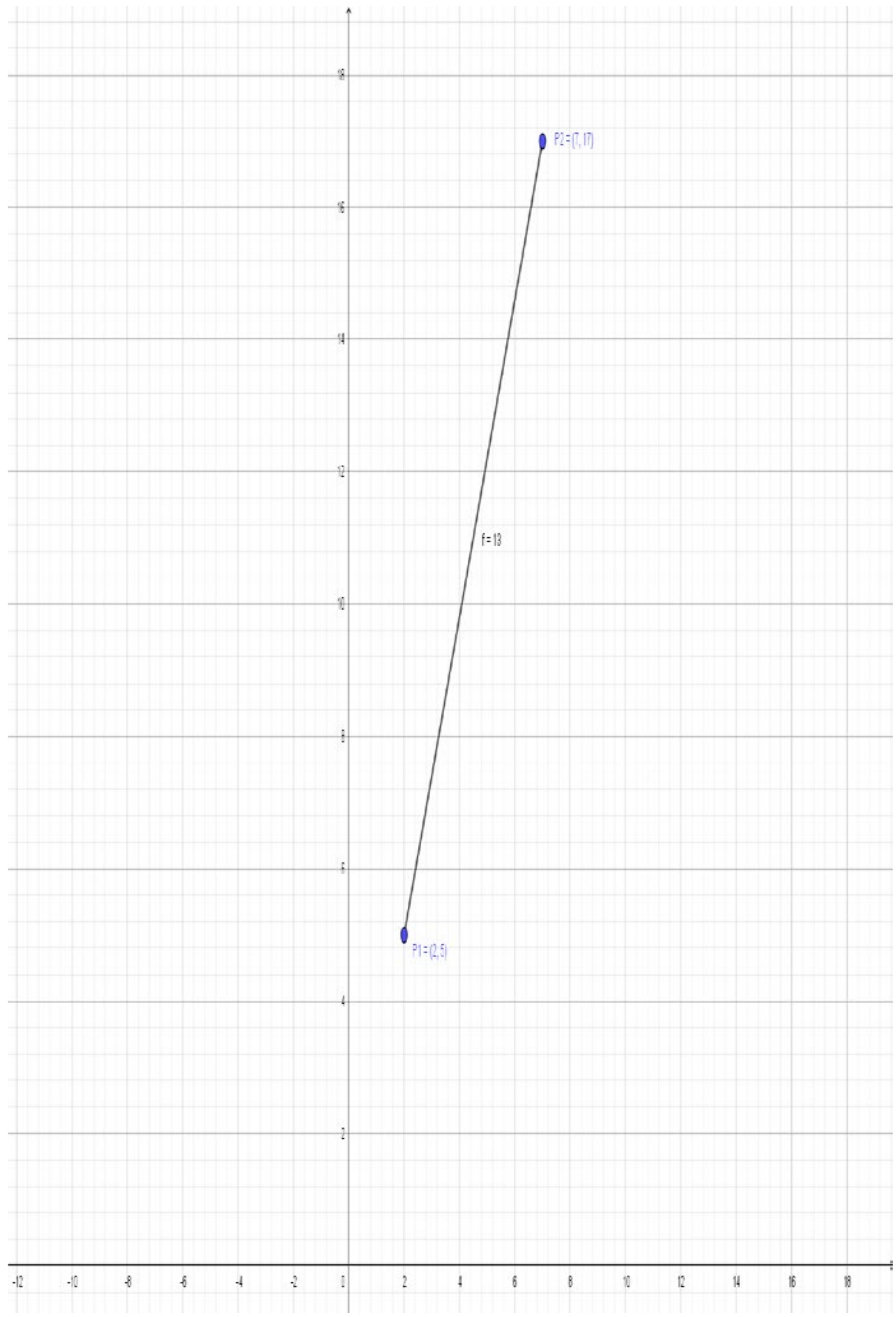
$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Gráfica 25. Distancia entre dos puntos

Ejemplo 3.2.

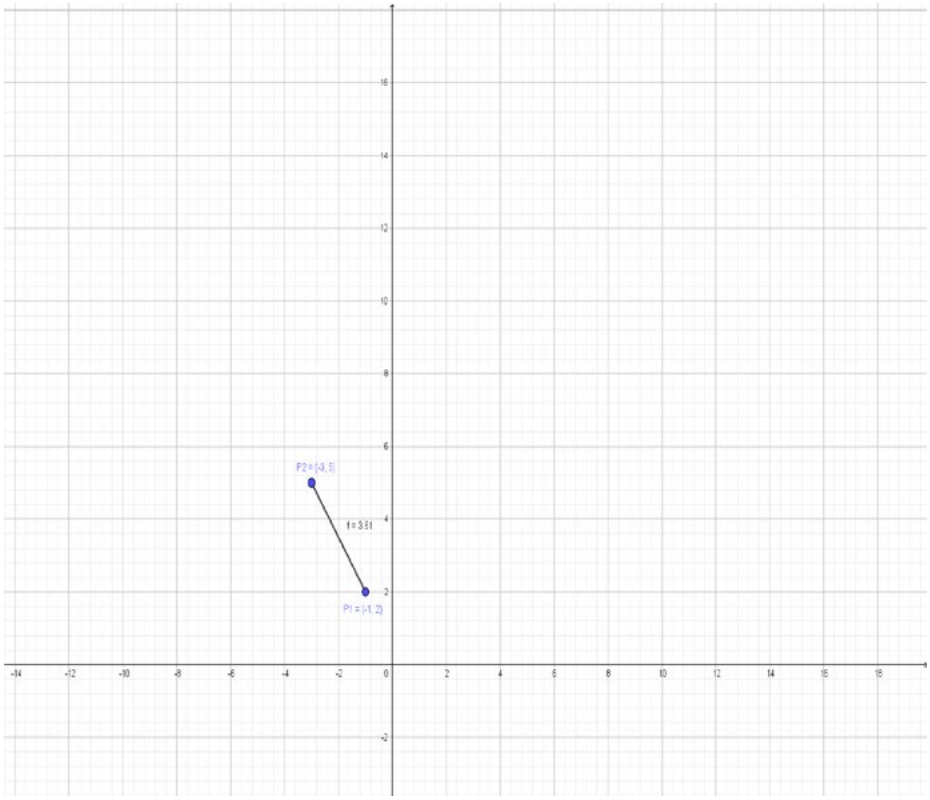
La distancia entre (2, 5) y (7, 17) es:



Gráfica 26. Distancia entre dos puntos

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(7-2)^2 + (17-5)^2} = \sqrt{(5)^2 + (12)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$

La distancia entre (- 1, 2) y (- 3, 5) es:



Gráfica 27. Distancia entre dos puntos

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{((-3)-(-1))^2 + (5-2)^2} = \sqrt{(-3+1)^2 + (3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 9} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

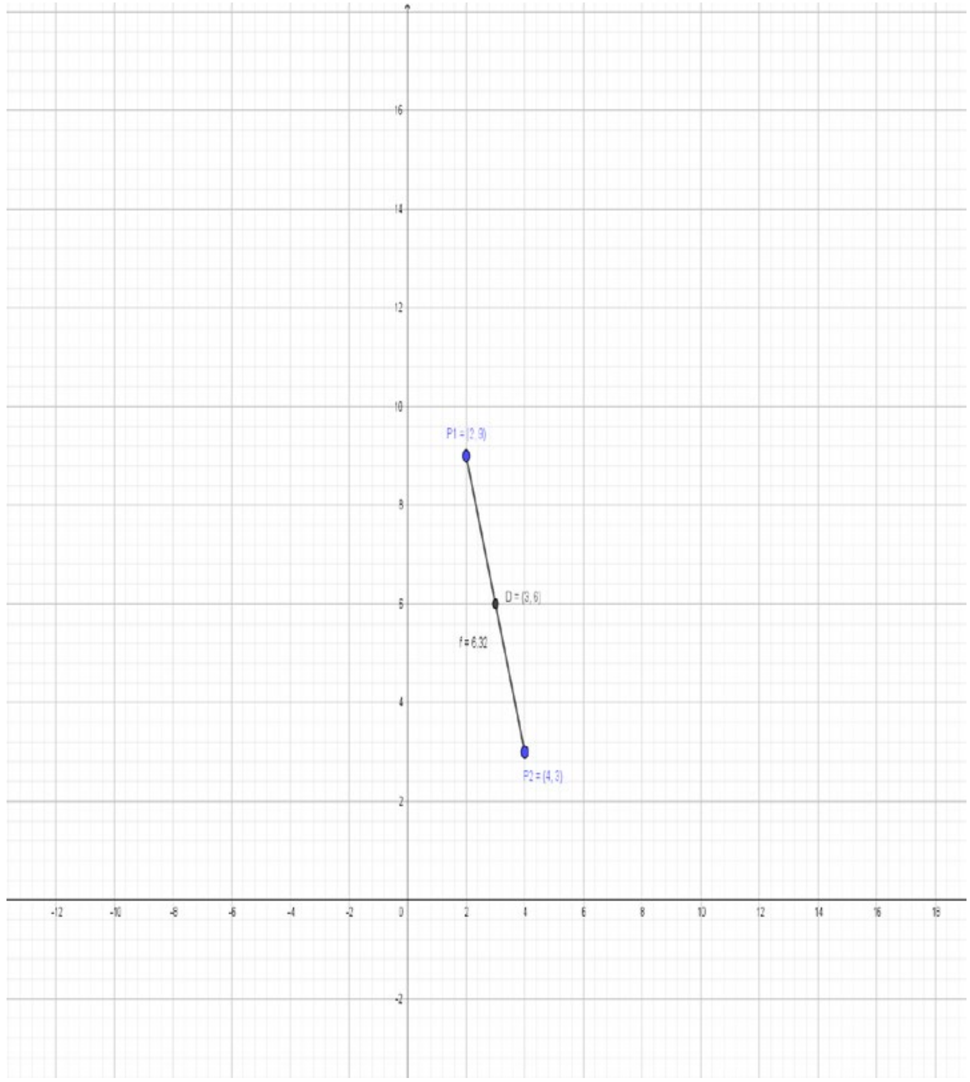
Fórmulas del punto medio.

El punto $M(x, y)$ que está en el centro del segmento que une los puntos: *P1* (*x1, y1*) y *P2* (*x2*, *y2*) tiene coordenadas:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Las coordenadas de ese punto medio son los promedios de las coordenadas de los puntos terminales.

Ejemplo 3.3. El punto medio del segmento que une (2, 9) y (4, 3) es:



Gráfica 28. Punto medio

Punto medio= $\left(\dfrac{2+4}{2}, \dfrac{9+3}{2}\right) = (3, 6)$

Problemas resueltos

Ejemplo 3.4. Probar que la distancia entre el punto P (x, y) y el origen es $\sqrt{x^2 + y^2}$

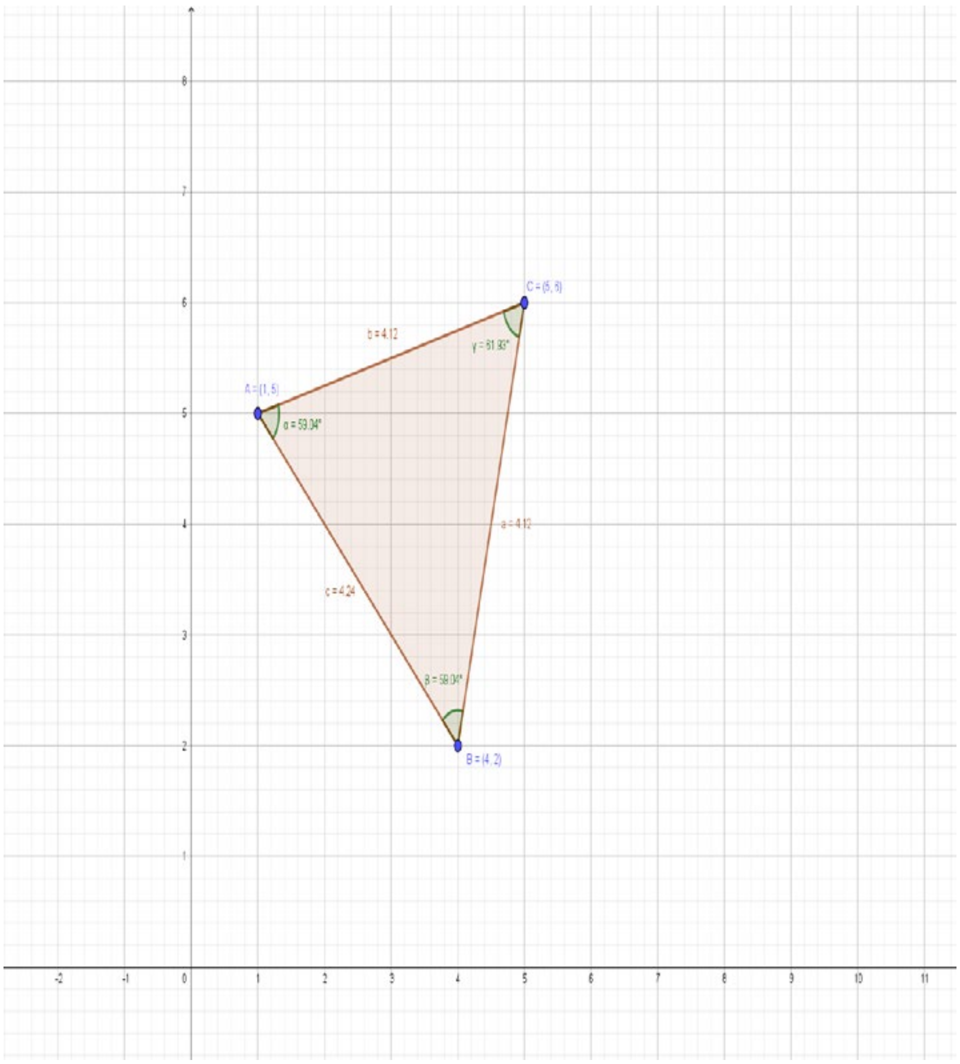
Solución:

Como el origen tiene coordenadas (0, 0), al utilizar la fórmula de la distancia para estos dos puntos, nos queda que:

$$d((0,0),(x,y)) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ejemplo 3.5. ¿Es isósceles el triángulo de vértices $A(1, 5)$, $B(4, 2)$ y $C(5, 6)$

Solución:



Gráfica 29. Triángulo isósceles

Para comprobar que el triángulo es isósceles deben existir dos lados iguales, los lados del triángulo los encontraremos por medio de la fórmula de la distancia, es decir:

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-4)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(1-5)^2 + (5-6)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(4-5)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

Como $\overline{AC} = \overline{BC}$, el triángulo es isósceles.

Ejemplo 3.6. Encontrar el punto medio de (0, a), (3, - 2)

Solución:

Punto medio$=\left(\dfrac{0+3}{2},\dfrac{a-2}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{a-2}{2}\right)$

TALLER 3

1. Dibujar un sistema de coordenadas y:

Marque los puntos.

Calcule la distancia entre cada par de punto.

Y halle el punto medio del segmento recto que los une.

a) $(2,1),(4,5)$ b) $\left(\dfrac{1}{2},1\right),\left(\dfrac{-3}{2},-5\right)$ c) $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{-1}{3}\right),\left(\dfrac{5}{6},1\right)$

d) $(1,\sqrt{3}),(-1,1)$ e) $(-2,0),(0,\sqrt{2})$

2. Halle x de manera que la distancia entre los puntos sea 5.

a) (0, 0), (x, - 4) b) (2, - 1), (x, 2).

3. Determinar y de modo tal que la distancia entre los puntos sea 8.

a) (0, 0), (3, y) b) (5, 1), (5, y).

4. Dibujar el triángulo de vértices A(2, 5), B(2, -5) y C(-3, 5) y hallar su área.

5. Si (2, 2), (2, - 4) y (5, 2) son tres vértices de un triángulo, hallar el cuarto vértice.

6. Hallar el perímetro del triángulo de vértices A(4, 9), B(- 3, 2) y C(8, -5).

7. Probar analíticamente que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices.

Capítulo IV

Funciones

CONCEPTO DE FUNCIÓN

Dados dos conjuntos no vacíos **A** y **B**, una función ***F*** de **A** en **B**, denotada por:

F : **A** ————> **B** "ó" **A** ————> **B**

Es una relación que permite asignar a TODO elemento uno y solo un elemento [4].

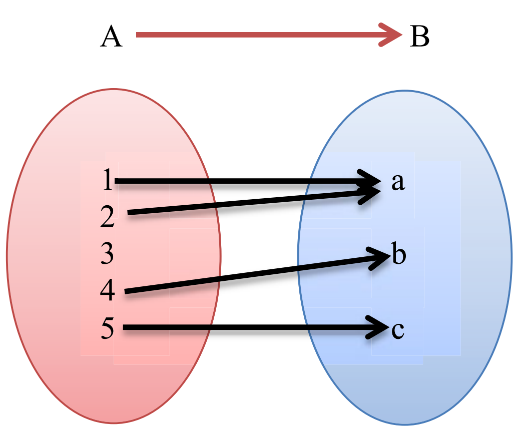
De esta definición podemos concluir que las condiciones impuestas a una función debe cumplirlas solo el conjunto **A** (conjunto de partida); es decir:

En A no puede sobrar elementos: el dominio de la función es igual al conjunto de partida **A**.

Cada elemento de **A** sólo puede relacionarse con uno y solo uno de **B**.

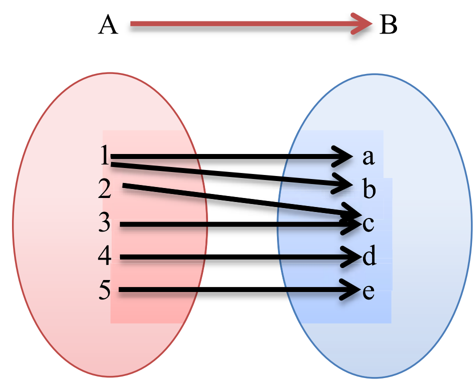
Veamos algunos ejemplos en los cuáles las relaciones de los dos conjuntos **A** y **B** son funciones o no.

Ejemplo 4.1. La relación de la figura siguiente, no es función, ya que el elemento 3 del conjunto A no está asociado a ningún elemento del conjunto B.



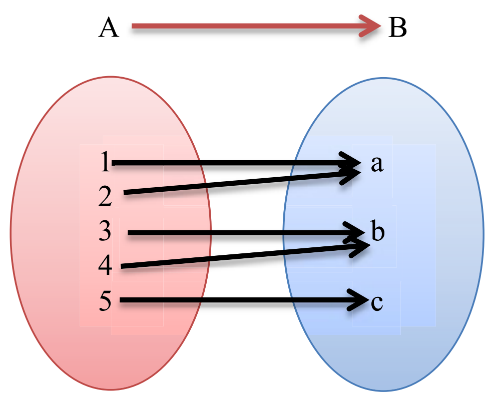
Gráfica 30. Relación entre conjuntos que no es una función

Ejemplo 4.2. La relación de la figura siguiente, no es función, porque un elemento del conjunto A, el 1, se relaciona con dos elementos del conjunto B.



Gráfica 31. Relación entre conjuntos que no es una función

Ejemplo 4.3. La relación de la figura siguiente, es una función, porque todos los elementos del conjunto A, se relacionan con un elemento del conjunto B.



Gráfica 32. Relación entre conjuntos que es una función

Clases de funciones.

Funciones inyectivas:

Si ***f*** es una función de ***X*** en ***Y***, entonces ***f*** es **inyectiva** (unívoca o 1 - 1). Una función es INYECTIVA o UNO A UNO si y solo si cada elemento del RANGO es imagen de un solo elemento del dominio.

Funciones sobreyectivas.

Una función es sobreyectiva, si TODOS los elementos del CONJUNTO DE LLEGADA son imágenes de al menos un elemento del DOMINIO.

Funciones biyectivas :

Una función **f** de **X** en **Y** es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

Función inversa.

Si ***f*** es una función de ***X*** en ***Y*** que es inyectiva, entonces la relación inversa **f** del rango de **f** en ***X*** es una función que se llama FUNCIÓN INVERSA de **f**. En este caso la función inversa de **f** se denota por f^{-1} .

Dada dos funciones reales de variable real ***f*** y ***g*** podemos definir cuatro nuevas funciones a partir de las dadas, así:

1. Función suma.

La función definida mediante la ecuación

S (X) = f (X) + g (X) es la función suma de ***f*** y ***g***.

2. Función producto.

ρ (X) = f (X) g (X) es la función producto.

3. Función cociente.

Q (X) = f (X) / g (X), con ***g (X) ≠ 0*** es la función cociente.

4. Función compuesta.

H (X) = f (g (X)) es la función compuesta de ***f*** y ***g****.* Los dominios de las tres primeras son las de intersección de los dominios de ***f*** y ***g***, salvo en la tercera que se quitarán los valores de ***X*** que hagan ***g (X) = 0****.* El dominio de la función compuesta es el conjunto de valores de ***X*** para los que tenga sentido la operación que allí se realiza.

Función compuesta.

Dadas las dos funciones *f* y *g*, la ***función compuesta***, representada por *fog,* está definida por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Y el dominio de *fog* es el conjunto de todos los números *x* en el dominio *g*, tales que *g(x)* se encuentra en el dominio de *f.*

Ejemplo 4.4. Dado que *f* está definida por $f(x) = \sqrt{x}$ y *g* está definida por *f(x)=2x - 3*, hallar *H(x) = fog*. y determinar el dominio de *H(x).*

Solución:

$$H(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x-3) = \sqrt{2x-3}$$

El dominio de ***g*** es (-∞, + ∞) y el dominio de ***f*** es [0, + ∞). Así el dominio de *H(x)* es el conjunto de los números reales para los cuales *2x - 3* ≥ 0, lo que es lo mismo, [3/2 , + ∞).

Ejemplo 4.5. Dado que ***f*** y ***g*** están definidas por:

$f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 1$

Determinar: (a) *fog* ; (b) *gog* ; (c) *fof* ; (d) *gof*

Solución:

$$\text{(a) } (f \circ g)(x) = f(x^2-1) = \sqrt{x^2-1}$$

$$\text{(b) } (g \circ g)(x) = g(x^2-1) = \left(x^2-1\right)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$$

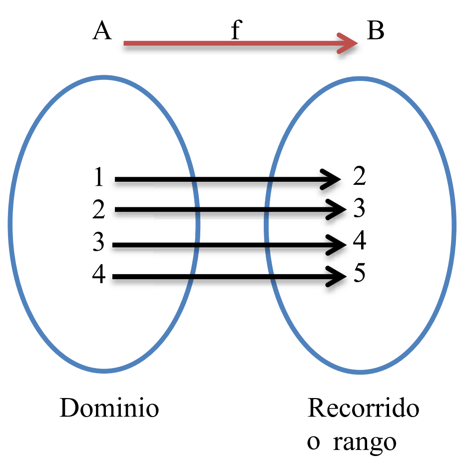
$$\text{(c) } \left(f \circ f\right)(x) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

$$\text{(d) } \left(g \circ f\right)(x) = g(\sqrt{x}) = \left(\sqrt{x}\right)^2 - 1 = x - 1$$

Función como correspondencia.

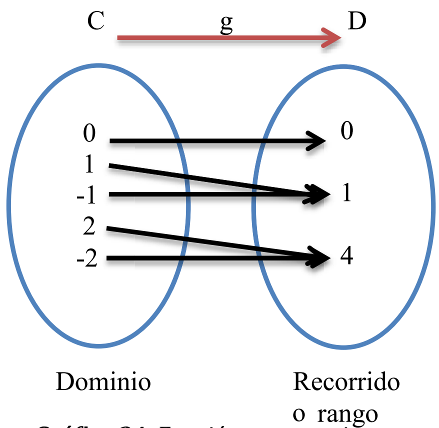
Una función es una correspondencia que asigna a cada elemento de cierto conjunto, llamado ***dominio de la función***, un único elemento en un segundo conjunto, llamado ***recorrido de la función.***

Ejemplo 4.6.



Gráfica 33. Función entre conjuntos

Ejemplo 4.7.



Gráfica 34. Función entre conjuntos

Notación de una función.

Si (***a, b***) es un elemento de una función ***f***, entonces ***f*** asocia el elemento ***a***, perteneciente al dominio, con el elemento ***b,*** perteneciente al recorrido y se dice que ***b*** es la imagen de ***a*** por ***f.***

Se escribe:

f: a $\rightarrow$ ***b*** otra forma de denotarlo sería: ***a*** $\xrightarrow{f}$ ***b***

Por otra parte, si una función viene dada por una ecuación, se necesita una información adicional para determinar la función. Por ejemplo: 3x - 2y = 5, (x o y pueden representar los elementos del dominio). Si **x** representa los elementos del dominio, se puede despejar **y** en función de x, es decir: $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$ es la función y se dice que y es función de **x.**

> *x* se denomina variable independiente por que se le puede asignar cualquier valor. Mientras que a *y* se le denomina variable dependiente porque sus valores dependen de los valores que se le asignen a *x.*

Se puede usar el símbolo *f(x)* en lugar de ***y***, escribiendo *f(x)* = $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$. En otras palabras *y=f(x)* indica que (*x, y*) es un elemento de la función.

Ejemplo 4.8.

Sea *f(x) = x - 1* entonces *f(2) = 2 - 1 = 1* indica que (*2, 1*) es un elemento de la función. *x* es la variable independiente, *f(x)* o sea *y* es la variable dependiente.

Supóngase que *f(x) = 5x + 3* Determine cada una de las siguientes expresiones:

f(1), *f*(2), *f*(3) y *f*(4)

Solución:

Como *f(x) = 5x + 3*

f(1) = 5(1) + 3 = 5 + 3 = 8 *Equivale a (1, 8)*

f(2) = 5(2) + 3 = 10 + 3 = 13 *" " " (2, 13)*

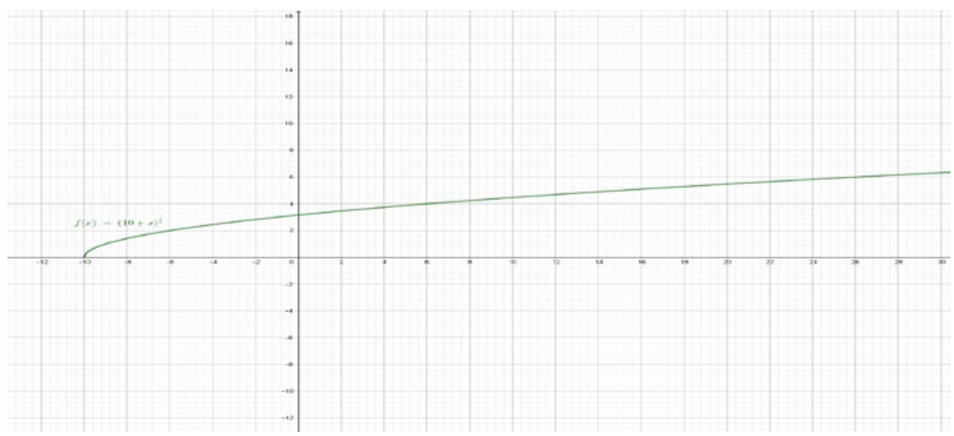
f(3) = 5(3) + 3 = 15 + 3 = 18 *" " " (3, 18)*

f(4) = 5(4) + 3 = 20 + 3 = 23 *" " " (4, 23)*

Ejemplo 4.9.

Graficar y encuentre el dominio de rango de la función:

Solución: *La gráfica es:*



Gráfica 35. Función lineal

El dominio de la función está dado por:

$$Dominio = \left\{x, tal\ que: f(x) = \sqrt{10+x} \ \in \mathbb{R}\right\} = \{x\ , tal\ que:\ 10 + x \geq 0\}$$
$$= \{x \ / \ x \geq -10\} = [-10, \infty)$$

El rango o recorrido de la función está dado por:

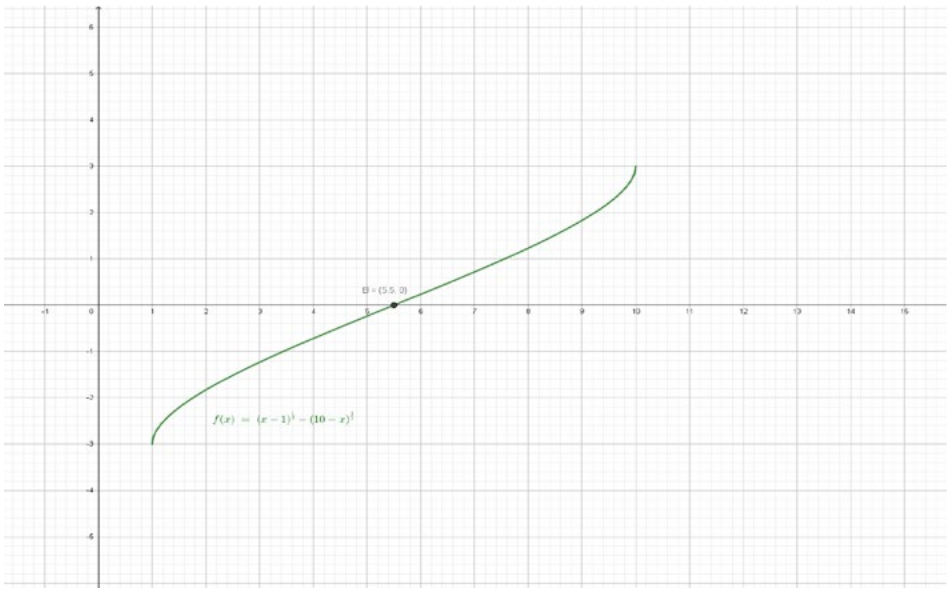
$$Rango = \left\{y\ , tal\ que:\ f(x) = \sqrt{10+x} \in \mathbb{R}\right\} = \{y\ , tal\ que:\ \ y \geq 0\} = [0, \infty)$$

Ejemplo 4.10.

Graficar y encuentre el dominio de rango de la función:

$$f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{10-x}$$

Solución: La gráfica es:



Gráfica 36. Función lineal

El dominio de la función está dado por:

$$Dominio = \left\{x, tal\ que: f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{10-x}\ \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= \{x, tal\ que: x - 1 \geq 0\ \wedge\ 10 - x \geq 0\ \}$$
$$= \{x, tal\ que:\ x \geq 1 \quad \wedge \quad x \leq 10\} = [-1, 10]$$

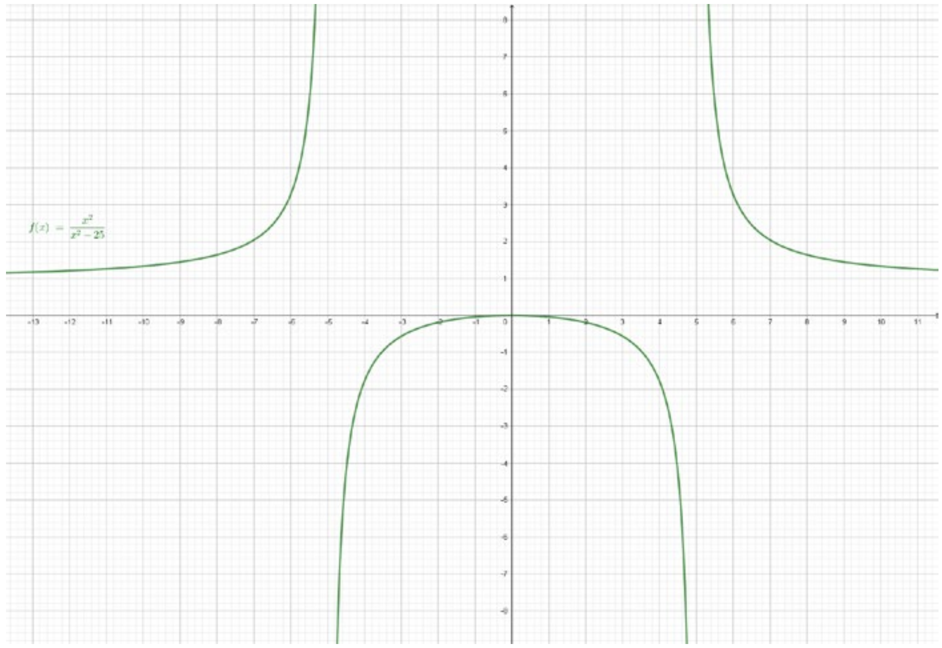
El rango o recorrido de la función está dado por:

$$Rango = \left\{y\ , tal\ que:\ f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{10-x} \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= \{y, tal\ que:\ -3 \leq y \leq 3\} = [-3, 3]$$

Ejemplo 4.11.

Graficar y encuentre el dominio de rango de la función: $f(x) = \frac{x^2}{x^2-25}$

Solución: La gráfica es:



Gráfica 37. Función lineal

El dominio de la función está dado por:

$$Dominio = \left\{x, tal\ que\colon\ f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 25} \in \mathbb{R}\right\} = \{x^2 - 25 \neq 0\}$$
$$= (-\infty, -5) \cup (5, -5) \cup (5, \infty)$$

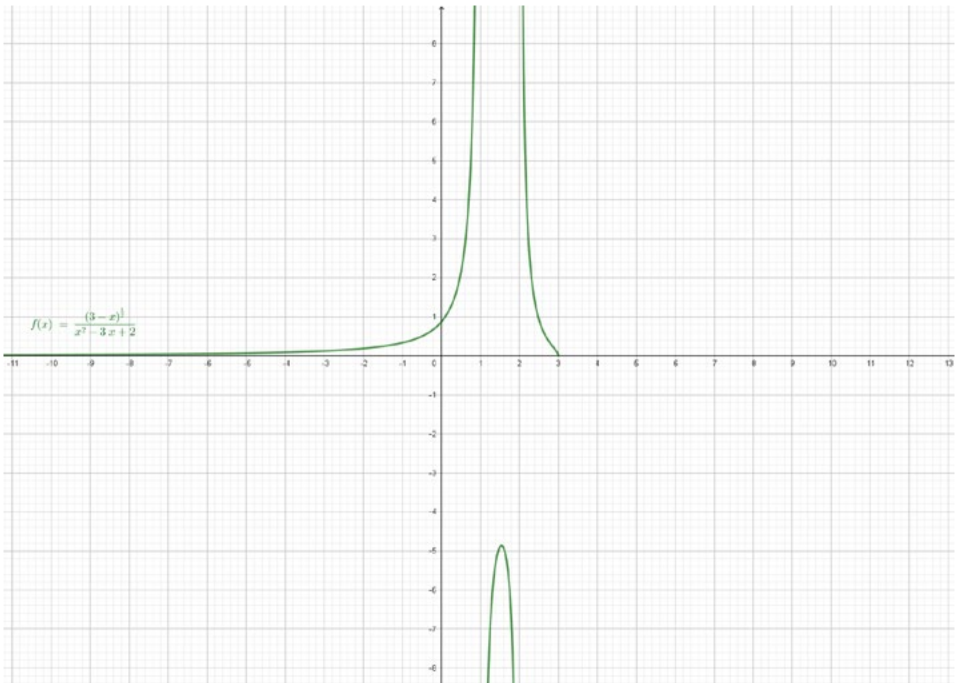
El rango o recorrido de la función está dado por:

$$Rango = \left\{y, tal\ que\colon f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 25} \in \mathbb{R}\right\} = \{y, tal\ que\colon\ y \leq 0\ \wedge\ y > 0\}$$
$$= (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

Ejemplo 4.12.

Graficar y encuentre el dominio de rango de la función: $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{x^2-3x+2}$

Solución: La gráfica es:



Gráfica 38. Función lineal

El dominio de la función está dado por:

$$Dominio = \left\{x, tal\ que\text{:}\ f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{x^2-3x+2} \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= \{x^2 - 3x + 2 \neq 0 \ \wedge \ 3 - x \geq 0\}$$
$$= (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3)$$

El rango o recorrido de la función está dado por:

$$Rango = \left\{y, tal\ que\text{:}\ f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{x^2-3x+2} \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= \{y, tal\ que\text{:}\ y \leq -4.86 \ \wedge \ y \ \geq \ 0\} = (-\infty, -4.86) \cup (0, \infty)$$

TALLER 4

1) Determinar si cada uno de los siguientes conjuntos de pares ordenados define una función, y en tales casos especifique el dominio y el conjunto imagen.

S = { (1, 2), (2, 1), (3, 2), (5, - 1), (1, 3) }

S = { (x, y) / $y = 2x + 1, 0 \leq x \leq 2$ }

S = { (x, y) / $x + y = 1, x > 3$ }

2) Sean *f*: $R \to R$, *g*: $R \to R$ y *h*: $R \to R$, funciones definidas por: $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 2$ y $h(x) = x + 4$. Hallar:

f(x)/g(x)

h(x) g(x)

f(x) + g(x) - h(x)

f(x) o g(x)

h(x) o f(x)

g(x) o h(x).

3) Construir las gráficas correspondientes a las siguientes funciones, y determine el dominio y codominio o rango:

f(x) = 2x - 3

g(x) = x

f(x) = 4

h(x) = $x^2 + 3$

f(x) = x^3

4) Si $f(x) = x^2 + 3x - 2$, hallar *f(- 3), f(- 2), f(- 1), f(0), f(1/2), f(2/3), f(3), f(2), f(1)* y *f(a + 2)* Con la ayuda de los puntos anteriores trace la gráfica de dicha función.

5) Dada la función $f(x) = \sqrt{x+1}$, hallar *f*(-*1*)*, f*(*0*)*, f*(*1*)*, f*(*2*)*, f*(*3*). ¿Cuál es el dominio de *f*(*x*)*?.* Trace la gráfica.

6) A continuación, encontrar el dominio y el rango de la función especificada, grafique la función en el plano cartesiano haciendo *f(x) = y.*

a) $f(x) = 4 - x^2$ b) $f(x) = \sqrt{3 - x}$ c) $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16}$ d) $f(x) = 3$

Capítulo V

Función Lineal

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN LINEAL

Una función polinómica de la forma $f(x) = mx + b$ se llama función lineal, donde m y b son números reales constantes. Se llama lineal porque su gráfica es una línea recta [5].

Ejemplo 5.1:

Dada $y = f(x) = 4x - 3$ Hallar:

a. Dominio y recorrido de la función.

b. Trazar la gráfica.

Solución:

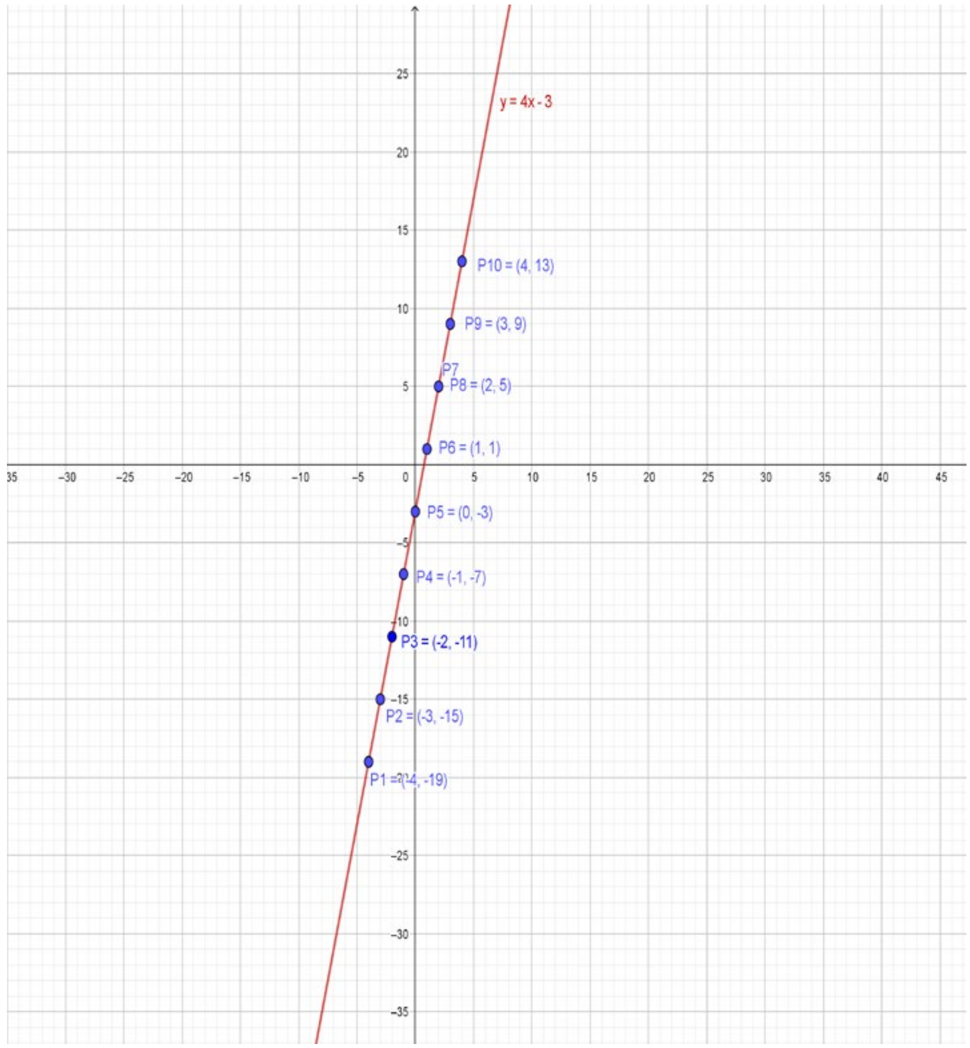
Elaboremos una pequeña tabla de valores donde se le dan valores a *x* y para poder obtener valores en *y:*

Tabla 3. Valores de x vs y

x	- 4	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4
y	- 19	- 15	- 11	- 7	- 3	1	5	9	13

a. Para determinar el dominio ***y*** rango de la función, analizamos los valores que están tomando tanto ***x*** como ***y*** . Como puede observarse ***x*** puede tomar cualquier valor y *y* a su vez toma cualquier valor, por tanto **el dominio y el rango son todos los número reales**.

b. Localizando en el plano cartesiano los puntos obtenido en la tabla, trazamos su gráfica.



Gráfica 39. Función lineal

Pendiente de una línea recta.

Definición:

Sean ($x1$, $y1$) y (x, y) dos puntos cualquiera de una línea recta, tales que $x1 \neq x$ El número m definido por:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Se le llama pendiente de la recta.

Ejemplo 5.2:

Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos (- 1, -2) y (5, -6)

Solución:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{(-6)-(-2)}{(5)-(-1)} = \frac{-6+2}{5+1} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

La pendiente de la recta determinada por la función $f(x) = mx + b$ es m. O sea que el valor de la pendiente es el coeficiente de x. Además la pendiente de la recta es constante.

Ejemplo 5.3:

Dado $y = f(x) = 2x - 1$, Hallar:

a. Dominio y recorrido de la función.

b. Pendiente.

c. Graficar.

Solución:

a. El dominio y el recorrido de toda función lineal son los números reales.

b. La pendiente es $m = 2$, porque es el coeficiente de x.

c. Para graficar una función lineal basta con hallar los puntos de corte o interceptos con los ejes.

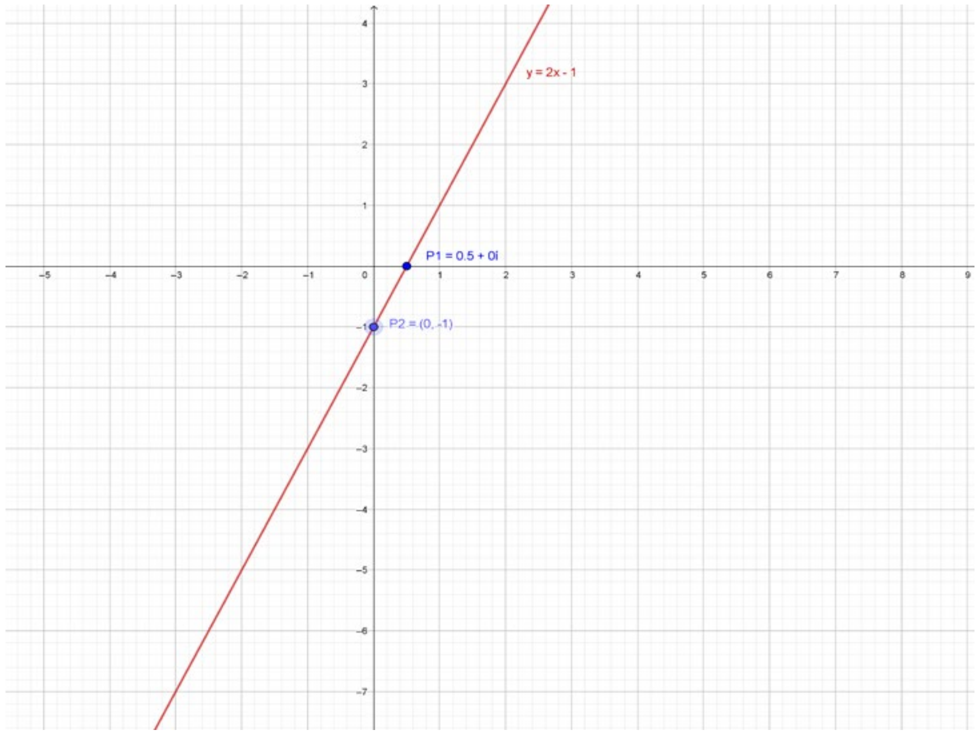
El intercepto con el eje x se busca haciendo $y = 0$ es decir:

Si $y = 0$ entonces, $0 = 2x - 1$, despejando el valor de x tenemos: $x = \frac{1}{2}$, del análisis anterior tenemos el punto (½ , 0).

Para encontrar el intercepto con y hacemos $x = 0$, es decir:

Si $x = 0$ entonces, $y = 2(0) - 1 = 0 - 1 = -1$, o sea que cuando $x = 0$ y vale -1, con base a lo anterior tenemos el punto (0, -1)

Al ubicar los puntos (½ , 0) y (0, -1) en el plano cartesiano y al unirlos por una recta se obtiene el siguiente gráfico.



Gráfica 40. Función lineal

Cómo encontrar la ecuación de una recta dada la pendiente y punto por donde pasa:

Ejemplo 5.4:

Escribir una ecuación en forma explícita para la recta que tiene pendiente *m = 3* y pasa por el punto (1, 4).

Solución:

Sabemos que la ecuación general de la recta es: ***y = mx + b.***

Los valores que nos han dado son: *m = 3,*

Y el punto (x = 1, y = 4).

Con base a los datos anteriores tenemos que si: m = 3 entonces la ecuación ***y = mx + b*** *nos queda de la forma y = 3x + b, Y para encontrar el valor de b hacemos usos del punto (x = 1, y = 4).*

Sustituyendo los valores de (*x = 1, y = 4*) en la ecuación ***y = 3x + b*** tenemos que:

4 = 3 (1) + b,

4 = 3 + b,

4 - 3 = b,

1 = b.

Una vez conocidos los valores de *b = 1* y los de *m = 3,* al sustituirlos en la **ecuación general *y = mx + b*** obtendremos la ecuación de la recta buscada, la cual es: ***y = 3x + 1.***

Otra forma de encontrar la ecuación de la recta anterior es haciendo uso de:
$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

Al sustituir de una vez los valores de *m = 3* y de (*x1 = 1, y1 = 4*) en la ecuación anterior tenemos que:

$$3 = \frac{y - (4)}{x - (1)}$$

$$3 = \frac{y - 4}{x - 1}$$

$$3(x - 1) = y - 4$$

$$3x - 3 = y - 4$$

$$3x - 3 + 4 = y$$

$$3x + 1 = y$$

Se puede ver que la ecuación de la recta es ***y = 3x + 1.***

5.3 Cómo encontrar la ecuación de una recta dados dos puntos por donde pasa:

Ejemplo 5.5:

Escribir una ecuación en la forma explícita para la recta que pasa por (2, 3) y (4, 7).

Solución:

Se halla la pendiente *m* de la recta:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Hacemos (*x = 2, y = 3*) y (*x1 = 4, y1 = 7*) sustituyendo estos valores en la ecuación anterior obtenemos que:

$$m = \frac{(3) - (7)}{(2) - (4)} = \frac{3 - 7}{2 - 4} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Después se halla la ecuación de la recta con el valor de la pendiente *m= 2* y cualquier punto de los dos puntos dados, por ejemplo si tomamos el punto (4, 7), entonces:

Al sustituir los valores de *m = 2* y de (*x1 = 4, y1 = 7*) en $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
&(2) = \frac{y-(7)}{x-(4)} \\
&2 = \frac{y-7}{x-4} \\
&2(x-4) = y-7 \\
&2x-8 = y-7 \\
&2x-8+7 = y \\
&2x-1 = y
\end{aligned}
$$

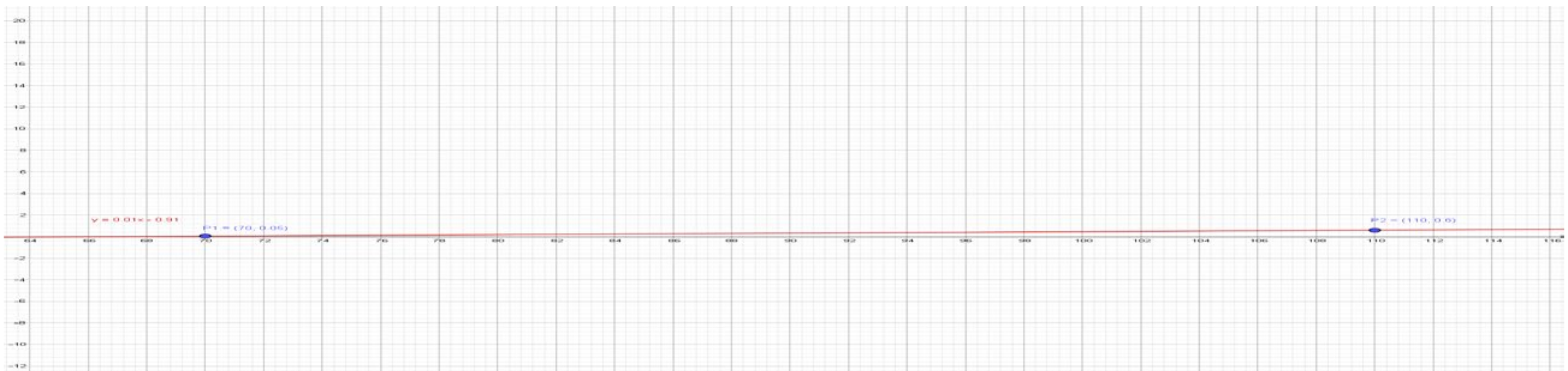
Por lo tanto la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados es ***y = 2x - 1.***

Ejemplo 5.6:

Graficar y encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (70, 0.05) y (110, 0.60).

Solución:

La gráfica es:



Gráfica 41. Función lineal

Para encontrar la ecuación de la recta encontramos primero la pendiente *m* de la recta:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Hacemos ($x = 70, y = 0.05$) y ($x_1 = 110, y_1 = 0.6$) sustituyendo estos valores en la ecuación anterior obtenemos que:

$$m = \frac{(0.05) - (0.6)}{(70) - (110)} = \frac{0.05 - 0.6}{70 - 110} = \frac{-0.55}{-40} = 0.01375$$

Después se halla la ecuación de la recta con el valor de la pendiente $m= 0.01375$ y cualquier punto de los dos puntos dados, por ejemplo si tomamos el punto (110, 0.6), entonces:

Al sustituir los valores de $m = 0.01375$ y de ($x_1 = 110, y_1 = 0.6$) en $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ se obtiene que:

$$(0.01375) = \frac{y - (0.6)}{x - (110)}$$

$$0.01375 = \frac{y - 0.6}{x - 110}$$

$$0.01375(x - 110) = y - 0.6$$

$$0.01375x - 1.5125 = y - 0.6$$

$$0.01375x - 1.5125 + 0.6 = y$$

$$0.01375x - 0.9125 = y$$

y = 0.01375x - 0.9125 es la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados.

Rectas Paralelas.

TEOREMA: ***Dos rectas son paralelas si sólo si tienen la misma pendiente.***

Si *m1* y *m2* son las pendientes de dos rectas paralelas, entonces *m1 = m2.*

Rectas Perpendiculares.

TEOREMA: ***Dos rectas son perpendiculares sólo si el producto de sus pendientes es - 1.***

Si *m1* y *m2* son las pendientes de dos rectas perpendiculares, entonces *m1 m2* = -1.

TALLER 5

1. Dada la función ***y = f(x) = 3x - 5*** que representa la **Espacio (mt) vs Tiempo (sg).** Hallar:

a. El dominio y codominio de la función.

b. La pendiente.

c. Y la gráfica de la función.

2. Graficar y encontrar la ecuación de la recta que se obtiene del **Voltaje (Vol) vs Corriente (Amp)**, y que pasa por los puntos (10, 1) y (20, 3).

3. Dada la función ***y = f(x) = 7x - 3*** que representa la **Fuerza (New) vs Aceleración (m/sg2).** Hallar:

a. El valor de la fuerza cuando la aceleración toma los siguientes valores:

10

37

20

30

b. La pendiente.

c. Y la gráfica de la función.

4. Escribir una ecuación en forma explícita para la recta obtenida de graficar la **Fuerza (New) vs Desplazamiento (mt)**. y cuya pendiente es $m = 5$ y pasa por el punto (6, 2).

5. Graficar y encontrar la ecuación de la recta que se obtiene del **Espacio (mt) vs (tiempo)^2 (sg2)**, y que pasa por los puntos (5, 12) y (10, 13).

6. Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

a. (2, 3), (-1, -4) **b.** (-5, 1), (-3, -2) **c.** (3, 6), (1, 7)

7. Encontrar una ecuación de la recta con pendiente dada que pasa por el punto dado:

a. m = 2, (-1, 3) **b.** m = 0, (2, -1) **c.** m = ½ , (-2, 5) **d.** m = 2/3, (-4, -1)

8. Encuentre la pendiente *m* y la ordenada de la recta cuya ecuación se da, después dibuje la recta:

$2x = 3y$

$3x + 4y = 6x$

$x + y = 1$

$2x = 3 - 5y$

$2x - y + 3 = 0$

9. Escribir la ecuación de la recta **L** que se describe:

L es vertical y su abscisa al origen es 7.

L es horizontal y pasa por (3, -5).

L tiene abscisa al origen 2 y ordenada al origen - 3.

L pasa por (2, -3) y (5, 3).

L pasa por (- 1, - 4) con pendiente 1/2.

L pasa por (4, 2) con un ángulo de inclinación de 135º.

L pasa por (1, 5) y es paralela a la recta cuya ecuación es $2x + y = 10$.

L pasa por (- 2, 4) y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $3x + 2y = 17$.

10. Encuentre la distancia perpendicular entre las rectas paralelas $y = 5x + 1$ y $y = 5x + 9$.

11. Si el punto (3, k) está sobre la recta de pendiente m = - 2 que pasa por (2, 5), hallar k.

12. ¿Está el punto (3, - 2) sobre la recta que pasa por los puntos (8, 0) y (- 7, - 6)?

13. Usar pendientes para determinar si los puntos (7, - 1), (10, 1) y (6, 7) son los vértices de un triángulo.

14. Usar pendientes para determinar si los puntos (8, 0), (- 1, - 2), (- 2, 3) y (7, 5) son los vértices de un paralelogramo.

15. Hallar k de modo que los puntos A(7, 3), B(- 1, 0) y C(k, - 2) sean los vértices de un triángulo rectángulo con ángulo recto en B.

16. Determinar si los siguientes pares de rectas son paralelas, perpendiculares, o ni lo uno ni lo otro:

a) $y = 3x + 2; \quad y = 3x - 4$

b) $y = 2x - 4; \quad y = 3x + 5$

c) $3x - 2y = 5; \quad 2x + 3y = 4$

d) $6x + 3y = 1; \quad 4x + 2y = 3$

e) $x = 3; \quad y = -4$

17. Hallar la distancia del punto (- 1, 2) a la recta $8x - 15y = 3$.

18. Hallar la distancia del punto (4, 7) a la recta $3x + 4y = 1$

Capitulo VI

Funcion Cuadrática

DEFINICION DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática es una función polinómica de grado 2. La forma general viene dada por ***f(x) = ax² + bx + c,*** en donde ***a, b*** y ***c*** son números reales, ***a*** ≠ 0 [6].

Ejemplo 6.1.

$$f(x) = x^2 \qquad \text{donde } a = 1, b = 0 \text{ y } c = 0$$
$$f(x) = x^2 - 1 \qquad \text{donde } a = 1, b = 0 \text{ y } c = -1$$
$$f(x) = 2x^2 + 5x + 6 \qquad \text{donde } a = 2, b = 5 \text{ y } c = 6$$

Construcción de gráficas de funciones cuadráticas.

Ejemplo 6.2.

Construir la gráfica de la función $y = x^2$

Primero encontramos el vértice de la parábola o curva que se obtiene de las funciones cuadráticas, el vértice de la parábola está dado por el punto.

$$\left(x = \frac{-b}{2a}; y = f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right)$$

Calculemos el vértice de la función $\boldsymbol{y = x^2}$, en donde $a = 1$ y $b = 0$, por lo tanto el valor de $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(0)}{2(1)} = \frac{0}{2} = 0$, para encontrar el valor de $y = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ reemplazamos el valor de $x = \frac{-b}{2a} = 0$ en la función $\boldsymbol{y = x^2}$, es decir:

$f\left(x = \frac{-b}{2a} = 0\right) = f(0) = (0)^2 = 0$, por lo tanto el vértice de la parábola es el punto (0, 0), como el signo que acompaña a x^2 es positivo entonces la gráfica abrirá hacia arriba.

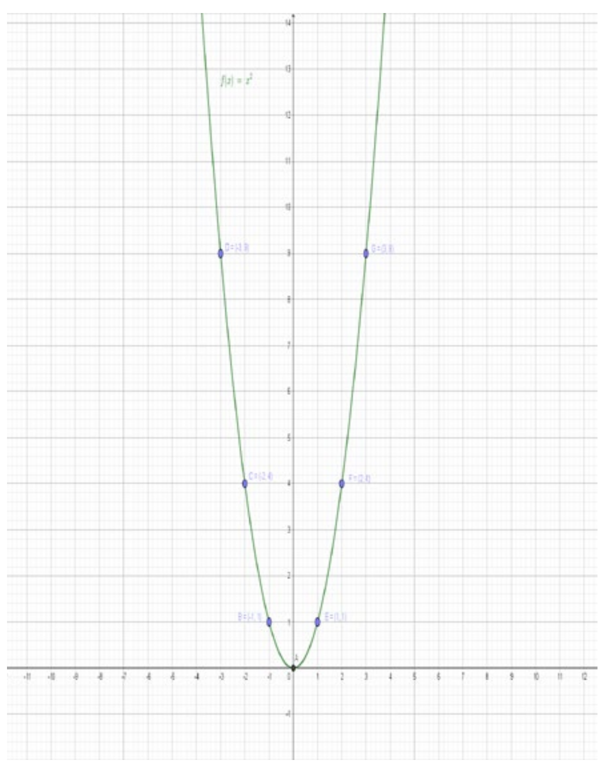
Para guiarnos con más precisión en la trayectoria de la gráfica tomaremos un número suficiente de puntos para determinar la forma de la curva. A continuación construiremos una tabla de valores

Tabla 4. Valores de x vs y de una parábola

Pto. vértice							
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y = f(x)	9	4	1	0	1	4	9

Observemos que la variable independiente *x* puede tomar cualquier valor o número real, o sea que el dominio está formado por el conjunto de los número reales **R.** Esto se cumple para toda función cuadrática.

Los valores de *y* dependen de los valores que se le dé a *x*, por esa razón se llama variable dependiente. La gráfica de la función $\boldsymbol{y = x^2}$ es:



Gráfica 42. Función cuadrática

El vértice o punto $\left(x = \frac{-b}{2a}; y = f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$, nos determina el cambio de la curva.

Ejemplo 6.3.

Gráfica de la función ***y = - x² + 4***

Encontramos primero el vértice de la parábola, el cual está dado por el punto $\left(x = \frac{-b}{2a}; y = f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.

Calculemos ahora el vértice de la función ***y = - x² + 4***, en donde *a = - 1* y *b = 0,* por lo tanto el valor de $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(0)}{2(-1)} = \frac{0}{-2} = 0$, para encontrar el valor de $y = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ reemplazamos el valor de $x = \frac{-b}{2a} = 0$ en la función ***y = f(x) = - x² + 4***, es decir:

$y = f\left(x = \frac{-b}{2a} = 0\right) = f(0) = -(0)^2 + 4 = -0 + 4 = 4$, por lo tanto el vértice de la parábola es el punto (0, 4), como el signo que acompaña a x^2 es negativo entonces la gráfica de la parábola abrirá hacia abajo.

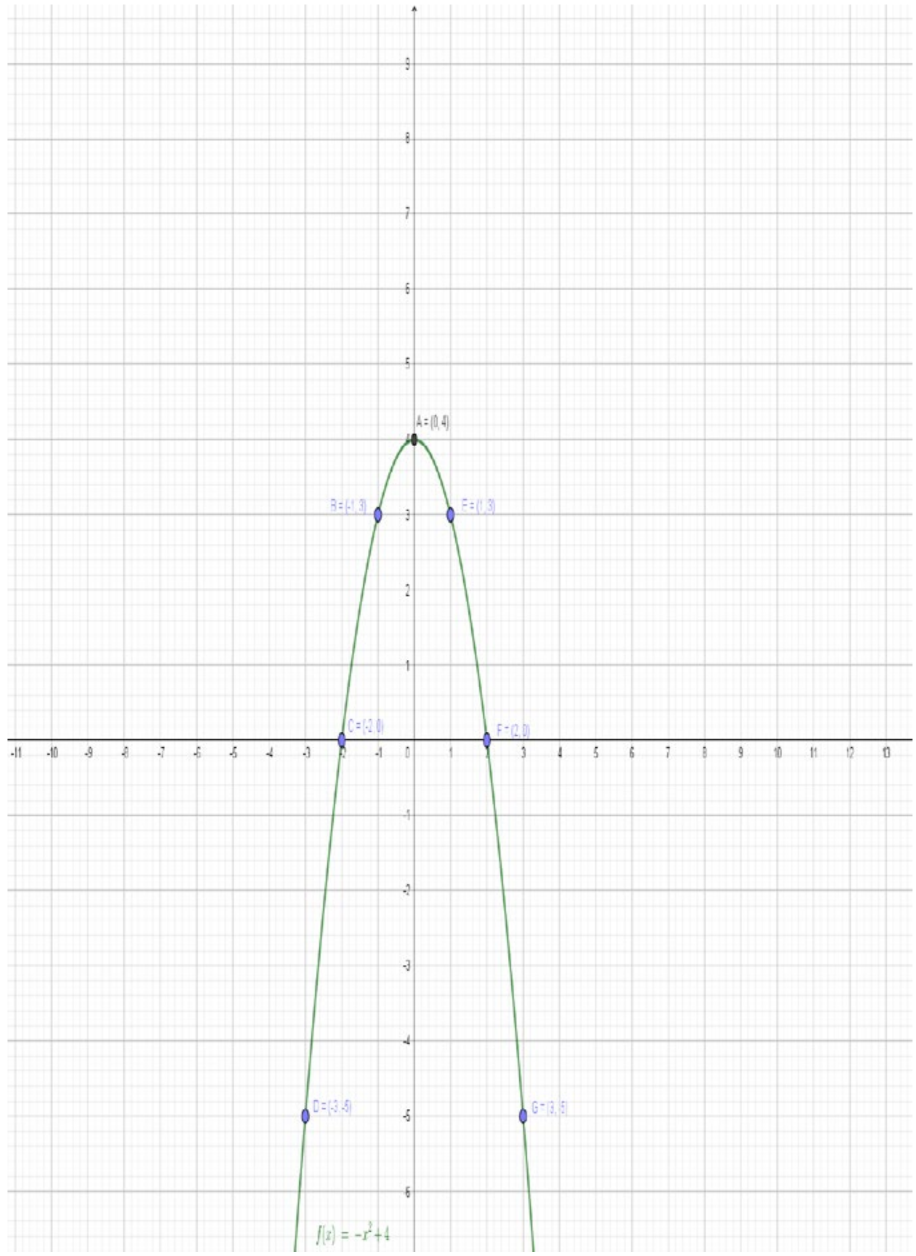
Para guiarnos con más precisión en la trayectoria de la gráfica tomaremos un número suficiente de puntos para determinar la forma de la curva. A continuación construiremos una tabla de valores.

Tabla 5. Valores de x vs y de una parábola

Pto. vértice							
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y = f(x)	-5	0	3	4	3	0	-5

Recordemos que la variable independiente *x* puede tomar cualquier valor o número real, o sea que el dominio está formado por el conjunto de los números reales **R.** Esto se cumple para toda función cuadrática.

Los valores de *y* dependen de los valores que se le dé a *x,* por esa razón se llama variable dependiente. La gráfica de la función ***y = - x² + 4*** es:



Gráfica 43. Función cuadrática

Observaciones importantes para graficar bien una función cuadrática.

a. La gráfica de una función cuadrática ***f(x) = ax² + bx + c*** tiene la misma forma que la gráfica de ***f(x) = x²*** o ***f(x) = - x² + 4***, aunque varía la posición de la gráfica, dependiendo esta posición de los valores específicos de *a, b,* y *c*. ***Tales gráficas se llaman parábolas.***

b. Si ***a > 0***, la parábola abre hacia arriba, es decir, tiene la misma forma que la gráfica ***f(x) = x²*** la parábola abierta hacia arriba presenta un punto más bajo que los demás o ***punto mínimo.***

c. Si ***a < 0***, la parábola abre hacia abajo, es decir, tiene la misma forma que la gráfica ***f(x) = -*** $\boldsymbol{x^2}$ ***+ 4*** la parábola abierta hacia abajo presenta un punto más alto que los demás o ***punto máximo.***

d. El ***vértice*** de la parábola es el punto más bajo de la curva cuando ésta se abre hacia arriba y es el punto más alto de la curva cuando ésta se abre hacia abajo.

e. Para buscar dónde la gráfica corta al eje de ***y = f(x)*** se hace cero la variable *x,* es decir cuando *x = 0* la gráfica corta el eje de las *y*. Y para saber dónde corta la gráfica al eje de las ***x*** hacemos cero a *y = f(x)*, es decir cuándo *y = f(x) = 0* la curva corta al eje de las *x*, para encontrar el valor de *x* cuando *y = f(x) = 0* despejamos a *x.*

Ejemplo 6.4.

Teniendo en cuenta los pasos anteriores Gráfica de la función ***y = 3***$\boldsymbol{x^2}$ ***- 5x - 2***

- Como ***a = 3 > 0*** la parábola abre hacia arriba.
- Encontramos primero el vértice de la parábola, el cual está dado por el punto $\left(x = \frac{-b}{2a}; y = f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.

Para calcular el vértice de la función ***y = 3***$\boldsymbol{x^2}$ ***- 5x - 2***, hay que tener en cuenta que: *a = 3*, *b= -5* y *c = -2*, por lo tanto el valor de $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2(3)} = \frac{5}{6}$, para encontrar el valor de $y = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ reemplazamos el valor de $x = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{6}$ en la función ***y = 3***$\boldsymbol{x^2}$ ***- 5x - 2***, es decir:

$$y = f\left(x = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{6}\right) = f\left(\frac{5}{6}\right) = 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{6}\right) - 2 = 3\left(\frac{25}{36}\right) - 5\left(\frac{5}{6}\right) - 2 = \frac{75}{36} - \frac{25}{6} - 2 = \frac{-49}{12}$$

Por lo tanto el vértice de la parábola es el punto (5/6, - 49/12).

- Para buscar dónde la gráfica corta el eje de la *y* hacemos a *x = 0*, es decir, cuando *x = 0* entonces: *f(0) = 3(0)2 - 5(0) - 2 = -2*, entonces el punto donde la curva corta al eje de la *y* es (0, -2).
- Para buscar donde la curva corta el eje de la *x* hacemos a *y = f(x) = 0,* es decir,

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

Para despejar x Aplicamos la FORMULA GENERAL :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ como } a = 3, b = -5 \text{ y } c = -2, \text{ tenemos que :}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

Por lo tanto los valores de x son :

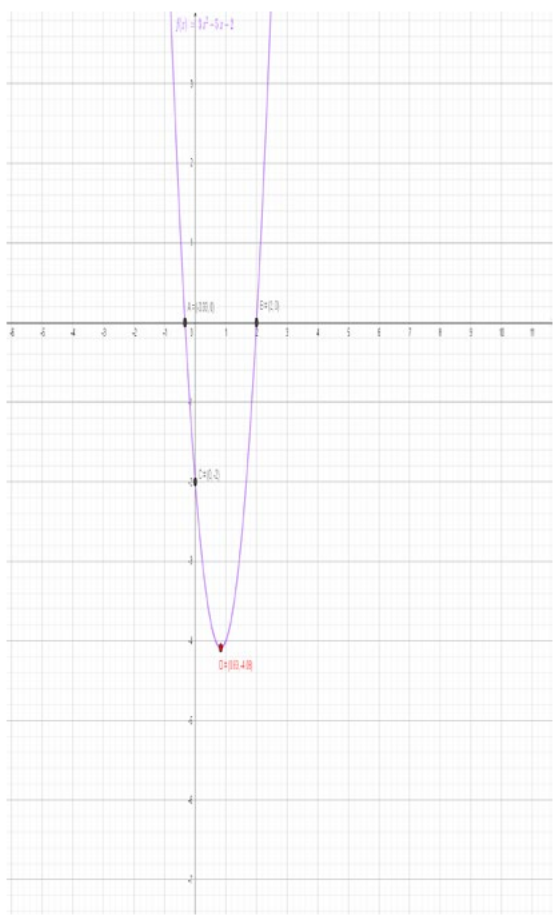
$$x = \frac{5+7}{6} = \frac{12}{6} = 2 \text{ Lo que indica que la curva pasa por el punto } (2, 0)$$

$$x = \frac{5-7}{6} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3} \text{ Lo que indica que la curva pasa por el punto } \left(\frac{-1}{3}, 0\right)$$

Los puntos encontrados son suficientes para determinar la forma de la curva. A continuación se muestran los puntos obtenidos en una tabla de valores.

Tabla 6. Valores de x vs y de una parábola

Pto. vértice				
x	-1/3	0	5/6	2
y = f(x)	0	-2	- 49/12	0



Gráfica 44. Función cuadrática

Recuerda que la variable independiente *x* puede tomar cualquier valor o número real, si quieres darle más valores a la tabla. Lo anterior significa que el dominio está formado por el conjunto de los números reales **R.** Esto se cumple para toda función cuadrática. Los valores de *y* dependen de los valores que se le dé a *x,* por esa razón se llama variable dependiente. La gráfica de la función $y = 3x^2 - 5x - 2$ es:

TALLER 6

En las siguientes ecuaciones cuadráticas encuentre:

El vértice.

El eje de simetría.

Y realice su grafica.

1) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

2) $f(x) = 1 - x^2$

3) $f(x) = 3x^2 + 2x$

4) $f(x) = \dfrac{-x^2}{2} + 5$

5) $f(x) = 4x^2 + x - 1$

6) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2}$

Capítulo VII

Sucesiones

SUCESIONES INFINITAS

Límites de sucesiones.

INTRODUCCIÓN

La idea de límite es la noción más importante del cálculo; dicho concepto es la base de la diferenciación e integración que veremos en capítulos posteriores.

En este capítulo utilizaremos las sucesiones para desarrollar en forma sencilla la noción de límite y así poderla llevar a funciones de dominio real sin mucha dificultad.

Sucesiones y límites.

DEFINICIÓN: Sucesión infinita es una función cuyo dominio es el conjunto de todos los enteros mayores que, o iguales a, algún número natural dado [7].

O sea, sucesión infinita = $f : A \rightarrow R$ donde $A = \{n \in \mathbf{Z} \ / \ n \geq k, k \in \mathbf{N}\}$

$= \{(n, f(n)) \ / \ n, k \in \mathbf{N}, n \geq k\}$

$= \{(k, f(k)), (k+1, f(k+1)),..., (n, f(n)),...\}$ expresión (1)

Los elementos del rango de una sucesión se denominan términos de la sucesión y los denotaremos con la letra a subindizada. Así:

a_1 es el término de la sucesión correspondiente al número natural 1.

a_2 es el término de la sucesión correspondiente al número natural 2.

a_3 es el término de la sucesión correspondiente al número natural 3.

a_n es el término de la sucesión correspondiente al número natural n.

a_n lo llamaremos término general de la sucesión.

Para mayor sencillez denotaremos la sucesiones con el término general encerrado entre llaves y las parejas por términos de la sucesión; en lugar de la expresión (1) escribimos:

$$a_n = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, .., a_n, ...\}$$

Ejemplo 7.1.

Sea la sucesión infinita, $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ definida por:

$$f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ entonces } f = \left\{\left(1, \frac{1}{2}\right), \left(2, \frac{1}{4}\right), \left(3, \frac{1}{8}\right), ..., \left(n, \frac{1}{2^n}\right), ...\right\}$$

En forma sencilla: $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ..., \frac{1}{2^n}, ...\right\}$

Ejemplo 7.2.

Sea la sucesión infinita $\left\{\frac{1}{n-2}\right\}, n \geq 3$

Entonces: $\left\{\frac{1}{n-2}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n-2}, ...\right\}$

Primer término de la sucesión: $a_3 = 1$

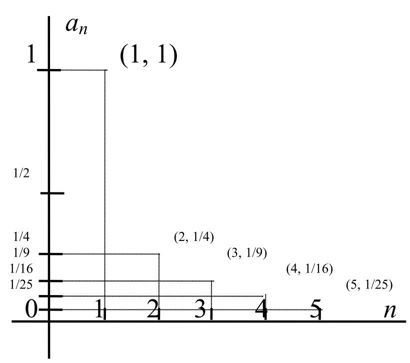
Término general de la sucesión: $a_n = \frac{1}{n-2}$

Representación geométrica de una sucesión.

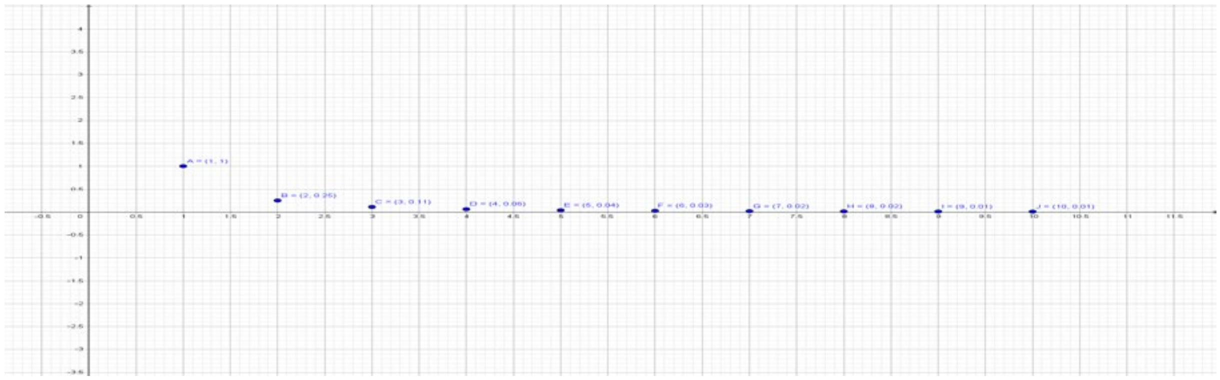
Para representar geométricamente una sucesión $\{a_n\}$ elegimos un sistema de ejes rectangulares en el plano; sobre el semieje horizontal a la derecha del origen (*on*) representamos los números naturales y sobre el eje vertical (a_n) los términos correspondientes de la sucesión.

El conjunto de puntos (n, a_n) localizados en el plano es la representación geométrica de la sucesión $\{a_n\}$.

Ejemplo 7.3. Sea la sucesión $\left\{\frac{1}{n^2}\right\} = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, ...\right\}$



Gráfica 45. Función cuadrática



Gráfica 46. Función cuadrática

Clasificación de las sucesiones.

Sucesiones crecientes y decrecientes

Definición: $\{a_n\}$ es una sucesión creciente si cada uno de sus términos es mayor que su predecesor, es decir $a_n > a_{n-1}$ $\forall n \in$NI.

Ejemplo: $\{2_n\} = \{2, 4, 8, 16, 32,...\}$, es una sucesión creciente.

Definición: $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente si cada uno de sus términos es menor que el término anterior a él, es decir $a_n < a_{n-1}$ $\forall(n \in$NI)

Ejemplo: $\{1/n\} = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5,...\}$, es una sucesión decreciente.

Definición:

$\{a_n\}$ es una sucesión creciente si $a_n \geq a_{n-1}$ $\forall(n \in$NI).

$\{a_n\}$ es una sucesión decreciente si $a_n \leq a_{n-1}$ $\forall(n \in$NI)

Sucesiones acotadas superior e inferiormente.

Definición: $\{a_n\}$ está acotada superiormente si existe por lo menos un número real w tal que para todo ai perteneciente a $\{a_n\}$: $ai \leq w$, o sea, $\{a_n\}$ está acotada superiormente $\Leftrightarrow (\exists w \in R)(\forall a_i \in \{a_n\})(a_i \leq w)$, w es una cota superior de $\{a_n\}$.

Si $\{a_n\}$ es una sucesión acotada superiormente y W_o es la menor de las cotas superiores, decimos que W_o es el *supremum* de $\{a_n\}$ y lo denotamos por: ***Wo=sup*** $\{a_n\}$

Ejemplo 7.4. La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$ está acotada superiormente.
Cotas superiores: $\{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 1\}$

Sup {1/*n*} = 1

Definición: $\{a_n\}$ está acotada inferiormente si existe por lo menos un número real *m* tal que para todo *ai* perteneciente a $\{a_n\}$: *ai* ≥ *m*, o sea, $\{a_n\}$ está acotada inferiormente $\Leftrightarrow (\exists m \in R)(\forall a_i \in \{a_n\})(a_i \geq m)$, *m* es una cota inferior de $\{a_n\}$.

Si $\{a_n\}$ es una sucesión acotada inferiormente y M_o es la mayor de las cotas inferiores, decimos que M_o es el *infimum* de $\{a_n\}$ y lo denotamos por: $\boldsymbol{M_o}$***=inf*** $\{a_n\}$

Ejemplo 7.5. La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ está acotada inferiormente.

Cotas superiores: {*x* ∈ **R** / *x* ≤ 0}

Inf {1/*n*} = 0

Ejemplo 7.6. Sea la sucesión $\left\{\frac{2n^2}{n^2+1}\right\} = \left\{1, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, \frac{32}{17}, \frac{25}{13}, \frac{72}{37}, \ldots\right\}$

Sup $\{a_n\}$= 2, *Inf* $\{a_n\}$= 1

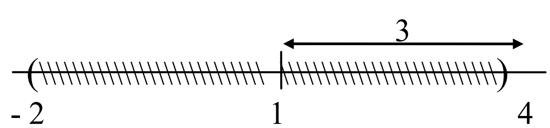
Definición: $\{a_n\}$ es una sucesión acotada si lo es superior e inferiormente, o sea: $\{a_n\}$ está acotada $\Leftrightarrow (\exists x \in R)(\forall a_i \in \{a_n\})(|a_i| \leq s)$

Ejemplo 7.7. La sucesión {(- 1)*n* } = {-1, 1, -1, 1, -1,...} es una sucesión acotada.

Ejemplo 7.8. La sucesión { n^2 }= {1, 4, 9, 16,...} no es una sucesión acotada ya que no está acotada superiormente.

Entorno y entorno separado de un punto.

Consideremos el intervalo abierto (- 2, 4).



Gráfica 47. Entorno

Obsérvese que 1 es el centro del intervalo (- 2, 4) y que la distancia del centro al punto - 2 o a 4 es 3. Decimos que el intervalo (- 2, 4) es un entorno de centro 1 y radio 3 y lo denotamos por: ***E3 (1)***.

Definición: Llámese entorno de centro *a* y radio *r* al intervalo abierto

$$(a-r;a+r), \text{ o sea: } E_r(a)=\{x\in R/|x-a|<r\}$$

Ejemplo 7.9. $E_3(2)=\{x\in R/|x-2|<3\}=(-1,5)$

Definición: Entorno separado del número real *a* y de radio *r* es el entorno de centro *a* y radio *r* del cual se ha excluido *a*. Lo denotaremos por $E_r^*(a)$, o sea:

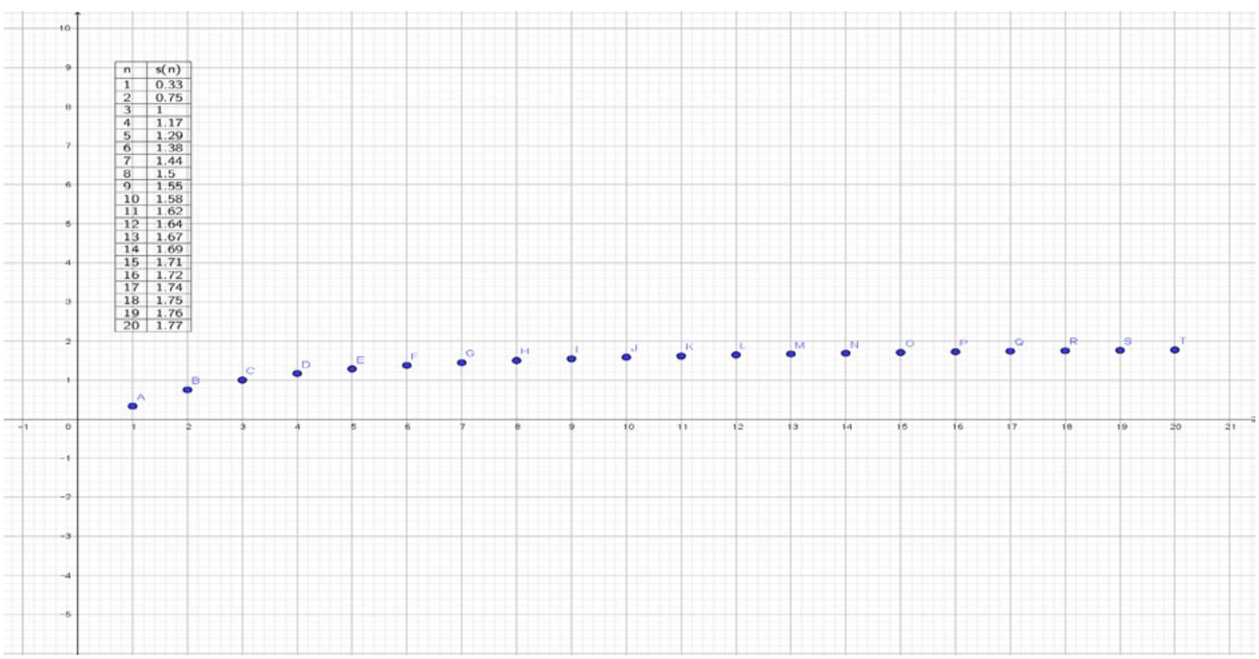
$$E_r^*(a)=\{x\in R/0<|x-a|<r\}=(r-a;r+a)-\{a\}$$

Ejemplo 7.10. $E_3^*(1)=\{x\in R/0<|x-1|<3\}=(-2;1)\cup(1,4)$

Ejemplo 7.11.¿Qué términos de la sucesión $\left\{\frac{2n-1}{n+2}\right\}$ quedan dentro $E_{10^{-3}}(2)$

Solución:

La gráfica es:



Gráfica 48. Sucesiones

$$|a_n-2|<\frac{1}{1000}\Rightarrow\left|\frac{2n-1}{n+2}-2\right|=\left|\frac{-5}{n+2}\right|=\frac{5}{n+2}<\frac{1}{1000}$$

Entonces, $n+2>5000$. Luego, $n>4998$

$\forall n>4998$, a_n quedan en el entorno $E_{0,001}(2)$

Limites de sucesiones convergentes.

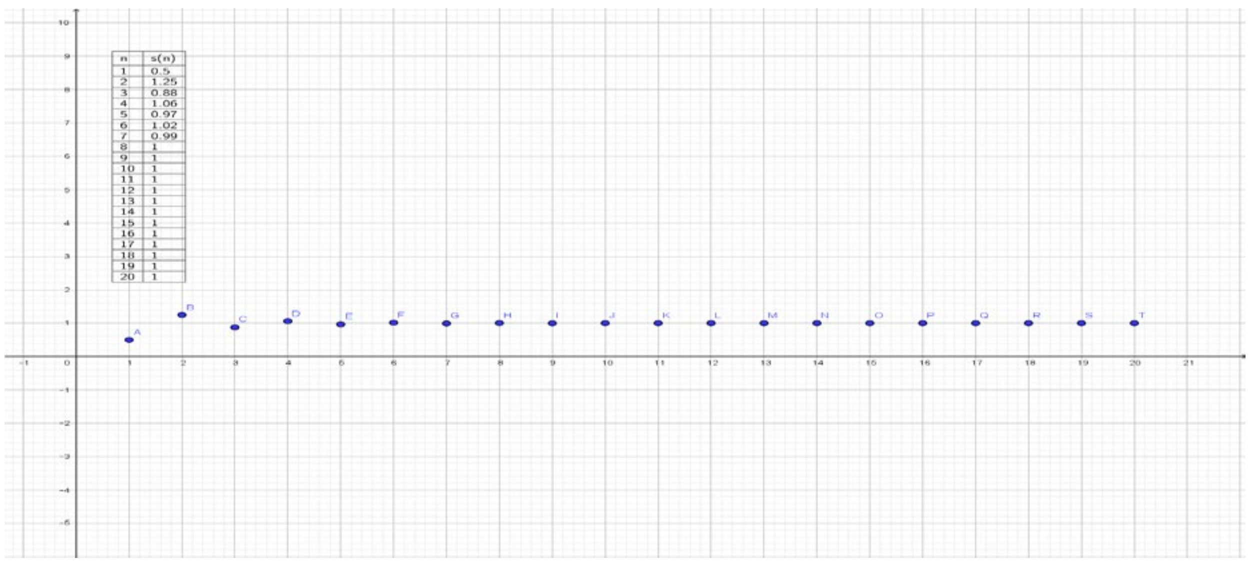
Ejemplo 7.12. Sea la sucesión $\left\{1+\frac{(-1)^n}{2^n}\right\}$

¿Qué términos de la sucesión quedan dentro del entorno $E_\varepsilon(1)$

ε: lo llamaremos épsilon y representa un número positivo tan pequeño como se desee.

Solución:

La grafica es:



Gráfica 49. Sucesiones

El cálculo de los términos de la sucesión quedan dentro del entorno $E_\varepsilon(1)$ es:

$$|a_n - 1| = \left|1+\frac{(-1)^n}{2^n}-1\right| = \frac{1}{2^n}, \text{como}:$$

$$|a_n - 1| < \varepsilon \text{, entonces, } \frac{1}{2^n} < \varepsilon, \text{ o sea, si } n > \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}$$

$$\forall n > \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}, a_n \in E_\varepsilon(1)$$

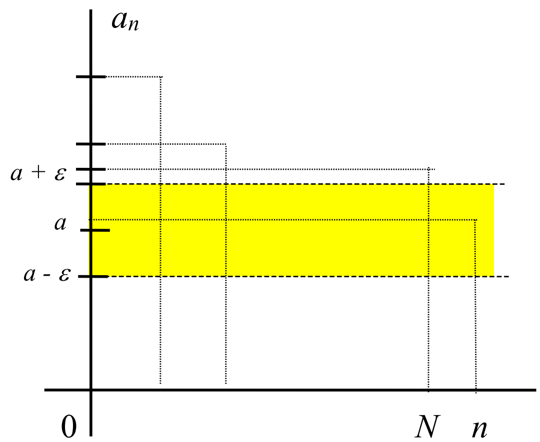
Si dado cualquier ε, $|a_n - a| < \varepsilon$ decimos que la sucesión $\{a_n\}$ converge a *a* y escribimos $\{a_n\} \to a$ o $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, que se lee *límite cuando n tiende* a *infinito de a_n es a.*

Definición:

Una sucesión $\{a_n\}$ tiende a un número real *a* y escribimos $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ si dado cualquier ε, existe un $N \in \mathbf{N}$ tal que para todo $n > N$, se verifica que $|a_n - a| < \varepsilon$

O sea: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathrm{N})(n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$

Geométricamente:



Gráfica 50. Límite sucesiones

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$, si solo si, fijada una banda de amplitud *2ε* simétrica con respecto a la recta $a_n = a$, existe un número *N* en el eje *on* tal que, para todo $n > N$, los puntos (n, a_n) de la sucesión quedan contenidos en dicha banda (ver la figura anterior). Obsérvese que *N* depende de ε.

Ejemplo 7.13. Probar que la sucesión $\left\{\frac{2n^2+3}{n^2}\right\}$ converge a 2.

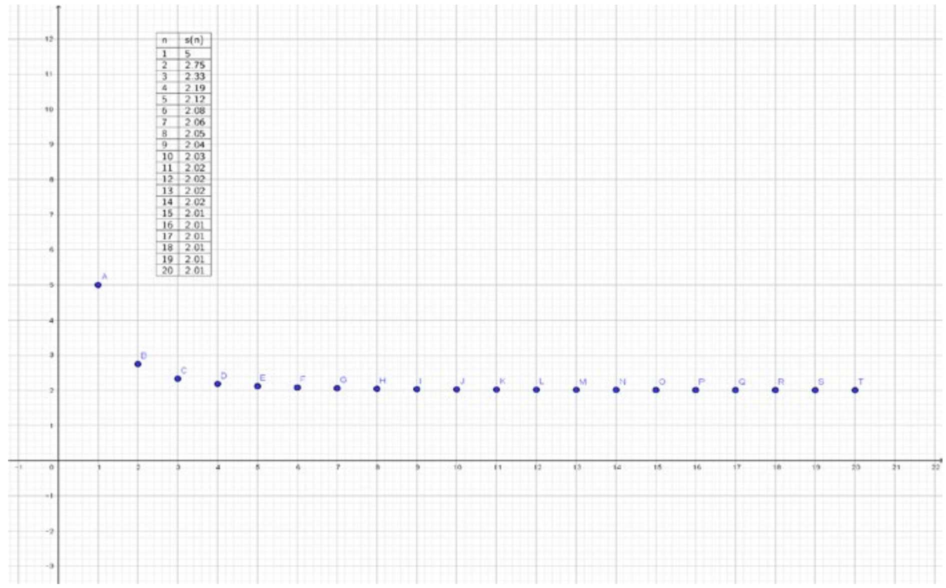
Solución:

Dado cualquier ε tenemos que hallar un $N \in \mathbf{N}$ que nos garantice que para todo $n > N$, se verifique $|a_n - 2| < \varepsilon$.

$$|a_n - 2| = \left|\frac{3}{n^2}\right| = \frac{3}{n^2} < \varepsilon \text{ , entonces, } n > \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}$$

$$\forall n > \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}} \text{ se verifica } \left|\frac{2n^2+3}{n^2} - 2\right| < e$$

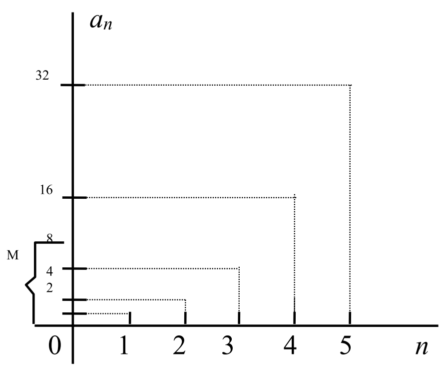
La grafica es:



Gráfica 51. Límite sucesiones

7.1.7 Concepto de limite de sucesiones divergente.

Ejemplo 7.14. Sea la sucesión $\{ 2^n \} = \{2, 4, 8, 16, 32,...\}$



Gráfica 52. Límite sucesiones

Obsérvese que cuando n crece, a_n también crece. Si tomamos un intervalo de amplitud $M \in \mathbf{R}^+$ sobre el eje a_n a partir del origen (no importa cuán grande sea), entonces podemos encontrar un $N \in \mathbf{N}$ en el eje *on* tal que para todo $n > N$ todos los puntos de $\{a_n\}$ quedan por fuera de dicho intervalo.

Decimos, entonces que $\{a_n\}$ tiende a infinito y escribimos:

$$\lim_{n \to \infty} \{2^n\} = \infty$$

Definición: Una sucesión $\{a_n\}$ tiende a + ∞ , o $\lim_{n\to\infty}\{a_n\}=\infty$, si dado cualquier ε > 0, existe un $N \in \mathbf{N}$ tal que para todo $n > N$, se verifica que a_n > e

Definición: Una sucesión $\{a_n\}$ tiende a - ∞ , o $\lim_{n\to\infty}\{a_n\}=\infty$, si dado cualquier ε > 0, existe un $N \in \mathbf{N}$ tal que para todo $n > N$, se verifica que a_n < - e

Ejemplo 7.15.

a) $\lim_{n\to\infty} 2n^2-1=\infty$ b) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n+1}=\infty$

Teoremas sobre limites de sucesiones.

Teorema 1. Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe, entonces es único.

Demostración:

Supongamos que $\{a_n\}\to a$ y $\{a_n\}\to b$ y demostraremos que *a = b.*

Si $\{a_n\}\to a$, dado ε > 0, existe un $N_1 \in \mathbf{N}$ tal que para todo $n > N_1$, se verifica que $|a_n-a|<\varepsilon$ **(1)**

Si $\{a_n\}\to b$, dado ε > 0, existe un $N_2 \in \mathbf{N}$ tal que para todo $n > N_2$, se verifica que $|a_n-b|<\varepsilon$ **(2)**

$$|a-b|=|a-a_n+a_n-b|\le|a-a_n|+|a_n-b| \quad (3)$$

De (1), (2) y (3) $|a-b|<2\varepsilon \quad \forall n>N=$ mayor entre N_1 y N_2.

Al ser $|a-b|$ Una cantidad no negativa y menor que cualquier cantidad positiva, entonces $|a-b|=0$, luego $a=b$

Teorema 2.

Si {an } y {bn } tienden a l y $a_n \le c_n \le b_n$ entonces {cn }→ l

Demostración:

Si $\{a_n\}\to l$, dado ε, existe un $N_1 \in \mathbf{N}$ tal que "$n > N_1$, se verifica que $|a_n-l|<\varepsilon$

Si $\{b_n\}\to l$, dado ε, existe un $N_2 \in \mathbf{N}$ tal que "$n > N_2$, se verifica que $|b_n-l|<\varepsilon$

O sea: $l-\varepsilon<a_n<l+\varepsilon$, "$n > N_1$

$l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon$, "$n > N_2$

Por hipótesis tenemos que $\boldsymbol{a_n \leq c_n \leq b_n}$

Entonces, $l - \varepsilon < \boldsymbol{a_n \leq c_n \leq b_n} < l + \varepsilon$, "$n > N$ = mayor entre N_1 y N_2.

Luego, $l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$, "$n > N$.

De lo anterior se deduce que: $|c_n - l| < \varepsilon\,,\quad \forall n > N$, entonces $\{a_n\} \to l$

Teorema 3.

Si $\{a_n\}$ es no decreciente y acotada superiormente, entonces $\{a_n\}$ converge y $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \sup\{a_n\}$

Si $\{a_n\}$ es no creciente y acotada inferiormente, entonces $\{a_n\}$ converge y $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \inf\{a_n\}$

Teorema 4. Si an > 0, entonces, $\lim\limits_{a_n \to \infty} \frac{1}{a_n} = 0$

Ejemplo 7.16. $\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$, ya que $n \to \infty$

Teorema 5.

$$\lim_{n \to \infty} a^n = \begin{cases} \infty, \text{si } \ a > 1 \\ 1, \text{si } \ a = 1 \\ 0, \text{si } |a| < 1 \end{cases}$$

Teorema 6. Si a > 0, $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Teorema 7. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 0 \quad \text{si } \alpha > 0$

Teorema 8. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a \qquad \forall a \in R$

Teorema 9.

$$\text{Si } \ a_n \geq 0, \text{entonces}:$$

$$\text{a)} \ \lim_{n \to \infty} a_n \geq 0 \qquad \text{b)} \ \lim_{n \to \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n \to \infty} a_n}$$

Teorema 10.

$$\text{Si} \lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = B, \text{entonces}:$$

a) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$

b) $\lim_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = A\, B$

c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$ con $B \neq 0$

d) $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = A^B$

Ejemplo 7.17. Calcular $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3n+5}{2n^2+3}$

Solución:

Obsérvese que el numerador y el denominador tienden a ∞. Dividiendo numerador y denominador por la mayor potencia n tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+5}{2n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}} = \frac{1+0+0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 7.18. Calcular $\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right]$

Solución:

Multiplicando y dividiendo $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ por su conjugada tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

Ejemplo 7.19. En el siguiente ejercicio se calcula el límite tanto en la base como en el exponente.

$$\begin{matrix} lin \\ n\to\infty \end{matrix}\left[\left(\frac{4n^3+3}{2n^3+3n}\right)^{\frac{n^2+2}{2n^2}}\right]=2^{\frac{1}{2}}, \text{ ya que}$$

$$\begin{matrix} \lim \\ n\to\infty \end{matrix}\frac{4n^3+3}{2n^3+3n}=\frac{4}{2}=2 \qquad \begin{matrix} \lim \\ n\to\infty \end{matrix}\frac{n^2+2}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

Ejemplo 7.20. El siguiente límite es de la forma *e*

$$\text{a) } \begin{matrix} \lim \\ n\to\infty \end{matrix}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n=\begin{matrix} \lim \\ n\to\infty \end{matrix}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3=e^3$$

$$\text{b) } \begin{matrix} \lim \\ n\to\infty \end{matrix}\left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{n-1}=\begin{matrix} \lim \\ n\to\infty \end{matrix}\left(1+\frac{-3}{n+5}\right)^{n-1}$$

$$=\begin{matrix} \lim \\ n\to\infty \end{matrix}\left(1+\frac{-3}{n+5}\right)^{n+5}\frac{1}{\left(1+\frac{-3}{n+5}\right)^6}=e^{-3}$$

$$\text{c) } \begin{matrix} \lim \\ n\to\infty \end{matrix}\left(1+\frac{1}{n+7}\right)^{n+7}=e$$

TALLER 7

1. Completar el siguiente cuadro.

$\{a_n\}$	ACOTA	CREC.	DECR.	SUP. $\{a_n\}$	INF. $\{a_n\}$	Máx.	Mín.
$\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$							
$\left\{2+\frac{(-1)^n}{2^n}\right\}$							
$\{(-n)^n\}$							
$\left\{\frac{n^2+3}{4}\right\}$							
$\{a_n\}=\begin{cases}\left\{1+\frac{1}{n}\right\}; & \text{n impar} \\ \{1\}; & \text{n par}\end{cases}$							

2. ¿Qué términos de la sucesión $\left\{\frac{1}{n+10}\right\}$ quedan dentro del entorno E10 - 10 (0)?.

3. ¿Qué términos de la sucesión $\left\{\frac{n-1}{2n}\right\}$ quedan dentro del entorno E0,01 (1/2)?.

4. ¿Qué términos de la sucesión *{2 - n }* quedan dentro del entorno E0,01 (0)?.

2. Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n - 5 + \sqrt{n^2 + 2n + 1}}{2 + \sqrt[4]{3n^4 + 5n + 3}}$

.4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3^n + 4^n\right)^{\frac{2}{n}}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[5]{\frac{(3 - \sqrt{n})(4 + \sqrt{n})}{n - 4}}$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2^n + 1}{2^n}\right)^{2^n + 1}$

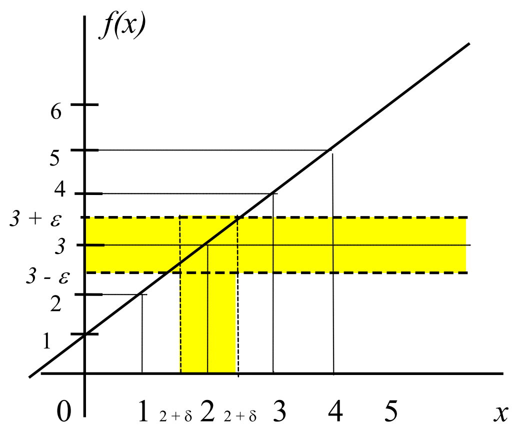
8) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(n+1)}{n^2 + 1} - \frac{n^4}{n^3 + 1}$

Capítulo VIII

Límite de funciones

ANÁLISIS DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Concepto de límite de funciones.



Gráfica 53. Límite de funciones

Sea $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ definida por $f(x) = x+ 1$.

Centremos nuestra atención en los valores de x en la cercanía de 2.

Cuando x se aproxima a 2 por el lado derecho e izquierdo, (denotado por $x \to 2$) observamos que $f(x)$ se aproxima 3 (sin llegar a 3) .Ver la gráfica anterior. *De otra forma:* Si tomamos un *entorno separado* en el eje $f(x)$, de centro 3 y de radio cualquier número (tan pequeño como se quiera), por ejemplo $E^*_\varepsilon(3)$, encontramos siempre un entorno separado $E^*_\delta(2)$ en el eje x, garantizándonos que para todo x de dicho entorno, $f(x)$ estará en $E^*_\varepsilon(3)$ [8].

En efecto, $0 < |f(x) - 3| = |x + 1 - 3| = |x - 2| < \varepsilon$, $\forall x \in E^*_\delta$ (2) se verifica que:

f(x) ∈ *E*ε (3)*; de dónde *δ*. = e

Decimos entonces que el límite cuando *x* tiende a 2 de *f(x)* es 3, y escribimos:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

Idea de límite de una función

Decimos que el número **L** es el límite de **F(x)** cuando **x** tiende a ***a*** una vez que el número **F(x)** pueda acercarse a **L** cuando nos plazca, simplemente escogiendo una **x** los suficientemente cerca, aunque no sea igual al número ***a.***

ANÁLISIS DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

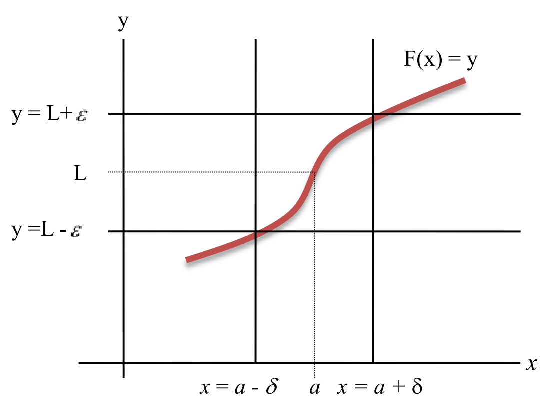
Decimos que el número ***L*** es el **límite** de ***F*(*x*)** cuando ***x*** tiende a ***a***, dado un número cualquiera $\varepsilon > 0$, existe un número δ>0 tal que

$$|F(x) - L| < \varepsilon$$

Para toda ***x*** tal que

$$0 < |x - a| < \delta$$

Análisis de la definición de límite:



Gráfica 54. Límite de funciones

La gráfica anterior es la interpretación geométrica del significado de la definición de límite de una función. Los puntos de la gráfica de *F*(*x*) = *y* que satisfacen la desigualdad $|F(x) - L| < \varepsilon$, son los que yacen entre las dos rectas (horizontales) y= *L -ε y* y= *L+ε*. Los puntos de esta gráfica que satisfacen la desigualdad $0 < |x - a| < \delta$ son los que se encuentran entre las dos rectas (verticales) x = *a - δ y* x = *a + δ*. En consecuencia, la definición implica que:

$$\lim_{x \to a} F(x) = L$$

Sí y solo sí lo que sigue es verdad. Supóngase que las dos rectas horizontales y = L -ε *y* y = L+ε (siendo ε> 0) **se dan por anticipado**. Entonces, es posible escoger dos rectas verticales x = *a* - *δ y* x = *a + δ.* (Siendo δ>0) con la siguiente propiedad: Todo punto de la gráfica de y = F(x) (siendo x ≠ *a*) que esté entre las rectas verticales, también estará entre las dos rectas horizontales.

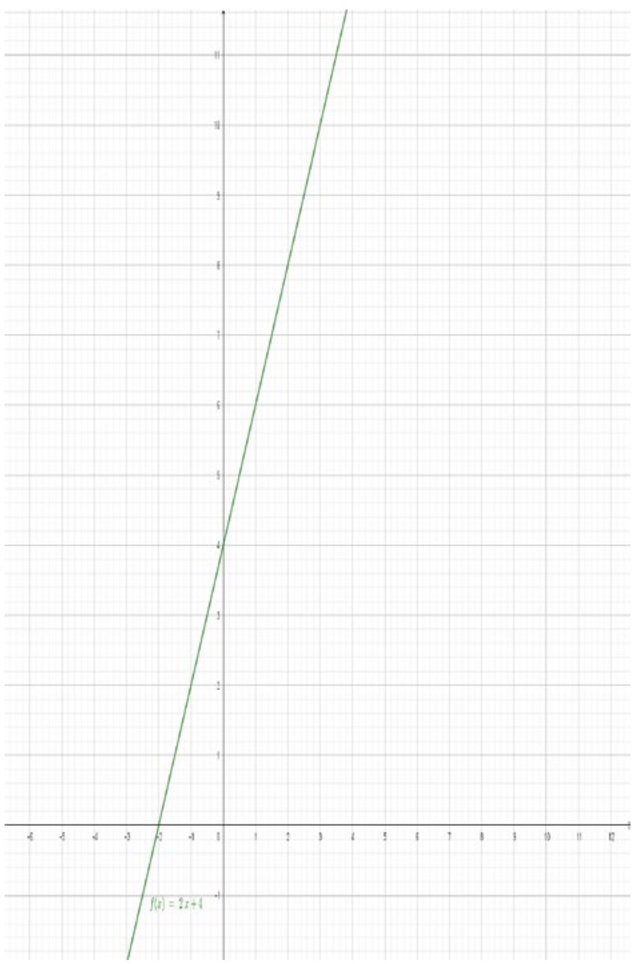
Definición de límite de una función:

Si f(x) está definida en algún entorno separado de a $(0<|x-a|<\delta)$ entonces $\lim_{x \to a} f(x)=l$, si dado cualquier ε > 0, existe un δ > 0 tal que para todo x en el entorno separado de centro a $(0<|x-a|<\delta)$ se verifica que $|f(x)-l|<\varepsilon$.

EJEMPLO 8.1. Utilizar la definición de límite para demostrar que:

$$\lim_{x \to 3} 2x+4=10$$

Solución: la gráfica de la función es:



Gráfica 55. Límite de funciones

Demostraremos que: si dado cualquier ε > 0, existe un δ > 0 tal que para todo x en el entorno separado de centro 3 $(0 < |x-3| < \delta)$ se verifica que $|f(x)-10| < \varepsilon$.

Si $0 < |x-3| < \delta$ entonces $|(2x+4)-10| = |2x+4-10| = |2x-6| = 2|x-3| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow 0 < |x-3| < \delta \text{ entonces } |x-3| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

El enunciado (1) o anterior, nos indica que $\frac{1}{2}\varepsilon$ es una δ satisfactoria. Con esta elección de δ tenemos el siguiente argumento:

$$0 < |x-3| < \delta$$

$$\Rightarrow 2|x-3| < 2\delta$$

$$\Rightarrow |2x-6| < 2\delta$$

$$\Rightarrow |(2x+4)-10| < 2\delta$$

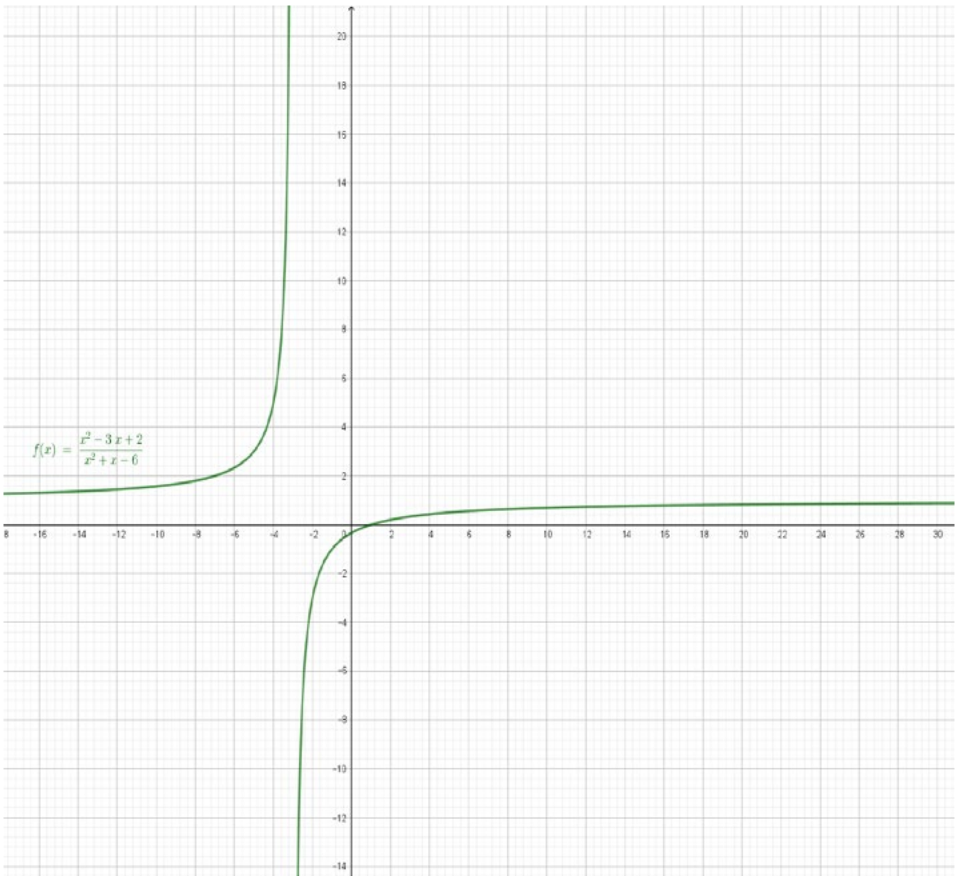
$$\Rightarrow |(2x+4)-10| < \varepsilon \qquad (\text{ya que } \delta = \frac{\varepsilon}{2})$$

Así hemos establecido que si $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$, la definición de límite se cumple. Esto demuestra que $\lim_{x \to 3} 2x+4 = 10$.

EJEMPLO 8.2. Utilice la definición de límite de funciones para demostrar que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6} = \frac{1}{5}$$

Solución: La gráfica de la función es:



Gráfica 56. Límite de funciones

Demostraremos que: si dado cualquier ε > 0, existe un δ > 0 tal que para todo x en el entorno separado de centro 2 ($0 < |x-2| < \delta$) se verifica que $\left|f(x) - \frac{1}{5}\right| < \varepsilon$

Si $0 < |x-2| < \delta$ entonces $\left|\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6} - \frac{1}{5}\right| = \left|\frac{4x^2 - 16x + 16}{5(x+3)(x-2)}\right| = \frac{4}{5}\frac{|x-2|}{|x+3|} < \varepsilon$

Observemos que además del factor $\frac{4}{5}|x-2|$ tenemos el factor $\frac{1}{|x+3|}$. Esto implica que debemos imponer una restricción sobre δ que producirá una desigualdad que incluya a $\frac{1}{|x+3|}$. Dicha restricción consiste en elegir un intervalo abierto requerido para que este sea el intervalo (1, 3), y esto implica que $\delta \leq 1$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
&0<|x-2|<\delta \qquad \text{y} \quad \delta \leq 1\\
&\Rightarrow\ |x-2|<1\\
&\Rightarrow\ -1<x-2<1\\
&\Rightarrow\ -1+5<x-2+5<1+5\\
&\Rightarrow\ 4<x+3<6\\
&\Rightarrow\ \frac{1}{4}>\frac{1}{x+3}>\frac{1}{6}\\
&\Rightarrow\ \left|\frac{1}{x+3}\right|<\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

ahora bien: $0<|x-2|<\delta \quad \text{y} \quad \frac{1}{|x+3|}<\frac{1}{4}$

$$\frac{4}{5}\frac{|x-2|}{|x+3|}<\frac{4}{5}\frac{\delta}{4}=\frac{\delta}{5}$$

Recordemos que nuestro objetivo es hacer que $\frac{4}{5}\frac{|x-2|}{|x+3|}<\varepsilon$. El enunciado $\frac{4}{5}\frac{|x-2|}{|x+3|}<\frac{4}{5}\frac{\delta}{4}=\frac{\delta}{5}$, indica que debe requerirse que $\frac{\delta}{5}\leq\varepsilon$, es decir. $\delta \leq 5\varepsilon$. Esto significa que se han impuesto dos restricciones sobre δ: $\delta \leq 1$ y $\delta \leq 5\varepsilon$. Así que ambas restricciones se cumplen, y se toma a δ como el menor de dos números, 1 y 5ε, con símbolo escribimos esto como $\delta = \min(1, 5\varepsilon)$. Utilizando esta δ se tiene el siguiente razonamiento:

$$
\begin{aligned}
&0<|x-2|<\delta\\
&\Rightarrow\ \frac{4}{5}\frac{|x-2||x-2|}{|x+3||x-2|}<\frac{4}{5}\frac{1}{|x+3|}\delta\\
&\Rightarrow\ \frac{|4x^2-16x+16|}{|5(x^2+x-6)|}<\frac{4}{5}\frac{1}{|x+3|}\delta\\
&\Rightarrow\ \left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}-\frac{1}{5}\right|<\frac{4}{5}\frac{1}{|x+3|}\delta
\end{aligned}
$$

Sin embargo, como se mostró que: $\frac{1}{|x+3|}<\frac{1}{4}$ se tiene que:

$$\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}-\frac{1}{5}\right|<\frac{4}{5}\frac{1}{|x+3|}\delta<\frac{4}{5}\frac{1}{4}\delta<\frac{1}{5}\delta \qquad \text{y como } \delta\leq 5\varepsilon, \text{ se tiene que}:$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow\ \left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}-\frac{1}{5}\right|<\frac{\delta}{5}\leq\frac{5\varepsilon}{5}=\varepsilon\\
&\Rightarrow\ \left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}-\frac{1}{5}\right|<\varepsilon
\end{aligned}
$$

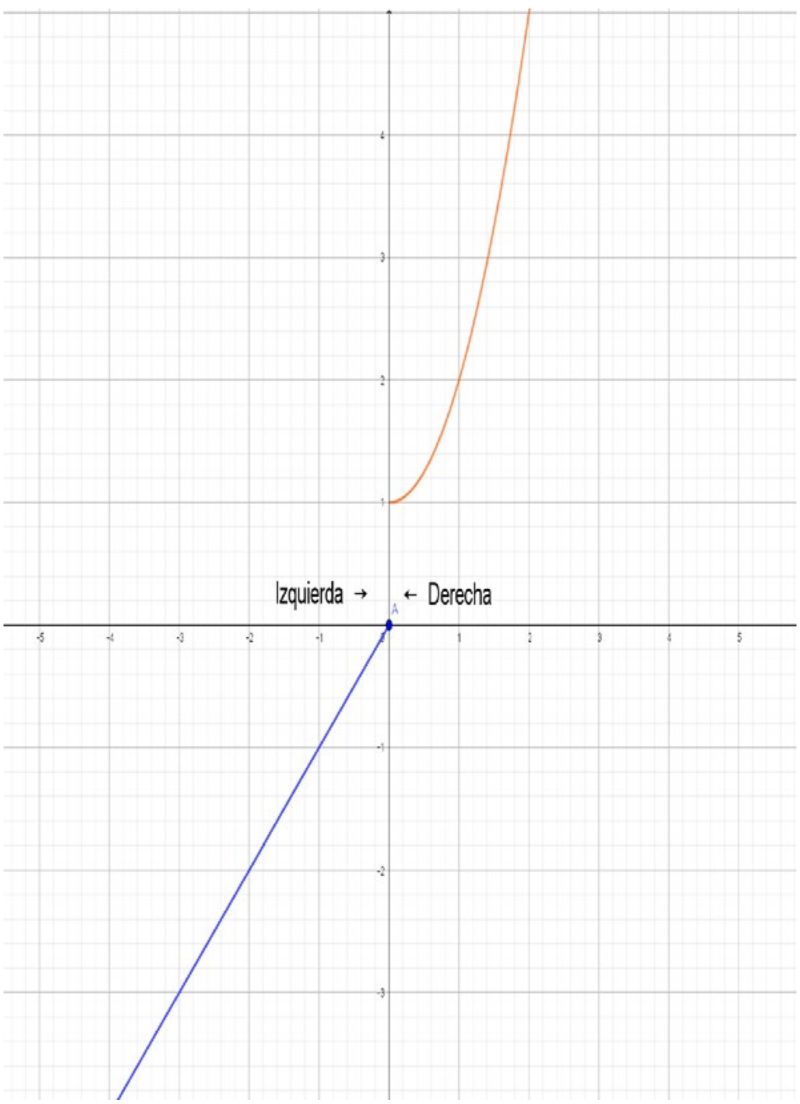
Se ha demostrado que: **para cualquier $\varepsilon > 0$, se elige un $\delta = \min(1, 5\varepsilon) > 0$ y el siguiente enunciado es verdadero, si ($0 < |x-2| < \delta$) se verifica que** $\left| f(x) - \frac{1}{5} \right| < \varepsilon$

Esto demuestra que: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{5}$

Limites laterales.

Ejemplo 8.3. Sea la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

La grafica es:



Gráfica 57. Límite de funciones

Obsérvese que cuando x tiende a cero (0) por la derecha, denotado por $x \to 0+$ $f(x)$ se acerca a 1 (sin llegar a 1) (ver la gráfica anterior). Lo anterior se puede escribir como:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 + 1 = 1$$

Obsérvese que cuando *x* tiende a cero (0) por la izquierda, denotado por *x* → 0 - *f(x)* se acerca a 0 (sin llegar a 0) (ver la gráfica anterior). Lo anterior se puede escribir como:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0$$

Luego el $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe porque $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$

Ejemplo 8.4.

$$\text{Sea} \quad f : \mathrm{R} - \{0\} \to \mathrm{R} \quad \text{definido por} \quad f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \dfrac{x}{x} = 1 & \text{si, } x > 0 \\ \dfrac{-x}{x} = -1 & \text{si, } x < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) \quad \text{no existe}$$

Ejemplo 8.5.

$$\text{Sea} \quad f : R \in (-\infty, 2] \to R \quad \text{definido por} \quad f(x) = \sqrt{2 - x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \sqrt{2 - x} = 0 \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \sqrt{2 - x} \ \text{no existe} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) \quad \text{no existe}$$

Teoremas sobre límite de funciones

TEOREMA 1. Sea $f : A \to R$, $A \subseteq R$, Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, entonces es único.

TEOREMA 2. Sean las funciones $f: A \to R$ y $g: B \to R$; $A, B \subseteq R$.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = l_2$ Entonces:

a) $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = l_1 \pm l_2$

b) $\lim_{x \to a} [f(x)\ g(x)] = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]\left[\lim_{x \to a} g(x)\right] = l_1\ l_2$

c) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2} \qquad l_1 \neq 0$

d) $\lim_{x \to a} K\ f(x) = K \lim_{x \to a} f(x) = K\ l_1 \qquad K \in R$

e) $\lim_{x \to a} K = K \qquad K \in R$

f) $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [l_1]^n \qquad n \in Z$

TEOREMA 3.

Si $f(x) \geq 0$ entonces, a) $\lim_{x \to a} f(x) \geq 0$ b) $\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to a} f(x)}$

TEOREMA 4.

Si $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ y $\lim_{x \to a} f(x) = l$ y $\lim_{x \to a} g(x) = l \Rightarrow \lim_{x \to a} h(x) = l$

Técnicas para la evaluación de los límites.

FORMAS INDETERMINADAS: Cuando la sustitución directa lleva a una expresión indefinida, 0/0, g(x)/0, se tiene una forma indeterminada que debe modificarse para que el nuevo denominador no tenga límite cero. Los métodos más usuales para lograr esto son simplificar factores iguales y racionalizar el denominador.

Ejemplos 8.6. Hallar el valor de los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2(x-2)-(x-2)}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-2)(x^2-1)}{(x-2)(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-2)(x-1)(x+1)}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}x+1=1+1=2$

2) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-5}-\sqrt{2}}{x-7}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\left(\sqrt{x-5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{2}\right)}{(x-7)\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{2}\right)}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-5-2}{(x-7)\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{2}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{(x-7)\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{2}\right)}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{3+x}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3}\right)}{x\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3+x-3}{x\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{3+0}+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-4x+1\right)=4-8+1=-3$

5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2+4}=\dfrac{4-4}{4+4}=\dfrac{0}{8}=0$

6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{x^2-x-12}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{(x-4)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{4+3}=\dfrac{1}{7}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}x+1=1+1=2$

8) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+3x^2+x+3}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(x^2+1)}{(x+3)(x-2)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+1}{x-2}=-2$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x+4-4}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x+4}+2=\sqrt{0+4}+2=2+2=4$

10. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

Para resolver este límite hacemos una sustitución: , de donde se obtiene que . Como entonces . sustituyendo el problema original se tiene:

$$\lim_{x \to 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{t \to 2} \frac{t^3-8}{t-2} = \lim_{t \to 2} \frac{(t-2)\,(t^2+2t+4)}{t-2} = \lim_{t \to 2} t^2+2t+4 = 12$$

11. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

Para evitar trabajar con las raíces, calculamos el mínimo común múltiplo de los índices de ellas, esto es m.c.m (3, 4) = 12. Después se hace una sustitución:

Como entonces. Sustituyendo en el problema original se tiene:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \lim_{t \to 1} \frac{\sqrt[3]{t^{12}}-1}{\sqrt[4]{t^{12}}-1} = \lim_{t \to 1} \frac{t^4-1}{t^3-1} = \lim_{t \to 1} \frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{(t+1)(t^2+1)}{(t^2+t+1)} = \frac{4}{3}$$

12. $\lim\limits_{x \to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

Para evitar trabajar con las raíces, calculamos el mínimo común múltiplo de los índices de ellas, esto es m.c.m (2, 3) = 6. Después se hace una sustitución:

Como entonces. Sustituyendo en el problema original se tiene:

$$\lim_{x \to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = \lim_{t \to 2} \frac{\sqrt{t^6}-8}{\sqrt[3]{t^6}-4} = \lim_{t \to 2} \frac{t^3-8}{t^2-4} = \lim_{t \to 2} \frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{(t-2)(t+2)}$$

$$= \lim_{t \to 2} \frac{t^2+2t+4}{t+2} = \frac{12}{4} = 3$$

TALLER 8

I. En los siguientes problemas use las leyes de los límites para valorar los límites que existan:

1. $\lim\limits_{x \to -2} (3x^2 + 7x - 12)$
2. $\lim\limits_{x \to 2} (4x^2 - x + 5)$
3. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-1)^7}{(2x-5)^4}$
4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+1}{x^2 - x - 2}$
5. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{x^2 - x - 2}$
6. $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{t^2 + 2t - 5}{t^2 - 2t}$
7. $\lim\limits_{t \to 3} \dfrac{t^2 - 9}{t - 3}$
8. $\lim\limits_{t \to -4} \sqrt{\dfrac{t+8}{25 - t^2}}$
9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$
10. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x} - 2}$
11. $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$
12. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{2 - \sqrt{x}}$
13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$
14. $\lim\limits_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$
15. $\lim\limits_{x \to \frac{-1}{2}} \dfrac{4x^2 - 1}{4x^2 + 8x + 3}$
16. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4x-5}{5x-1}$
17. $\lim\limits_{r \to 1} \sqrt{\dfrac{8r+1}{r+3}}$
18. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x^2 - 49}{x - 7}$
20. $\lim\limits_{s \to -2} \dfrac{s^3 + 8}{s + 2}$
21. $\lim\limits_{t \to \frac{1}{3}} \sqrt{\dfrac{8t^3 - 27}{4t^2 - 9}}$
22. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

II. Si $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+9} - 3}{x}$, demuestre que $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \dfrac{1}{6}$ pero que *h(0)* no está definida.

III. Dado que *f* es la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si} \quad x \neq 3 \\ 4 & \text{si} \quad x = 3 \end{cases}$$

a) Trace la gráfica de $f(x)$ y Encuentre que:

$$\lim_{x \to -3} f(x), \quad \text{y demuestre que} \quad \lim_{x \to -3} f(x) \neq f(-3)$$

IV. A continuación, trace la gráfica y determine el límite indicado si existe; si no existe de la razón:

1. $f(x)=\begin{cases} x+4 & \text{si} \quad x \le -4 \\ 4-x & \text{si} \quad x > -4 \end{cases}$

2. $h(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \le 2 \\ 8-2x & \text{si} \quad 2 < x \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{si} \quad x < 2 \\ 4 & \text{si} \quad x = 2 \\ 4-x^2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

4. $g(x)=\begin{cases} |x-1| & \text{si} \quad x < -1 \\ 0 & \text{si} \quad x = -1 \\ |1-x| & \text{si} \quad -1 < x \end{cases}$

V. Determine el valor de *k*, tal que, *f(x)* $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ exista:

$$f(x)=\begin{cases} 3x+2 & \text{si} \quad x < 4 \\ 5x+k & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}$$

VI. Si $g(x)=|2x-3|-4$ Hallar:

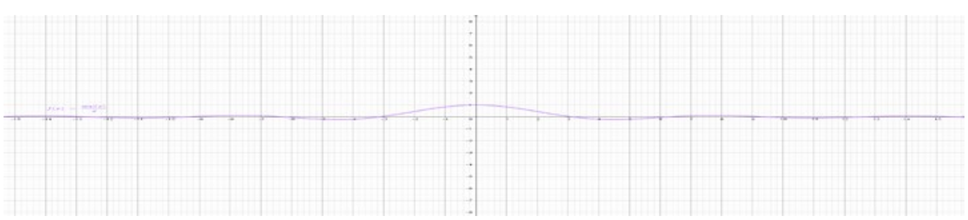
a) $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^-} g(x)$ b) $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^+} g(x)$ c) $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} g(x)$

Límites trigonométricos.

TEOREMA 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$$

La gráfica es:



Gráfica 58. Límite de funciones trigonométricas

Ejemplos 8.7.

1) $\lim\limits_{x \to 0} sen\, x = sen\, 0 = 0$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, 3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{3}\left(\dfrac{sen\, 3x}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3\, sen\, 3x}{3x} = 3\left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, 3x}{3x}\right) = 3(1) = 3$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, 5x}{sen\, 4x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{sen\, 5x}{x}}{\dfrac{sen\, 4x}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{5}{5}\left(\dfrac{sen\, 5x}{x}\right)}{\dfrac{4}{4}\left(\dfrac{sen\, 4x}{x}\right)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5}{5}\left(\dfrac{sen\, 5x}{x}\right)}{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4}{4}\left(\dfrac{sen\, 4x}{x}\right)}$

$= \dfrac{5\left[\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{sen\, 5x}{5x}\right)\right]}{4\left[\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{sen\, 4x}{4x}\right)\right]} = \dfrac{5(1)}{4(1)} = \dfrac{5}{4}$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen^2 x}{x(1+\cos x)}$

$= \left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x}{\mathrm{x}}\right)\left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x}{(1+\cos x)}\right) = (1)\left(\dfrac{0}{1+\cos 0}\right) = (1)\left(\dfrac{0}{1+1}\right) = (1)\left(\dfrac{0}{2}\right) = (1)(0) = 0$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{senx} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\dfrac{xsenx}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\dfrac{senx}{x}} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 0} 1}{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{senx}{x}} = \dfrac{1}{1} = 1$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{sen3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\dfrac{3xsen3x}{3x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{3\left(\dfrac{sen3x}{3x}\right)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 0} 1}{3\left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen3x}{3x}\right)} = \dfrac{1}{(3)(1)} = \dfrac{1}{3}$

TALLER 8.1

1. $\lim_{x \to 0} \frac{sen3x}{sen5x}$ 2. $\lim_{t \to 0} \frac{1-\cos t}{t}$ 3. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{senx}$

4. $\lim_{x \to 0} sen(x+a)$ 5. $\lim_{t \to 0} \cos(t+a)$ 6. $\lim_{x \to 0} \frac{sen4x}{x}$

7. $\lim_{x \to 0} \frac{2x}{sen3x}$ 8. $\lim_{x \to 0} \frac{sen3x}{sen6x}$ 9. $\lim_{y \to 0} \frac{3y}{sen5y}$

10. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\cos x}$ 11. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{1+senx}$ 12. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 4x}{x}$

13. $\lim_{t \to 0} \frac{1-\cos 2t}{4t}$ 14. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 x}{2x^2}$ 15. $\lim_{x \to 0} \frac{4x^2}{1-\cos 3x^2}$

16. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{2x}$ 17. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}$ (sugerencia : $t = \frac{\pi}{2}-x$)

18. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-sen\,x}{\frac{\pi}{2}-x}$ 19. $\lim_{x \to \pi} \frac{sen\,x}{x-\pi}$ (sugerencia : $t = x-\pi$)

20. $\lim_{x \to 0} \frac{sen\,x}{3x^2+2x}$ 21. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{3x^2+2x}$

Continuidad puntual.

DEFINICIÓN:

La función f es continua en el punto x= a si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

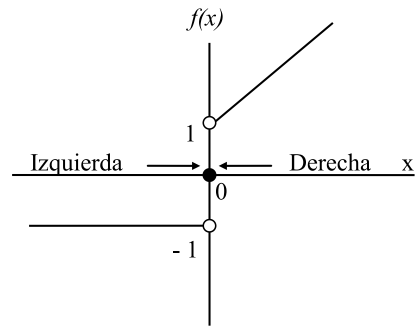
I. f(a) existe.

II. *ii.* $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

III. $\lim_{x \to a} f(x)$= f(a)

Ejemplo 8.9.

Sea $f: R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$



Gráfica 59. Continuidad puntual

Analicemos la continuidad en x=0, ver la gráfica anterior, al aplicar las condiciones de continuidad tenemos que:

$i.\ f(0)=0$

$$ii.\ \lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+1) = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) \text{ no existe}$$

$$iii.\ \lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$$

Luego, f(x) es descontinua en *x*=0.

Ejemplo 8.10.

f(x)= c es continua en R, *c= cte.*

SOLUCIÓN

Al aplicar las condiciones de continuidad a $f(x)=c$ en $x=a, (\forall a \in R)$ se tiene que:

$i.\ f(a)=c$

$$ii.\ \lim_{x\to a} f(x) = c$$

$$iii.\ \lim_{x\to a} f(x) = f(a) = c$$

Luego $f(x)=c$ es continua en $\forall a \in R$

Ejemplo 8.11.

Verificar si *f(x)= mx + b* es continua en R.

Solución:

Al aplicar las condiciones de continuidad a $f(x) = mx + b$ en $x = a, (\forall a \in R)$ se tiene que:

$$i. \quad f(a) = ma + b$$

$$ii. \quad \lim_{x \to a} f(x) = ma + b$$

$$iii. \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a) = ma + b$$

$$Luego \ \ f(x) = c \ \text{ es continua en } \ \forall a \in R$$

Ejemplo 8.12. Analizar si la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ es continua en 4

Solución: la gráfica de la función es:

Gráfica 60. Continuidad puntual

Aplicando las tres condiciones anteriores se tiene que:

$$i. \quad f(4) = \frac{\sqrt{4} - 2}{4 - 4} = \frac{2 - 2}{0} = \frac{0}{0} \ \text{No existe}$$

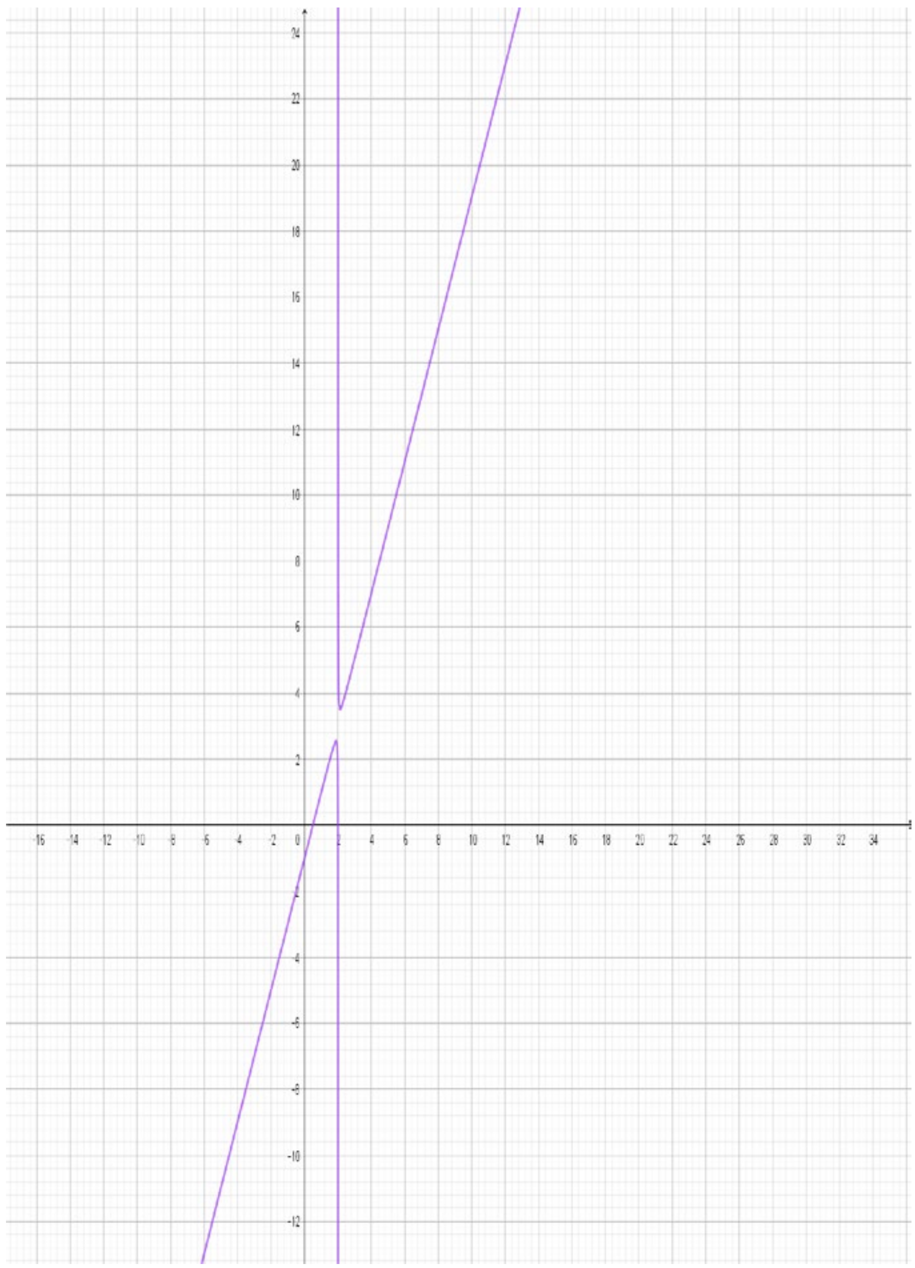
$$ii. \quad \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}$$

$$iii. \quad \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \neq f(4)$$

Se puede analizar que la función no es continua en el punto *x = 4* por que no cumple las propiedades o condiciones de continuidad.

Ejemplo 8.13: verifica si $f(x)=\frac{2x^2-5x+2}{x-2}$ es continua en los reales.

Solución: la gráfica de la función es:



Gráfica 61. Continuidad puntual

Al aplicar las condiciones de continuidad a $f(x)=\frac{2x^2-5x+2}{x-2}$ en $x=2$ se tiene que:

i. $f(2)=\dfrac{2(2)^2-5(2)+2}{(2)-2}=\dfrac{8-10+2}{0}=\dfrac{0}{0}$ no existe

ii. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{2(2x^2-5x+2)}{2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{(2x)^2-5(2x)+4}{2}}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{(2x-4)(2x-1)}{2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{2(x-2)(2x-1)}{2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(2x-1)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=2(2)-1=4-1=3$

iii. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$

Luego $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+2}{x-2}$ es discontinua en R cuando $x=2$.

TALLER 8.2

I. Demuestre que la función es discontinua en el número *a,* si es posible, defina *f(a)* para que la continuidad desaparezca:

1. $f(x)=\dfrac{9x^2-4}{3x-2},\quad a=\dfrac{2}{3}$

2. $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{x+9}}{x},\quad a=0$

3. $f(t)=\begin{cases}9-t^2 & \text{si } t\le 2\\ 3t+2 & \text{si } t>2\end{cases},\quad a=2$

4. $f(x)=\begin{cases}|x-3| & \text{si } x\neq 3\\ 2 & \text{si } x=3\end{cases},\quad a=3$

5. $f(t)=\begin{cases}t^2-4 & \text{si } t\le 2\\ t & t>2\end{cases},\quad a=2$

II. En los siguientes ejercicios determinar los valores de la variable independiente en los cuales la función es discontinua y demuéstrelo por las condiciones de continuidad.

1. $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x+3}$
2. $f(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}$
3. $h(x)=\dfrac{5}{x-4}$
4. $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$
5. $f(x)=\dfrac{9x^2-4}{3x-2}$
6. $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{x+9}}{x}$
7. $f(x)=\dfrac{x^2-x-12}{x^2+2x-3}$
8. $f(y)=\dfrac{\sqrt{y+5}-\sqrt{5}}{y}$
9. $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

Capítulo IX

Derivada de funciones

CONCEPTO DE LA DERIVADA

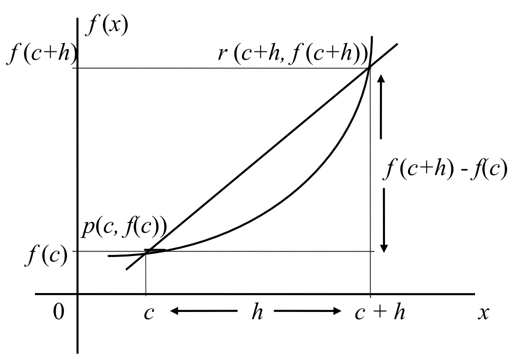
Interpretación geométrica de la derivada.

Recta tangente y normal a una curva en un punto.

El problema que permitió el desarrollo del cálculo diferencial, planteaba la forma de determinar la dirección de la recta tangente a una curva en un punto dado. Al matemático francés ***Pierre de Fermat (1601 - 1665)***, se le debe la solución de dicho problema [9].

Discutiremos ahora la forma como el concepto de derivada se utiliza para definir la recta tangente a la gráfica de una función dada en un punto específico.

Consideremos la función *f* cuya gráfica ilustra la gráfica 62, y sea *p* un punto sobre la misma de coordenadas (*c, f(c)*).



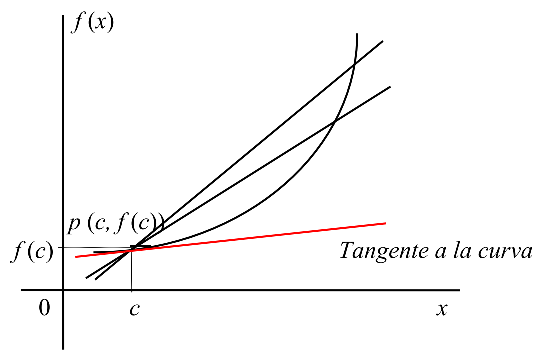
Gráfica 62. La derivada

Para $h \neq 0$ y $c + h$ en el dominio de f, existe un punto r sobre la gráfica de f con coordenadas $(c + h, f(c + h))$ tal que la recta R determinada por los puntos p y r, $R_{(p, r)}$ es la secante a la gráfica de f.

La pendiente de $R(p, r)$ está dada por: pendiente de, $R_{(p,r)} = \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$, con $h \neq 0$.

De la gráfica 62, concluimos que si r se encuentra a la derecha del punto p, entonces $h > 0$ y si r se encuentra a la izquierda entonces $h < 0$.

Supongamos que la función f es continua en el intervalo que contiene a c y a $c + h$. Consideremos el punto p fijo y r moviéndose sobre la curva hacia p, tenemos que h tiende a cero y la recta secante $R_{(p, r)}$ gira alrededor de p. Si esta secante tiene una posición límite en su rotación, denominamos a esa posición límite como la ***tangente a la curva en el punto p*** (ver la gráfica siguiente).



Gráfica 63. De la secante a la tangente

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente a la curva en p es el límite de la pendiente de dicha recta cuando h tiende a cero. Es decir:

Pendiente de la recta tangente= $m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} = \dfrac{df(c)}{dx} = f'(c)$

Luego, ***la pendiente m de la tangente a la curva en un punto p de coordenadas (c, f(c)) es f'(c).*** Lo anterior nos permite determinar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto p de coordenadas $(c, f(c))$.

Por tanto, ***ecuación de la recta tangente =*** $\left\{ y - f(c) = \dfrac{df(c)}{dx}(x - c) \right\}$

La recta normal a la gráfica de la función f en el punto $p(c, f(c))$ es la recta que pasa por p y que es perpendicular a la tangente en p a la curva de f. Recordemos que dos rectas que tienen pendiente $m1$ y $m2$, respectivamente, son perpendiculares sí solo si $m_1 m_2 = -1$, por lo tanto la pendiente de la normal a la curva en punto $p(c, f(c))$ será $\dfrac{-1}{\frac{df(c)}{dx}} = \dfrac{-1}{f'(c)}$.

La ecuación de la recta normal en p = $\left\{ y - f(c) = \dfrac{-1}{\dfrac{df(c)}{dx}}(x-c) \right\}$

Ejemplo 9.1. Encuentre la derivada de $f(x) = 2x^2 + 3$.

Solución:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(2\left(x+h\right)^2 + 3\right) - \left(2x^2 + 3\right)}{h}$$

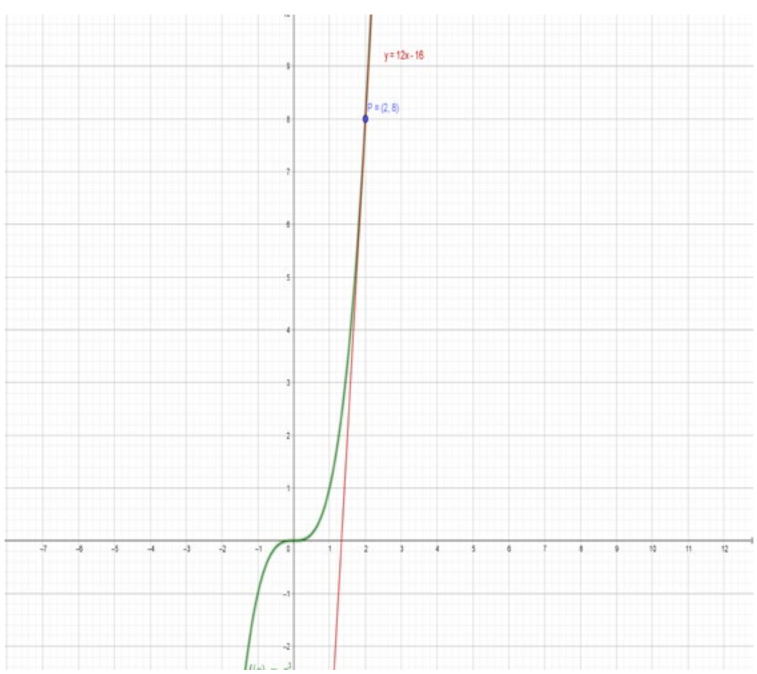
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(2\left(x^2 + 2xh + h^2\right) + 3\right) - 2x^2 - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(2x^2 + 4xh + 2h^2\right) + 3 - 2x^2 - 3}{}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + 3 - 2x^2 - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4xh + 2h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(4x + 2h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 4x + 2h = 4x + 2(0) = 4x + 0 = 4x$$

Ejemplo 9.2. Encontrar la derivada de *f(x) = x3,* bosqueje la gráfica de *f(x)* y encuentre la ecuación de la recta tangente en (2, 8).

Solución:



Gráfica 64. Recta tangente a una curva

$$\frac{df(x)}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}(3x^2h+3xh+h^2)$$

$$=3x+3x(0)+(0)^2=3x+0+0=3x$$

Así, $\frac{df(x)}{dx}=3x^2$, y la pendiente de la recta tangente en (2, 8) es:

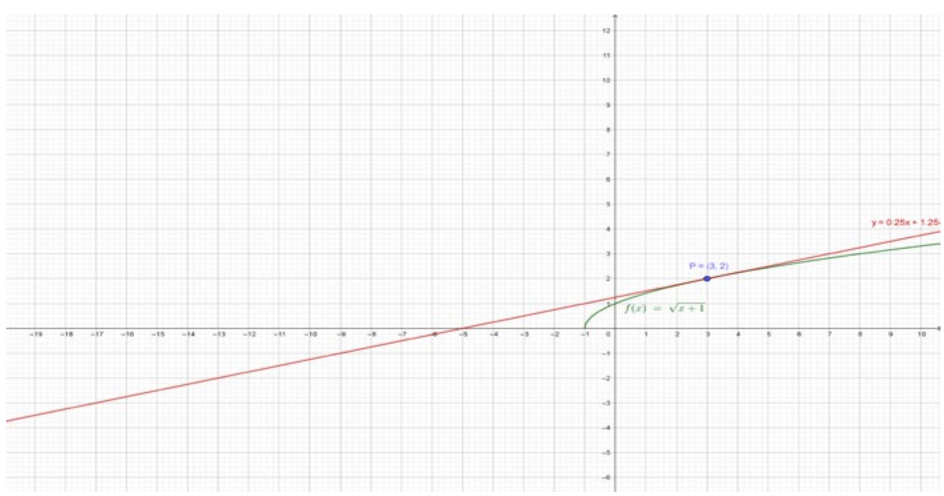
$$\frac{df(2)}{x}=f'(2)=3(2)^2=3(4)=12$$

Por último, según la ecuación de punto pendiente de una recta, se tiene:

$$y-y_o=m(x-x_o)$$
$$y-8=12(x-2)$$
$$y-8=12x-24$$
$$y=12x-24+8$$
$$y=12x-16$$

Ejemplo 9.3. Encontrar la derivada de $f(x)=\sqrt{x+1}$ y la ecuación de la recta tangente en (3, 2).

Solución:



Gráfica 65. Recta tangente a una curva

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h+1}\right)-\left(\sqrt{x+1}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\left(\sqrt{x+h+1}\right)-\left(\sqrt{x+1}\right)\right]\left[\left(\sqrt{x+h+1}\right)+\left(\sqrt{x+1}\right)\right]}{h\left[\left(\sqrt{x+h+1}\right)+\left(\sqrt{x+1}\right)\right]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h+1}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}{h\left[\left(\sqrt{x+h+1}\right)+\left(\sqrt{x+1}\right)\right]}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h+1)-(x+1)}{h\left[\left(\sqrt{x+h+1}\right)+\left(\sqrt{x+1}\right)\right]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h+1-x-1}{h\left[\left(\sqrt{x+h+1}\right)+\left(\sqrt{x+1}\right)\right]}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left[\left(\sqrt{x+h+1}\right)+\left(\sqrt{x+1}\right)\right]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{x+0+1}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

Así, $\frac{df(x)}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, y la pendiente de la recta tangente en (3, 2) es:

$$\frac{df(3)}{x}=\frac{1}{2\sqrt{3+1}}=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}.$$

Por último, según la ecuación de punto pendiente de una recta, se tiene:

$$y-y_o=m(x-x_o)$$

$$y-2=\frac{1}{4}(x-3)$$

$$y-2=\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$$

$$y=\frac{x}{4}-\frac{3}{4}+2$$

$$y=\frac{x}{4}+\frac{5}{4}$$

$$y=\frac{x+5}{4}$$

Ejemplo 9.4. Encuentre la derivada de: $f(x)=\frac{1}{x-1}$

Solución:

$$\frac{df(x)}{dx}=f'(x)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\frac{1}{x+h-1}-\frac{1}{x-1}}{h}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{x-1-(x+h-1)}{h\,(x+h-1)(x-1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x-1-x-h+1}{h\,(x+h-1)(x-1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\,(x+h-1)(x-1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h-1)(x-1)}=\frac{-1}{(x+0-1)(x-1)}=\frac{-1}{(x-1)(x-1)}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

TALLER 9

I. Utilice la forma alternativa de límite para encontrar la deriva (si existe) de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x^2 + 1$
2. $f(x) = 2x^3 + x^2$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x+5}$
4. $f(x) = \sqrt{x-4}$
5. $f(x) = x^2 + 2x + 3$
6. $f(x) = \sqrt{x}$
7. $f(x) = \sqrt{1+2x}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

II. Hallar la pendiente de las siguientes curvas en el punto *x = 1:*

1. $y = 8 - 5x^2$
2. $y = \dfrac{4}{x+1}$
3. $y = \dfrac{2}{x+3}$
4. $y = 5x^3$

III. Hallar las coordenadas del vértice de la parábola $y = x^2 - 4x + 1$ usando el hecho de que en el vértice la pendiente de su tangente es cero.

IV. Hallar la pendiente de las tangentes a la parábola $y = -x^2 + 5x - 6$ en sus puntos de intersección con el eje *x*

V. Si *x* se mide en pies y *t* en segundos, hallar la velocidad en el instante *t = 2* de los siguientes movimientos:

1. $x(t) = t^2 + 3t$
2. $x(t) = t^3 - 3t^2$
3. $x(t) = \sqrt{t+2}$

Capítulo X

Reglas de derivación

ANÁLISIS DE LAS REGLAS DE DERIVACIÓN

Teorema: reglas de derivación.

Sean *f(x)* y *g(x)* dos funciones continuas derivables, *c* una constante real y *n* un número racional, entonces:

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$

2. $\frac{d}{dx}(x) = 1$

3. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

4. $\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}(f(x))$

5. $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x))$

6. $\frac{d}{dx}[f(x)\ g(x)] = g(x)\frac{d}{dx}(f(x)) + f(x)\frac{d}{dx}(g(x))$

7. $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}(f(x)) - f(x)\frac{d}{dx}(g(x))}{[g(x)]^2}$

Ejemplo 10.1. Obtenga la derivada de $f(x) = x^3 - 2x + 4$.

Solución:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[x^3 - 2x + 4\right] = \frac{d}{dx}\left(x^3\right) - \frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(4) = \frac{d}{dx}\left(x^3\right) - 2\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(4)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 - 2 + 0 = 3x^2 - 2$$

Ejemplo 10.2. Derivar $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Solución:

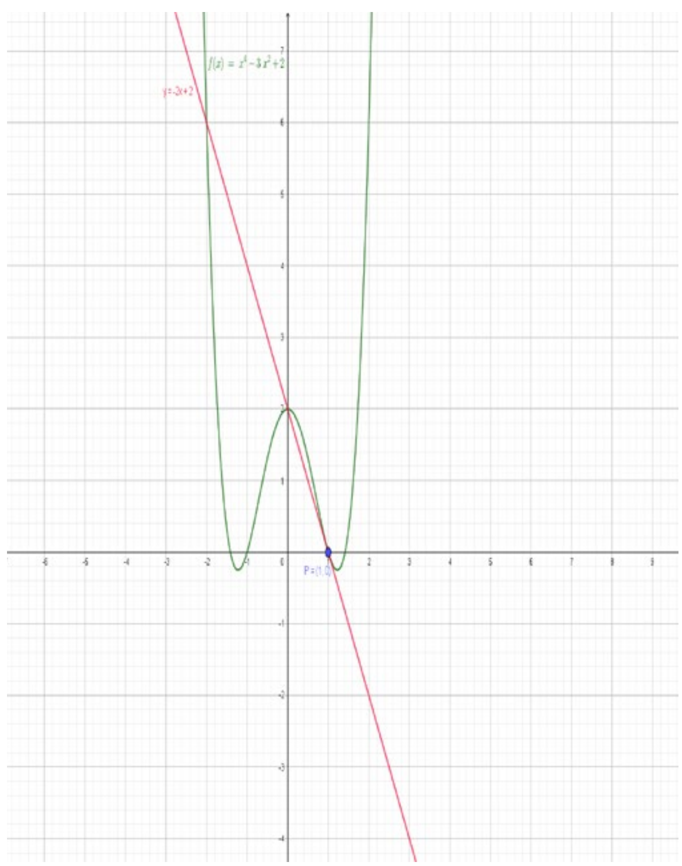
$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{\frac{2-3}{3}} = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

Ejemplo 10.3. Encuentre la recta tangente a $y = x^4 - 3x^2 + 2$ en el punto (1, 0).

Solución:

la gráfica es:



Gráfica 66. Recta tangente a una curva

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 6x + 0 = 4x^3 - 6x$$

Así la pendiente de la recta tangente en (1, 0) es:

$$m = \frac{dy}{dx} = 4(1)^3 - 6(1) = 4 - 6 = -2$$

La ecuación de la recta tangente en (1, 0) es:

$$\begin{aligned} y - y_o &= m(x - x_o) \\ y - 0 &= -2(x-1) \\ y &= -2x + 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 10.4. Encuentre *dy/dx* si $f(x) = (x-1)(x^2 - 3x + 2)$.

Solución:

$$\frac{df(x)}{dx} = \left[\frac{d}{dx}(x-1)\right](x^2 - 3x + 2) + (x-1)\left[\frac{d}{dx}(x^2 - 3x + 2)\right]$$

$$\frac{df(x)}{dx} = (1)(x^2 - 3x + 2) + (x-1)(2x - 3 + 0) = (x^2 - 3x + 2) + (x-1)(2x-3)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = x^2 - 3x + 2 + (2x^2 - 3x - 2x + 3) = x^2 - 3x + 2 + (2x^2 - 5x + 3)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = x^2 - 3x + 2 + 2x^2 - 5x + 3$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 - 8x + 5$$

Ejemplo 10.5. Obtenga la derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3)$.

Solución:

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{2}} + 3\right)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \left[\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)\right]\left(x^{\frac{1}{2}} + 3\right) + \left(x^{\frac{1}{3}}\right)\left[\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}} + 3\right)\right]$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \left(\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + 3\right) + \left(x^{\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} + 0\right)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}3 + x^{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{3}x^{\frac{-1}{6}} + x^{\frac{-2}{3}} + \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{6}} = \frac{5}{6}x^{\frac{-1}{6}} + x^{\frac{-2}{3}} = \frac{5}{6x^{\frac{1}{6}}} + \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$$

Ejemplo 10.6. Obtenga la derivada de $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-1}$.

Solución:

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{\left[\frac{d}{dx}\left(x^3\right)\right](2x-1)-\left(x^3\right)\left[\frac{d}{dx}(2x-1)\right]}{[2x-1]^2}$$

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{\left(3x^2\right)(2x-1)-\left(x^3\right)(2)}{[2x-1]^2}=\frac{\left(6x^3-3x^2\right)-2x^3}{[2x-1]^2}=\frac{6x^3-2x^3-3x^2}{[2x-1]^2}$$

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{4x^3-3x^2}{[2x-1]^2}$$

Ejemplo 10.7. Determinar *dy/dx* en $y=\dfrac{2x+1}{x^2+1}$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left[\frac{d}{dx}(2x+1)\right]\left(x^2+1\right)-(2x+1)\left[\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)\right]}{\left[x^2+1\right]^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2)\left(x^2+1\right)-(2x+1)(2x)}{\left[x^2+1\right]^2}=\frac{2x^2+2-4x^2-2x}{\left[x^2+1\right]^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x^2-2x+2}{\left[x^2+1\right]^2}$$

Ejemplo 10.8. Obtenga la derivada de $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Solución:

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{(0)(x)-(1)(1)}{x^2}=\frac{0-1}{x^2}=\frac{-1}{x^2}$$

TALLER 10

I. Aplique las reglas de derivación dadas hasta ahora para encontrar las derivadas de las siguientes funciones:

1) $f(x)=3x^2-x+5$

2) $g(x)=\frac{1}{8}x^8-x^4$

3) $h(x)=\frac{2}{6}x^3+\frac{1}{5}x^{\frac{-3}{2}}$

4) $f(x)=(x^2-3x+2)(2x^3+1)$

5) $f(t)=(t^3-2t^{-2}+1)(2t^2+3t)$

6) $g(x)=(2x^2+5)(4x-1)$

7) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$

8) $y=\frac{5-4x^2+x^5}{x^3}$

9) $y=\frac{x^3-4x+5t}{x^2+9}$

10) $y=\frac{x^{\frac{-2}{3}}}{x+1}$

11) $g(x)=\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^4}$

12) $y=\frac{3}{1+x^2}$

13) $f(x)=2\sqrt{x}+6x\sqrt[3]{x}+3x^{\frac{1}{3}}$

14) $y=\frac{1}{2x^2}+\frac{4}{\sqrt{x}}$

15) $g(x)=\left(3x+x^{-4}\right)\left(3x^{-2}+c\right)$

16) $f(x)=\frac{mx+b}{\sqrt[3]{5x^2}}$

17) $f(x)=x^{2n+1}\left(x+c\right)$

18) $y=\frac{-1}{x^3}+\frac{2}{x^n}$

II. En los ejercicios siguientes, escriba la ecuación de la recta tangente a la curva *y = f(x)* en el punto dado *P* de ella. Escriba la respuesta en la forma *ax+by = c.*

1) $y=x^3,\ P(2,8)$

2) $y=3x^2-4, P(1,-1)$

3) $y=\frac{1}{x-1}, P(2,-1)$

4) $y=2x-\frac{1}{x}, P(0.5,-1)$

5) $y=x^3+3x^2-4x-5, P(1,-5)$

6) $y=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)^{-1}, P(2,4)$

7) $y=\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}, P(-1,7)$

8) $y=\frac{3x-2}{3x+2}, P\left(2,\frac{1}{2}\right)$

9) $y=\frac{3x^2}{x^2+x+1}, P(-1,3)$

10) $y=\frac{6}{1-x^2}, P(2,-2)$

Capítulo XI

Regla de la cadena

TEOREMA REGLA DE LA CADENA

Si una función *g* es diferenciable en *x* y la función *f* lo es en *g(x)*, entonces la función compuesta (*f o g)* es diferenciable en *x,* y por tanto.

(f o g)'(x) = f '(g(x)) g'(x).

Ejemplo 11.1. Sea:

$$f(x) = x^{10} \qquad g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$$

Entonces la función compuesta ***(f o g)*** está definida por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (2x^3 - 5x^2 + 4)^{10}$$

Aplicando el teorema de la regla de la cadena se obtiene que:

$$(f \circ g)'(x) = 10(2x^3 - 5x^2 + 4)^9(6x^2 - 10x)$$

Ejemplo 11.2. Derivar: $f(x) = (3x^2 + 2)^4$.

Solución:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[(3x^2 + 2)^4\right] = 4(3x^2 + 2)^3(6x) = 24x(3x^2 + 2)^3$$

EJEMPLO 11.3. Hallar *dy/dx* $y=\left(ax^{n}+c\right)^{m}$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx}=m\left(a\,x^{n}+c\right)^{m-1}\left(a\,n\,x^{n-1}+0\right)=a\,n\,m\,x^{n-1}\left(a\,x^{n}+c\right)^{m-1}$$

Ejemplo 11.4. Determinar la derivada de: $y=\sqrt[3]{2x^{3}+x}$.

Solución:

$$y=\left(2x^{3}+x\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\left(2x^{3}+x\right)^{\frac{-2}{3}}\left(6x^{2}+1\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6x^{2}+1}{3\left(2x^{3}+x\right)^{\frac{2}{3}}}$$

Ejemplo 11.5. Hallar la derivada de $f(x)=x^{3}\ \sqrt{x^{2}+bx}$.

Solución:

$$f(x)=x^{3}\left(x^{2}+bx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{df(x)}{dx}=3x^{2}\left(x^{2}+bx\right)^{\frac{1}{2}}+x^{3}\,\frac{1}{2}\left(x^{2}+bx\right)^{\frac{-1}{2}}\left(2x+b\right)$$

$$\frac{df(x)}{dx}=3x^{2}\left(x^{2}+bx\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{x^{3}\left(2x+b\right)}{2\left(x^{2}+bx\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{6x^{2}\left(x^{2}+bx\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^{2}+bx\right)^{\frac{1}{2}}+x^{3}\left(2x+b\right)}{2\left(x^{2}+bx\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{6x^{2}\left(x^{2}+bx\right)+2x^{4}+bx^{3}}{2\left(x^{2}+bx\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{6x^{4}+6bx^{3}+2x^{4}+bx^{3}}{2\left(x^{2}+bx\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{8x^{4}+7bx^{3}}{\left(x^{2}+bx\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Ejemplo 11.6. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ en x =

Solución:

$$y = \frac{x^2}{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x)(4-x^2)^{\frac{1}{2}} - (x^2)\left(\frac{1}{2}(4-x^2)^{\frac{-1}{2}}(-2x)\right)}{\left[(4-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(4-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x^3}{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}}{(4-x^2)} = \frac{\frac{2x(4-x^2)^{\frac{1}{2}}(4-x^2)^{\frac{1}{2}} + x^3}{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}}{(4-x^2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(4-x^2)+x^3}{(4-x^2)(4-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{8x-2x^3+x^3}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

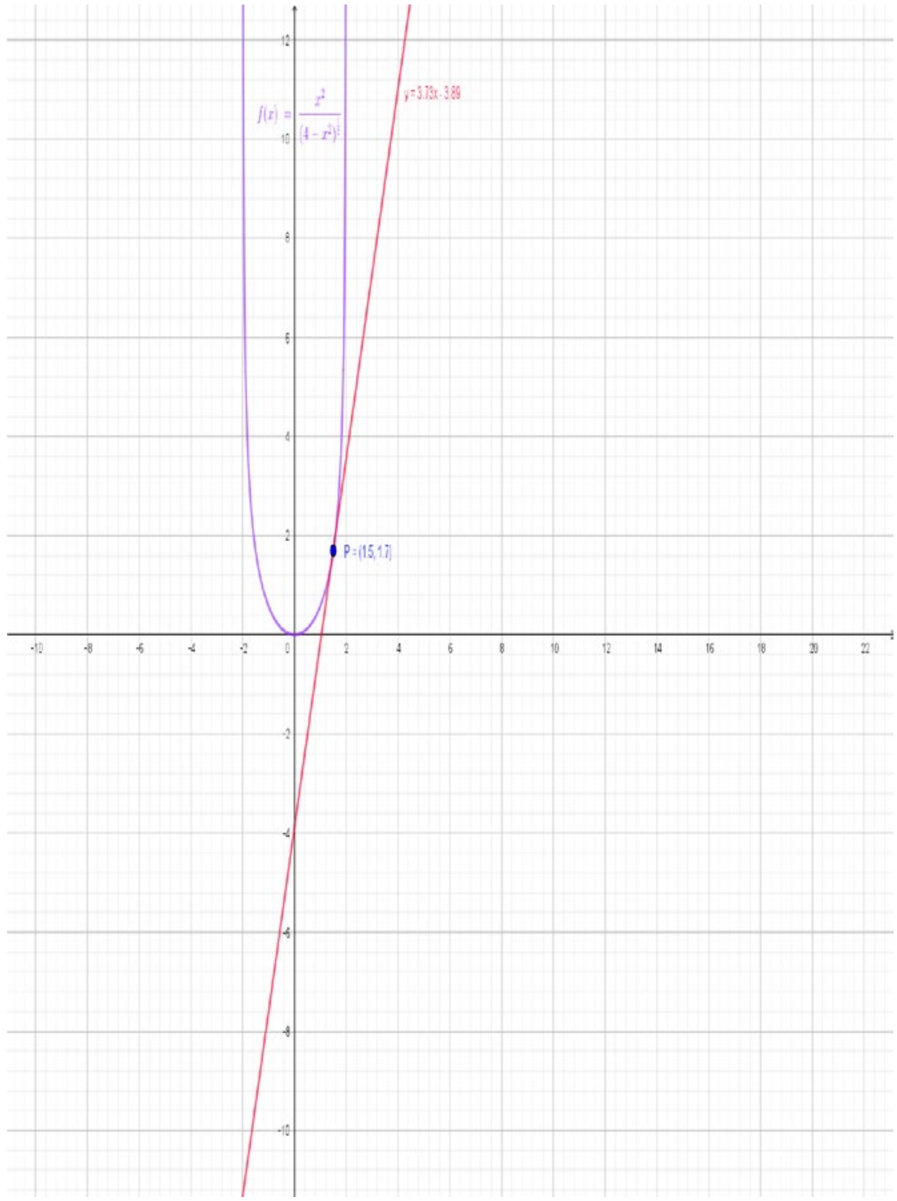
$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x-x^3}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

La pendiente de la recta tangente a la curva en $x = 1.5$ es:

$$m(1.5) = \frac{8(1.5)-(1.5)^3}{(4-(1.5)^2)^{\frac{3}{2}}} = 3.73$$

La ecuación de la recta tangente es: $y = m(x - xo) + yo$

Como $P = (xo,\ yo) = (1.5,\ 1.7)$, la ecuación de la recta tangente nos queda: $y = 3.73\ x - 3.89$. La gráfica de la función y la recta tangente al punto $P = (1.5,\ 1.7)$, es:



Gráfica 67. Recta tangente a una curva

TALLER 11

I. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

1) $h(x)=\left(\dfrac{2}{x-1}\right)^5$

2) $f(x)=\left(\dfrac{2x+1}{3x-1}\right)^4$

3) $f(x)=\left(3x^2+2\right)^2\left(x^2-5x\right)^3$

4) $g(x)=\left(4x^2+7\right)^2\left(2x^3+1\right)^4$

5) $g(r)=\left(2r^4+8r^2+1\right)^5$

6) $f(t)=\left(x^{-3}+4\right)^{\frac{-1}{3}}$

7) $\dfrac{d}{dx}\left[\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-1}{x^{\frac{-1}{2}}+2}\right)\right]$

8) $\dfrac{d}{dx}\left[(2x-9)^2\left(x^3+4x-5\right)^{-3}\right]$

9) $f(r)=\left(r^2+1\right)^3\left(2r^{-1}+5r\right)^{-2}$

10) $f(x)=\left(\dfrac{tx-1}{ax^2+bx+c}\right)^3$

11) $g(x)=\dfrac{\left(x^2+3\right)^3}{(tx-c)^2}$

12) $h(x)=\dfrac{(4x+1)^3\left(x^2+2\right)^4}{\left(3x^2+5\right)^2}$

13) $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right]$

14) $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}}\right]$

15) $\dfrac{d}{dx}\left[\sqrt{9+\sqrt{9-x}}\right]$

16) $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{2x+3}{3x-2}\right]$

Capítulo XII

Derivación Implícita

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA IMPLÍCITA

Hasta ahora todas las funciones se han dado en forma explícita, es decir, una variable está dada en función de la otra, pero esto no siempre es posible, pues hay funciones cuya ecuación no se resuelve fácilmente para poner *y* en términos de *x*, cuando esto sucede se dice que es una función implícita.

Utilizando la regla de la cadena podemos hallar la derivada de *y* respecto a *x* sin necesidad de resolver explícitamente para *y*, a esta técnica se le llama ***derivación implícita.***

Ejemplo 12.1. Derivar: $x^2 y + 3y^2 = 4x + 2y$

Solución:

$$\left(2xy + x^2(1)\frac{dy}{dx}\right) + 6y\frac{dy}{dx} = 4 + 2\frac{dy}{dx}$$

$$2xy + x^2\frac{dy}{dx} + 6y\frac{dy}{dx} = 4 + 2\frac{dy}{dx}$$

$$x^2\frac{dy}{dx} + 6y\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} = 4 - 2xy$$

$$\left(x^2 + 6y - 2\right)\frac{dy}{dx} = 4 - 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 2xy}{x^2 + 6y - 2}$$

Ejemplo 12.2. Hallar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $4x^2 + 9y^2 = 40$ en el punto(1, 2)

Solución:

$$8x + 18y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8x}{18y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{9y}$$

La pendiente de la recta tangente a curva $4x^2 + 9y^2 = 40$ en punto (1, 2) es:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{-4(1)}{9(2)} = \frac{-4}{18} = \frac{-2}{9}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta es:

$$y - y_o = m(x - x_o)$$

$$y - 2 = \frac{-2}{9}(x - 1)$$

$$y = \frac{-2}{9}x + \frac{2}{9} + 2$$

$$y = \frac{-2}{9}x + \frac{20}{9}$$

Ejemplo 12.3. Derivar $\sqrt{x+y} - xy = 0$

Solución:

$$(x+y)^{\frac{1}{2}} - xy = 0$$

$$\frac{1}{2}(x+y)^{\frac{-1}{2}}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) - \left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}(x+y)^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{2}(x+y)^{\frac{-1}{2}}\frac{dy}{dx} - y - x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2}(x+y)^{\frac{-1}{2}}\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}=y-\frac{1}{2}(x+y)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\left(\frac{(x+y)^{\frac{-1}{2}}-2x}{2}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{2y-(x+y)^{\frac{-1}{2}}}{2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{2y-(x+y)^{\frac{-1}{2}}}{2}}{\frac{(x+y)^{\frac{-1}{2}}-2x}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y-(x+y)^{\frac{-1}{2}}}{(x+y)^{\frac{-1}{2}}-2x}$$

Ejemplo 12.4. Encontrar la ecuación de la recta tangente y normal a la gráfica de la elipse dada por $25x^2+16y^2$ en el punto $\left(1,-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$.

Solución:

Derivando implícitamente, obtenemos:

$$\frac{d}{dx}\left[25x^2+16y^2\right]=\frac{d}{dx}[81]$$

$$50x+32y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-50x}{32y}$$

La pendiente de recta tangente en el punto $\left(1,-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$ es:

$$m=\frac{dy}{dx}=\frac{-50(1)}{32\left(-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)}=\frac{-50}{32\left(-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)}=\frac{-100}{-32\sqrt{14}}=\frac{25}{8\sqrt{14}}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$y+\frac{14}{2}=\frac{25}{8\sqrt{14}}(x-1)$$

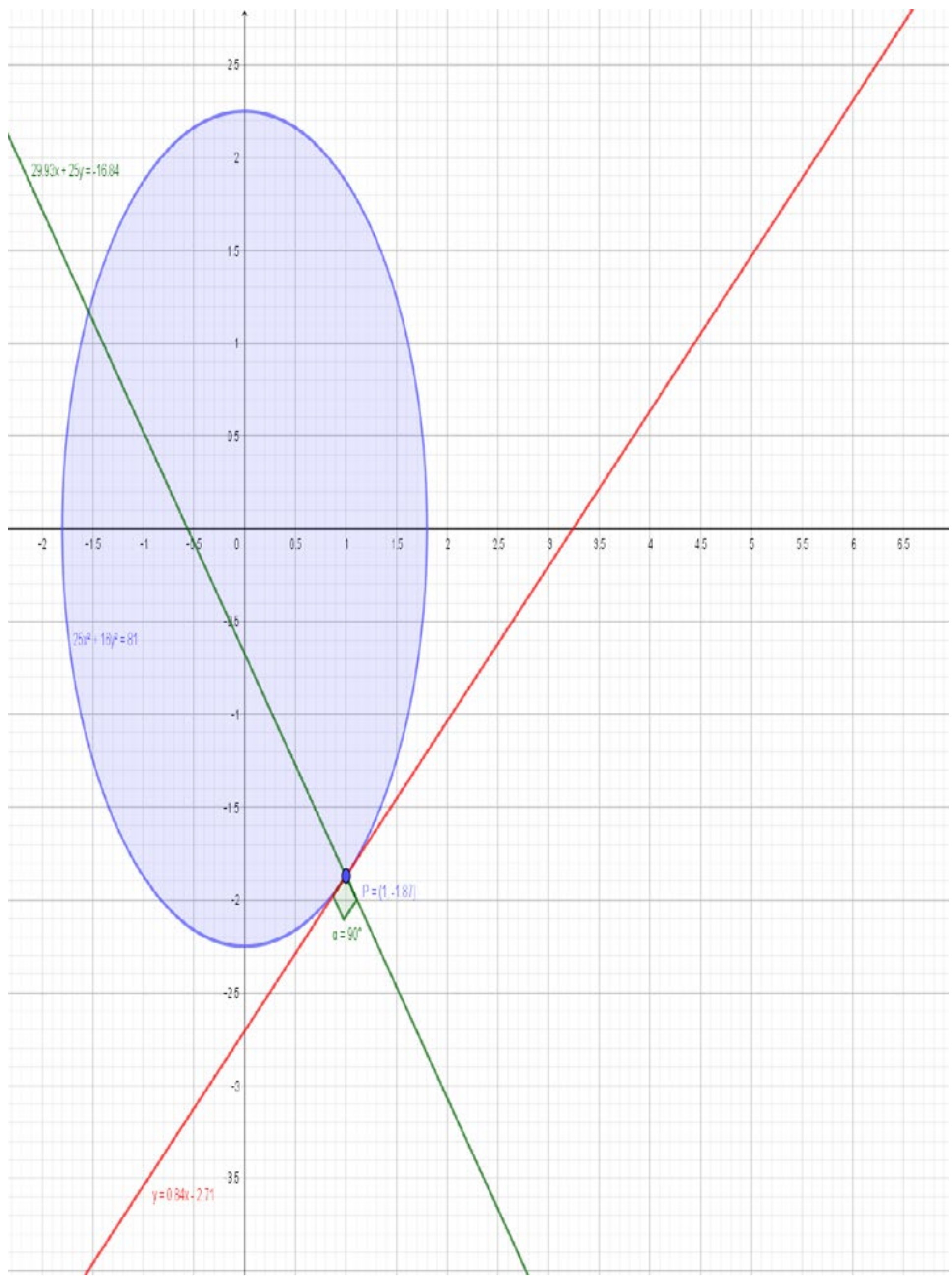
La pendiente de la recta normal a la elipse en el punto $\left(1,-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$ es:

$$m_1\,m=-1\Rightarrow m_1=\frac{-1}{m}\Rightarrow m_1=\frac{-1}{\frac{25}{8\sqrt{14}}}=\frac{-8\sqrt{14}}{25}$$

La ecuación de la recta normal es:

$$y+\frac{\sqrt{14}}{2}=-\frac{8\sqrt{14}}{25}(x-1)$$

La gráfica de la elipse, la recta tangente y la recta perpendicular a la recta tangente es:



Gráfica 68. Recta tangente y normal a una curva

TALLER 12

I. En los siguientes ejercicios halle la diferenciación o derivada implícita.

1. $x^2 + y^2 = c^2$
3. $3x^4y^2 - 7xy^3 = 4 - 8y$
4. $(x+y)^2 - (x-y)^2 = x^4 + y^4$
5. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$
6. $\sqrt{x} + \sqrt{\mathrm{y}} = b$
7. $\frac{y}{\sqrt{x} - y} = 2 + x^2$
8. $x^2y^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$
9. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$
10. $2x^2 = \frac{x+y}{x-y}$
11. $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 8\left(x - y\right)$
12. $y = \frac{1+y}{2 - x}$
13. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 9$

II. Dado $x^2y + y^2x = -2$ encuentre *dy/dx* usando derivación implícita y evalúe la derivada en (16, 25).

III. Determinar la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en el punto indicado.

1. $x^2 - xy + y^2 = 7$, en $(2, 3)$
2. $y^2 + x^2 = 5x^2y^2$, en $(1, 1/2)$
3. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$, en $(1, 1)$
4. $\frac{2xy}{\pi} + \sqrt{y} = 2$, en $(1, \pi)$

Capítulo XIII

Aplicaciones de la derivada

LA DERIVADA EN OTRAS CIENCIAS

La derivada tiene muchas aplicaciones en las otras ciencias, como son, la física, la biología, la economía, la ingeniería, etc. Mediante algunos ejemplos, explicaremos por ahora las aplicaciones más usuales o sencillas.

La derivada en física.

Definición de velocidad media.

Si *s(t)* da la posición en el tiempo *t* de un objeto que se mueve, la ***velocidad media*** del objeto en el intervalo [*t, t* + *Dt*] está dada por: Δ

Velocidad media = $\bar{v}(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{[s(t+\Delta t)] - s(t)}{\Delta t}$

Definición de velocidad instantánea

Si *s(t)* da la posición en el tiempo *t* de un objeto que se mueve, la ***velocidad instantánea*** del objeto en el instante *t* está dada por:

Velocidad instantánea = $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{[s(t+\Delta t)] - s(t)}{\Delta t}$

Definición de aceleración

Si $s(t)$ da la posición en el tiempo t de un objeto que se mueve, su ***aceleración*** en el instante t está dada por:

Aceleración = $\frac{d}{dt}(v(t)) = v'(t)$

Ejemplo 13.1. La altura en s en el tiempo t de una moneda de plata que se deja caer desde un edificio está dada por $s(t) = -5t^2 + 1350$, en donde s se mide en metros y t en segundos.

Encuentre la velocidad promedio sobre el intervalo [1, 2]

Obtenga la velocidad instantánea cuando $t = 1$ y $t = 2$.

La aceleración con cae la moneda.

Solución:

La velocidad promedio o media está dada por:

$$\bar{v} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = \frac{\left[-5(2)^2 + 1350\right] - \left[-5(1) + 1350\right]}{1} = -20 + 1350 + 5 - 1350 = -15\,\frac{m}{\text{s}}$$

La velocidad instantánea está dada por:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = -10t$$

La velocidad instantánea cuando $t = 1$ es

$$v(1) = \frac{ds(1)}{dt} = -10(1) = -10\,\frac{m}{s}$$

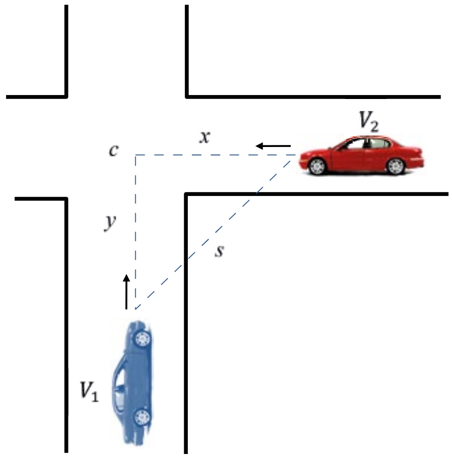
La velocidad instantánea cuando $t = 2$ es

$$v(2) = \frac{ds(2)}{dt} = -10(2) = -20\,\frac{m}{s}$$

La aceleración con que cae la moneda es:

$$a = \frac{dv(t)}{dt} = -10\,\frac{m}{\text{s}^2}$$

Ejemplo 13.2. Dos vehículos $\boldsymbol{V_1}$ y $\boldsymbol{V_2}$ recorren dos vías que se intersecan formando un ángulo recto. El vehículo $\boldsymbol{V_1}$ va en dirección norte a una velocidad de 120 *m/sg* y el vehículo $\boldsymbol{V_2}$ en dirección oeste a una velocidad de *108 m/sg* (ver siguiente gráfica)



Gráfica 69. Razón de cambio

Si en un instante *t*, el vehículo $\boldsymbol{V_1}$ se encuentra a 612 *m* del cruce *c* y $\boldsymbol{V_2}$ a 540 *m* de *c:*

- Determinar, la rapidez con que varía la distancia entre los dos vehículos.

Solución:

Sea *s* la distancia entre los dos vehículos, *x* y *y* la distancia de los vehículos ***V1*** y ***V2*** a *c*, por Pitágoras tenemos que:

$$s^2 = x^2 + y^2$$

Derivando implícitamente respecto a *t*, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(s^2\right) = \frac{d}{dt}\left(x^2\right) + \frac{d}{dt}\left(y^2\right)$$

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

Según los datos del enunciado del problema:

$$\frac{dy}{dt} = 120\frac{m}{sg}; \qquad \frac{dx}{dt} = 108\frac{m}{sg}$$

Y en el instante en que *x = 540 m* y *y = 612 m*, tenemos:

$$s^2 = x^2 + y^2$$

$$s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$s = \sqrt{(540)^2 + (612)^2}$$

$$s \approx 816\, m$$

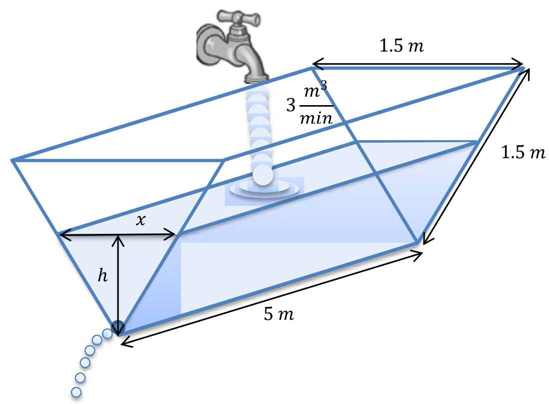
De sustituyendo los valores anteriores en (1):

$$\frac{ds}{dt} = \frac{x}{s}\frac{dx}{dt} + \frac{y}{s}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{540}{816}(108) + \frac{612}{816}(120)$$

$$\frac{ds}{dt} = 161{,}47\,\frac{m}{sg}$$

Ejemplo 13.3. En una finca se utiliza una un alberca para el riego de una hortaliza, la cual tiene la siguiente formar:



Gráfica 70. Razón de cambio en la alberca

Si se suministra agua a la alberca a razón de $3\,\frac{m^3}{min}$. Y esta presenta un orificio en una de sus tapas extremas por la cual se escapa el agua a razón de $1.5\frac{m^3}{min}$; Si la altura se eleva a razón de $1.2\,\frac{m}{min}$. Calcular el flujo de agua que se escapa en el momento en que la altura del agua es de 1*m.*

Solución:

Los triángulos que tiene la alberca son equiláteros, por lo cual se tiene que:

$$x = \frac{2\,\sqrt{3}}{3}\,h$$

El volumen de agua dentro de la alberca es:

$$V = (area\ del\ triangulo)(longitud\ de\ la\ alberca) = \left(\frac{x\,h}{2}\right)(\,5) = 2.5\,x\,h$$

Sustituyendo $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,h$ en el volumen tenemos:

$$V = 2.5\left(\frac{2\,\sqrt{3}}{3}\,h\right)h = \frac{5\,\sqrt{3}}{3}\,h^2$$

Derivando el volumen con respecto al tiempo obtenemos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}h^2\right)}{dt} = \frac{10\sqrt{3}}{3}\, h\, \frac{dh}{dt}$$

Como $\frac{dh}{dt} = 1.2\ \frac{m}{min}$ y $h = 1\ m$, se obtiene el flujo de agua dentro de la alberca

$$\frac{dV}{dt} = \frac{10\sqrt{3}}{3}\, h\, \frac{dh}{dt} = \frac{10\sqrt{3}}{3}(1)(1.2) = 6.9282\ \frac{m^3}{min}$$

Por último la cantidad de agua dentro de la alberca es:

$$V_T = Volumen\ de\ agua\ en\ la\ alberca - Volumen\ de\ agua\ que\ sale$$

$$V_T = V - V_s = (6.9282 - 1.5)\frac{m^3}{min} = 5.4282\ \frac{m^3}{min}$$

Ejemplo 13.4. La carga eléctrica en un circuito RC está dada por:

$$q(t) = C\, V_e\left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right)$$

Si la corriente eléctrica en un circuito RC está dada por la razón de cambio de la carga eléctrica respecto al tiempo, calcule la carga y la corriente eléctrica del circuito para los siguientes tiempos:

t= 1 seg, 2 seg, 5 seg, 10 seg, 20 seg y 30 seg.

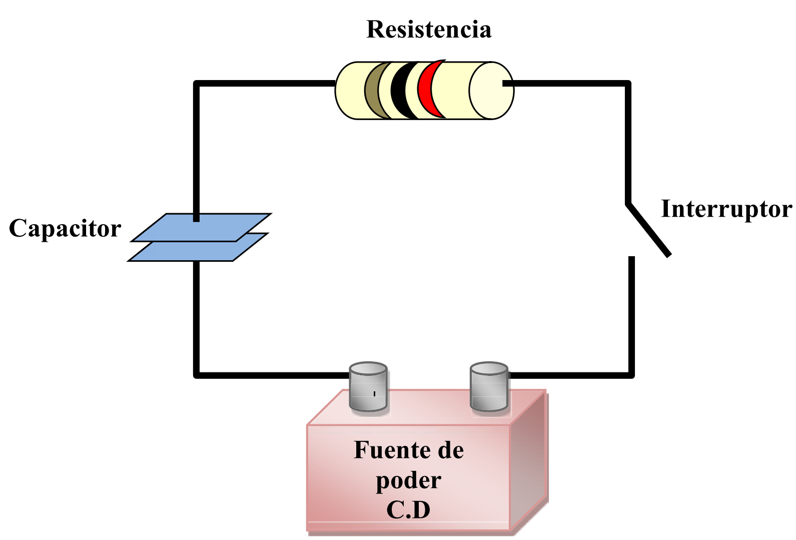
Si se tiene que los dispositivos eléctricos son:

Fuente de alimentación: $V_e = 20\ vol$.

Capacitor o condensador: $C = 1.2\ f$.

Resistencia eléctrica: $R = 100\ \Omega$.

Solución:



Gráfica 71. Circuito RC

Los circuitos RC están compuestos por una resistencia y un condensador o capacitor. Se caracteriza porque la corriente eléctrica depende del tiempo. Cuando el tiempo es igual a cero, el condensador está descargado, en el momento que empieza a correr el tiempo, el condensador comienza a cargarse ya que hay una corriente en el circuito. Debido al espacio entre las placas del condensador, en el circuito no circula corriente, es por eso que se utiliza una resistencia. Cuando el condensador se carga completamente, la corriente en el circuito es igual a cero.

Teniendo en cuenta que la intensidad se define como la carga que atraviesa la sección del circuito en la unidad de tiempo, $i = \frac{dq}{dt}$ tendremos que derivar la carga eléctrica almacenada en el capacitor, esto es:

$$q(t) = C\,V_e\left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right)$$

Derivando con respecto al tiempo, obtenemos la intensidad en función del tiempo:

$$i = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{V_e}{R}\ e^{\frac{-t}{RC}}$$

La carga y corriente eléctrica para los tiempos solicitados son:

Tabla 7. Valores de x vs y de una parábola

Tiempo o t medido en (segundo)	Carga Eléctrica o $q(t) = C\,V_e\left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right)$ Medido en (coulomb)	Corriente eléctrica o $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ Medido en (Amperios)
1	0.2	0.2
2	0.4	0.2
5	0.98	0.19
10	1.92	0.18
20	3.68	0.17
30	5.31	0.16

13.2 La derivada en economía.

Modelo General. En la teoría económica se acostumbra expresar el costo total *c* dependiendo del número *x* de artículos producidos, es decir, *c* es una función de *x, c(x)* [10].

Si el número de artículos producidos se cambia de *x* a *x + h*, la velocidad media (o razón media) en el cambio del costo está dada por:

$$\bar{c}(x) = \frac{c(x+h) - c(x)}{h}, \text{ con } \quad h \neq 0$$

Y la velocidad instantánea (o razón instantánea) de cambio del costo está dada por:

$$\frac{dc(x)}{dx} = c'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{c(x+h) - c(x)}{h}$$

$\frac{dc(x)}{dx} = c'(x)$ en la teoría económica recibe el nombre de ***costo marginal.***

EJEMPLO 13.5. Si el costo total para la impresora ***A*** para producir *x* textos está dada por:

$$c(x) = 80x + 10\sqrt{x}$$

Determinar:

El costo de producción de 100 textos.

La rata media para *x* textos.

El costo marginal de 625 textos.

Solución:

El costo de producción de 100 textos está dado por:

$$c(100) = 80(100) + 10\sqrt{100} = 8.000 + 10(10) = 8.000 + 100 = 8.100$$

La rata media para *x* textos, está dada por:

$$\bar{c}(x) = \frac{\left[80(x+h) + 10\sqrt{x+h}\right] - \left[80x + 10\sqrt{x}\right]}{h} \qquad \text{con } \; h \neq 0$$

$$\bar{c}(x) = \frac{80x + 80h + 10\sqrt{x+h} - 80x + 10\sqrt{x}}{h} = \frac{80h + 10\sqrt{x+h} + 10\sqrt{x}}{h}$$

El costo marginal de 625 textos:

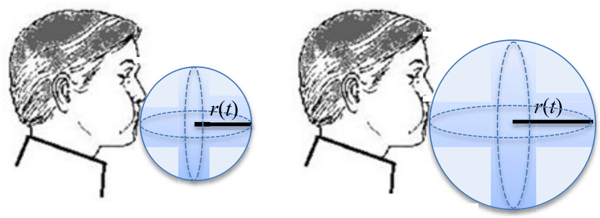
$$\frac{dc(x)}{dx} = 80 + 5x^{\frac{-1}{2}} = 80 + \frac{5}{\sqrt{625}}$$

$$\frac{dc(625)}{dx} = 80 + \frac{5}{\sqrt{625}} = 80 + \frac{5}{25} = 80 + \frac{1}{5} = \frac{401}{5} = 80{,}2$$

La derivada en geometría

Ejemplo 13.6. Un globo de caucho de forma esférica está siendo inflado por una persona. En un instante *t* el volumen del globo está aumentando con una rapidez de 360 *cm3/min*; si en ese instante el radio es de 10 *cm*, determinar la rapidez con que aumenta el área de la superficie esférica del globo.

Solución:



Gráfica 72. Razón de cambio

Observamos que tanto el volumen ***V***, el área ***A*** y el radio *r* son funciones de *t*. Es decir:

$$V = V(t),\quad A = A(t) \quad \text{y} \quad r = r(t)$$

Sabemos que $V(t) = \frac{4}{3}\pi\ r^3$ y $A(t) = 4\pi\ r^2$, aplicando la derivación en cadena, obtenemos:

$$\frac{dV(t)}{dt} = 4\pi\ r^2 \frac{dr}{dt} \quad (1)$$

Según el enunciado tenemos que: $\frac{dV(t)}{dt} = 360\frac{cm^3}{\min}$ $r = 10cm$, sustituyendo en la ecuación (1) tenemos:

$$360\frac{cm^3}{\min} = 4\pi\ (10cm)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{360\frac{cm^3}{\min}}{400\pi\ \ cm^2} = \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{9}{10\pi}\frac{cm}{\min} = \frac{dr}{dt} \qquad (2)$$

Ahora, como $A(t) = 4\pi\ r^2$, entonces:

$$\frac{dA(t)}{dt} = 8\pi\ r\frac{dr}{dt} \quad (3)$$

Sustituyendo (2) en (3) se tiene que la razón de cambio del área es:

$$\frac{dA(t)}{dt} = 8\pi\ (10\,cm)\left(\frac{9}{10\pi}\frac{cm}{\min}\right) = 72\frac{cm^2}{\min}$$

TALLER 13

1. Un recipiente cilíndrico, con eje vertical está al principio lleno con 3/2 litros de agua. Este recipiente tarda 50 minutos en vaciarse después de que se abre una llave en el fondo. Suponga que la llave se abre en el tiempo *t = 0*. Una consecuencia de la Ley de **Torricelli** es que el volumen ***V*** del suero que queda en el recipiente después de *t* minutos es:

$$V(t) = \left(\frac{3}{2}\right)\left(1 - \frac{t}{50}\right)^2$$

Encuentre la razón instantánea a la que fluye hacia afuera el agua del recipiente cuando *t = 30 minutos*

2. Una partícula se desplaza a lo largo de una recta horizontal de acuerdo con la ecuación:

$$s = 2t^3 - 4t^2 + 2t - 1$$

Determinar los intervalos de tiempo cuando la partícula cambia de sentido el movimiento.

3. La utilidad bruta anual de una clínica particular, *t* años después del primero de enero de 1994, es de *p* millones de pesos $p(t) = \frac{2}{5}t^2 + 2t + 10$ y , hallar:

La tasa a la cual estuvo creciendo la utilidad bruta el primero de enero de 1996.

Y la tasa a la cual deberá estar aumentando la utilidad bruta el primero de enero del 2.000.

4. Un tanque en forma de cilindro tiene una altura de 16mt. y un radio de 4mt. en la base. El agua fluye al tanque por la parte superior a razón de $2m^3$/min. Calcule la rapidez con que sube el nivel del agua respecto a su altura

5. En una planta de grava y arena, la arena se vierte a un transportador y después a una pila cónica con una tasa de 10 ft^3/min. El diámetro de la base del cono es aproximadamente tres veces la altura. ¿A que tasa cambia la altura de la pila cuando tiene una altura de 15 *ft*?

6. Un pulmón artificial en forma de cilindro tiene un radio de 20 *cm* en la base. El aire fluye al pulmón artificial por la parte inferior a razón de 7 cm^3/sg. ¿Qué tan rápido sube el nivel cuando el cilindro tiene una altura de 15 cm?

7. Un líquido X, se congeló en forma de esfera. Un ingeniero lo empieza a derretir de manera uniforme con calor. En un instante t el volumen está decreciendo a razón de 20 cm^3/min, y en ese mismo instante el radio de la bola es de 16 cm. Determinar:

a) La rapidez con que decrece el radio de la bola.

b) La rapidez con que decrece el área de la superficie de la bola hematológica congelada.

8. La ley de **Boyle** para la expansión de un gas es $\boldsymbol{PV = C}$, donde $\boldsymbol{P}$ es la presión en unidades de fuerza por unidad de área, $\boldsymbol{V}$ es el volumen del gas en unidades cúbicas y $\boldsymbol{C}$ es una constante. En un instante dado la presión es de 3000 lb/pie^2, el volumen es de $5\ pies^3$ y aumenta a razón de $3\ pies^3/min$. Obtenga la razón de cambio de la presión en ese instante.

9. La función $P(h) = \rho\, g\, h + P_o$ nos permite encontrar la presión de un líquido en reposo a una profundidad h. Hallar la variación de presión respecto a la profundidad del cualquier líquido en reposo.

10. El volumen de un cubo de lado s es $V = s_3$. Hallar la razón de cambio de V respecto a s cuando $s = 4$.

11. Una empresa comprueba que, vendiendo p dólares por unidad, sus ingresos mensuales son:

$$R = 12000p - 1000p^2, \quad 0 \le p \le 12$$

(Nótese que los ingresos son cero cuando $p = 12$, ya que nadie quiere pagar tanto). Hallar la razón de cambio de R respecto de p cuando:

a) $p = 1$ b) $p = 4$ c) $p = 6$ d) $p = 10$

12. En una reacción química la cantidad Q (en gramos) de una sustancia producida en t horas viene dada por:

$$Q = 16t - 4t^2 \qquad 0 < t \le 2$$

Halla el ritmo (en gramos por hora) de producción de la sustancia cuando:

a) $t = 1/2$ b) $t = 1$ c) $t = 2$

Capítulo XIV

Derivada de funciones trigonométricas

TEOREMAS SOBRE LA DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1. Si $f(x) = sen\,x$ entonces $\dfrac{df(x)}{dx} = \cos x$

   Si $f(x) = sen\,u(x)$, $u(x)$ derivable entonces, $\dfrac{df(x)}{dx} = [\cos u(x)]\left[\dfrac{du(x)}{dx}\right]$

2. Si $f(x) = \cos x$ entonces $\dfrac{df(x)}{dx} = -sen\,x$

   Si $f(x) = \cos u(x)$, $u(x)$ derivable entonces, $\dfrac{df(x)}{dx} = [-\,sen\,u(x)]\left[\dfrac{du(x)}{dx}\right]$

3. Si $f(x) = \tan x$ entonces $\dfrac{df(x)}{dx} = \sec^2 x$

   Si $f(x) = \tan u(x)$, $u(x)$ derivable entonces, $\dfrac{df(x)}{dx} = [\sec^2 u(x)]\left[\dfrac{du(x)}{dx}\right]$

4. Si $f(x) = \cot x$ entonces $\dfrac{df(x)}{dx} = -\csc^2 x$

   Si $f(x) = \cot u(x)$, $u(x)$ derivable entonces, $\dfrac{df(x)}{dx} = [-\csc^2 u(x)]\left[\dfrac{du(x)}{dx}\right]$

5. Si $f(x) = \sec x$ entonces $\dfrac{df(x)}{dx} = \sec x \;\; \tan x$

   Si $f(x) = \sec u(x)$, $u(x)$ derivable entonces, $\dfrac{df(x)}{dx} = [\sec u(x) \;\; \tan u(x)]\left[\dfrac{du(x)}{dx}\right]$

6. Si $f(x) = \csc x$ entonces $\dfrac{df(x)}{dx} = -\csc x \;\; \cot x$

   Si $f(x) = \csc u(x)$, $u(x)$ derivable entonces, $\dfrac{df(x)}{dx} = [-\csc u(x) \;\; \cot u(x)]\left[\dfrac{du(x)}{dx}\right]$

Ejemplo 14.1. Derivar $f(x)=\cos 5x$

Solución:

$$\frac{df(x)}{dx}=(-sen\,5x)(5)=-5\cos 5x$$

Ejemplo 14.2. Si $y=3x^2 senx$, encuentre *dy/dx*

Solución:

$$\frac{dy}{dx}=6x\,senx+3x^2\cos x$$

Ejemplo 14.3. Encuentre una ecuación para la recta tangente a la gráfica de $f(x)=sen\,2x$ en el punto (π, 0).

Solución:

$$f(x)=sen\,2x$$

$$\frac{df(x)}{dx}=(\cos 2x)(2)=2\cos 2x$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en (π, 0) es

$$m=\frac{df(\pi)}{dx}=2\cos 2\pi=2(1)=2$$

Luego la ecuación de la recta es:

$$y-y_o=m(x-x_0)$$

$$y-0=2(x-\pi)$$

$$y=2x-2\pi$$

Ejemplo 14.4. Encuentre *dy/dx* dado $y=2\cos\frac{x}{2}$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx}=2\left(-sen\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=-sen\frac{x}{2}$$

Ejemplo 14.5. Encuentre *dy/dx* dado $y=\frac{1}{4}sen^2 2x$

Solución:

$$y=\frac{1}{4}(sen\,2x)^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{4}(sen\,2x)(\cos 2x)(2)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4}{4}sen2x\cos 2x$$

$$\frac{dy}{dx}=sen2x\cos 2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}sen\,4x \qquad (\text{ Identidad Trig.})$$

Ejemplo 14.6. Derivar $y=\sec^3 2x$

Solución:

$$y=(\sec 2x)^3$$

$$\frac{dy}{dx}=3(\sec 2x)^2(\sec 2x \quad \tan 2x)(2)=6\sec^3 2x \quad \tan 2x$$

Ejemplo 14.7. Halla la primera derivada de: $f(x)=\cot(1-2x^2)$

Solución:

$$\frac{df(x)}{dx}=(-\csc^2(1-2x^2))(-4x)=4x\csc^2(1-2x^2)$$

Ejemplo 14.8. Si $y=\sec^3\sqrt{x}$. Encuentre *dy/dx.*

Solución:

$$y=\sec^3 x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(3\sec^2 x^{\frac{1}{2}}\right)\left(\sec x^{\frac{1}{2}} \quad \tan x^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\right)=\frac{3}{2\sqrt{x}}\sec^3\sqrt{x} \quad \tan\sqrt{x}$$

Ejemplo 14.9. Determinar dy/dx en $y = \tan\sqrt{1-x}$

Solución:

$$y = \tan(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\sec^2(1-x)^{\frac{1}{2}}\right)\left(\left(\frac{1}{2}(1-x)^{\frac{-1}{2}}\right)(-1)\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\sec^2(1-x)^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{-1}{2(1-x)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sec^2\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}$$

Ejemplo 14.10. Hallar la derivada de $f(x) = \sqrt{\cos\left(\frac{x^2+2}{x-1}\right)}$

Solución:

$$f(x) = \cos^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2+2}{x-1}\right)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \left(\frac{1}{2}\cos^{\frac{-1}{2}}\left(\frac{x^2+2}{x-1}\right)\right)\left(-sen\left(\frac{x^2+2}{x-1}\right)\right)\left(\frac{(2x+0)(x-1)-(1-0)(x^2+2)}{(x-1)^2}\right)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \left(\frac{1}{2}\cos^{\frac{-1}{2}}\left(\frac{x^2+2}{x-1}\right)\right)\left(-sen\left(\frac{x^2+2}{x-1}\right)\right)\left(\frac{(2x)(x-1)-(1)(x^2+2)}{(x-1)^2}\right)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{-1}{2}\left(\frac{2x^2-2x-x^2-2}{(x-1)^2}\right)\cos^{\frac{-1}{2}}\left(\frac{x^2+2}{x-1}\right)\ sen\left(\frac{x^2+2}{x-1}\right)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \left(\frac{-x^2+2x+2}{2\,(x-1)^2}\right)\ \cos^{\frac{-1}{2}}\left(\frac{x^2+2}{x-1}\right)\ sen\left(\frac{x^2+2}{x-1}\right)$$

TALLER 14

1) $h(x)=\dfrac{senx}{x}$

2) $f(x)=\sqrt{\cos x^2}$

3) $F(x)=2t\cos t$

4) $g(x)=\tan x+\cot x$

5) $f(x)=x^2\cos x-2x\,senx-2\cos x$

6) $h(x)=\dfrac{senx}{1-\cos x}$

7) $f(t)=\dfrac{tx+4}{\cos mt}$

8) $f(y)=\dfrac{\tan(y+1)}{\tan(y-1)}$

9) $g(x)=sen^2(\cos 2x)$

10) $f(y)=\dfrac{3\,sen2y}{\cos^2 2y+1}$

11) $f(x)=(2senx-3\cos x)^3$

12) $f(x)=4\cos(sen3x)$

13) $f(x)=\sec x+\tan x$

14) $y=\dfrac{1}{4}\csc 4x$

15) $g(\theta)=\dfrac{1}{(\sec 2\theta-1)^{\frac{3}{2}}}$

16) $y=\cos(1-x^2)$

17) $y=\cos(1-x)^2$

18) $f(x)=\tan\sqrt{x^2+1}$

19) $f(y)=\sqrt{x}\;\tan\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

20) $g(y)=\tan\sqrt{y}\;\sec\sqrt{y}$

21) $f(w)=\dfrac{2\cos w}{w+1}$

22) $\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\tan t}{\cos t-4}\right]$

23) $\dfrac{d}{dy}\left[\dfrac{1+seny}{1-seny}\right]$

24) $f(x)=x^2\cos x-2x\,senx-2\cos x$

Hallar *dy/dx* por diferenciación implícita:

1) $\sec^2 x+\csc^2 y=4$

2) $\cot xy+xy=0$

3) $x\,seny+y\cos x=1$

4) $\cos(x+y)=y\,senx$

5) $\sec^2 y+\cot(x-y)=\tan^2 x$

6) $\csc(x-y)\sec(x+y)=x$

7) $y=\sqrt[3]{\cos(x-y)}$

8) $y=\sqrt{sen\left(\sqrt{x+y}\right)}=x$

Diferenciar las siguientes funciones:

1) $g(t)=\dfrac{1}{\sqrt{sen^2 t+sen^2 3t}}$

2) $g(t)=\sqrt{sen4t}$

3) $g(t)=\sqrt[3]{(\cos 3t - sen3t)^5}$

4) $h(\theta\ )=\dfrac{\cos^2\theta}{\theta^3}$

5) $g(t)=\sqrt{t}\ \cos^3 mt$

6) $f(x)=\cos(senx^2)$

7) $y=\sqrt{x}\ sen\sqrt{x+\sqrt{x}}$

8) $f(x)=\sqrt{\cos\sqrt{x}}$

9) $y=(1+sen\ nx)^{-1}$

10) $y=sen(\sqrt{2}x)$

11) $y=x^2 sen^3(x^{-1}+1)$

12) $y=\cos(mx+nx^2)$

Derivar:

1) $f(x)=\left(\dfrac{sen(\cos x)}{1-\cos 3x^3}\right)$

2) $y=[x-sen2x^{-3}][x+\cos 2x^{-3}]$

3) Si un cuerpo de peso W, es arrastrado a lo largo de un piso horizontal mediante una fuerza F, dirigida a un ángulo de θ radianes con el plano del suelo, entonces F esta dada por la ecuación:

$$\mathrm{F}=\frac{kW}{k\ sen\theta+\cos\theta}$$

Donde K es una constante y recibe el nombre de coeficiente de fricción. Si $k=0.5$, calcule la intensidad de cambio instantánea de F con respecto a θ cuando: a) $\theta=\frac{\pi}{4}$, b) $\theta=\frac{\pi}{2}$

Capítulo XV

Derivada de un logaritmo

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Se define el logaritmo de un número $x > 0$ en una base b, como el exponente al cual debe elevarse la base b para obtener el número dado x. Es decir:

$y = \log_b x \Leftrightarrow b^y = x$ Se lee: "Logaritmo en base b de x es igual y"

$y = \log_e x = \ln x \Leftrightarrow b^y = x$ Se lee: "Logaritmo en base e, o ***logaritmo natural*** de x es igual y"

Teoremas:

1) ***Si*** $f(x) = \log_b x$, entonces: $\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x}\log_b e$

Regla de la cadena, $f(x) = \log_b u(x)$, u derivable en x, entonces:

$\frac{df(x)}{dx} = \left[\frac{1}{u(x)}\right]\left[\frac{du(x)}{dx}\right]\log_b e$ (Teorema general)

2) ***Si*** $f(x) = \ln x$, entonces: $\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x}$

Regla de la cadena, $f(x) = \ln u(x)$, u derivable en x, entonces:

$$\frac{df(x)}{dx} = \left[\frac{1}{u(x)}\right]\left[\frac{du(x)}{dx}\right]$$

Ejemplos 15.1. Encuentre *dy/dx* dado $y=\log_3\left(\frac{x\sqrt{x-1}}{2}\right)$

Solución:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{x\sqrt{x-1}}{2}}\frac{\left((1)\sqrt{x-1}+x\left(\frac{1}{2}(x-1)^{\frac{-1}{2}}(1)\right)\right)}{2}\log_3 e$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x\sqrt{x-1}}\frac{\left(\sqrt{x-1}+\frac{x}{2\sqrt{x-1}}\right)}{2}\log_3 e$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\left(\sqrt{x-1}+\frac{x}{2\sqrt{x-1}}\right)\log_3 e$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x-1)}\right)\log_3 e$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{3x-2}{2x(x-1)}\right)\log_3 e$$

Ejemplos 15.2. Determine *dy/dx* si $y=\ln\sqrt{7x-3}$

Solución:

$$y=\ln(7x-3)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(7x-3)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{2}(7x-3)^{\frac{-1}{2}}(7)\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(7x-3)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{7}{2\,(7x-3)^{\frac{1}{2}}}\right)=\frac{7}{2(7x-3)}$$

EJEMPLOS 15.3. Derivar: $y = \ln\left(\sqrt{x}\ sen^2 mx\right)$

Solución:

$$y = \ln\left(x^{\frac{1}{2}} sen^2 mx \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{1}{x^{\frac{1}{2}} sen^2 mx} \right] \left[\left(\frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} \right) sen^2 mx + x^{\frac{1}{2}} \left(2(senmx)(\cos mx)(m) \right) \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{sen^2 mx}{2\sqrt{x}} + 2m\sqrt{x}\ senmx \cos mx}{\sqrt{x}\ sen^2 mx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{sen^2 mx + 4m\ x\ senmx \cos mx}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\ sen^2 mx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{senmx \left(senmx + 4m\ x \cos mx \right)}{2x\ sen^2 mx} = \frac{senmx + 4m\ x \cos mx}{2x\ senmx}$$

Ejemplos 15.4. Determinar dy/dx en $f(x) = \log_2\left(\cos mx\right)$

Solución:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\cos mx}\left(-senmx\right)(m)\log_2 e$$

$$\frac{df(x)}{dx} = -m\frac{senmx}{\cos mx}\log_2 e$$

$$\frac{df(x)}{dx} = -m \tan mx\ \log_2 e$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \log_2 e^{-m \tan mx}$$

TALLER 15

En los ejercicios siguientes, derive la función dada y simplifique el resultado.

1. $f(x) = \ln(4+5x)$ 2. $f(x) = \ln(1+4x^2)$ 3. $h(x) = \ln\sqrt{4+5x}$

4. $f(x) = \ln(8-2x)$ 5. $f(t) = \ln(3t+1)^2$ 6. $h(x) = \ln(8-ax)^{5a}$

7. $g(t) = \ln^2(3t+1)$ 8. $g(x) = \ln\sqrt{1+4x^2}$ 9. $f(x) = \ln\sqrt[3]{4-x^2}$

10. $g(y) = \ln(\ln y)$ 11. $f(y) = \ln(sen5y)$ 12. $f(x) = x\ln x$

13. $f(x) = \cos(\ln x)$ 14. $g(x) = \ln\cos\sqrt{x}$ 15. $g(x) = \ln(\sec 2x + \tan 2x)$

16. $h(y) = \csc(\ln y)$ 17. $f(x) = \ln\sqrt{\tan x}$ 18. $f(w) = \sqrt{\dfrac{3w+1}{2w-5}}$

19. $\ln[(5x-3)^4(2x^2+7)^3]$ 20. $h(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

En los siguientes ejercicios halle la Diferenciaci´on o Derivada Implícita

1. $\ln xy + x + y = 2$ 2. $\ln\dfrac{y}{x} + xy = 1$ 3. $\log_4 x^2 + y^2 = c^2$

4. $\ln(x+y) - \ln(x-y) = 4$ 5. $x\ln y + y\ln x = xy$ 6. $x = \log_2(x+y+1)$

7. $\ln\left(3x^4y^2\right) - 7xy^3 = 4 - 8y$ 8. $\ln(x+y)^2 - \ln(x-y)^2 = x^4 + y^4$

9. $\ln\dfrac{1}{\cos x} + \ln\dfrac{1}{seny} = 1$ 10. $\ln\sqrt{x} + \ln\sqrt{y} = b$ 11. $\dfrac{\ln y}{\sqrt{x-y}} = \ln\left(2+x^2\right)$

Capítulo XVI

Derivada de funciones exponenciales

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

TEOREMAS:

$\forall b \in R^+$, o $b = cte > 0$, se tiene que:

i. Si $f(x) = b^x$, entonces, $\dfrac{df(x)}{dx} = b^x \ln b$ (caso particular).

ii. ***Regla de la cadena***: **(Teorema general)**

Si $f(x) = b^{u(x)}$**, *u* derivable en *x*, entonces:** $\dfrac{df(x)}{dx} = \left(\dfrac{du(x)}{dx}\right) b^{u(x)} \ln b$

Casos particulares en los que *b = e*

i. Si $f(x) = e^x$, entonces, $\dfrac{df(x)}{dx} = e^x$

ii. ***Regla de la cadena***:

Si $f(x) = e^{u(x)}$, *u* derivable en *x*, entonces: $\dfrac{df(x)}{dx} = \left(\dfrac{du(x)}{dx}\right) e^{u(x)}$

Ejemplo 16.1. Determinar *dy/dx* dado $y = a^{5x^2+3x+4}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = (10x + 3 + 0)a^{5x^2+3x+4} \ln a = \ln a\,(10x + 3)a^{5x^2+3x+4}$$

Ejemplo 16.2. Encontrar *dy/dx* de $y = e^{x\cos x}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = ((1)\cos x + x(-senx))e^{x\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = (\cos x - senx)e^{x\cos x}$$

Ejemplo 16.3. Derivar $f(x)=a^{x}e^{\ln\left(x^{2}+x\right)}$

Solución:

$$f(x)=a^{x}e^{\ln\left(x^{2}+x\right)}$$

$$\frac{df(x)}{dx}=\left[a^{x}\ln a\right]e^{\ln\left(x^{2}+x\right)}+a^{x}\left[\left(\frac{2x+1}{x^{2}+x}\right)e^{\ln\left(x^{2}+x\right)}\right]$$

$$\frac{df(x)}{dx}=a^{x}e^{\ln\left(x^{2}+x\right)}\left[\ln a+\frac{2x+1}{x^{2}+x}\right]$$

Ejemplo 16.4. Hallar la derivada de $f(x)=x^{2}e^{ax}$

Solución:

$$\frac{df(x)}{dx}=2xe^{ax}+x^{2}ae^{ax}$$

$$\frac{df(x)}{dx}=xe^{ax}\left(2+ax\right)$$

Derivada de funciones exponenciales con base variable:

Ejemplo 16.5. Determinar *dy/dx* se $y=x^{x^{3}}$

Solución:

$$y=x^{x^{3}}$$

$$\ln y=\ln x^{x^{3}}$$

$$\ln y=x^{3}\ln x \qquad \text{(propiedad de logaritmica)}$$

$$\frac{1}{\mathrm{y}}\frac{dy}{dx}=3x^{2}\ln x+x^{3}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left(3x^{2}\ln x+x^{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=x^{x^{3}}\left(3x^{2}\ln x+x^{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=x^{x^{3}}x^{2}\left(3\ln x+1\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=x^{x^{3}+2}\left(3\ln x+1\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=x^{5}\left(\ln x^{3}+1\right)$$

Ejemplo 16.6. Encuentre la derivada de $y=(senx)^{e^x}$

Solución:

$$\ln y=\ln(senx)^{e^x}$$
$$y=e^x\ln(senx)$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=e^x\ln(senx)+e^x\left[\frac{1}{senx}\right]\cos x$$
$$\frac{dy}{dx}=y\left[e^x\ln(senx)+e^x\frac{\cos x}{senx}\right]$$
$$\frac{dy}{dx}=e^x\ln(senx)\left[e^x\ln(senx)+e^x\frac{\cos x}{senx}\right]$$
$$\frac{dy}{dx}=e^{2x}\ln(senx)[\ln(senx)+\cot x]$$
$$\frac{dy}{dx}=e^{2x}[\ln(senx)+\cot x]\ln(senx)$$
$$\frac{dy}{dx}=\ln(senx)^{e^{2x}[\ln(senx)+\cot x]}$$

TALLER 16

En los ejercicios siguientes halle *dy/dx.*

1) $y=e^{5x^3+b}$

2) $y=e^{(-7x+e^x)(x^2+b)^{-3}}$

3) $y=e^{-3x^2+\ln\frac{1}{x}}$

4) $y=e^{(x^2-3)\cos ax}$

5) $y=e^{(2sen3x)\left(\csc^2 5x^{\frac{1}{5}}\right)}$

6) $y=e^{\cos\sqrt{x}}$

7) $y=e^x sene^x$

8) $y=\frac{e^x}{x}$

9) $y=\tan e^{\sqrt{x}}$

10) $y=e^{e^x}$

11) $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

12) $y=\ln\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$

13) $y=x^5e^{-3\ln x}$

14) $y=\ln(e^x+e^{-x})$

15) $y=\sec e^{2x}+e^{2\sec x}$

16) $y=\tan e^{3x}+e^{\tan 3x}$

17) $e^x+e^y=e^{x+y}$

18) $e^y=\ln(x^3+3y)$

19) $y^2e^{2x}+xy^3=1$

20) $ye^{2x}+xe^{2y}=c$

Encuentre la derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x)=3^{5x}$

2) $f(x)=6^{-3x}$

3) $f(t)=4^{3t^2}$

4) $g(x)=10^{x^2-2x}$

5) $f(x)=4^{sen 2nx}$

6) $f(z)=2^{\csc 3z}$

7) $g(x)=2^{5x}3^{4x^2}$

8) $f(t)=\tan 3^{t^2}$

9) $f(x)=\left(x^3+3\right)^{\frac{3}{2}}2^{-7x}$

10) $h(x)=\dfrac{\log_{10} x}{x}$

11) $f(t)=\dfrac{t}{t+1}$

12) $f(x)=\sqrt{\log_a x^2}$

13) $f(x)=(senx)^{\tan x}$

14) $f(x)=e^{e^x}$

15) $f(x)=x^{e^x}$

16) $2g(z)=z^{\cos z}$

17) $f(x)=x^{\sqrt{x}}$

18) $f(x)=x^{x^2}$

Capítulo XVII

Derivada de funciones con valor absoluto

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN CON VALOR ABSOLUTO

Para calcular la derivada de una función con valor absoluto es necesario hacer uso de las siguientes definiciones:

$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ (Primera definición de valor absoluto)

$|x| = \sqrt{x^2} = \left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (Segunda definición de valor absoluto)

Ejemplo 17.1. Derivar $y = |x+2|$

Solución utilizando la primera definición:

$$y = |x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ -(x+2) & \text{si} \quad x+2 < 0 \Rightarrow x < -2 \end{cases}$$

La derivada para $x \geq -2$ es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[x+2] = 1$$

La derivada para $x < -2$ es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[-(x+2)] = -1$$

Ejemplo 17.2. Derivar $y = |x+2|$

Solución utilizando la segunda definición:

$$y = \sqrt{(x+2)^2} = \left[(x+2)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[(x+2)^2\right]^{\frac{-1}{2}}\left[2(x+2)(1)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x+2)}{2\left[(x+2)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2}{\left[(x+2)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{x+2}{|x+2|}$$

Como $|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ -(x+2) & \text{si} \quad x+2 < 0 \Rightarrow x < -2 \end{cases}$, entonces

La derivada para $x \geq -2$ es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2}{x+2} = 1$$

La derivada para x < - 2 es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2}{-(x+2)} = -1$$

TALLER 17

1) $F(x) = |x|$

2) $g(x2) = |x^2+1|$

3) $f(x) = |2x+a|(x^2+3ax)^2$

4) $h(x) = \dfrac{|ax^{-2}+b|}{\sqrt[3]{x^2+b}}$

5) $f(t) = \ln|\cos^2\sqrt{at}|$

6) $f(x) = |x|e^{|5x+k|}$

7) $g(x) = a^{|x\cos mx^2|}$

8) $f(x) = x^{2x^2}|x^n|$

9) $f(x) = \left|x^{\frac{1}{2}}\right| sen(\cos\sqrt{ax})$

Capítulo XVIII

Derivada de funciones trigonométricas inversas

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

TEOREMA: Si *u(x)* es una función diferenciable de *x,*

$$\frac{d}{dx}\left(sen^{-1}u(x)\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(u(x)\right)^2}}\frac{d}{dx}\left(u(x)\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}u(x)\right)=\frac{-1}{\sqrt{1-\left(u(x)\right)^2}}\frac{d}{dx}\left(u(x)\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}u(x)\right)=\frac{1}{1+\left(u(x)\right)^2}\frac{d}{dx}\left(u(x)\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}u(x)\right)=\frac{-1}{1+\left(u(x)\right)^2}\frac{d}{dx}\left(u(x)\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}u(x)\right)=\frac{1}{u(x)\sqrt{\left(u(x)\right)^2-1}}\frac{d}{dx}\left(u(x)\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}u(x)\right)=\frac{-1}{u(x)\sqrt{\left(u(x)\right)^2-1}}\frac{d}{dx}\left(u(x)\right)$$

Ejemplo 18.1. Dada $y = sen^{-1}x^3$, hallar *dy/dx*

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}}\frac{d}{dx}\left(x^3\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}}\left(3x^2\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$$

Ejemplo 18.2. Hallar *dy/dx* de $y = e^{mx}\tan^{-1}\left(3x^4\right)$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx}\tan^{-1}\left(3x^4\right) + e^{mx}\left[\frac{1}{1+\left(3x^4\right)^2}\right]\left[12x^3\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx}\tan^{-1}\left(3x^4\right) + \frac{12x^3e^{mx}}{1+9x^8}$$

Ejemplo 18.3. Determinar *dy/dx* si $y = \sec^{-1}\left(4e^x\right)$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4e^x\sqrt{\left(4e^x\right)^2-1}}\left[4e^x\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{16e^{2x}-1}}$$

TALLER 18

1) $f(x)=sen^{-1}\dfrac{1}{2}x$

2) $f(x)=\cos^{-1}3x$

3) $g(x)=\tan^{-1}2x$

4) $f(x)=\csc^{-1}ax$

5) $f(x)=2\cos^{-1}\sqrt{x}$

6) $g(x)=\dfrac{1}{2}xsen^{-1}bx^{2}$

7) $g(t)=\sec^{-1}5t+\csc^{-1}5t$

8) $f(y)=\cot^{-1}e^{y}$

9) $f(x)=\ln(\tan^{-1}3x)$

10) $f(x)=sen^{-1}\sqrt{1-x^{2}}$

11) $f(w)=2\tan^{-1}\dfrac{1}{w}$

12) $f(x)=\cot^{-1}\dfrac{2}{x}+\tan^{-1}\dfrac{x}{2}$

13) $h(y)=ysen^{-1}2y$

14) $g(s)=\cos^{-1}s+\dfrac{s}{1-s^{2}}$

15) $f(x)=\cos^{-1}(senx)$

16) $h(x)=\csc^{-1}\left(2e^{3x}\right)$

17) $f(t)=asen^{-1}\dfrac{t}{a}+\sqrt{a^{2}-t^{2}}$

18) $f(t)=sen^{-1}\dfrac{t-1}{t+1}$

Capítulo XIX

Derivadas de orden superior

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR

Si *f'* es la derivada de la función *f,* entonces *f'* también es una función, y es la ***primera derivada*** de *f*. Algunas veces se le asigna el nombre de ***primera función derivada***. Si la derivada de *f'* existe, recibe el nombre de ***segunda derivada*** de *f*, o segunda función derivada, y se puede representar como *f''* (léase "*f* biprima"). Análogamente, definimos la ***tercera derivada*** de *f,* o tercera función derivada, como la primera derivada de *f'',* sí esa existe. Representamos la tercera derivada de *f* por *f'''* ("léase *f* triprima") [10].

La *n-ésima derivada* de la función *f*, donde *n* es un entero positivo mayor que 1, es la primera derivada de (*n - 1*)-ésima derivada de *f*. Representamos esta *n-ésima* derivada de *f* por $f^{(n)}$. Entonces, si $f^{(n)}$ designa la *n-ésima* derivada, podemos representar la función *f* misma como $f^{(0)}$.

EJEMPLO 19.1. Hallar todas las derivadas de la función *f* definida por: $f(x)=8x^4+5x^3-x^2+7$

Solución:

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}=32x^3+15x^2-2x$$

$$f''(x)=\frac{d^2f(x)}{dx^2}=96x^2+30x-2$$

$$f'''(x)=\frac{d^3f(x)}{dx^3}=192x+30$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{d^4f(x)}{dx^4}=192$$

$$f^{(5)}(x)=\frac{d^5f(x)}{dx^5}=0$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^nf(x)}{dx^n}=0$$

TALLER 19

I. En los ejercicios del 1 al 13, obtenga la primera y segunda derivada de la función definida por la ecuación indicada:

1) $f(x)=x^5-2x^3+x$

2) $f(x)=7x^3-8x^2$

3) $f(s)=2s^4-4s^3+7s-1$

4) $g(t)=t^3-t^2+t$

5) $f(x)=x^2\sqrt{x}-5x$

6) $g(r)=\sqrt{r}+\dfrac{1}{\sqrt{r}}$

7) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

8) $h(y)=\sqrt[3]{2y^3+5}$

9) $f(t)=4\cos t^2$

10) $g(x)=\cos^2 mx$

11) $f(x)=\sqrt{senx+1}$

12) $f(x)=sen\sqrt{x}-\cos\sqrt{x}$

II. En los siguientes ejercicios obtenga la derivada indicada:

1) $f^{(4)}(x)$ si $f(x)=\cos 2x-sen2x$

2) $\dfrac{d^3f(x)}{dx^3}$ si $f(x)=2\tan 3x$

3) $\dfrac{d^4f(x)}{dt^4}$ si $f(t)=3\,sen^2(2\,t)$

Capítulo XX

Aplicaciones de la derivada de orden superior

APLICACIONES DE LA DERIVADA. LAS FUNCIONES Y LOS CRITERIOS DE LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA

Funciones crecientes y decrecientes y la prueba de la primera derivada.

Definición de funciones crecientes y decrecientes:

Se dice que una función f es ***creciente*** en un intervalo si para todo par de números $x1$ y $x2$ en el intervalo, $x1 < x2$ implica que $f(x1) < f(x2)$

Se dice que una función f es ***decreciente*** en un intervalo si para todo par de números $x1$ y $x2$ en el intervalo, $x1 > x2$ implica que $f(x1) > f(x2)$

Criterios para funciones crecientes y decrecientes.

Sea f una función derivable en el intervalo (a, b).

1) Si $f'(x) > 0$ para toda x en (a, b), entonces f es creciente en (a, b).

2) Si $f'(x) < 0$ para toda x en (a, b), entonces f es decreciente en (a, b).

3) Si $f'(x) = 0$ para toda x en (a, b), entonces f es constante en (a, b).

Ejemplo 20.1. Halle los extremos relativos y determine donde es creciente y decreciente la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$, dibujar el gráfico.

Solución:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

Para poder encontrar los extremos relativos (o máximos o mínimos relativos) es necesario igualar la primera derivada a cero, esto es:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0$$

$$3x^2 + 6x = 0$$

$$3x(x+2) = 0$$

$$Entonces \quad x = 0 \quad \text{o} \quad x = -2$$

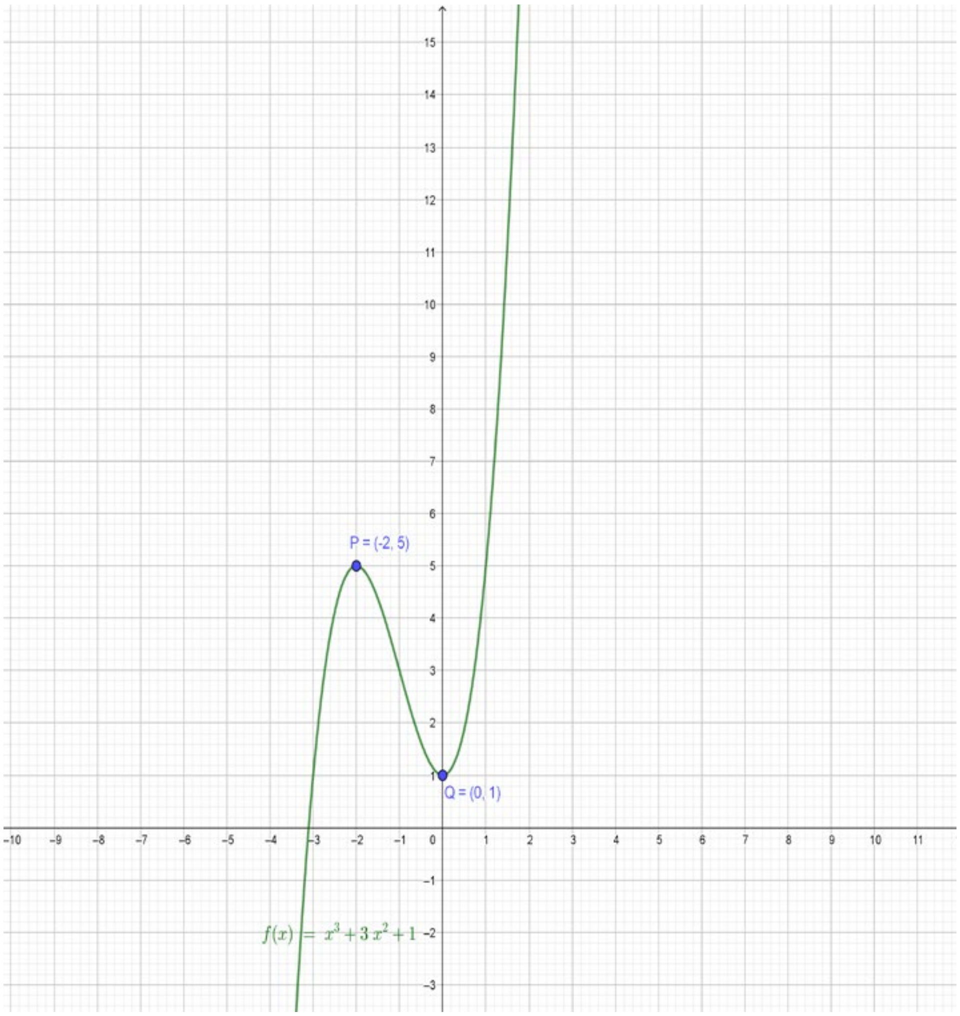
Luego los puntos críticos o extremos relativos son:

$$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 1 = 5 \quad \Rightarrow \quad (-2, 5) \text{ Màximo Relativo}$$

$$f(0) = (0)^3 + 3(0)^2 + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad (0, 1) \text{ Minimo Relativo}$$

Tabla 8. Aplicación del criterio de la primera derivada

	f(x)	f'(x)	CONCLUSION
x < - 2		+	f es creciente ↑
x = - 2	5		Máximo Relativo
-2 < x < 0		-	f es decreciente ↓
x = 0	1		Mínimo Relativo
x > 0		+	f es creciente



Gráfica 73. Graficando con la derivada

Ejemplo 20.2. Encuentre los valores críticos (si los hay) de $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + 1$, los intervalos sobre los cuales *f* es creciente o decreciente, y localice todos los extremos relativos.

Solución:

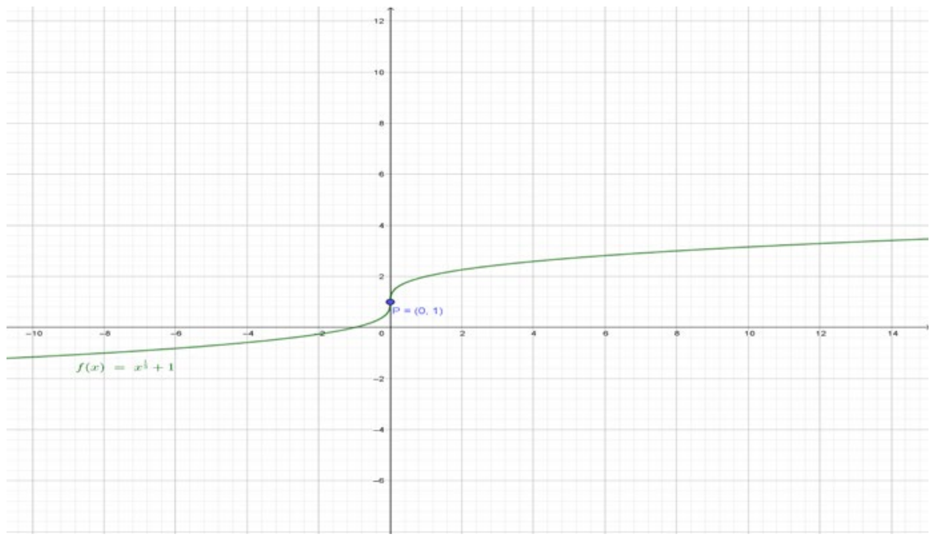
$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} + 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$$

Como *f* es continua para toda *x* y diferenciable para toda *x* distinta de $x = 0$, el único valor crítico es $x = 0$.

Tabla 9. Aplicación del criterio de la primera derivada

	f(x)	*f'(x)*	**Conclusión**
x < 0		+	*f* es creciente ↑
x = 0	1		Punto Crítico
x > 0		+	*f* es creciente



Gráfica 74. Graficando con la derivada

Concavidad y la prueba de la segunda derivada.

> ***Definición de concavidad.***
>
> Sea *f* derivable en un intervalo abierto. Se dice que la gráfica *f* es cóncava hacia arriba si *f'* es creciente en ese intervalo, y cóncava hacia abajo si *f'* es decreciente en el intervalo [11].

> ***TEOREMA:*** CRITERIO DE CONCAVIDAD
>
> Sea *f* una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto ***I.***
>
> 1) Si *f''(x)* > 0 para toda *x* en ***I***, entonces la gráfica de *f* es cóncava hacia arriba.
> 2) Si *f''(x)* < 0 para toda *x* en ***I***, entonces la gráfica de *f* es cóncava hacia abajo.

Ejemplo 20.3. Utilice la gráfica dada de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$, para bosquejar la gráfica de *f*. Encuentre los intervalos (si los hay) sobre los que:

f' es positiva.

f' es negativa.

f' es creciente.

f' es decreciente.

Y las concavidades específicas.

Solución:

$$f(x)=\frac{-1}{3}x^3+x^2$$
$$f'(x)=-x^2+2x$$

Entonces, para los puntos críticos tenemos:

$$f'(x)=-x^2+2x=0$$

$$Cuando \quad x=0 \quad \text{o} \quad x=2$$

Para encontrar los puntos de inflexión, realizamos los siguientes pasos:

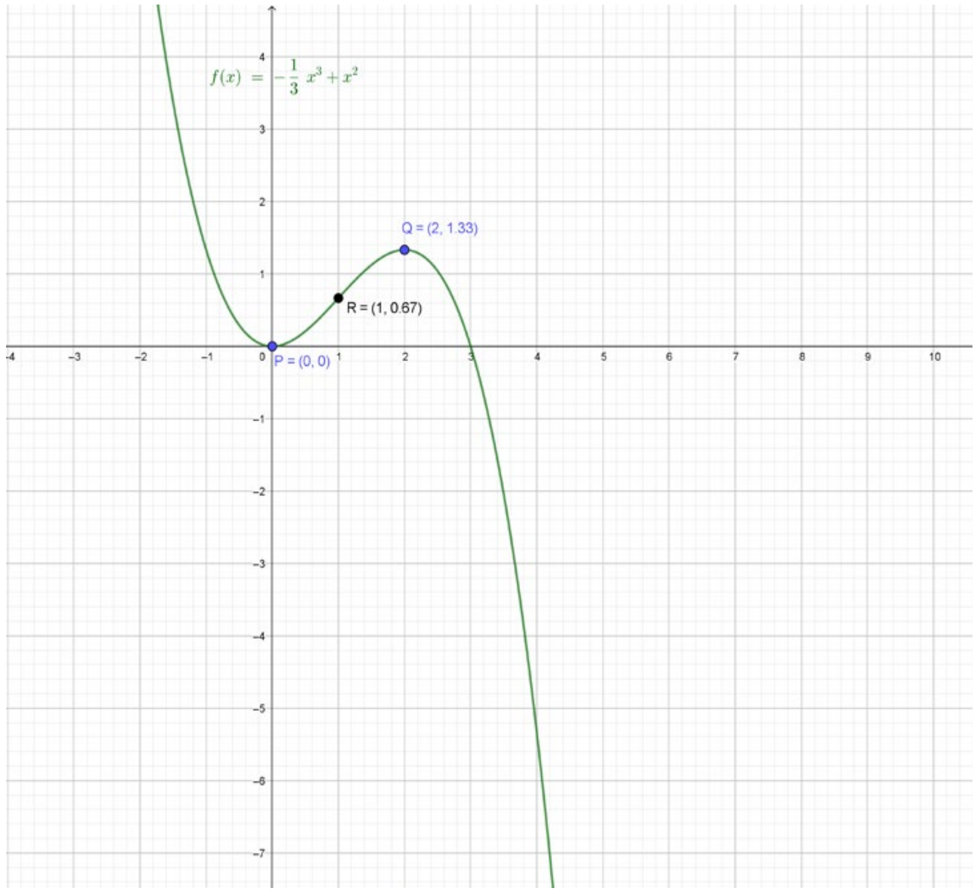
$$f'(x)=-x^2+2x$$
$$f''(x)=-2x+2$$

Entonces;

$$f''(x)=-2x+2=0$$
$$Cuando \qquad x=1$$

Tabla 10. Aplicación del criterio de la primera y segunda derivada

	f(x)	*f'(x)*	*f''(x)*	**Conclusión**
x < 0		-		*f* es decreciente ↓
x = 0	0			Mínimo Relativo.
0 < x < 2		+		*f* es creciente ↑
x = 2	4/3			Máximo Relativo.
x > 2				*f* es decreciente
x < 1			+	*f* es cóncava hacia arriba. ∪
x = 1	2/3			
x > 1				*f* es cóncava hacia abajo. Ç



Gráfica 75. Graficando con la derivada

TALLER 20

Graficar las siguientes funciones, haciendo uso de las técnicas de graficación con los criterios de la derivada

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$ c) $f(x) = 5x^2 - 4$

d) $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ e) $f(x) = x^4 - 2x^3$ f) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 4$

g) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$ h) $f(x) = 3x^4 + 2x^3$ i) $f(x) = \begin{cases} -x^4 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^4 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

k) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$ l) $f(x) = \dfrac{-1}{3}x^3 + x^2$ m) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

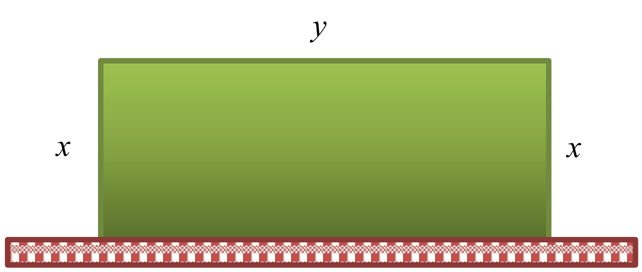
Capítulo XXI

Máximos y mínimos de funciones

PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Ejemplo 20.1. Un granjero tiene 200 *m* de alambre que va a usar para construir tres lados de un corral; se va usar un muro recto que ya existe como cuarto lado del corral. ¿Qué dimensiones maximizarán el área del corral?

Solución:



Corral rectangular

Gráfica 76. Área del corral

Queremos maximizar el área $A = x\,y$, donde x y y son las dimensiones indicadas en la gráfica anterior. El hecho de usar 200 *m* de alambre significa que:

$$2x + y = 200\text{, por lo que } y = 200 - 2x \text{ (1)}$$

Sustituyendo en $A = x\,y$ este valor de y, obtenemos:

$$A(x) = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2 \text{ (2)}$$

Esta fórmula expresa la variable dependiente A en función de la variable independiente x.

Calculemos ahora la derivada de la función *A(x)* de la ecuación (2):

$$\frac{dA(x)}{dx} = 200 - 4x$$

Para obtener el punto crítico, del cual obtendremos el valor que *x* debe tener para maximizar el área, realizamos el siguiente procedimiento:

$$\frac{dA(x)}{dx} = 200 - 4x = 0$$

$$200 - 4x = 0$$

$$200 = 4x$$

$$\frac{200}{4} = x$$

$$x = 50$$

El área máxima se obtiene cuando *x = 50*, es decir:

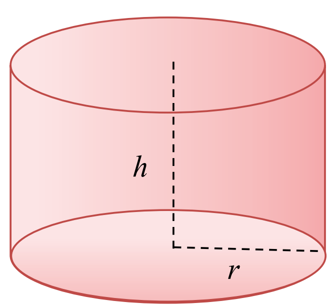
$$A(50) = 200(50) - 2(50)^2$$

$$A(50) = 10000 - 5000$$

$$A(50) = 5000 \text{ unidades cuadradas}$$

Ejemplo 20.2. Se quiere diseñar un cilindro circular recto para que contenga 7000 cm^3 de un líquido y que se use la cantidad mínima de material al construirlo. ¿Encuentre las dimensiones requeridas?

Solución:



Gráfica 77. Área de un cilindro circular recto

El volumen del cilindro está dado por:

$$V = \pi \ r^2 h$$

Como el volumen pedido es de $V = 7000\ cm^3$, tenemos que:

$$V = \pi\ r^2 h = 7000\ cm^3 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{7000\ cm^3}{\pi\ r^2}$$

El área de la superficie del cilindro es:

$$A = 2(\text{Area de la base}) + (\text{Superficie lateral})$$

$$A = 2\left(\pi\ r^2\right) + \left(2\pi r h\right)$$

$$A = 2\pi\ r\left(r + h\right) \qquad (1)$$

$$\text{Como }\ h = \frac{7000\ cm^3}{\pi\ r^2}\text{, sustituyendo en }\ (1):$$

$$A = 2\pi\ r\left(r + \frac{7000\ cm^3}{\pi\ r^2}\right) = 2\pi\ \left[r^2 + \frac{7000\ cm^3}{\pi\ r}\right]$$

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi\ \left[2\,r - \frac{7000\ cm^3}{\pi\ r^2}\right]$$

Igualamos a cero la primera derivada para encontrar los puntos críticos, los cuales nos indicaran el máximo o el mínimo de la función:

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi\ \left[2\,r - \frac{7000\ cm^3}{\pi\ r^2}\right] = 0$$

$$2\,r - \frac{7000\ cm^3}{\pi\ r^2} = 0$$

$$2\,r = \frac{7000\ cm^3}{\pi\ r^2}$$

$$r^3 = \frac{7000\ cm^3}{2\pi}$$

TALLER 21

1. A un programador de computadores se le ha asignado la tarea de construir una ventana de forma rectangular para una pantalla de 2000 por 1500 píxeles, la condición que le exigen es que el perímetro de la ventana de aplicación sea de 400 píxeles. ¿Qué dimensiones maximizarán el área de la ventana a construir?

2. Una compañía de metal mecánica manda a construir un software para calcular aplicaciones como la de como cortar Un pedazo rectangular de lámina metálica que mide 5 cm de ancho, y 8 cm de largo. cortando cuadrados congruentes en las esquinas, para doblar la pieza metálica resultante y después soldarla para así formar una caja sin tapa, el problema es: ¿Cómo le indicaría usted al programa la tarea a realizar para obtener una caja del máximo volumen posible?

3. Qué dimensiones maximizarán el área de una ventana en la pantalla de un computador que se desea construir en forma rectangular y cuyo perímetro sea de 200 *cm.*

4. Hallar la mínima cantidad de material (área) que debe emplearse para construir un depósito en forma de cilindro circular recto sin tapa, que tenga una capacidad de 3 dm^3.

5. Un trozo de alambre de 10 *cm* de longitud se corta en dos partes. Una parte será doblada en forma de triángulo equilátero y la otra en forma cuadrada. ¿Cómo deberá ser cortado el alambre para que la suma de las áreas sea:

¿Mínima?

¿Máxima?

6. Supóngase que el costo de producción de x camisas por semanas es $c = 5 + 3x$ pesos, y que el precio de venta por camisa es $P = 51 - 2x$. ¿Cuál debe ser el número de camisas producidas por semana para lograr un beneficio máximo?

Conclusiones

El alcance del objetivo general planteado se da de acuerdo al diseño del modelo didáctico para la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial generado a través de la teoría construida a lo largo de esta obra; un modelo didáctico dinámico implica el uso de estrategias pedagógicas y tecnológicas que fundamentan la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, lo que permitirá aportar insumos metodológicos y didácticos en el proceso de enseñanza del cálculo diferencial, lo que facilitará la trascendencia de estos temas en los campos de saberes específicos y enfocar la realidad desde una perspectiva novedosa.

Se estudiaron los fundamentos y los obstáculos epistemológicos del cálculo diferencial, concluyendo que la aplicación de ellos genera confianza en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, porque estos generan un gran número de acciones encaminadas a la construcción de una sólida comprensión en los estudiantes. En este sentido se puede afirmar que en la enseñanza del cálculo es necesario abordar e incorporar los teoremas fundamentales, la lógica requerida, el método utilizado, la práctica pedagógica y el propósito para la aplicabilidad y funcionalidad del cálculo diferencial.

Los aportes de los autores de este proyecto se ven reflejados desde el primer hasta el último capítulo de este libro. Estos son:

El el capítulo I se diseñó para que el estudiante o investigador tenga un bosquejo general de lo que implica el análisis y solución de problemas con desigualdades e intervalos.

En el capítulo II se explica todo sobre la función, ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.

El capítulo III comprende todo lo relacionado con el plano cartesiano.

En el capítulo IV se enseña lo relacionado con función matemática.

En el capítulo V se hace un estudio detallado sobre la función línea.

En el capítulo VI se analiza la función cuadrática.

En el capítulo VII se estudian las sucesiones.

En el capítulo VIII se explica todo lo relacionado con límite de funciones.

En el capítulo IX se analiza el concepto fundamental de la derivada de una función.

En el capítulo X se estudian las reglas de derivación.

En el capítulo XI se analiza y aplica la regla de la cadena.

En el capítulo XII se enseña todo sobre la derivación implícita.

En el capítulo XIII se aplica la derivada en otras ciencias.

En el capítulo XIV se estudia la derivada en funciones trigonométricas.

En el capítulo XV se analiza la derivada de una función logaritmo.

En el capítulo XVI se enseña la derivada de una función exponencial.

En el capítulo XVII se aplica la derivada de una función con valor absoluto.

En el capítulo XVIII se estudia la derivada de una función trigonométricas inversa.

En el capítulo XIX se analizan las derivadas de orden superior.

En el capítulo XX se aplican los criterios de la derivada para la resolución de problemas.

En el capítulo XXI se optimizan funciones y problemas con la derivada.

Se concluye que este libro de cálculo diferencial combinado con los estilos de enseñanza, es muy influyente en el proceso de aprendizaje de los estudiantes; la aplicación de un estilo de enseñanza tradicional tiene muchas limitaciones para el ritmo de aprendizaje de los estudiantes actuales. Para subsanarla se diseñó esta obra titulada *Cálculo Diferencial* como una herramienta para fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje. Es importante resaltar que es necesario cambiar o actualizar las prácticas de enseñanza; se debe asumir un rol de docente actualizado con una actitud favorable hacia la innovación, la capacitación permanente; no resistirse al cambio, ser solícitos para la adecuación de estructuras y mejoramiento de los procesos de enseñanza, porque los docentes son los primeros en ser llamados a capacitarse para generar cambios y transformaciones desde el aula de clase, en especial en la enseñanza de las matemáticas.

Recomendaciones

La universidad debe fortalecer y fomentar en los docentes del área de matemáticas la actualización y profundización de sus prácticas pedagógicas o estilos de enseñanza, con el objeto de concentrar en sus clases o prácticas educativas el uso de las nuevas estrategias de enseñanza afines al dinamismos y participación de los estudiantes para así propiciar un puente que facilite el diálogo entre los actores del proceso educativo y el conocimiento del cálculo.

Es importante resaltar que los descubrimientos o herramientas innovadoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje deben ser acogidos por la academia. Es por eso que la universidad, deberá apropiarse de este contexto para ofrecerlo a la comunidad en general. Replicar las experiencias de aprendizaje que hacen activa la reflexión permanente de los docentes y estudiantes es lo que permite la construcción de su aprendizaje, ya que esto renueva las estructuras, fortaleciendo permanentemente la adquisición de herramientas didácticas.

La universidad debe contemplar en sus lineamientos curriculares el desafío de promover las estrategias encaminadas al fortalecimiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que esto es lo que ofrecerá una circunstancia encaminada a la creación y aplicación de nuevos ambientes de aprendizaje caracterizados por ser enriquecidos con el modelo didáctico para la enseñanza del cálculo.

La universidad debe comprometerse a fomentar de una cultura que propenda por la innovación educativa, para que todos los miembros de la comunidad académica se identifiquen con este motor académico, generando así el sentido de pertinencia con la institución, preponderando así la buena comunicación para apalancar la continuidad de los procesos que apoyan a la excelencia académica.

Referencias Bibliográficas

[1]. Purcell, E.J. y Varberg, D. (2007). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Pearson-Prentice Hall.

[2]. Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (2005). *Cálculo I*. México: Pirámide Ediciones S.A.

[3]. Leithold, L. (2011). *Cálculo con Geometría Analítica*. Estados Unidos: Harpercollins College Division.

[4]. Frank, S. (2007). *Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales*. México: McGraw Hill.

[5]. Arya, J.C. y Lardner, R.W. (2001). *Matemáticas aplicadas a la Administración, Economía, Ciencias Biológicas y Sociales*. México: Prentice Hall.

[6]. Hofman, L.D., Bradley, H.L. y Rosen, K. (2004). *Cálculo aplicado para la Administración, Economía y Ciencias Sociales*. México: McGraw Hill.

[7]. Edwards, C. y Penney, D. (1996). *Cálculo y Geometría Analítica*. México: Prentice Hall.

[8]. Protter, M.H. y Morrey, C. (1980). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Fondo Educativo Interamericano S.A.

[9]. Heyd, D. (1994). *Guía de Calculo*. México: McGraw Hill.

[10]. Ayres, F. y Mendelson, E. (1991). *Cálculo diferencial e integral*. México: McGraw Hill.

[11]. Spiegel, M.R. (2001). *Cálculo Superior*. México: McGraw Hill.

Acerca de los Autores

JULIO CESAR ROMERO PABON.

Docente de matemáticas
de la Universidad del Atlántico.

Licenciado en Matemáticas y Física.

Especialista en Administración
y Docencia Universitaria.

Magister en Matemática Aplicada.

Doctor en Ciencias
de las Educación Mención Matemática.

GABRIEL MAURICIO VERGARA RÍOS.

Docente de matemáticas
de la Universidad del Atlántico.

Licenciado en Matemáticas y Física.

Especialista en Matemáticas.

Magister en Ciencias Matemáticas.

Doctor en Ciencias
de las Educación Mención Matemática.

ALBERTO MARIO REYES LINERO.

Docente de matemáticas
de la Universidad devl Atlántico.

Matemático.

Magister en Ciencias Matemáticas.