CÁLCULO
Diferencial

CÁLCULO
Diferencial

Lesly Salas Medina • Jorge Luis Rodríguez Contreras
Angélica Arroyo Cabrera

Sello Editorial
UNIVERSIDAD
DEL ATLÁNTICO

Catalogación en la publicación. Universidad del Atlántico. Departamento de Bibliotecas
Salas Medina, Lesly -- Rodríguez Contreras, Jorge Luis -- Arroyo Cabrera, Angélica.
Cálculo diferencial / Lesly Salas Medina, Jorge Luis Rodríguez Contreras, Angélica Arroyo Cabrera. – 1 edición. – Puerto Colombia, Colombia: Sello Editorial Universidad del Atlántico, 2018.
223 páginas. 21 x 27 centímetros. Ilustraciones.
Incluye bibliografía
978-958-5525-82-5 (Libro descargable PDF)

1. Cálculo diferencial 2. Cálculo diferencial – problemas -- ejercicios. I. Autor. II. Título.
CDD 515.33 S161

CÁLCULO DIFERENCIAL
Autoría: Lesly Salas Medina - Jorge Luis Rodríguez Contreras
Angélica Arroyo Cabrera

Edición:
Sello Editorial Universidad del Atlántico
Km 7 Vía Puerto Colombia (Atlántico)
www.uniatlantico.edu.co
publicaciones@mail.uniatlantico.edu.co

Producción editorial:
Calidad Gráfica S.A.
Av. Circunvalar Calle 110 No. 6QSN-522
PBX: 336 8000
lsalcedo@calidadgrafica.com.co
Barranquilla, Colombia

Publicación Electrónica
Barranquilla (Colombia), 2018

Cómo citar este libro:
Rodríguez Contreras, J., Arroyo, A. y Salas, L. (2018). *Cálculo Diferencial*. Barranquilla: Sello Editorial Universidad del Atlántico.

Agradecimientos

Este libro es el resultado de varios años de experiencia impartiendo la cátedra de Cálculo I, y no hubiese sido posible sin el apoyo incondicional de diversas personas a las que deseamos manifestar nuestro agradecimiento:

A Dios, por darnos la oportunidad de vida cada día; sin su ayuda no hubiese sido posible la culminación de este libro.

A los docentes del Departamento de Matemáticas de nuestra Universidad, por su apoyo personal y humano, especialmente aquellos que imparten el curso de Calculo Diferencial, quienes aportaron sus sugerencias y recomendaciones para que este libro fuese una realidad.

A nuestras familias, por sus palabras de aliento que nos brindaron la fuerza y energía para ayudarnos a crecer como personas y como profesionales, para seguir trabajando en este proyecto hasta lograr su culminación.

Y finalmente damos gracias a nuestros amigos, que siempre nos han prestado un gran apoyo moral y humano, necesarios en los momentos difíciles de este trabajo y esta profesión.

A todos, muchas gracias.

CONTENIDO

Introducción

Es una realidad que el cálculo puede considerarse como uno de las mayores conquistas de la humanidad. Es posible expresar las leyes de la naturaleza y de diversos procesos químicos, industriales y económicos a partir de funciones, y utilizar herramientas tales como límites y derivadas para describir su comportamiento, por esa razón esta disciplina aparece en los planes de estudio de todas las carreras científicas y técnicas, y su aprendizaje se constituye en una etapa trascendental para adentrarse en campos más avanzados de la matemática.

Este libro contiene los temas de un primer curso de cálculo diferencial, contemplando los contenidos que debe constituir un curso básico de cálculo de funciones de una variable. Muestra novedad en cuanto a la presentación minuciosa de conceptos y definiciones, la utilización de métodos alternativos para la solución a planteamientos matemáticos, el desarrollo en detalle de ejemplos que permiten mayor apropiación de los conceptos en el estudiante, y la gran cantidad de ejercicios propuestos, desde aquellos que requieren solo la aplicación de procedimientos explicados en el texto, hasta aquellos cuyas soluciones no mecánicas o poco triviales permiten al estudiante el desarrollo de competencias matemáticas.

El libro se encuentra organizado en cuatro capítulos: en el primer capítulo Funciones, se detalla la definición, operaciones, clasificación y representación gráfica, analizando cómo se usan para representar o modelar situaciones de la vida real. Así mismo se presentan los procedimientos para solucionar ecuaciones e inecuaciones, presentando un método alternativo para la solución de estas últimas, denominado "Método del cero".

En el segundo capítulo Límites y Continuidad, en él se encontrarán el álgebra de límites, límites laterales, infinitos y en infinito. Se utiliza el concepto de límite de una función para tipificar las funciones continuas. Se caracterizan las diferentes formas en las que una función puede no ser continua.

En el tercer capítulo, la derivada, se utiliza nuevamente el concepto de límite para definir otro concepto fundamental del cálculo: la derivada de una función. Se hace hincapié en la derivada como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado, indicando el procedimiento para la obtención de rectas tangentes y normales a una curva, se muestra el álgebra de derivada y la derivada de funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas inversas y la regla de L'Hôpital.

Por último en el cuarto capítulo se estudia las aplicaciones de la derivada: valores máximos y mínimos, problemas de optimización, concavidad y convexidad, intervalos de crecimiento o decrecimiento de una función, que posibilitan su representación gráfica y su comprensión analítica.

Capítulo 1

Funciones

Introducción 1.1

Uno de los conceptos más importantes en matemática es el de función. El matemático francés René Descartes utilizó el término función por primera vez en 1637 para designar una potencia x^n de la variable x. En 1694 el matemático alemán G. W. Leibnitz utilizó el término para referirse a varios aspectos de una curva, como su pendiente. Aunque el concepto de función, en su origen, está relacionado con aquellos fenómenos naturales en los que dos o más variables están sujetas a cambios que se influyen entre sí, no es hasta el siglo XIX cuando Lejeune Dirichlet (1805-1859) define el concepto de función como una relación entre dos variables, definición que se acepta hasta hoy día.

Las funciones permiten describir el mundo real en términos matemáticos, como por ejemplo, las variaciones de la temperatura, el movimiento de los planetas, las ondas cerebrales, los ciclos comerciales, el ritmo cardíaco, el crecimiento poblacional, etc. En este capítulo se tratarán las funciones más usuales en la modelización de fenómenos en las distintas ciencias y en la vida diaria.

Función, Dominio y Codominio 1.2

Definición: 1.1

Una función f de un conjunto A, a un conjunto B, es una regla que asigna a cada elemento x de A, exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de B.

El conjunto A recibe el nombre de dominio y el conjunto B recibe el nombre de codominio o recorrido. El elemento $y \in B$ asociado con x por la función recibe el nombre de imagen de x. La característica esencial de una función es que cada elemento $x \in A$ tiene una y sola una imagen en B. De este modo no puede haber dos elementos diferentes en B asociados con un solo elemento x del dominio. Pueden haber elementos en B que no sean imagen de ningún elemento de A.

Ejemplo. 1

Si el conjunto de pares ordenados:

$$f = \left\{ (1,a), (2, \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}), (3, a+b), (3, -c) \right\}$$

representa una función, determine el valor de $f(2)$.

Solución.
Dado que $f(3) = \begin{cases} a+b \\ -c \end{cases}$, entonces $a+b=-c$ por ser f una función. Así que:

$$f(2) = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$$

Reemplazando c por $-(a+b)$ se tiene:

$$\begin{aligned} f(2) &= -\frac{a^2}{b(a+b)} - \frac{b^2}{a(a+b)} + \frac{(a+b)^2}{ab} \\ &= -\frac{a^2}{b(a+b)} - \frac{b^2}{a(a+b)} + \frac{a^2+b^2}{ab} + 2 \\ &= \frac{-a^3 - b^3 + a^3 + a^2b + b^2a + b^3}{ab(a+b)} + 2 \\ &= \frac{ab(a+b)}{ab(a+b)} + 2 \\ f(2) &= 3 \end{aligned}$$

□

Cabe mencionar que no todos los matemáticos definen el codominio como se ha hecho aquí, algunos definen el recorrido como el subconjunto de B que contiene todas las imágenes de los elementos de A; en esta terminología B no tiene nombre especial. En este texto trabajaremos con un tipo de funciones llamadas funciones reales de una variable real.

Definición: 1.2

Una función de variable real es una regla que a cada número real x de un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$, le asocia un único número real $f(x)$, llamado imagen de x bajo f. Una función tal se denota $f : D \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

Definición: 1.3

El dominio de una función es el conjunto de los valores reales en los cuales la función toma valores reales.

Ejemplo. 2

Determinar el dominio de cada una de las siguientes funciones:

1.- $f(x) = \sqrt{7+x}$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \,|\, f(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \,|\, \sqrt{7+x} \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \,|\, 7+x \geq 0\} = \{x \,|\, x \geq -7\} \\ &= [-7, +\infty) \end{aligned}$$

2.- $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2-16}$

$$\begin{aligned} D_g &= \{x \,|\, g(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \,|\, x^2-16 \neq 0\} \\ &= \mathbb{R} - \{x \,|\, x^2-16 = 0\} = \mathbb{R} - \{x \,|\, x = \pm 4\} \\ &= (-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, +\infty) \end{aligned}$$

3.- $h(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-7x+12}$

$$\begin{aligned} D_h &= \{x \,|\, h(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \,|\, x^2-7x+12 \neq 0\} \\ &= \{x \,|\, (x-3)(x-4) \neq 0\} = \mathbb{R} - \{3, 4\} \\ &= (-\infty, 3) \cup (3, 4) \cup (4, +\infty) \end{aligned}$$

4.- $j(x) = \dfrac{\sqrt{5-x}}{x^2-3x+2}$

$$\begin{aligned} D_j &= \{x \,|\, j(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \,|\, \sqrt{5-x} \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad x^2-3x+2 \neq 0\} \\ &= \{x \,|\, 5-x \geq 0 \quad \text{y} \quad (x-2)(x-1) \neq 0\} = (-\infty, 5] - \{1, 2\} \\ &= (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 5] \end{aligned}$$

5.- $G(x) = \sqrt{x+6} + \sqrt{8-x}$

$$\begin{aligned} D_h &= \{x \,|\, G(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \,|\, x+6 \geq 0 \quad \text{y} \quad 8-x \geq 0\} \\ &= [-6, \infty) \cap (-\infty, 8] \\ &= [-6, 8] \end{aligned}$$

Definición: 1.4

El rango o codominio de f es el conjunto de todos los posibles valores de $f(x)$ conforme x cambia en todo su dominio.

Ejemplo. 3

Determinar el codominio o rango de cada una de las siguientes funciones:

1.- $f(x) = \sqrt{7+x}$

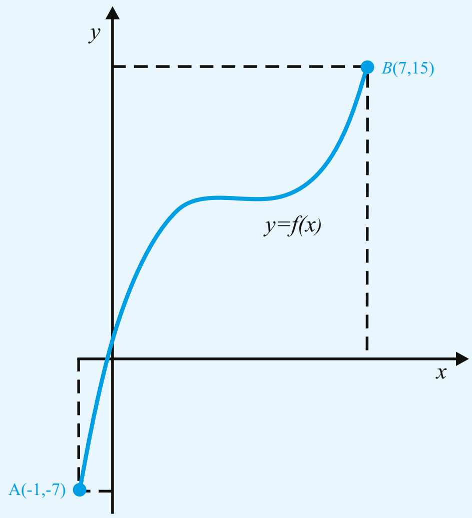
$$\begin{aligned} R_f &= \{f(x) \,|\, x \in D_f\} = \{f(x) \,|\, f(x) \geq 0\} \\ &= [0, \infty) \end{aligned}$$

2.- $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$

$$\begin{aligned} R_g &= \{g(x) \,|\, x \in D_g\} = \{g(x) \,|\, g(x) \neq 0\} \\ &= \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

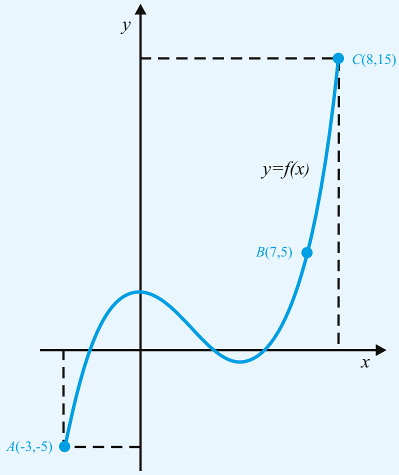
Ejemplo. 4

Las curvas de los tres siguientes ejemplos son gráficas de funciones y los puntos A y B no pertenecen a dichas gráficas. Determinar dominio, rango y el número de raíces de cada función:

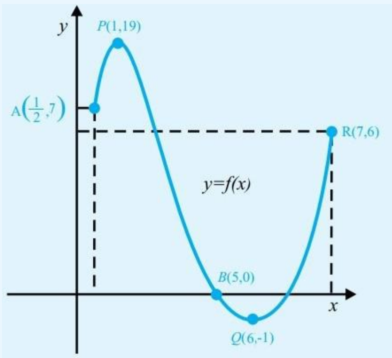


a) **Solución.**
El dominio de la función $y = f(x)$ es: $D_f = (-1, 7)$
El rango de la función $y = f(x)$ es: $R_f = (-7, 15)$
La función $y = f(x)$ tiene solo una raíz, que es negativa.

Ejemplo. 4 (Continuación)



b) **Solución.**
El dominio de la función $y = f(x)$ es: $D_f = (-3;8] - \{7\}$.
El rango de la función $y = f(x)$ es: $R_f = (-5;15] - \{5\}$.
La función $y = f(x)$ tiene 3 raíces, una negativa y dos positivas.



c) **Solución.**
El dominio de la función $y = f(x)$ es: $D_f = \left(\frac{1}{2},5\right) \cup (5;7]$.
El rango de la función $y = f(x)$ es: $R_f = [-1,19]$.
La función $y = f(x)$ tiene una raíz $x \neq 5$.

1.2.1. Simetría

Definición: 1.5

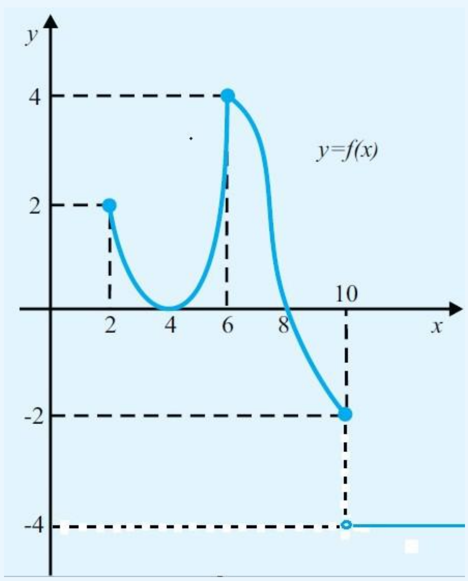
Una función f es par si $f(-x) = f(x)$
Una función f es impar si $f(-x) = -f(x)$

Ejemplo. 5

1.- Probar que $f(x) = x^4 + 1$ es una función par.
En efecto, $f(-x) = (-x)^4 + 1 = x^4 + 1 = f(x)$, entonces f es par.

2.- Probar que $f(x) = x + x^3$ es una función impar.
En efecto, $f(-x) = (-x) + (-x)^3 = -x - x^3 = -(x + x^3) = -f(x)$, entonces f es impar.

3.- La función f es par, y su gráfica para $x > 0$ es la figura siguiente:



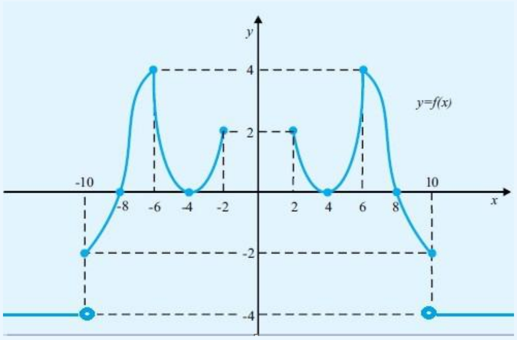
a) Complete la gráfica de f.

b) Obtenga su dominio, raíces y rango.

Ejemplo. 5 (Continuación)

Solución.

a) La gráfica completa es:



b) Su dominio es $D_f = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$
Su rango $R_f = \{-4\} \cup [-2, 4]$
Sus raíces: -8, -4, 4 y 8.

1.2.2. Gráfica de una Función

Una de las características importantes que tienen las funciones reales de una variable real es que podemos tener representaciones geométricas de ellas, por medio de una curva en el plano cartesiano, que llamaremos gráfica de la función.

Definición: 1.6

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una función definida en D. Se denomina gráfica de la función real $y = f(x)$ al conjunto de puntos $\{(x,y) \,|\, y = f(x)\}$.

La gráfica de una función es de gran relevancia, porque ilustra fácilmente su dominio, codominio, puntos de interés, etc. Para representar gráficamente una función, es común utilizar un sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas, en las cuales, la variable independiente x se representa en el eje horizontal, y la variable dependiente y en el eje vertical.

Técnicas Básicas para esbozar la gráfica de una Función

A continuación se describen algunos pasos a seguir para obtener un esbozo de la gráfica de $y = f(x)$, por medio de la representación de puntos:

★ Determinar el dominio de la función.

★ Determinar los puntos de intersección de $y = f(x)$ con cada eje coordenado.

★ Construir una tabla de valores de f. Escoger un grupo representativo de valores de x en el dominio de f, y construir una tabla de valores $(x, f(x))$.

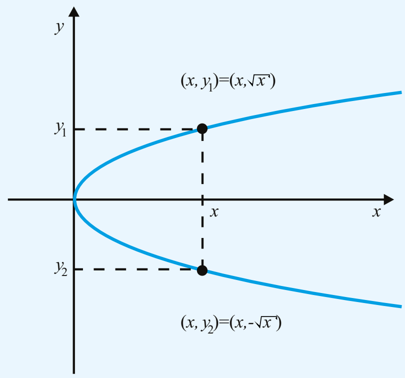
★ Representar los puntos $(x, f(x))$ considerados en la tabla, en el sistema de coordenadas.

★ Unir los puntos representados por medio de una curva suave.

Ejemplo. 6

1.- La ecuación $y^2 = x$ representa a una parábola en el plano xy. ¿Puede ser considerada esta parábola como la gráfica de una función $y = f(x)$? Justifique su respuesta.

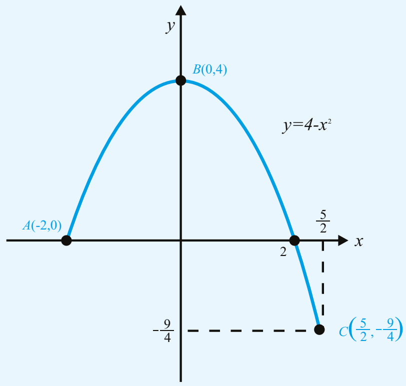
Solución.
La parábola $x = y^2$ es una curva plana que se abre hacia la derecha con eje horizontal. A cada número $x > 0$ le corresponden dos valores diferentes de y que son $y = \pm\sqrt{x}$.



Entonces esta curva no puede ser considerada como la gráfica de alguna función $y = f(x)$.

2.- Sea $g(x) = 4 - x^2$ con $-2 < x \leq \frac{5}{2}$. Dibujar la gráfica de la función, determinar el dominio, el codominio y la raíces de la función.
Solución.
Como $g(x) = 4 - x^2$, entonces $g(x) - 4 = -x^2$, así que la gráfica de la ecuación es una parábola que abre hacia abajo, con vértice en $(0, 4)$. Los cortes con el eje x lo obtenemos cuando $g(x) = 0$, entonces $x = \pm 2$, así que la única raíz es, $x = 2$.

Ejemplo. 6 (Continuación)



Por lo tanto el dominio de g es: $D_g = \left(-2, \frac{5}{2}\right]$

El rango de g es: $R_g = \left[-\frac{9}{4}, 4\right]$

La función solo tiene una raíz $x = 2$.

3.- Dada la siguiente función:

$$g(x) = \begin{cases} -|x+2| & \text{si} \quad x < -2 \\ \sqrt{4-x^2} & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 2 \\ x-2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Obtenga su gráfica y diga si es par, impar o ninguna de las dos. Determinar su rango y dominio.

Solución.

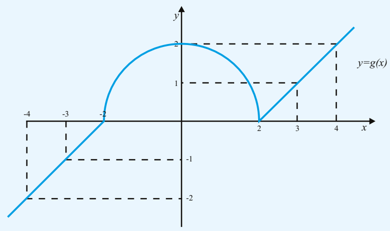
Dado que $x < -2$, entonces $x+2 < 0$, así que:
$|x+2| = -(x+2) \Rightarrow -|x+2| = x+2$, que es una recta de pendiente 1. Por lo tanto,

$$g(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x < -2 \\ \sqrt{4-x^2} & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 2 \\ x-2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Sea $y = \sqrt{4-x^2}$ elevando ambos miembros al cuadrado se tiene $y^2 = 4 - x^2$ y de aquí $x^2 + y^2 = 4$ que es una circunferencia de radio 2 y centro en el origen; así, $y = \sqrt{4-x^2}$ es su semicircunferencia superior y $y = x - 2$ es una recta de pendiente 1.

Luego, la gráfica de g es :

Ejemplo. 6 (Continuación)



Así que, g no es par ni impar; además $Rg = \mathbb{R} = D_f$.

1.2.3. Álgebra de Funciones

La mayoría de las funciones que vamos a usar en este curso pertenecen a la clase de las funciones elementales, se llaman así porque pueden obtenerse a partir de ciertos tipos de funciones bien conocidas realizando las operaciones de suma, producto, cociente y composición de funciones.

Definición: 1.7

Dadas dos funciones $f, g : A \to \mathbb{R}$, se define su función suma (producto) como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $f(x) + g(x)$ $(f(x)g(x))$. Dicha función se representa con el símbolo $f + g$ (fg).

Se define la función cociente de $\dfrac{f}{g}$ como la función que a cada número $x \in A$ con $g(x) \neq 0$ asigna el número real $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Dicha función se representa por $\dfrac{f}{g}$. También podemos multiplicar una función f por un número α para obtener la función αf que asigna a cada $x \in A$ el número $\alpha f(x)$. El producto de un número por una función puede considerarse como un caso particular del producto de funciones, pues se identifica el número α con la función constante que toma como único valor α.

Proposición: 1.1

Cualesquiera sean las funciones $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ se verifican las siguientes propiedades:

Asociativa. $(f+g)+h = f+(g+h)$; $\quad (fg)h = f(gh)$

Conmutativa. $f+g = g+f$; $\quad fg = gf$

Distributiva. $(f+g)h = fh+gh$

Ejemplo. 7

1.- Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 9$, $g(x) = \sqrt{2x+15}$ y $h(x) = \sqrt{10-3x}$, obtener:

i) $(f+g)(3)$

$$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = 0 + \sqrt{21} = \sqrt{21}$$

ii) $(gf)(-2)$

$$\left(gf\right)(-2) = g(-2)f(-2) = \sqrt{-4+15}(4-9) = -5\sqrt{11}$$

iii) $(gh)(4)$

$$\begin{aligned}\left(gh\right)(4) &= g(4)h(4) = \sqrt{8+15}\sqrt{10-12} \\ &= \sqrt{23}\sqrt{-2} \qquad \text{No existe en los } \mathbb{R}\end{aligned}$$

iv) $\left(\frac{h}{f}\right)(2)$

$$\left(\frac{h}{f}\right)(2) = \frac{h(2)}{f(2)} = \frac{\sqrt{10-6}}{4-9} = \frac{\sqrt{4}}{-5} = -\frac{2}{5}$$

2.- Determinar:

i) $(f+g)(x)$

$$\left(f+g\right)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 9 + \sqrt{2x+15}$$

ii) $(gf)(x)$

$$\left(gf\right)(x) = g(x)f(x) = \sqrt{2x+15}(x^2-9)$$

iii) $(gh)(x)$

$$\left(gh\right)(x) = g(x)h(x) = \sqrt{2x+15}\sqrt{10-3x}$$

iv) $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$

$$\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{10-3x}}{x^2-9}$$

3.- Determinar el dominio de:

Ejemplo. 7 (Continuación)

i) f, g y h

$$D_f = \{x \,|\, f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$D_g = \{x \,|\, g(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \,|\, 2x+15 \geq 0\} = \left[-\frac{15}{2}, +\infty\right)$$

$$D_h = \{x \,|\, h(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \,|\, 10-3x \geq 0\} = \{x \,|\, 10 \geq 3x\} = \left(-\infty, \frac{10}{3}\right]$$

ii) $g+f$
El dominio de la función $g+f$ es

$$D_{g+f} = D_g \cap D_f = \left[-\frac{15}{2}, +\infty\right) \cap \mathbb{R} = \left[-\frac{15}{2}, +\infty\right)$$

iii) gh
El dominio de la función gh es:

$$D_{gh} = D_g \cap D_h = \left[-\frac{15}{2}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{10}{3}\right] = \left[-\frac{15}{2}, \frac{10}{3}\right]$$

iv) $\dfrac{h}{f}$

$$\begin{aligned} D_{\frac{h}{f}} &= D_h \cap D_f - \{x \,|\, f(x) = 0\} = \left(-\infty, \frac{10}{3}\right] \cap \mathbb{R} - \{-3, 3\} = \left(-\infty, \frac{10}{3}\right] - \{-3, 3\} \\ &= (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup \left(3, \frac{10}{3}\right] \end{aligned}$$

1.2.4. Composición de Funciones

Definición: 1.8

Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ funciones con $f(A) \subseteq B$. La función $h : A \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = g\big(f(x)\big)$ para todo $x \in A$ se llama composición de g con f y se representa por $h = gof$. La función gof, solamente está definida cuando la imagen de f está contenida en el dominio de g. La composición de funciones es asociativa.

Ejemplo. 8 — **Composición de Funciones**

1.- Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{12-x}$ y $g(x) = |8-4x|$, obtener el dominio de f, $(fog)(x)$ y el dominio de fog.

Solución.
El dominio de f es:

$$D_f = \{x \,|\, f(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \,|\, 12-x \geq 0\} = \{x \,|\, x \leq 12\} = (-\infty, 12]$$

La composición $(fog)(x)$ es:

$$(fog)(x) = f[g(x)] = f(|8-4x|) = \sqrt{12-|8-4x|} = 2\sqrt{3-|2-x|}$$

El dominio de fog es:

$$\begin{aligned} D_{fog} &= \{x \in D_g \,|\, g(x) \in D_f\} = \{x \in D_g \,|\, g(x) \in (-\infty, 12]\} = \{x \in D_g \,|\, g(x) \leq 12\} \\ &= \{x \in D_g \,|\, |8-4x| \leq 12\} = \{x \in D_g \,|\, -12 \leq 8-4x \leq 12\} \\ &= \{x \in D_g \,|\, -12-8 \leq -4x \leq 12-8\} = \{x \in D_g \,|\, -20 \leq -4x \leq 4\} \\ &= \{x \in D_g \,|\, \frac{-20}{-4} \geq x \geq \frac{4}{-4}\} = [-1, 5] \end{aligned}$$

2.- Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{9-x}$, $g(x) = |x-4|$ y $h(x) = x^2 - 4$, obtener $\left(\frac{f}{h}\right)$ y $(fog)(x)$ así como los dominios de las funciones f, h y fog.

Solución.

$$\left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{9-x}}{x^2-4}$$

$$(fog)(x) = f[g(x)] = f[|x-4|] = \sqrt{9-|x-4|}$$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \,|\, f(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \,|\, 9-x \geq 0\} = (-\infty, 9] \\ D_h &= \mathbb{R} \\ D_{fog} &= \{x \in D_g \,|\, g(x) \in D_f\} = \{x \in D_g \,|\, g(x) \in (-\infty, 9]\} \\ &= \{x \in D_g \,|\, g(x) \leq 9\} = \{x \in D_g \,|\, |x-4| \leq 9]\} \\ &= \{x \in D_g \,|\, -9 \leq x-4 \leq 9\} = [-5, 13] \end{aligned}$$

Ejemplo. 8 (Continuación)

3.- Si $f(x)=x^2+4x+1$, encuentre dos funciones g para las cuales $(fog)(x)=x^2+6x+6$.

Solución.
Tenemos:
$(fog)(x)=f[g(x)]=\left[g(x)\right]^2+4\left[g(x)\right]+1$
y también $f[g(x)]=x^2+6x+6$
Luego,

$$\left[g(x)\right]^2+4\left[g(x)\right]+1=x^2+6x+6 \Leftrightarrow \left[g(x)\right]^2+4\left[g(x)\right]-x^2-6x-5=0$$

Usando $a=1$, $b=4$ y $c=-x^2-6x-5$ para resolver la ecuación cuadrática obtenemos:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{-4\pm\sqrt{16-4(-x^2-6x-5)}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{4x^2+24x+36}}{2} \\ &= \frac{-4\pm2\sqrt{x^2+6x+9}}{2}=-2\pm\sqrt{x^2+6x+9} \\ &= -2\pm\sqrt{(x+3)^2}=-2\pm|x+3| \end{aligned}$$

y de aquí tenemos las dos soluciones:

$$g_1(x)=-2\pm\sqrt{(x+3)^2}=-2+|x+3| \quad \text{y} \quad g_2(x)=-2-|x+3|$$

1.2.5. Ejercicios

1.- Sea $f=\{(x,3),(2,x^2),(1,4),(2,1)\}$ una función, encuentre el valor de x.

2.- Determine el valor de a y b si el conjunto de pares ordenados:

$$f=\{(2,5),(-1,3),(2,2a-b),(-1,b-a),(a+b^2,a)\}$$

representa una función.

3.- Si el conjunto de pares ordenados:

$$f=\left\{\left(1,a+b\right),\left(1,-2\right),\left(2,\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}-\frac{c}{ab}\right),\left(3,a+b\right),\left(3,c\right)\right\}$$

representa una función, determine el valor de $f(2)$.

4.- Sea $f(x)=\sqrt{5-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ una función real de variable real, determine su dominio.

5.- Hallar el dominio de:

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{\sqrt{9-4x^2}}$$

6.- Encuentre el dominio de $f(x)=\sqrt{4-\sqrt{4-x}}$

7.- Determine el dominio de $f(x)=\sqrt{5x-x^2}$

8.- Hallar el dominio de $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-6}{x^2-3x+2}$

9.- Encuentre el dominio de $f(x)=\sqrt{\dfrac{6}{6-x}}+\sqrt{\dfrac{1-x}{1-2x-x^2}}$

10.- Determine el dominio de $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{x^2-4}$

11.- Encuentre el dominio de $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-7x+12}+\dfrac{1}{\sqrt{6-x^2}}$

12.- Para cada una de las siguientes funciones determine el dominio.

i) $f(x)=2$

ii) $f(x)=2x-1$

iii) $f(x)=x^2-6x+5$

iv) $f(x)=x^2-4x+5$

v) $f(x)=3+\sqrt{x-1}$

vi) $f(x)=2-\sqrt{x-1}$

vii) $f(x)=1-\sqrt{4x-x^2+5}$

viii) $f(x)=4+\sqrt{8-x^2+2x}$

ix) $f(x)=\sqrt{2x+1}+3$

x) $f(x)=\sqrt{4-2x}$

13.- Dibuje la gráfica de la función a trozos dada y determine su dominio y su rango.

$$f(x)=\begin{cases} x+5, & \text{si} \quad -6\leq x<-3, \\ \sqrt{3-x^2-2x}, & \text{si} \quad -3\leq x<1, \\ 1 & \text{si} \quad 1<x<2 \\ 2x^2-12x+17 & \text{si} \quad 2<x\leq 5. \end{cases}$$

14.- Trace la gráfica de cada una de las siguientes funciones dadas y determine en cada caso su dominio y su rango.

a)

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{2}(x+7), & \text{si} \quad x<-5 \\ -1, & \text{si} \quad -5\leq x<-2 \\ 3-\dfrac{3\sqrt{-x^2-4x}}{2} & \text{si} \quad -2\leq x\leq 0 \end{cases}$$

b)

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}(x+2), & \text{si} \quad -2<x<1 \\ 2-\sqrt{6x-x^2-5}, & \text{si} \quad 1\leq x<5 \\ \dfrac{\sqrt{x-5}+2}{2}, & \text{si} \quad 5\leq x. \end{cases}$$

c) $f(x)=[\![3x-1]\!]$

d) $f(x)=x+[\![2x-1]\!]$

e) $f(x)=x+\left[\!\!\left[\dfrac{1}{2}x+1\right]\!\!\right]$

f) $f(x)=[\![2x-1]\!]x+1$

g) $f(x)=\dfrac{x}{[\![\frac{1}{2}x+1]\!]} \quad x\geq 0$

h) $f(x)=\dfrac{x}{[\![x]\!]} \quad 1\leq x\leq 10$

15.- Dadas las funciones $f=\{(3,2),(1,0),(2,3),(4,1)\}$ y $g=\{(6,3),(1,2),(4,0),(3,1)\}$. Determine la función $f^2+\dfrac{f}{g}$.

16.- Si $f+g=\{(1,2),(3,4),(3,6)\}$ y $f-g=\{(1,2),(2,2),(3,2)\}$. Determine f^2-g^2

17.- Dadas las funciones:

i) $f(x)=2$
ii) $g(x)=2x-1$
iii) $h(x)=x^2-6x+5$
iv) $t(x)=x^2-4x+5$
v) $l(x)=2+\sqrt{x-1}$
vi) $m(x)=2-\sqrt{x-1}$
vii) $s(x)=1-\sqrt{4x-x^2+5}$
viii) $r(x)=4+\sqrt{8-x^2+2x}$
ix) $b(x)=\sqrt{2x+1}+3$
x) $n(x)=\sqrt{4-2x}$

Hallar cada una de las siguientes funciones y el dominio correspondiente,
$fg,\ \dfrac{f}{g},\ \dfrac{fh}{g},\ \dfrac{h}{t},\ \dfrac{hl}{t},\ \dfrac{l}{m},\ \dfrac{m}{s},\ \dfrac{sr}{b},\ \dfrac{n}{b}$ y $\dfrac{b}{n}$

19.- En cada uno de los siguientes ejercicios:

a. Hallar $(fog)(x)$ y el dominio para cada par de funciones.
   i) $f(x)=\sqrt{1-x^2},\ g(x)=\sqrt{x}$
   ii) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2}\ ,\ g(x)=\sqrt{x^2-x-2}$
   iii) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\ ,\ g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x-6}}{x-2}$

b. Hallar fog, gof y su respectivo dominio.
   i) $f(x)=x^2+1,\ g(x)=\sqrt{x}$
   ii) $f(x)=x\ ,\ g(x)=\dfrac{x+3}{x-1}$
   iii) $f(x)=\sqrt{x-1},\ g(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$
   iv) $f(x)=x^2,\ g(x)=\sqrt{x^2-x-2}$
   v) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1},\ g(x)=\sqrt{x-1}$
   vi) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}},\ g(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$
   vii) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\ ,\ g(x)=\sqrt{x-1}$
   viii) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-2},\ g(x)=\dfrac{x+3}{x-1}$

20.- Sea $f(x)=x^2-2x-1$. Encuentre dos funciones g tales que: $(fog)(x)=x^2-3x$.

21.- Sean $f(x)=x^2+1$, $g(x)=\sqrt{x}$ y $h(x)=1-x$.

a) Encuentre $[(fog)oh](x)$ y $[fo(goh)](x)$.
b) ¿Qué se puede decir de $(fog)oh$ y $fo(goh)$?

Funciones Polinómicas 1.3

Las funciones polinomiales son de gran importancia en las Matemáticas. Estas funciones representan modelos que describen relaciones entre dos variables, las cuales intervienen en diversos problemas y/o fenómenos que provienen del mundo real. La determinación de las raíces de los polinomios "resolver ecuaciones algebraicas", está entre los problemas más viejos de la matemática. Algunos polinomios, como $f(x) = x^2 + 1$, no tienen ninguna raíz en los números reales. Sin embargo, si el conjunto de las raíces posibles se extiende a los números complejos, todo polinomio (no constante) tiene por lo menos una raíz: ese es el enunciado del teorema fundamental del álgebra.

Hay una diferencia entre la aproximación de raíces y el descubrimiento de fórmulas cerradas concretas para ellas. Se conocen fórmulas de polinomios de hasta 4 grado desde el siglo XVI. Pero las fórmulas para polinomios de quinto grado fueron esquivas para los investigadores durante mucho tiempo. En 1824, Niels Henrik Abel demostró el resultado de que no puede haber fórmulas generales para los polinomios de grado 5 o mayores en términos de sus coeficientes (ver el teorema de Abel-Ruffini). Este resultado marcó el comienzo de la teoría de Galois que se encarga de un estudio detallado de las relaciones entre las raíces de los polinomios.

1.3.1. Teorema Fundamental del Álgebra

Teorema: 1.1

Toda función polinomial compleja $f(x)$ de grado $n \geq 1$ se factoriza en n factores lineales (no necesariamente distintos) de la forma

$$\boxed{f(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2).....(x - r_n)}$$

Donde $a_n, r_1, r_2, ...r_n$ son números complejos. Esto es, toda función polinomial compleja de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n ceros (no necesariamente diferentes).

$$\boxed{f(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2).....(x - r_n)}$$

Demostración.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Por el teorema fundamental del álgebra, f tiene al menos un cero, digamos r_1. Entonces por el teorema del factor, $x - r_1$ es un factor y

$$f(x) = (x - r_1) q_1(x)$$

Donde $q_1(x)$ es un polinomio complejo de grado $n-1$ cuyo primer coeficiente es a_n. De nuevo por el teorema fundamental del álgebra, el polinomio complejo $q_1(x)$ que tiene el factor $x - r_2$, de manera que

$$q_1(x) = (x - r_2) q_2(x)$$

Donde $q_2(x)$ es un polinomio complejo de grado $n-2$, cuyo primer coeficiente es a_n. En consecuencia

$$f(x) = (x-r_1)(x-r_2)q_2(x)$$

Al repetir este argumento n veces, se llega a

$$f(x) = (x-r_1)(x-r_2)...(x-r_n)q_n(x)$$

Donde $q_n(x)$ es un polinomio de grado $n-n=0$ cuyo coeficiente es a_n. Así, $q_n(x) = a_n x^0 = a_n$, entonces,

$$f(x) = a_n(x-r_1)(x-r_2)...(x-r_n)$$

Se concluye que toda función polinomial compleja $f(x)$ de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n ceros (no necesariamente diferentes). $\square$

1.3.2. Ceros complejos de polinomios con coeficientes reales

Se puede usar el teorema fundamental del álgebra para obtener información valiosa acerca de los ceros complejos de polinomios cuyos coeficientes son número reales.

Teorema: 1.2 **Teorema de pares conjugados**

Sea $f(x)$ un polinomio cuyos coeficientes son números reales. Si $r = a+bi$ es un cero de f, entonces el complejo conjugado $\bar{r} = a-bi$ también es un cero de f. En otras palabras, para polinomios cuyos coeficientes son números reales, los ceros ocurren en pares conjugados.

Demostración. Sea

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Donde $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$, son números reales y $a_n \neq 0$. Si $r = a+bi$ es un cero de f, entonces $f(r) = f(a+bi) = 0$, de manera que

$$a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + ... a_1 r + a_0$$

Se toma el conjugado en ambos lados para obtener

$$\begin{aligned}
\overline{a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + ... a_1 r + a_0} &= \overline{0} \\
\overline{a_n r^n} + \overline{a_{n-1}r^{n-1}} + ... + \overline{a_1 r} + \overline{a_0} &= \overline{0} \\
\overline{a_n}\,\overline{r^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{r^{n-1}} + ... + \overline{a_1}\,\overline{r} + \overline{a_0} &= \overline{0} \\
a_n \overline{r^n} + a_{n-1}\overline{r^{n-1}} + ... + a_1 \overline{r} + a_0 &= \overline{0} \\
a_n \overline{r}^n + a_{n-1}\overline{r}^{n-1} + ... + a_1 \overline{r} + a_0 &= 0
\end{aligned}$$

Esta última ecuación establece que $f(\bar{r}) = 0$, es decir $\bar{r} = a - bi$ es un cero de f, la importancia de este resultado debe ser obvia. $\square$

Una vez que se sabe que, digamos, $3+4i$ es un cero de un polinomio con coeficientes reales, entonces se sabe que $3-4i$ también es un cero.

Corolario: 1.1

Un polinomio f de grado impar con coeficientes reales tiene al menos un cero real.

Demostración. Dado que los ceros complejos ocurren como pares conjugados con coeficientes reales, siempre habrá un número par de ceros que no son coeficientes reales.

En consecuencia, como f es de grado impar, uno de sus ceros debe ser un número real. $\square$

Por ejemplo, el polinomio $f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 5$ tiene al menos un cero que es número real, ya que f tiene grado 5 (impar) y tiene coeficientes reales.

Ejemplo. 9 **Uso del Teorema de pares conjugados**

Un polinomio f de grado 5 cuyos coeficientes son números reales tiene los ceros $1, 5i$ y $1+i$, encuentre los dos ceros restantes.

Solución. Como f tiene coeficientes que son número reales, los ceros complejos aparecen, como pares conjugados. Se deduce que $-5i$, el conjugado de $5i$ y $1-i$, el conjugado de $i+1$, son los dos ceros restantes. $\square$

Teorema: 1.3

Toda función polinomial con coeficientes reales se factoriza de manera única en un producto de n factores lineales cuadráticos irreducibles.

Demostración . Todo polinomio complejo de f de grado n tiene exactamente n ceros y se factoriza en un producto de n factores lineales. Si sus coeficientes son reales, entonces los ceros que son números complejos siempre ocurren como pares conjugados. En consecuencia, si $r = a + bi$ es un cero complejo, también lo es $\bar{r} = a - bi$. Entonces, cuando se multiplican los factores lineales $x - r$ y $x - \bar{r}$ de f, se tiene:

$(x-r)(x-\bar{r}) = x^2 - (r+\bar{r})x + r\bar{r} = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ Este polinomio de segundo grado tiene coeficientes reales y es irreducible (en los números reales). Así, los factores de f son factores cuadráticos lineales o irreducibles. $\square$

Teorema: 1.4 **Teorema de la raíz racional**

Sean $n \geq 1, a_n \neq 0$ y suponga que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ es un polinomio de grado n con coeficientes enteros. Si $\dfrac{p}{q}$ es una raíz racional de $f(x) = 0$, donde p y q no tienen factores en común distintos de $+1, -1$, entonces p es un factor de a_0 y q es un factor de a_n.

Ejemplo. 10

Factorizar cada uno de los siguientes polinomios

1.- $p(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 12$

Solución.

Se procede a obtener los posibles ceros racionales del polinomio, estos son los divisores de la constante 12 los cuales son: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12 y tenemos que $p(-1) = 0$ así que -1 es una raíz del polinomio, realizando la division sintética se tiene:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x+1)(x^2 - 7x + 12) \text{ (Factorizando el polinomio cuadrático)} \\ &= (x+1)(x-3)(x-4) \end{aligned}$$

2.- $p(x) = x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 27x + 18$

Solución.

Como las raíces racionales si las tiene se encuentran entre los divisores de la constante 18 los cuales son: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, , ± 9, y, ± 18. Realizando las operaciones se tiene que $p(2) = 0$ así que 2 es una raíz polinomio, luego

$$p(x) = (x-2)(x^3 - 5x^2 + 9x - 9)$$

Ahora en el polinomio de grado tres $q(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 9$ comprobamos que $q(3) = 0$ y al realizar la division sintética obtenemos que

$$p(x) = (x-2)(x-3)(x^2 - 2x + 3)$$

el polinomio de grado dos no tiene raíces en los reales.

1.3.3. Ejercicios

Factorizar los siguientes polinomios

1.- $x^6 + 6x^5 + 4x^4 - 30x^3 - 41x^2 + 24x + 36$

2.- $x^6 - 6x^5 + 4x^4 + 30x^3 - 41x^2 - 24x + 36$

3.- $3x^7 - 47x^6 + 200x^5 + 168x^4 - 2224x^3 + 400x^2 + 7296x + 1304$

4.- $6x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 1$

5.- $4x^5 + 13x^4 - 32x^3 - 129x^2 - 36x + 108$

6.- $16x^5 + 16x^4 - 41x^3 - 63x^2 - 28x - 4$

7.- $15x^4 - 17x^3 - 29x^2 + 5x + 2$

8.- $6x^5 + 13x^4 - 20x^3 - 55x^2 - 16x + 12$

9.- $12x^4+5x^3-51x^2-20x+12$

10.- $x^6-4x^5-16x^4+26x^3+119x^2+122x+40$

11.- $x^5+5x^4-x^3-29x^2-12x+36$

12.- $21x^5-20x^4-73x^3+36x^2+52x-16$

13.- Dado que 3 es una raíz doble de $p(x)=x^4-3x^3-19x^2+87x-90=0$ determine todas las raíces de $p(x)=0$.

14.- Dado que -2 es una raíz doble de $q(x)=3x^4+10x^3-x^2-28x-20=0$ determine todas las raíces posibles en $q(x)=0$.

15.- Sea $p(x)=x^3-3x^2+x-3$. Verifique que $p(3)=0$ y determine las demás raíces de $p(x)=0$.

16.- Sea $q(x)=3x^3+x^2-4x-10$. Verifique que $p(\frac{5}{3})=0$ y determine las demás raíces de $p(x)=0$.

17.- Exprese $p(x)=x^3-x^2-12x$ en la forma descrita en el teorema de factorización lineal. Enumere cada raíz y su multiplicidad.

18.- Exprese $q(x)=6x^5-33x^4-63x^3$ en al forma descrita en el teorema de factorización lineal. Haga una lista de cada una de las raíces y sus multiplicidades.

19.- Escriba el polinomio general $p(x)$ cuyas únicas raíces son 1,2 y 3, con multiplicidades 3,2 y 1, respectivamente.? Cuál es su grado?

20.- Escriba el polinomio general $q(x)$ cuyas únicas raíces son -4 y -3, con multiplicidades 4 y 6, respectivamente.¿Cuál es su grado?.

Resolución de Inecuaciones 1.4

1.4.1. Axiomas de Orden

A partir de los 5 axiomas para la construcción de los números naturales se pueden probar las siguientes afir-maciones para los reales positivos $\mathbb{R}^+$ cuyas demostraciones no se verán aquí.

a) Si $a\in\mathbb{R}$ entonces se cumple una y solo una de las siguientes proposiciones:

- $a = 0$
- a es positivo
- $(-a)$ es positivo

b) Si a y $b\in\mathbb{R}$ entonces $a+b\in\mathbb{R}$

c) Si a y $b\in\mathbb{R}$ $a*b\in\mathbb{R}$

Definición: 1.9

Un número real a es negativo si y solo si $-a \in \mathbb{R}^+$.

Definición: 1.10

Para cada par de números reales a, b; a es menor que b (que se denota por $a < b$ si y solo si $(b-a) \in \mathbb{R}^+$.

Definición: 1.11

Para cada par de números reales a, b; a es mayor que b (que se denota por $a > b$ si y solo si $(a-b) \in \mathbb{R}^+$.

Definición: 1.12

Para cada par de números reales a ,b; a es mayor o igual que b (que se denota por $a \geq b$) si y solo si $a > b$ o $a = b$.

Definición: 1.13

Expresiones tales como $a < b$, $a > b$, y, $a \geq b$. Son llamadas desigualdades.

Existen varias propiedades de las desigualdades que nos serán útiles en la solución de una inecuación, donde resolver una inecuación significa encontrar todos los valores de las variables o variable que satisfacen a la inecuación.

1.4.2. Propiedades de las Desigualdades

Sean a, b, $c \in \mathbb{R}$

1. a) Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$
   b) Si $a > b$ entonces $a + c > b + c$
2. a) Si $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$

b) Si $a > b$ y $c > 0 \Rightarrow ac > bc$.

3. a) Si $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow ac > bc$.
   b) Si $a > b$ y $c < 0 \Rightarrow ac < bc$.

4. a) Si $a < b$ y $c < d \Rightarrow a + c < b + d$
   b) Si $a > b$ y $c > d \Rightarrow a + c > b + d$

5. a) Si $0 < a < b$ y $0 < c < d \Rightarrow ac < bd$
   b) Si $a > b > 0$ y $c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$

Teorema: 1.5

Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

i) Si $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$.

ii) Si $a > b$ y $c > 0 \Rightarrow ac > bc$.

Demostración.

Si $a < b \Rightarrow b - a \in \mathbb{R}^+$

Y si $c > 0 \Rightarrow (c - 0) \in \mathbb{R}^+$

O $c \in \mathbb{R}^+$

Así tenemos dos números positivos $(b - a)$ y c y por la propiedad de que el producto de dos positivos es positivo, tenemos que:

$(b - a)c \in \mathbb{R}^+$

$bc - ac \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow ac < bc$

$\square$

Observación: 1.1

Este teorema nos dice que podemos multiplicar una cantidad que debe ser positiva a ambos lados de la desigualdad y la desigualdad se conserva, ya sea menor o mayor.

Teorema: 1.6

Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$

i) Si $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow ac > bc$

ii) Si $a > b$ y $c < 0 \Rightarrow ac < bc$

Demostración.

si $\quad a < b \Rightarrow b - a \in \mathbb{R}^+$

y si $\quad c < 0 \Rightarrow 0 - c \in \mathbb{R}^+$

o $\quad -c \in \mathbb{R}^+$

También por el producto de dos positivos tenemos:

$$(b-a)(-c) \in \mathbb{R}^+$$

$$-bc + ac \in \mathbb{R}^+ \quad \text{Distributiva}$$

$$ac - bc \in \mathbb{R}^+ \quad \text{Conmutativa}$$

Así $\quad bc < ac \quad$ Definición de $<$

Entonces $\quad ac > bc \quad$ Definición de $>$

□

Observación: 1.2

Este teorema nos dice que podemos multiplicar a ambos lados de una desigualdad por una cantidad negativa y la desigualdad se invierte, es decir, que si tenemos una desigualdad menos que, esta cambia a una mayor que, y viceversa.

Teorema: 1.7

Para toda $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

- Si $\quad a < b \quad$ y $\quad c < d \Rightarrow a + c < b + d$
- Si $\quad a > b \quad$ y $\quad c > d \Rightarrow a + c > b + d$

Demostración.
Si $a < b \Rightarrow b - a \in \mathbb{R}^+$ y si $c < d \Rightarrow d - c \in \mathbb{R}^+$ y por la afirmación de que la suma de dos positivos es positivo, tenemos:

$$(b-a) + (d-c) \in \mathbb{R}^+$$

$$(b+d) + (-a-c) \in \mathbb{R}^+$$

$$(b+d) - (a+c) \in \mathbb{R}^+$$

Entonces $\quad a + c < b + d$

□

Teorema: 1.8

Si $\quad 0 < a < b \quad$ y $\quad 0 < c < d \Rightarrow ac < bd$

Si $\quad a > b > 0 \quad$ y $\quad c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$

Los teoremas anteriores siguen siendo válidos si el símbolo $>$ es sustituido por $\geq$ y el de$<$ por $\leq$. Las desigualdades $a > b$ y $a < b$ las podemos representar en una recta numérica donde $a < b$ significa que el punto que representa al número a, a la izquierda del punto que representa al número b. Análogamente $a > b$ significa que el punto que representa a a está a la derecha del punto que representa a b.

1.4.3. Inecuaciones Polinómicas

En la mayoría de los textos de cálculo, se suele trabajar la resolución de inecuaciones a partir del método de las cruces, también conocido como el método del cementerio, el procedimiento para resolver inecuaciones utilizando este método considera entre otros pasos factorizar el polinomio y considerar rectas verticales u horizontales para cada uno de los factores. Este ha sido el método que de forma tradicional ha sido empleado, pero presenta el inconveniente que para polinomios de grado mayor que 4 resulta tedioso su aplicación por el número de rectas a considerar. En esta sección se presenta un método alternativo que permitirá reducir el número de pasos a considerar al momento de resolver una desigualdad, el cual llamaremos "**El método del cero**".

Teorema: 1.9

Sea $p(x)$ un polinomio de grado n con todas sus raíces reales distintas. Es decir

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_n)$$

Entonces

- Si $n = 2m$ es par, entonces
  - $p(x) > 0$ en $S = (-\infty, r_1) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{m-1} (r_{2k}, r_{2k+1}) \right)$
  - $p(x) < 0$ en $\mathbb{R} - S$.
- Si $n = 2m + 1$ es impar, entonces
  - $p(x) > 0$ en $S = \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{m} (r_{2k-1}, r_{2k}) \right) \bigcup (r_2 m + 1, \infty)$
  - $p(x) < 0$ en $\mathbb{R} - S$.

Proposición: 1.2

- Sea $p(x)$ un polinomio con una raíz de multiplicidad par. Supongamos

$$p(x) = a_n(x - r_1)^{2p}(x - r_2)\ldots(x - r_n)$$

con $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$ y $a_n > 0$. Entonces

  - $p(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - r_2)\ldots(x - r_n) > 0$
  - $p(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - r_2)\ldots(x - r_n) < 0$

- Sea $p(x)$ un polinomio con una raíz de multiplicidad impar. Supongamos

$$p(x) = a_n(x - r_1)^{2p+1}(x - r_2)\ldots(x - r_n)$$

con $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$ y $a_n > 0$. Entonces

  - $p(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n) > 0$
  - $p(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n) < 0$

- Sea $p(x)$ un polinomio con 2 raíces complejas, digamos $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$ y

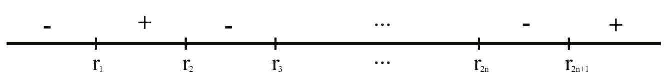
$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n)$$

con $r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < r_n$ y $a_n > 0$. Entonces

  - $p(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - r_3)\ldots(x - r_n) > 0$
  - $p(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - r_3)\ldots(x - r_n) < 0$

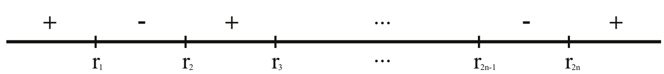
Representación Gráfica de la Solución de una Desigualdad

Ahora representaremos gráficamente la solución de una desigualdad, la raíces del polinomio son los ceros quienes son las divisiones de la parte positiva y parte negativa y la unión de todos los intervalos que tienen el signo + equivale a los valores de x donde el polinomio es positivo y donde tienen el signo menos representa el conjunto de los x donde el polinomio es negativo. En este caso consideraremos $p(x) \geq 0$



Así que la solución en este caso viene dada por

$$S = (-\infty, r_1] \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} [r_{2k}, r_{2k+1}] \right) \bigcup [r_{2n}, \infty)$$



Y para este caso la solución es

$$S = [r_1, r_2] \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} [r_{2k+1}, r_{2k+2}] \right) \cup [r_{2n+1}, \infty)$$

1.4.4. Inecuaciones Racionales

Método del Cero

- Se factoriza el polinomio.
- Se organizan los factores de tal modo que la incógnita quede escrita en la parte izquierda de cada paréntesis y con signo positivo.
- Se calculan las raíces del polinomio o los ceros del polinomio.
- Se ubican en la recta real las respectivas raíces o los ceros calculados en el paso anterior.
- A la derecha de la raíz de mayor, se señala con un signo más y a la izquierda con un signo menos.
- Seguidamente se alternan los signos en cada una de las raíces siguientes.
- Si el sentido de la inecuación es $>$, la solución estará constituida por todos los intervalos, en la recta, señalados con el signo más; en cambio si el sentido de la inecuación es $<$, la solución será la unión de los intervalos señalados con el signo menos.

Inecuaciones que contienen fracciones

El “Método del cero”se puede extender a la solución de inecuaciones que contienen fracciones algebraicas. Lo primero que debemos hacer es excluir los números reales que hacen que los denominadores se anulen. Luego, pasamos todas las fracciones y demás expresiones algebraicas al miembro izquierdo de la desigualdad (en el miembro derecho queda, por supuesto 0). El próximo paso consiste en reducir las expresiones algebraicas en el miembro izquierdo a una sola fracción. Por último, después de factorizar tanto el numerador como el denominador multiplicamos ambos miembros de la inecuación por el denominador al cuadrado y aplicamos el “Método del cero”.

Ejemplo. 11

Resolver las siguientes inecuaciones polinómicas:

1.- $12x^3 + 8x^2 - 13x + 3 \geq 0$

Solución

Factorizando el polinomio obtenemos que $p(x) = 12(x-1/3)(x-1/2)(x+3/2)$ luego

$$12(x-1/3)(x-1/2)(x+3/2) \geq 0$$

Ejemplo. 11 (Continuación)

Así que el conjunto solución es:

$$S = [-3/2, 1/3] \cup [1/2, \infty)$$

2.- $x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 27x + 18 \leq 0$
Solución.

Factorizando el polinomio se tiene que $p(x) = (x-2)(x-3)(x^2-2x+3)$, luego

$$(x-2)(x-3)(x^2-2x+3) \leq 0$$

Como $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0$ se tiene

$$(x-2)(x-3) \leq 0$$

Luego el conjunto solución es:

$$S = [2, 3]$$

3.- $x^5 - 9x^4 + 37x^3 - 53x^2 - 24x + 76 < 0$
Solución.

Factorizando el polinomio se tiene que $p(x) = (x-2)^2(x+1)(x^2-6x+19)$ así que

$$(x-2)^2(x+1)(x^2-6x+19) < 0$$

Ahora como $(x-2)^2 \geq 0$ entonces

$$(x+1)(x^2-6x+19) < 0$$

Pero hay que tener presente que $x = 2$ es una raíz del polinomio y por lo tanto no hace parte del conjunto solución. Por otra parte $x^2 - 6x + 19 = (x-3)^2 + 10 > 0$ así que

$$x + 1 < 0$$

Luego el conjunto solución es:

$$S = (-\infty, -1)$$

1.4.5. Ejercicios

1.- $x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 19x^4 + 33x^3 + 14x^2 + 76x + 120 \geq 0$

2.- $x^5 - 17x^4 + 103x^3 - 266x^2 + 276x - 72 \leq 0$

3.- $x^3 - 10x^2 + 31x - 28 < 0$

4.- $2x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 7x + 3 > 0$

5.- $x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 10x^2 - 23x - 21 > 0$

6.- $x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 19x^4 + 33x^3 + 14x^2 + 76x + 120 = (5 - x + x^2)(3 - 2x + x^2)(2 + x)^3$

7.- $x^5 - 17x^4 + 103x^3 - 266x^2 + 276x - 72 = (x-6)^2(x-2)(x^2 - 3x + 1)$

8.- $x^3 - 10x^2 + 31x - 28 = (x-4)(x^2 - 6x + 7)$

9.- $2x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 7x + 3 = (x - 1/2)(x-3)(x^2+1)$

10.- $x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 10x^2 - 23x - 21 = (x-1)^2(x+3)(x^2 - 4x + 7)$

Valor Absoluto 1.5

Para todo x que pertenece al conjunto de números reales se define el valor absoluto de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Aplicando esta definición a expresiones de la forma $ax + b$ se tiene:

$$|ax+b| = \begin{cases} ax+b & \text{si} \quad ax+b \geq 0 \\ -(ax+b) & \text{si} \quad ax+b < 0 \end{cases} = \begin{cases} ax+b & \text{si} \quad x \geq -\dfrac{b}{a} \\ -(ax+b) & \text{si} \quad x < -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Ejemplo. 12

$$|x+8| = \begin{cases} x+8 & \text{si} \quad x+8 \geq 0 \\ -(x+8) & \text{si} \quad x+8 < 0 \end{cases}$$

$$|x+8| = \begin{cases} x+8 & \text{si} \quad x \geq -8 \\ -(x+8) & \text{si} \quad x < -8 \end{cases}$$

Para efectos de lograr mayor claridad podemos resumir esta información en la tabla siguiente:

	$(-\infty, -8)$	$[-8, \infty)$
$\lvert x+8 \rvert$	-(x+8)	x+8

1.5.1. Propiedades del valor absoluto

A continuación enunciaremos algunas propiedades del valor absoluto, las cuales podrían ser utilizadas para facilitar el trabajo en la resolución de ecuaciones o inecuaciones que incluyen valor absoluto.

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $|x|^2 = |x^2| = x^2$
4. $|x| = |-x|$
5. $\sqrt{x^2} = |x|$
6. $-|x| \leq x \leq |x|$
7. $|x+y| \leq |x| + |y|$
8. $|xy| = |x||y|$
9. $|x| \leq p \Leftrightarrow -p \leq x \leq p$
10. $|x| \geq p \Leftrightarrow \begin{cases} x & \geq & p \\ & \text{o} & \\ x & \leq & -p \end{cases}$

Proposición: 1.3

$$\forall x, x \in \mathbb{R} : |x| \geq 0$$

Demostración.
$x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Caso 1

$x \geq 0$ Si $|x| \geq 0 \quad \Rightarrow |x| = x \Rightarrow |x| \geq 0$

Caso 2

$x < 0$ Si $|x| < 0 \quad \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow |x| \geq 0,$ ya que $-x > 0$

$\square$

Proposición: 1.4

Si $x \in \mathbb{R}$ y $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$

Demostración. Ejercicio para el estudiante $\square$

Proposición: 1.5

Si $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R} \Rightarrow |x.y| = |x||y|$

Demostración.
Para demostrar esta propiedad conviene recordar que:
$\forall a, a \in \mathbb{R} : |a| = \sqrt[n]{a^n}, \quad$ si $\quad n \quad$ es $\quad par$
En particular

$$|a| = \sqrt{a^2} \quad \forall a, a \in \mathbb{R}$$

Usando esta definición se tiene que

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|$$

$\square$

Proposición: 1.6

$\forall x, x \in \mathbb{R} : |-x| = |x|$

Demostración.
Ejercicio para el estudiante $\square$

Proposición: 1.7

$Si \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Demostración. Aquí también usaremos el hecho que:
$\forall a. \quad a \in \mathbb{R} \quad |a| = \sqrt{a^2}$
Si $x \in \mathbb{R},$ y $\in \mathbb{R}, y \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{R}$
$|\frac{x}{y}| = \sqrt{(\frac{x}{y})^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{|x|}{|y|}$
$|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ $\square$

Proposición: 1.8

$\forall x, x \in \mathbb{R} : |x|^2 = x^2$

Demostración.
$\forall x, x \in \mathbb{R}$: se tiene que
$|x| = \sqrt{x^2}$
$\Rightarrow |x|^2 = (\sqrt{x^2}^2$
$\Rightarrow |x|^2 = x^2$ Pues $\forall a, a \in \mathbb{R}(\sqrt{a} \in \mathbb{R} \Rightarrow (\sqrt{a})^2 = a$
$\forall x, x \in \mathbb{R} : |x|^2 = x^2$ $\square$

Proposición: 1.9

Sea x una variable real y k un número real positivo entonces:
$|x| = k \Leftrightarrow x = k \quad o \quad x = -k$

Demostración.
Como $|x| = \sqrt{x^2}$, se tiene:

$$\begin{aligned} k &= |x| = \sqrt{x^2} \\ k^2 &= (\sqrt{x^2})^2 \\ &= x^2 \\ 0 &= x^2 - k^2 \\ &= (x-k)(x+k) \end{aligned}$$

Así que $x = k \quad$ o $x = -k$

Por lo tanto

$$|x| = k \Leftrightarrow x = k \quad \text{o} \quad x = -k$$

□

Proposición: 1.10

Sea x una variable real y k un número real positivo entonces:
$|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k$

Demostración.
Como $|x| = \sqrt{x^2}$, se tiene:

$$\begin{aligned} |x| < k &\Leftrightarrow \sqrt{x^2} < k \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2} < k^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 < k^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - k^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow (x-k)(x+k) < 0 \end{aligned}$$

Resolviendo esta inecuación por el método del cero se tiene: $S = (-k, k)$
De aquí se tiene:

$$-k < x < k$$

$$|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k$$

□

Proposición: 1.11

Sea x una variable real y k un número real positivo entonces:
$|x| > k \Leftrightarrow x > k$ o $x < -k$

Demostración.
Similar a la Proposición (10) □

Proposición: 1.12 S

Sea x una variable real y k un número real positivo entonces:

a) $|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$

b) $|x| \geq k \Leftrightarrow x \geq k \quad$ o $\quad x \leq -k$

Proposición: 1.13

$\forall x, x \in \mathbb{R}: \quad -|x| \leq x \leq |x|$

Proposición: 1.14 (

desigualdad triangular)
Si $x \in \mathbb{R}; \quad y \in \mathbb{R}$ entonces $|x+y| \leq |x| + |y|$

1.5.2. Ecuaciones que involucran valor absoluto

A continuación resolveremos algunas ecuaciones que involucran valor absoluto, para esto utilizaremos, siempre que sea posible, algunas propiedades enunciadas anteriormente y en los que no sea posible aplicar alguna de dichas propiedades, resolveremos las ecuaciones correspondientes usando la definición de valor absoluto. Además es importante tener en cuenta que toda ecuación que involucre valor absoluto se puede resolver usando la definición.

Ejemplo. 13

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones:

a. $|2x-1| = 5$

Ejemplo. 13 (Continuación)

Solución
El cero de la expresión del valor absoluto es $x = \frac{1}{2}$, así que estudiaremos la ecuación en los intervalos $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$

	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$
$\boldsymbol{\vert 2x-1\vert = 5}$	$-(2x-1)=5$	$2x-1=5$
	$-2x+1=5$	$2x=6$
	$-2x=4$	$x=3$
	$x=-2$	$x=3$
	$S_1=\{-2\}$	$S_2=\{3\}$

Por lo tanto el conjunto solución de la ecuación es

$$S = \{-2, 3\}$$

b. $|x-2|+|x-3| = 8$

Solución
Los ceros de las expresiones dentro del los valores absolutos son $x = 2, 3$, entonces estudiaremos la ecuación en los intervalos $\left(-\infty, 2\right)$, $[2,3)$ y $[3,\infty)$

$\boldsymbol{\vert x-2\vert + \vert x-3\vert = 8}$		
$(-\infty,2)$	$[2,3)$	$[3,\infty)$
$-(x-2)-(x-3)=8$	$(x-2)-(x-3)=8$	$(x-2)+(x-3)=8$
$-2x+5=8$	$1=8$	$2x-5=8$
$-2x=3$	$1=8$	$2x=13$
$x=\frac{-3}{2}$	$1=8$	$x=\frac{13}{2}$
$S_1=\left\{\frac{-3}{2}\right\}$	$S_2=\emptyset$	$S_3=\left\{\frac{13}{2}\right\}$

Por lo tanto el conjunto solución de la ecuación es

$$S = \left\{\frac{-3}{2}, \frac{13}{2}\right\}$$

1.5.3. Inecuaciones que involucran valor absoluto

Resolveremos inecuaciones que involucran valor absoluto de expresiones de la forma $ax+b$, donde a y b son constantes con $a \neq 0$ y x es una variable real. Para esto utilizaremos la definición de valor absoluto, y en los casos en donde sea posible usar alguna de las propiedades estudiadas, las aplicaremos, con el fin de facilitar el procedimiento de resolución.

Ejemplo. 14

1.- $|3x-15|<6$

Solución

$$|3x-15|<6 \Leftrightarrow -6<3x-15<6 \Leftrightarrow 9<3x<21 \Leftrightarrow 3<x<7$$

Por lo tanto la solución

$$S=(3,7)$$

2.- $|x-6|+2x\geq 8$

Solución
$x-6$ se hace cero en $x=6$, así que analizaremos la inecuación en los intervalos $(-\infty,6)$, $[6,\infty)$

$\boldsymbol{\lvert x-6\rvert+2x\geq 8}$	
$(-\infty,6)$	$[6,\infty)$
$-(x-6)+2x\geq 8$	$(x-6)+2x\geq 8$
$x+6\geq 8$	$3x-6\geq 8$
$x\geq 2$	$x\geq \frac{14}{3}$
$[2,\infty)$	$\left[\frac{14}{3},\infty\right)$
$S_1=[2,6)$	$S_2=\left[\frac{14}{3},\infty\right)\cap[6,\infty)=[6,\infty)$

Por lo tanto el conjunto solución de la inecuación es

$$S=[2,6)\cup[6,\infty)=[2,\infty)$$

3.- $|x-3|+|x+3|<8$

Solución
Los ceros en los valores absolutos son -3, 3 luego estudiaremos la inecuación en los intervalos $(-\infty,-3)$, $[-3,3)$ y $[3,\infty)$

$\boldsymbol{\lvert x-3\rvert+\lvert x+3\rvert<8}$		
$(-\infty,-3)$	$[-3,3)$	$[3,\infty)$
$-(x-3)-(x+3)<8$	$-(x-3)+(x+3)<8$	$(x-3)+(x+3)<8$
$-2x<8$	$6<8$	$2x<8$
$x>-4$	$6<8$	$x<4$
$(-4,\infty)$	$[-3,3)$	$(-\infty,4)$
$S_1=(-4,-3)$	$S_2=[-3,3)$	$S_3=[3,4)$

Ejemplo. 14 (Continuación)

El conjunto solución es

$$S = (-4, 4)$$

1.5.4. Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 11 resolver las ecuaciones dadas:

1.- $|4x-12| = 8$

2.- $|x-6| = 5$

3.- $|2x-1| = 4+x$

4.- $|3-x|+x = 4$

5.- $|x-1|+|x-2| = 8-x$

6.- $4|x-3|-2 = x$

7.- $|3-2x|+x = 4$

8.- $2|5-3x| = x+8$

9.- $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = 2$

10.- $2|2-x|+|2x-1| = x$

11.- $|3-2x|-3|x+2|-x = 0$

En los ejercicios del 12 al 34 resolver las inecuaciones dadas:

12.- $|4x-9| < 12$

13.- $|9x+8| \leq 12$

14.- $|5+4x| > 8$

15.- $|-3x+9| \geq -5$

16.- $|-3x+8|+x \geq 6$

17.- $|2x-7|+2x \geq 8$

18.- $|5-2x| < x-7$

19.- $|x-2|+|x+2| < 6$

20.- $|x-1|+3|x| \leq 7$

21.- $|6-x|+|3x-7| > 9-x$

22.- $|x|-3|6-x| \geq x$

23.- $|\dfrac{x-1}{x+2}|+|x-3| \leq x+|x-4|$

24.- $|x-2|+|2x-1| \leq |x+3|$

25.- $|x-4|+|2x-6|+x \leq |2x-8|$

26.- $|x-3|+|2x-8| \leq |x+6|+x+1$

27.- $|x-4|+|x-2| \leq |x-8|+1$

28.- $|x-1|+|x| \leq |2x+1|+4$

29.- $|x-4|+|x-7| \leq |2x-6|+|x-1|$

30.- $|x-6|+|x+3| \leq |4x+1|+x$

31.- $\dfrac{|x-2|}{|x-3|}+1 \leq |x+1|$

32.- $|x-1|+|x-2|+x-3| \leq |x-4|+x$

33.- $|x-3|+|x-5|+1 \leq |x+4|+x$

34.- $|x+1|+|x+2| \leq |x-3|+5$

35.- Determinar dominio, raíces, rango y un esbozo de la gráfica de la siguiente función.

$$f(x) = \begin{cases} 2-|x-3| & \text{si} \quad -3 < x < 1 \\ 1+2x-x^2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

36.- Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 4 & \text{si} \quad x<-3 \\ |x^2+x-2| & \text{si} \quad -3\leq x\leq 1 \\ 1-x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a. Trace su gráfica.

b. Determine su dominio, rango y raíces.

37.- Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} |2x+1| & \text{si} \quad x\leq 0 \\ x^2+1 & \text{si} \quad 0<x<3 \\ -4 & \text{si} \quad x\geq 3 \end{cases}$$

obtener la gráfica de f, su dominio, su rango y sus raíces.

38.- Grafica la función

$$f(x)=\begin{cases} |2x+3| & \text{si} \quad x<-1 \\ \\ \sqrt{1-x^2} & \text{si} \quad -1\leq x\leq 1 \\ |x-3| & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

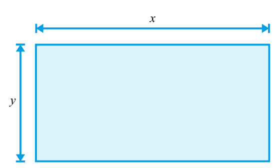
39.- Hallar el dominio de $f(x)=|x+4|-|x-4|$

Modelando con Funciones 1.6

Ejemplo. 15

Las dimensiones de un rectángulo pueden variar, pero no su área que debe ser de $A\,cm^2$. Considerando que uno de sus lados mide x cm, expresar el perímetro P del rectángulo en términos de x.

Solución. Considerando un rectángulo con base de longitud x cm y altura de longitud y cm,



se tiene que el perímetro es

$$P=2x+2y \tag{1.1}$$

y su área es

$$A=xy \tag{1.2}$$

De la ecuación (1.2) tenemos que

$$y=\frac{A}{x} \tag{1.3}$$

De la ecuación (1.3) y la ecuación (1.1) se tiene que

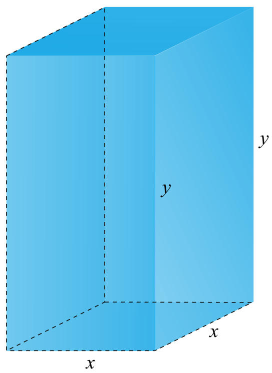
$$P = 2x + 2\frac{A}{x}$$

□

Ejemplo. 16

Las dimensiones de un paralelepípedo (caja con caras laterales rectangulares) pueden variar, pero no su volumen que debe ser igual a $V\,m^3$. Considerando que la caja tiene base cuadrada con lado de longitud igual a x m, expresar el área A de la superficie total del paralelepípedo en función de x.

Solución.



Puesto que la caja tiene base y tapa cuadradas de lado x m y altura de longitud y m, el área total es

$$A = 2x^2 + 4xy \tag{1.4}$$

y el volumen es

$$V = x^2 y \tag{1.5}$$

De la ecuación (1.5) se tiene que $y = \dfrac{V}{x^2}$, reemplazando y en la ecuación (1.4) resulta que

$$A = 2x^2 + 4x\frac{V}{x^2} = 2x^2 + 4\frac{V}{x}$$

□

Ejemplo. 17

a. Exprese el área A de un cuadrado en función de su perímetro P.

b. Exprese el perímetro P de un cuadrado en función de su área A.

Solución.

a. Se sabe que el área de un cuadrado es

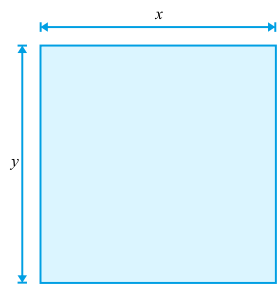
$$A = x^2 \tag{1.6}$$

También se sabe que su perímetro es:

$$P = 4x \tag{1.7}$$

De la ecuación (1.7 se tiene que: $x = \frac{P}{4}$. Reemplazando x en la ecuación (1.6) tenemos,

$$A = \frac{P^2}{16}$$



b. De la ecuación (1.6) despejamos x y obtenemos:

$$x = \sqrt{A}$$

Sustituyendo x en la ecuación (1.7) se tiene

$$P(A) = 4\sqrt{A}$$

□

Ejemplo. 18

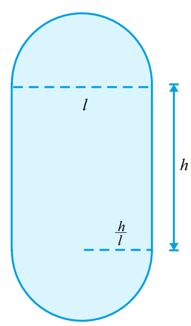
Un terreno tiene la forma de un rectángulo con dos semicírculos adosados a dos de sus lados opuestos. Si el perímetro del terreno es de 800 m, hallar el área A del terreno en función de la longitud l de uno de los lados del rectángulo.

Solución. Dibujemos primero el terreno. Su perímetro de 800 m es igual a

$$P = 800 = 2h + 2\pi\frac{l}{2} = 2h + \pi l \tag{1.8}$$

Su area es

$$A = lh + \pi\frac{l^2}{4} \tag{1.9}$$



Si queremos expresar esta área en función exclusivamente de l tenemos que sustituir el otro lado h en términos de l y esto lo podemos hacer pues de la ecuación (1.8) se tiene

$$h = \frac{800 - \pi l}{2}$$

Reemplazando h en la ecuación (1.9) se tiene:

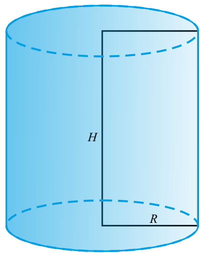
$$A = \frac{1600 - \pi l}{4}$$

□

Ejemplo. 19

Hallar el volumen en función del radio de un cilindro cuya área total, es de 150 cm^2.

Solución. Incógnitas, datos y dibujo.
R = radio del cilindro.
H = altura del cilindro.
Superficie = 150 cm^2



El volumen de un cilindro de radio R y altura H viene dado por

$$V(R,H) = \pi R^2 H \tag{1.10}$$

Sujeta a las condiciones: Superficie = 150 cm^2 entonces

$$2\pi R^2 + 2\pi RH = 150 \tag{1.11}$$

Despejando H de la ecuación (1.11) se tiene

$$H = \frac{150 - 2\pi R^2}{2\pi R} = \frac{75}{\pi R} - R$$

Reemplazando H en la ecuación (1.10)

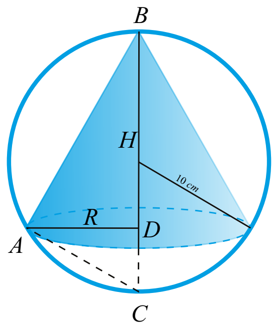
$$V(R) = \pi R^2 (\frac{75}{\pi R} - R) = 75R - \pi R^3$$

□

Ejemplo. 20

Hallar el volumen de un cono que se pueda inscribir en una esfera de 10 cm de radio en función de la altura H del cono

Solución. Incógnitas, datos y dibujo.
R = radio del cono.
H = altura del cono = BD



El triángulo ABC es rectángulo en A Por el teorema de la altura:

$$R^2 = BD \times DC = H(2 \times 10 - H) = 20H - H^2 \tag{1.12}$$

Como el volumen del cono viene dado por

$$V(R,H) = \frac{1}{3}\pi R^2 H \tag{1.13}$$

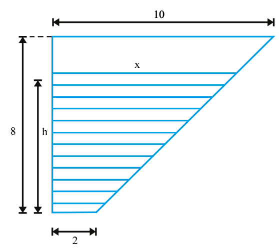
De (1.12) y (1.13) se tiene

$$V(H) = \frac{1}{3}\pi(20H - H^2)H = \frac{1}{3}\pi(20H^2 - H^3)$$

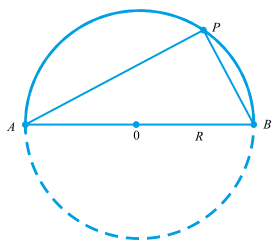
□

1.6.1. Ejercicios

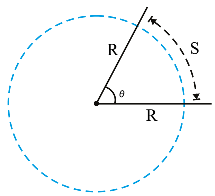
1.- Exprese el área de la región sombreada en términos de x.



2.- Sea ABP un triángulo inscrito en un semicírculo de radio R. Exprese el área del triángulo ABP en términos de x, en donde x es la medida del lado BP del triángulo ABP.

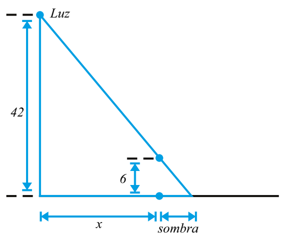


3.- Un sector circular de radio r centímetros y ángulo en el vértice θ tiene un área de 100 cm^2. Exprese el perímetro del sector circular en términos del radio R.

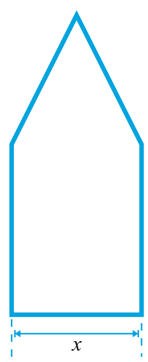


4.- Un rectángulo se inscribe en un semicírculo de radio 4, de tal manera que dos de sus vértices están sobre el diámetro. Si el lado sobre el diámetro tiene longitud x, exprese el área del rectángulo en términos de x.

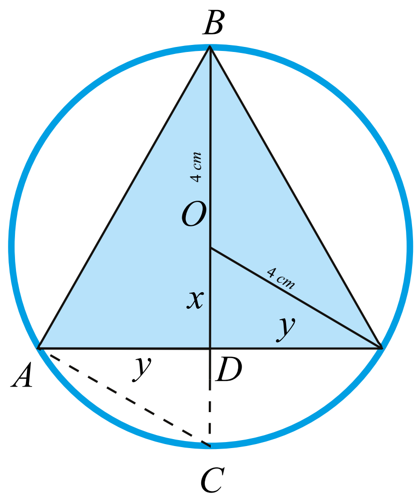
5.- Angélica mide 6 pies de estatura y se aleja de la luz de un poste del alumbrado público que está a 42 pies de altura, tal como se ilustra. Si x pies es la distancia de Angélica al poste; exprese la longitud de la sombra que proyecta Angélica sobre el piso en términos de x.



6.- Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado con un triángulo equilátero. El perímetro de la ventana es de 4 metros. Si la base del rectángulo mide x metros; exprese el área total de la ventana en términos de x.



7.- Calcula el área del triángulo isósceles inscrito en un círculo de radio 4 cm, en términos de x.

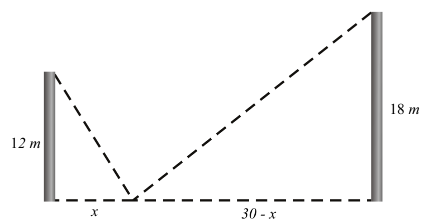


8.- Calcula el área de un triángulo rectángulo tal que la suma de las longitudes de sus catetos valga 4 cm en función de uno de sus catetos.

9.- Calcular el area de un triángulo isósceles cuyo perímetro es de 60 cm, en función de la longitud de los lados iguales.

10.- Calcula el area de un rectángulo inscrito en un semicírculo de 10 cm de radio en función de uno de sus lados.

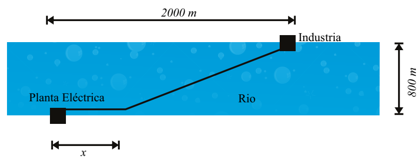
11.- Dos postes de 12 m y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable uniendo un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos. ¿Hallar la longitud del cable en términos de x?



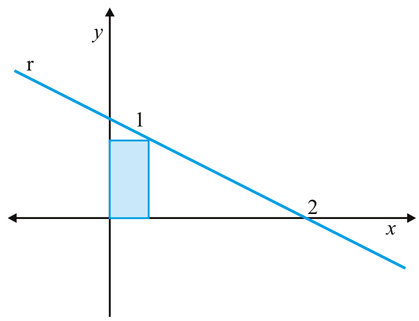
12.- Calcular el volumen de un cilindro inscrito en una esfera de 5 cm de radio, en función de la altura del cilindro.

13.- Hallar el volumen del cono circular recto que puede inscribirse en una esfera de radio R en función de la altura del cono ($a > 0$).

14.- Se va a tender un cable desde una planta eléctrica ubicada a un lado de un río de 800 metros de ancho hasta una industria que se encuentra al otro lado, 2000 metros río arriba de la planta. El costo de tender el cable por debajo del agua es 5000UM por kilómetro y sobre tierra es de 3000UM por kilómetro. El cable seguirá la orilla del río a partir de la planta una distancia de x kilómetros y luego cruzará diagonalmente el río en línea recta directamente hasta la industria. Determine el valor del cable en función de x.



15.- De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta r de ecuación $\frac{x}{2}+y=1$ (ver figura), determina el área en función de x.



Capítulo 2

Límites y Continuidad

Introducción 2.1

El concepto de límite es uno de los más importantes en el análisis matemático. Sobre el concepto de límite reside la definición de continuidad de una función en un punto así como la de derivabilidad de una función en un punto. En particular, vamos a desarrollar suficiente destreza de cálculo como para poder determinar, para cualquier función, la existencia del límite en un punto, es decir, la existencia de una cantidad real finita a la que converge la función al aproximarse a dicho punto, tanto desde valores superiores como inferiores a él.

Se afirma la existencia del límite cuando los límites por arriba y por debajo del punto considerado arrojan el mismo resultado numérico. Estos límites reciben el nombre de límites laterales. Cuando coinciden, el límite existe y su valor es el de los dos límites laterales.

Investigar la existencia de límite conlleva efectuar el cálculo explícito de los límites laterales que muy a menudo supone resolver indeterminaciones como por ejemplo: $0 * \infty$. ¿Qué significa $0 * \infty$? Básicamente significa que al buscar el límite de una expresión, si sustituimos la variable por el valor al que tiende, obtenemos algo que tiende a 0 por algo que tiende a ∞ . Dependiendo del "grado" o la "fuerza" con la que la primera parte de la función tiende a 0 y la segunda a ∞ , la "indeterminación" puede arrojar un valor nulo, real (finito) o infinito.

Límite de Funciones 2.2

La idea de límite de una función tiene que ver con la predicción de su comportamiento en un punto en base al exhibido en sus proximidades. Así se dice que f tiene límite L en c si para valores de entrada x cada vez más próximos a c la función toma valores de salida $f(x)$ cada vez más próximos a L.

La definición anterior es clara desde un punto de vista intuitivo. No obstante es imprecisa por lo que es necesario dar una definición rigurosa formalizando especialmente la expresión "cada vez mas próximos".

2.2.1. Definición $\varepsilon - \delta$ de Límite

Definición: 2.14

Sea f una función real con dominio D. Supongamos que D contiene intervalos de la forma (a,c) y (c,b). Se dice que un número real L es **límite** de f cuando x tiende a c y se escribe

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

si solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si

$$0 < |x-c| < \delta$$

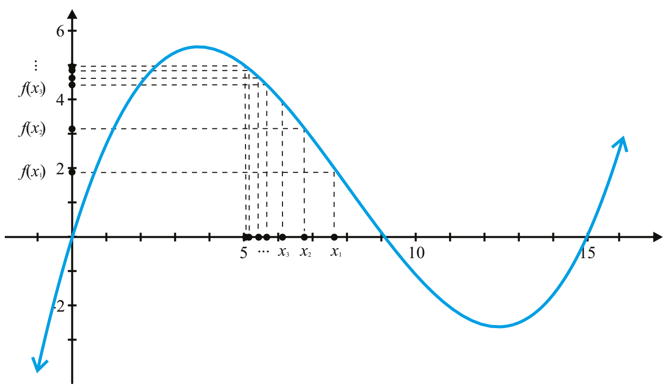
entonces

$$|f(x)-L| < \varepsilon.$$

Obsérvese que en la definición anterior se ha incluido la condición de que sea $0 < |x-c| < \delta$. Esto quiere decir que la condición $|f(x) - L| < \varepsilon$ solo es necesario que se cumpla para los x pertenecientes al intervalo $(c-\delta, c+\delta)$ distintos del propio c. Esto se hace porque al hablar de límites no interesa tanto lo que ocurre exactamente en el punto c como el comportamiento de la función en los alrededores de dicho punto. Por ello es posible preguntar por el límite de una función en un punto en el que no esté definida, siempre y cuando si lo esté alrededor de dicho punto.

Al excluir el punto c en la definición de límite, también puede ocurrir que aún estando la función definida en c y existiendo el límite L en dicho punto, fuera $L \neq f(c)$.

Gráficamente:



2.2.2. Ejemplos de Límites Mediante la Definición

Los ejemplos siguientes muestran cómo se puede usar la definición formal de límite para calcular límites de casos simples. No obstante, el principal uso de dicha definición es poder establecer propiedades generales sobre limites.

Ejemplo. 21

Sean c y k números reales cualesquiera. Entonces,

$$\lim_{x\to c} k = k.$$

Solución. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y supongamos $0 < |x - c| < \delta$ para un $\delta > 0$ por determinar. Haciendo $f(x) = k$ y $L = k$ en la definición de límite se tiene

$$|f(x) - L| = |k - k| = 0 < \varepsilon$$

independiente de δ. Por tanto la definición del límite se satisface tomando δ como cualquier número positivo, por ejemplo $\delta = 1$. □

Ejemplo. 22

Sea c un número real cualquiera. Entonces,

$$\lim_{x\to c} x = c$$

Solución:. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y supongamos $|x-c| < \delta$ para un $\delta > 0$ por determinar. Haciendo $f(x) = x$ y $L = c$ en la definición de límite se tiene

$$|f(x) - L| = |x - c| < \delta$$

por lo que eligiendo $\delta \leq \varepsilon$ resulta

$$|f(x) - L| = |x - c| < \varepsilon$$

□

Ejemplo. 23

Sea c un número real cualquiera. Entonces,

$$\lim_{x\to c} x^2 = c^2$$

Solución. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y supongamos $|x - c| < \delta$ para un $\delta > 0$ por determinar. Haciendo $f(x) = x^2$ y $L = c^2$ en la definición de límite se tiene

$$\begin{aligned}
|f(x) - L| = |x^2 - c^2| &= |(x-c)(x+c)| \\
&= |x-c||x+c| \\
&< \delta|x+c| \\
&= \delta|x-c+2c| \\
&\leq \delta(|x-c| + 2|c|) \\
&< \delta(\delta + 2|c|)
\end{aligned}$$

Ejemplo. 23 (Continuación)

Eligiendo $\delta \leq 1$ resulta,

$$|x^2 - c^2| < \delta(1 + 2|c|).$$

Si, a su vez escogemos

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{1 + 2|c|}$$

finalmente se obtiene

$$|x^2 - c^2| < \varepsilon.$$

Por tanto la definición de límite se satisface eligiendo

$$\delta < \text{mín}\left(1, \frac{\varepsilon}{1 + 2|c|}\right)$$

□

Ejemplo. 24

Sea c un número real distinto de cero. Entonces,

$$\lim_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}.$$

Solución. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y supongamos $|x - c| < \delta$ para un $\delta > 0$ por determinar. Haciendo $f(x) = \frac{1}{x}$ y $L = \frac{1}{c}$ en la definición de límite se tiene

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| \\ &= \left|\frac{c - x}{xc}\right| \\ &= \frac{|x - c|}{|x||c|} \\ &< \frac{\delta}{|x||c|} \end{aligned}$$

Puesto que,

$$|c| = |(c - x) + x| \leq |x - c| + |x| < \delta + |x|$$

eligiendo $\delta \leq \frac{|c|}{2}$ se tiene,

$$0 < \frac{|c|}{2} \leq |c| - \delta < |x|$$

y por consiguiente,

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{c}\right| < \frac{\delta}{\frac{|c|}{2}|c|}$$

$$= \frac{2\delta}{|c|^2}$$

Si, a su vez escogemos

$$\delta \leq \frac{\varepsilon|c|^2}{2}$$

finalmente resulta

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{c}\right| < \varepsilon$$

Por tanto la definición de límite se satisface eligiendo un

$$\delta \leq \text{mín}\left(\frac{|c|}{2}, \frac{\varepsilon|c|^2}{2}\right)$$

□

Ejemplo. 25

Sea c un número real no negativo. Entonces,

$$\lim_{x\to c}\sqrt{x} = \sqrt{c}.$$

Solución:. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y supongamos $|x-c| < \delta$ para un $\delta > 0$ por determinar. Haciendo $f(x) = \sqrt{x}$ y $L = \sqrt{c}$ en la definición de límite se tiene

$$\begin{aligned}|f(x)-L| &= |\sqrt{x}-\sqrt{c}|\\ &= \left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{c})(\sqrt{x}+\sqrt{c})}{(\sqrt{x}+\sqrt{c})}\right|\\ &= \left|\frac{x-c}{(\sqrt{x}+\sqrt{c})}\right|\\ &< \frac{|x-c|}{(\sqrt{x}+\sqrt{c})}\end{aligned}$$

Suponiendo $\delta \leq \sqrt{x}$ y por consiguiente

$$\begin{aligned}|\sqrt{x}-\sqrt{c}| &< \frac{\delta}{\sqrt{c-\delta}+\sqrt{c}}\\ &\leq \frac{\delta}{\sqrt{c}}\end{aligned}$$

Si a su vez escogemos

$$\delta \leq \varepsilon\sqrt{c}$$

finalmente resulta

$$|\sqrt{x}-\sqrt{c}| < \varepsilon$$

Por tanto la definición de límite se satisface eligiendo un

$$\delta \leq \text{mín}\left(\varepsilon\sqrt{c}, c\right)$$

□

Ejemplo. 26

Sea c un número real cualquiera. Entonces,

$$\lim_{x\to c} |x| = |c|$$

Solución. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y supongamos $0 < |x-c| < \delta$ para un $\delta > 0$ por determinar. Haciendo $f(x) = |x|$ y $L = |c|$ en la definición de límite, se tiene

$$|f(x) - L| = ||x| - |c|| \leq |x-c| < \delta$$

por lo que eligiendo $\delta \leq \varepsilon$ resulta

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

□

También es posible utilizar la definición anterior para probar la no existencia de límite.

Ejemplo. 27

El límite

$$\lim_{x\to c} \frac{x}{|x|}$$

no existe

Solución:. En efecto supongamos que existe el límite L. Tomemos $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Por la definición de límite existen $\delta > 0$ tal que para todo

$$0 < |x| < \delta$$

se satisface

$$|f(x) - L| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

En particular tomando $x = \frac{\delta}{2}$ se tendrá

$$\left|f\left(\frac{\delta}{2}\right) - L\right| < \frac{1}{2}$$

y análogamente tomando $x = -\frac{\delta}{2}$

$$\left|f\left(-\frac{\delta}{2}\right) - L\right| < \frac{1}{2}$$

Como por la propia definición f se tiene

$$f\left(\frac{\delta}{2}\right) = 1 \quad \text{y} \quad f\left(-\frac{\delta}{2}\right) = -1$$

resulta

$$\begin{aligned} 2 &= \left| f\left(\frac{\delta}{2}\right) - f\left(-\frac{\delta}{2}\right) \right| \\ &= \left| f\left(\frac{\delta}{2}\right) - L + L - f\left(-\frac{\delta}{2}\right) \right| \\ &\leq \left| f\left(\frac{\delta}{2}\right) - L \right| + \left| f\left(-\frac{\delta}{2}\right) - L \right| \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

lo que es una contradicción $\square$

2.2.3. Unicidad del Límite

En general, como hemos visto en los ejemplos anteriores, puede ocurrir que exista o que no exista límite en un punto determinado. Lo que no puede ocurrir es que existan dos límites distintos.

Teorema: 2.10

Si existe límite de una función en un punto, el límite es único.

Demostración. En efecto, supongamos que existieran dos límites L y K distintos. Entonces, podemos escoger

$$\varepsilon = \frac{1}{2}|L-K| > 0.$$

Por ser L límite de f, existe un $\delta_1 > 0$ tal que si

$$0 < |x-c| < \delta_1$$

entonces,

$$|f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Análogamente, por ser K límite de f, existe un $\delta_2 > 0$ tal que si

$$0 < |x-c| < \delta_2$$

entonces,

$$|f(x)-K| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$ y escojamos un $x_0 \in D$ tal que

$$0 < |x_0 - c| < \delta.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |L-K| &= |L - f(x_0) + f(x_0) - K| \\ &\leq |f(x_0) - L| + |f(x_0) - K| \\ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{1}{2}|L-K| \end{aligned}$$

lo que es una contradicción. Por tanto, si existen dos límites L y K, estos han de ser iguales. □

2.2.4. Límites y Acotación

Teorema: 2.11

Si existe

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

la función está acotada en un intervalo centrado en $x = c$

Demostración.]Supongamos que existe

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

Tomando $\varepsilon = 1$ en la definición de límite podemos asegurar que existe un $\delta > 0$ tal que si

$$0 < |x - c| < \delta$$

entonces

$$|f(x) - L| < \varepsilon = 1$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |L + (f(x) - L)| \\ &\leq |L| + |f(x) - L| \\ &< |L| + 1. \end{aligned}$$

para todo $0 < |x - c| < \delta$. Esto prueba que la función f está acotada en el intervalo perforado $(c - \delta, c) \bigcup (c, c + \delta)$.

Si c pertenece al dominio de f eligiendo $K = \text{máx}\{|L| + 1, |f(c)|\}$ se verifica

$$|f(x)| \leq K$$

para todo $x \in (c - \delta, c + \delta)$. □

En consecuencia funciones no acotadas no poseen límite. Por ejemplo las funciones $1/x$ o $1/x^2$ no poseen límite en $x=0$. Más adelante veremos que algunas de estas funciones no acotadas poseerán límite en sentido infinito.

El recíproco es falso, una función acotada no necesariamente posee límite como se muestra en el ejemplo

$$f(x)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases} +1 & \text{si} \quad x>0 \\ -1 & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$

2.2.5. Cálculo de Límites

De forma intuitiva, el límite de una función en un punto c se puede calcular a partir de una tabla de valores de salida correspondientes a valores próximos a c, o bien mediante la representación gráfica de la función en un intervalo que contenga c.

De forma exacta los límites se calculan usando reglas de computación desarrolladas a partir de esta teoría. A continuación enunciaremos las reglas básicas para el cálculo de límites. En capítulos posteriores se expondrán otros métodos como la fórmula de L'Hopital o los desarrollos en serie de potencias.

2.2.6. Álgebra de Límites

A continuación exponemos las reglas que combinan el proceso de límite con las operaciones aritméticas. Todas ellas se obtienen directamente a partir de la definición de límite y omitiremos su demostración.

Teorema: 2.12

Supongamos

$$\lim_{x\to c} f(x)=L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c} g(x)=M$$

y k constante. Entonces,

1. Regla de la suma.
$$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]=L+M$$
2. Regla de la diferencia
$$\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)]=L-M$$
3. Regla de la multiplicación por una constante
$$\lim_{x\to c} kf(x)=kL$$
4. Regla del producto
$$\lim_{x\to c} f(x)g(x)=LM$$
5. Regla del cociente
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}$$
siempre que $M\neq 0$.

Teorema: 2.12 (Continuación)

6. Regla de los Radicales
$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$
con n entero positivo y $L > 0$ para n par.

Las reglas de la suma y del producto por una constante se pueden combinar en una sola regla

$$\lim_{x\to c}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha L + \beta M.$$

Tanto esta regla como la del producto pueden extenderse mediante inducción matemática a un número cualquiera de funciones obteniéndose el siguiente resultado.

Corolario: 2.2

Si
$$\lim_{x\to c} f_1(x) = L_1, \lim_{x\to c} f_2(x) = L_2, \ldots, \lim_{x\to c} f_n(x) = L_n$$
entonces

1. $$\lim_{x\to c}[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x)] = k_1 L_1 + k_2 L_2 + \cdots + k_n L_n$$

2. $$\lim_{x\to c}[f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)] = L_1 L_2 \ldots L_n$$

Ejemplo. 28

Si $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ entonces
$$\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$$

Solución. En efecto, puesto que
$$\lim_{x\to c} x = c$$
aplicando la propiedad 2 del corolario anterior, para todo entero $k > 0$ se tiene

$$\lim_{x\to c} x^k = \lim_{x\to c}\left[\overbrace{xx\ldots x}^{k}\right] = \left[\overbrace{cc\ldots c}^{k}\right] = c^k.$$

Utilizando la regla 1 del corolario anterior y teniendo en cuenta que el límite de una constante es la propia constante, resulta

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} p(x) &= \lim_{x\to c}[a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n]\\ &= a_0 \lim_{x\to c} 1 + a_1 \lim_{x\to c} x + \cdots + a_n \lim_{x\to c} x^n\\ &= a_0 + a_1 c + \cdots + a_n c^n\\ &= p(c)\end{aligned}$$

□

Ejemplo. 29

Si

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

es una función racional y $q(c) \neq 0$ entonces

$$\lim_{x\to c} r(x) = r(c)$$

Solución. En efecto, puesto que p y q son polinomios se tiene

$$\lim_{x\to c} p(x) = p(c) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c} q(x) = q(c)$$

basta aplicar la regla del cociente para obtener

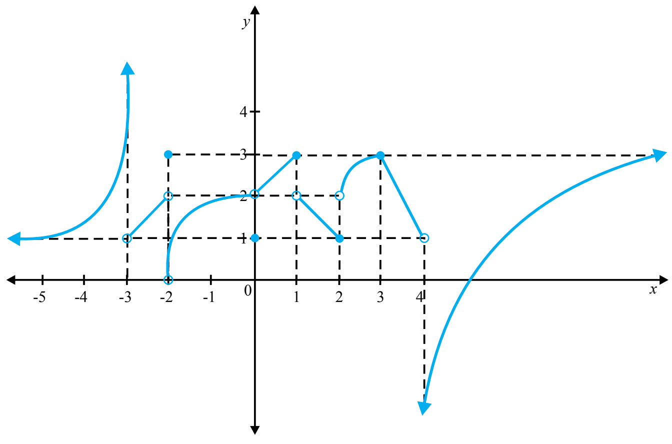
$$\lim_{x\to c} r(x) = \lim_{x\to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)} = r(c).$$

□

Nota:
Observamos que los límites de las funciones polinómicas y racionales coinciden con el valor de la expresión en el punto siempre que estén definidas en él. Lo mismo ocurre en general con todas las funciones algebraicas, es decir con las funciones generadas mediante sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y extracción de raíces, en aquellos puntos en que sea aplicable la regla de los radicales.

2.2.7. Ejercicios

1.- Sea f una función cuya gráfica se ilustra. Evalué justificando claramente su repuesta para cada caso o explicar porqué no existe



a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b) $\lim_{x\to-3^-} f(x)$

c) $\lim_{x\to-3^+} f(x)$

e) $f(-3)$

f) $\lim_{x\to-2^-} f(x)$

g) $\lim_{x\to-2^+} f(x)$

h) $f(-2)$

i) $\lim_{x\to 0} f(x)$

j) $f(0)$

k) $\lim_{x\to 1} f(x)$

l) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

m) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

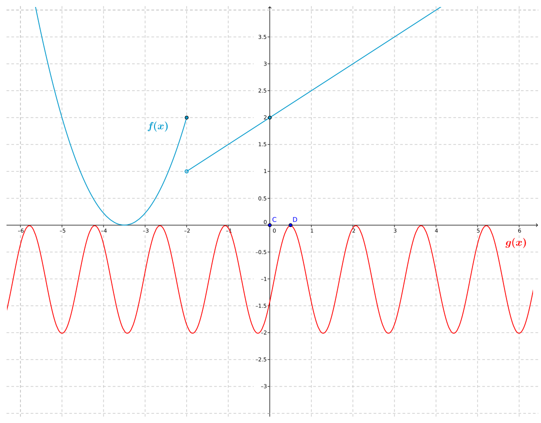
n) $\lim_{x\to 2} f(x)$

o) $\lim_{x\to 4^-} f(x)$

p) $\lim_{x\to 4^+} f(x)$

q) $\lim_{x\to\infty} f(x)$

2.- Considere el siguiente gráfico.



Determine los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x))$

c) $\lim\limits_{x\to -2} \Big(f(x)-g(x)\Big)$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3f(x)-5g(x)}{\pi x})$

Determinar los límites en los ejercicios del 4 al 11.

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x-3}{x+4}$

5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+3}{x+2}$

6. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{x+5}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^3+8x^2+2}{3x^4-16x^2+1}$

8.- $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

9.- $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+4x+3}{x-3}$

10.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-2}$

11.- $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{9x^3+3x^2-5x+1}{2x^4+3x^3+3x+1}$

Formas Indeterminadas 2.3

La regla del cociente establece que si

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c} g(x) = M \neq 0$$

entonces,

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

Ahora bien, ¿que ocurre si $M=0$? En primer lugar veamos que si existe el límite K del cociente, entonces L debe ser cero. En efecto,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to c} f(x) \\ &= \lim_{x\to c} \left[\frac{f(x)}{g(x)} g(x)\right] \\ &= \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \lim_{x\to c} g(x) \\ &= KM = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, siendo $M=0$ es condición necesaria para que halla límite del cociente que $L=0$. Dicho de otra forma, si $L\neq 0$ y $M=0$ no existe el límite del cociente.

La cuestión que se plantea ahora es que si $L=M=0$ existirá el límite del cociente y si este será igual a 1. La repuesta es que puede ocurrir cualquier cosa, que no exista el límite o que exista y tome cualquier valor. Por ejemplo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lambda x}{x} = \lambda$$

para cualquier λ. Por otra parte

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

y dicho límite no existe ya que el último límite corresponde al caso $L\neq 0$ y $M=0$.

Por ello, el límite de un cociente en el que el numerador y denominador tiendan ambos a 0 se dice que es una forma indeterminada del tipo $0/0$.

Dos técnicas simples para resolver estas formas indeterminadas consisten en la cancelación de ceros y racionalización de la fracción.

Ejemplo. 30 **Cancelación de ceros**

Calcular $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+3x^2+x+3}{x^2+x-6}$.

Solución. Haciendo $x=-3$ en el numerador y denominador observamos que se trata de una forma del tipo $0/0$. Factorizando el numerador y el denominador y cancelando los ceros comunes a ambos resulta una forma determinada, es decir una expresión cuyo límite es calculable mediante sustitución. En efecto,

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^3+3x^2+x+3}{x^2+x-6}=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x^2+1)}{(x+3)(x-2)}=\lim_{x\to-3}\frac{(x^2+1)}{(x-2)}=-2$$

□

Ejemplo. 31 **Racionalización**

Calcular el límite

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}.$$

Solución. Haciendo $x=0$ en el numerador y denominador observamos que se trata de una forma del tipo $0/0$. Ahora, racionalizamos el denominador multiplicando denominador y numerador por $\sqrt{x+4}+2$. Con ello resulta,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}&=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}\,\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{x+4-4}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{x}\\&=\lim_{x\to0}(\sqrt{x+4}+2)\\&=4\end{aligned}$$

□

Ejemplo. 32

Calcule $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

Solución. Para resolver este límite se puede considerar que $t = \sqrt[3]{x}$, entonces $x = t^3$; además cuando $x \to 8$ sucede que $t \to \sqrt[3]{8} = 2$
Luego

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} &= \lim_{t\to 2} \frac{t^3-8}{t-2} \\
&= \lim_{t\to 2} \frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{t-2} \\
&= \lim_{t\to 2}(t^2+2t+4) \\
&= 12
\end{aligned}$$

□

Ejemplo. 33

Calcule $\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

Solución. Para eliminar tanto a la raíz cuadrada como a la raíz cúbica, obtenemos el mínimo común múltiplo de los indices 2 y 3 que es 6, proponemos el cambio de variable $x = t^6$

Si $x = t^6$, entonces $t = \sqrt[6]{x}$; además cuando $x \to 64$, sucede que $t \to \sqrt[6]{64} = 2$

Luego

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} &= \lim_{t\to 2} \frac{\sqrt{t^6}-8}{\sqrt[3]{t^6}-4} \\
&= \lim_{t\to 2} \frac{(t^3-8)}{t^2-4} \\
&= \lim_{t\to 2} \frac{(t-2))(t^2+2t+4)}{(t-2)(t+2)} \\
&= \lim_{t\to 2} \frac{(t^2+2t+4)}{(t+2)} \\
&= \frac{12}{4} = 3
\end{aligned}$$

□

Ejemplo. 34

Calcule $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

Solución. Para eliminar tanto a la raíz cuarta como a la raíz cúbica, obtenemos el mínimo común múltiplo de los índices 4 y 3 que es 12, proponemos el cambio de variable $x = t^{12}$

Si $x = t^{12}$, entonces $t = \sqrt[12]{x}$; además cuando $x \to 1$, sucede que $t \to \sqrt[12]{1} = 1$

Luego

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} &= \lim_{t\to 1} \frac{\sqrt[3]{t^{12}}-1}{\sqrt[4]{t^{12}}-1} \\
&= \lim_{t\to 2} \frac{(t^4-1)}{t^3-1} \\
&= \lim_{t\to 2} \frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{(t-1)(t^2+t+1)} \\
&= \lim_{t\to 2} \frac{(t+1)(t^2+1)}{(t^2+t+1)} \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

□

Ejemplo. 35 C

alcule $\lim_{x\to 9} \dfrac{x+\sqrt{x}-12}{\sqrt{x}-3}$

Solución. Para eliminar a la raíz cuadrada, proponemos el cambio de variable $x = t^2$

Si $x = t^2$, entonces $t = \sqrt[2]{x}$; además cuando $x \to 9$, sucede que $t \to \sqrt[2]{9} = 3$

Luego

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 9} \frac{x+\sqrt{x}-12}{\sqrt{x}-3} &= \lim_{t\to 3} \frac{t^2+t-12}{t-3} \\
&= \lim_{t\to 3} \frac{(t+4)(t-3)}{(t-3)} \\
&= \lim_{t\to 3} \frac{(t+4)}{1} \\
&= 7
\end{aligned}$$

□

2.3.1. Ejercicios

1.- $\lim_{x\to 5} \dfrac{x-5}{x^2-25}$

2.- $\lim_{x\to 5} \dfrac{x+5}{x^2-25}$

3.- $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{x-5}$

4.- $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$

5.- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$

6.- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

7.- $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+3x-10}{x+5}$

8.- $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{x^2-5x+4}$

9.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

10.- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-6x+8}$

11.- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-7x+10}{x-2}$

12.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$

13.- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3-a^3}{x^4-a^4}$

14.- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

15.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$

16.- $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$

17.- $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

18.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

19.- $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-x-3}{x^3+2x^2+6x+5}$

20.- $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3-x^2-x+10}{x^2+3x+2}$

21.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{x+2}}{x}$

22.- $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

23.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

24.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$

25.- $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}\right)\left(\dfrac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\right)$

26.- $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{x+\sqrt{x}-20}{\sqrt{x}-4}$

27.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}+x-2}$

28.- $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{9x^3+3x^2-5x+1}{2x^4+3x^3+3x+4}$

29.- $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^3-x^2-5x-3}$

30.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$

31.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-4x^3+2x+1}{x^3+2x-3}$

32.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x\sqrt{x}-1}{2x^2+5x-7}$

33.- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^3+2x^2-5x-6}$

34.- $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$

35.- $\lim\limits_{x\to 27} \dfrac{\sqrt{6+\sqrt[3]{x}}-3}{x-27}$

36.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{64-x}-4}{x}$

37.- $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{\sqrt[4]{x+6}-2}{x-10}$

38.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1-x}-1}$

39.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[4]{76+5x}-\sqrt{12-3x}}{\sqrt[3]{2-x}-1}$

40.- $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}-3}$

41.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x+26}-\sqrt[4]{80+x}}{\sqrt{x+8}-3}$

42.- $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$

43.- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt[3]{3x+2}}{x^2-4}$

2.4 Extensiones del Concepto de Límite

2.4.1. Límites y Valor Absoluto

Las siguientes propiedades establecen la relación entre los límites y valor absoluto. Ambas se obtienen de forma fácil a partir de la definición de límite y debiera hacerse como ejercicio.

Teorema: 2.13

Si

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

entonces,

$$\lim_{x\to c} |f(x)| = |L|$$

En particular

$$\lim_{x\to c} |x| = |c|.$$

El recíproco es falso como lo muestra la función $sign(x)$. En efecto,

$$sign(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

por lo que

$$\lim_{x\to 0} |sign(x)| = 1$$

mientras que

$$\lim_{x\to 0} sign(x)$$

no existe.

No obstante el recíproco es cierto cuando $L = 0$ pudiéndose afirmar el siguiente resultado

Teorema: 2.14 S

i

$$\lim_{x\to c} f(x) = 0$$

si solo si

$$\lim_{x\to c} |f(x)| = 0$$

2.4.2. Límites Laterales

Al considerar la definición de límite cuando x tiende hacia c se puede exigir que los valores de x sean siempre mayores que c o siempre menores que c. Se obtienen así los conceptos de límite por la izquierda y límite por la derecha.

Definición: 2.15

Sea f una función real de dominio D, c y L números reales. Supongamos que D contiene un intervalo de la forma (c,d). Se dice que f tiene **límite por la derecha en c** si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ y

$$c < x < c + \delta$$

se verifica que

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

En cuyo caso se escribe

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

y se lee el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c por la derecha es L

Análogamente

Definición: 2.16

Sea f una función real de dominio D, c y L números reales. Supongamos que D contiene un intervalo de la forma (a,c). Se dice que f tiene **límite por la izquierda en c** si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ y

$$c - \delta < x < c$$

se verifica que

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

En cuyo caso se escribe

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

y se lee el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c por la izquierda es L

Los límites por la izquierda y derecha se conocen indistintamente como **límites laterales**. Estos límites satisfacen las mismas propiedades y reglas de cálculo que los límites no laterales.

Es fácil probar que si los límites laterales de una función f en un punto determinado c existen y coinciden entre sí, es decir.

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

entonces f posee límite en dicho punto y se verifica

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Por otra parte si los límites laterales no existen o no coinciden entre sí se puede asegurar que f no tiene límite en c. Todas estas consideraciones son especialmente útiles al analizar funciones definidas a trozos.

Ejemplo. 36

Dada $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

Calcular

1.- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

2.- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

3.- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Solución. Como para $x \neq 0$ se tiene

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

1.- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$

2.- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} -1 = -1$

3.- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe debido a que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

$\square$

Ejemplo. 37

Dada

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 - 3 & \text{si} \quad -1 < x < 2 \\ 2 - x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Calcular:

1.- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

2.- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

3.- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

4.- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

5.- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

6.- $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Solución. Encontramos que:

1. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (-2) = -2$
2. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 - 3) = (1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$
3. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -2$ ya que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -2$

4. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2-3) = 1$

5. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2-x) = 0$

6. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe ya que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

$\square$

Ejemplo. 38

Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} ax+11 & \text{si} \quad x<3 \\ x^2-8x+16 & \text{si} \quad x>3. \end{cases}$$

Determinar el valor de la constante a que asegura la existencia del $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$.

Solución. Calculamos $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (ax+11) = 3a+11$

$\lim\limits_{x\to 3^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2-8x+16) = 9-24+16 = 1$

Luego:

$\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ existe $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} g(x) \Leftrightarrow 3a+11 = 1 \Leftrightarrow 3a = -10 \Leftrightarrow a = -\dfrac{10}{3}$ $\square$

Ejemplo. 39

Considerar

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ x+1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases} \quad \text{y considerar} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ 2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Calcular:

1.- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)g(x)$ 2.- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)g(x)$ 3.- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)g(x)$

Solución. Tenemos:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \times \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} (x^2+3) \times \lim\limits_{x\to 1} x^2 = 4\times 1 = 4$

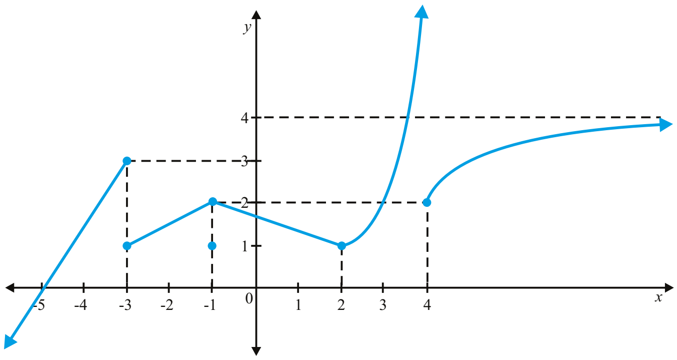
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \times \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} (x+1) \times \lim\limits_{x\to 1} (2) = 2\times 2 = 4$

Como ambos límites existen y son iguales a 4 se tiene:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)g(x) = 4$ $\square$

2.4.3. Ejercicios

1.- Sea f una función cuya gráfica se ilustra. Calcule, si existe (justificando cada repuesta):



a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) $f(-3)$

c) $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$

f) $f(-1)$

g) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$

h) $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$

i) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$

j) $f(2)$

k) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

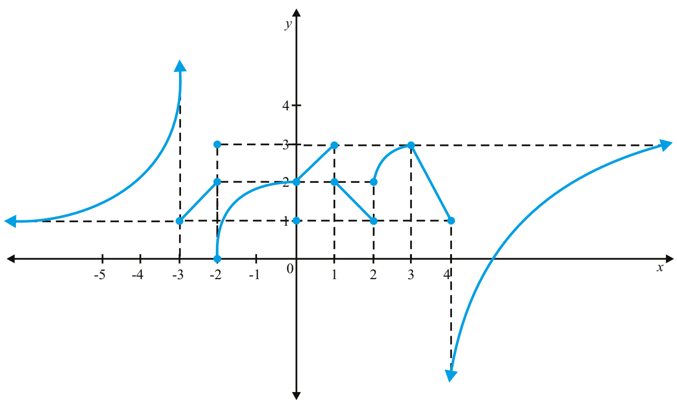
k) $f(4)$

g) $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)$

h) $\lim\limits_{x\to4^+} f(x)$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

2.- Sea f una función cuya gráfica se ilustra. Evalúe, justificando claramente su respuesta para cada caso o explicando por que no existe:



a) $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)$

c) $f(-3)$

d) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$

f) $f(-2)$

g) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

h) $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

i) $f(0)$

j) $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

k) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$

l) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$

m) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

n) $\lim\limits_{x\to3} f(x)$

o) $\lim\limits_{x\to4^+} f(x)$

p) $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)$

En los ejercicios del 3 al 12, calcular el límite

3.- $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-x-[\![5x-4]\!](x-1)}{x^2+x-2}$

4.- $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-x-[\![5x-4]\!](x-1)}{x^2+x-2}$

5.- $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-|x-1|-1}{x-1}$

6.- $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-|x-1|-1}{x-1}$

7.- $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x^2-3x+2|}$

8.- $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x^2-3x+2|}$

9.- $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-x-2}{|x-2|}$

10.- $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-x-2}{|x-2|}$

11.- $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-[\![2x]\!]}{\sqrt{x}-1}$

12.- $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-[\![x]\!]}{\sqrt{x}-1}$

Tipos de Límites 2.5

2.5.1. Límites Infinitos

A veces ocurre que cuando aproximamos a un punto los valores que un función toma en sus proximidades se hacen cada vez mayores superando cualquier número positivo prefijado. En este caso diremos que tiene límite más infinito en dicho punto. Por otra parte si los valores se hacen cada vez menores superando cualquier número negativo prefijado se dice que tiene límite menos infinito en dicho punto. En ambos casos la función no está acotada y se dice que se "dispara en las proximidades del punto".

Definición: 2.17

Sea f una función real con dominio D. Supongamos que D contiene intervalos de la forma (a,c) y (c,d). Se dice que f tiene **límite** $+\infty$ **en** c si y solo si para cada $M>0$ existe un $\delta>0$ tal que si $x\in D$ y

$$0<|x-c|<\delta$$

se verifica

$$f(x)>M$$

En cuyo caso se escribe

$$\lim_{x\to c} f(x)=+\infty.$$

Análogamente,

Definición: 2.18

Sea f una función real con dominio D. Supongamos que D contiene intervalos de la forma (a,c) y (c,d). Se dice que f tiene **límite** $-\infty$ **en** c si y solo si para cada $N<0$ existe un $\delta>0$ tal que si $x\in D$ y

$$0<|x-c|<\delta$$

se verifica

$$f(x)<N$$

En cuyo caso se escribe

$$\lim_{x\to c} f(x)=-\infty.$$

Así mismo existen cuatro tipo posibles de límites laterales infinitos cuya definición formal se deja al lector

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=+\infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to c^+} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=+\infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to c^-} f(x)=-\infty$$

Los límites infinitos no son en realidad límites ya que $\pm\infty$ no son números sino símbolos. No obstante las reglas algebraicas de límites pueden aplicarse siempre que no conduzcan a formas indeterminadas del tipo

$$\infty, \quad -\infty, \quad \infty\times 0, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 1^{\infty}, \quad \infty^0$$

Antes de presentar algunos ejemplos se necesitan dos teoremas de límites que implican límites "infinitos"

Teorema: 2.15

Si n es cualquier entero positivo, entonces

1.) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n}=+\infty$

2.) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n}=+\infty$ si n es par

3.) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n}=-\infty$ si n es impar.

Teorema: 2.16

Si c es un número real cualquiera, $\lim_{x\to c} f(x)=0$ y $\lim_{x\to c} g(x)=M$ y $M\neq 0$ entonces

1.) Si $M>0$ y $f(x)\to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces $\lim_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)}=+\infty$

Teorema: 2.16 (Continuación)

2.) Si $M > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

3.) Si $M < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

4.) Si $M < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

El teorema también es válido si se sustituye $x \to c$ por $x \to c^+$ o $x \to c^-$

El teorema anterior indica una manera de distinguir un límite infinito, además establece la necesidad de hacer uso de los límites laterales para ver si el límite existe o no. Dado que se quiere dejar de lado las tablas y pasar de la intuición que estas nos brindan a un punto de vista más formal introduciremos la siguiente notación.

Nota:
Decimos que $\lim\limits_{x\to b^-} g(x) = 0^+$ (o $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = 0^+$) para significar que $g(x) \to 0$ ($f(x) \to 0$) a través de valores positivos de $g(x)$ ($f(x)$) cuando $x < b$ ($x > b$).

Del mismo modo $\lim\limits_{x\to b^+} g(x) = 0^-$ (o $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = 0^+$) para significar que $g(x) \to 0$ ($f(x) \to 0$) a través de valores negativos de $g(x)$ ($f(x)$) cuando $x > b$ ($x < b$).

Ejemplo. 40

Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\sqrt[5]{x} - 3\sqrt[4]{x}}{3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}}$

Solución. El mínimo común múltiplo de los índices de las raíces es 60, por lo tanto realizando el cambio de variable $x = t^{60}$ para eliminar las raíces. Cuando $x \to 0^+$, note que $t \to 0$ (t puede ser positivo o negativo), sin embargo como $\sqrt[4]{x} = t^{15}$ debe ser positivo, entonces $t \to 0^+$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt[5]{x} - 3\sqrt[4]{x}}{3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{2t^{12} - 3t^{15}}{3t^{20} + 2t^{15}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^{12}(2 - 3t^3)}{t^{15}(3t^5 + 2)} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{(2 - 3t^3)}{t^3(3t^5 + 2)} = \frac{2}{0^+} = +\infty\end{aligned}$$

Ejemplo. 41

Calcular $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{[\![x]\!]-x}{3-x}$

Solución.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^-} \frac{[\![x]\!]-x}{3-x} &= \frac{2-3}{0^+}\\ &= \frac{-1}{0^+} = -\infty\end{aligned}$$

□

2.5.2. Límites en el Infinito.

Hasta ahora hemos considerado lo que ocurre a los valores de una función conforme la variable independiente se acerca más y más a un número real concreto es decir cuando x tiende a un número real finito c. A veces interesa saber lo que ocurre cuando la variable independiente se aleja más y más de cualquier número real, siempre en sentido positivo o bien siempre en sentido negativo, es decir cuando x tiende a $+\infty$ o $-\infty$ según sea el caso. Formalmente:

Definición: 2.19

Sea f una función real con dominio D. Supongamos que D contiene un intervalo de la forma $(a,+\infty)$. Se dice que f tiene **límite** L **en** $+\infty$ si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número real $N > 0$ tal que si $x \in D$ y

$$x > N$$

se verifica

$$|f(x)-L| < \varepsilon.$$

En cuyo caso se escribe

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

Análogamente,

Definición: 2.20

Sea f una función real con dominio D. Supongamos que D contiene un intervalo de la forma $(-\infty,a)$. Se dice que f tiene **límite** L **en** $-\infty$ si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número real $N < 0$ tal que si $x \in D$ y

$$x < N$$

se verifica

$$|f(x)-L| < \varepsilon.$$

Definición: 2.20 (Continuación)

En cuyo caso se escribe

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Las propiedades y reglas de cálculo de los límites cuando la variable independiente tiende a número finito son también válidas cuando dicha variable tiende a $+\infty$ o $-\infty$.

En lo que sigue el símbolo

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$$

significará

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \text{o} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

indistintamente.

Se dice que una función tiene límite b cuando x tiende a $+\infty$, si la función se acerca a b a medida que x crece indefinidamente, es decir:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

Teorema: 2.17

Si n es cualquier entero positivo, entonces

a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

b) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Ejemplo. 42

Sea

$$f(x) = \frac{6x+8}{2x+9}$$

Determine $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$

Solución. Con el fin de aplicar el teorema, se divide el numerador y el denominador entre x, obteniéndose

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{6x+8}{2x+9}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{6+\frac{8}{x}}{2+\frac{9}{x}}\\ &= \frac{6+0}{2+0} = 3\end{aligned}$$

□

Ejemplo. 43

Sea

$$f(x) = \frac{4x+2}{\sqrt{2x^2-1}}$$

Determine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Solución.

1. Como el mayor exponente de x es 2 y se tiene bajo el signo radical, se divide el numerador y el denominador entre $\sqrt{x^2}$, que equivale a $|x|$. Al efectuar la división se tiene,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x+2}{\sqrt{2x^2-1}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{4x}{\sqrt{x^2}}+\frac{2}{\sqrt{x^2}}}{\frac{\sqrt{2x^2-1}}{\sqrt{x^2}}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{4x}{|x|}+\frac{2}{|x|}}{\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}}\end{aligned}$$

   Debido a que $x\to+\infty$, $\quad x>0$; por tanto, $|x|=x$. Así se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{4x+2}{\sqrt{2x^2-1}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{4x}{x}+\frac{2}{x}}{\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}}\\ &= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 4+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}}{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}}\\ &= \frac{4+0}{\sqrt{2-0}} = \frac{4}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

2. Como el mayor exponente de x es 2 y se tiene bajo el signo radical, se divide el numerador y el

denominador entre $\sqrt{x^2}$, que equivale a $|x|$. Al efectuar la división se tiene,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x+2}{\sqrt{2x^2-1}} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{4x}{\sqrt{x^2}} + \dfrac{2}{\sqrt{x^2}}}{\dfrac{\sqrt{2x^2-1}}{\sqrt{x^2}}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{4x}{|x|} + \dfrac{2}{|x|}}{\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}}
\end{aligned}$$

Debido a que $x \to -\infty, \quad x < 0$; por tanto, $|x| = -x$. Así se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{4x+2}{\sqrt{2x^2-1}} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{4x}{-x} + \dfrac{2}{x}}{\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} -4 + \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x}}{\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty} 2 - \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}}} \\
&= \frac{-4+0}{\sqrt{2-0}} = \frac{-4}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

□

Ejemplo. 44

Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1}\right)$

Solución. Note que si se sustituye x por infinito se obtiene una forma indeterminada $\infty - \infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1}\right) &= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1}\right) \frac{\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1}\right)}{\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{\left(\sqrt{x^2\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{|x|\left(\sqrt{\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)}\right)}
\end{aligned}$$

Como $x \to \infty$ se tiene que $x > 0$, así que $|x| = x$ entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x\left(\sqrt{(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})}+\sqrt{(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})}\right)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt{(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})}+\sqrt{(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})}\right)}\\
&= \frac{-1}{0^+} = -\infty
\end{aligned}$$

□

Ejemplo. 45

Calcule $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^{\frac{5}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+1}{2x^{\frac{4}{3}}+2x-\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^5}}$

Solución. Realizando la sustitución $x = t^3$ para eliminar las raíces, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^{\frac{5}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+1}{2x^{\frac{4}{3}}+2x-\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^5}} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{3t^5-2t+1}{2t^4+2t^3-\frac{2}{3}t^5}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{3-2\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^5}}{\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}-\frac{2}{3}}\\
&= \frac{3}{-\frac{2}{3}} = -\frac{9}{2}
\end{aligned}$$

□

Ejemplo. 46

Considere la función

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}-x} & \text{si} \quad x \leq -1 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x+1} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

a) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} h(x)$

b) ¿Existe el $\displaystyle\lim_{x\to-1} h(x)$? Justifique su repuesta.

Solución.

a) Como $x \to -\infty$, se tiene $x = -|x| = -\sqrt{x^2}$, entonces dividiendo numerador y denominador entre x

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}-x} = \frac{1-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x}-1} \\ &= \frac{1-\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2}}-1} = -\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{\dfrac{x^2-2x}{x^2}}-1} \\ &= -\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}-1} \end{aligned}$$

Por lo que

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}-1} = -\frac{1}{2}$$

b) Calculemos los límites laterales de $h(x)$ en $x = -1$. Multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{x+5}+2$ se tiene

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}\,\frac{\sqrt{x+5}+2}{\sqrt{x+5}+2} \\ &= \frac{x+5-4}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} \\ &= \frac{(x+1)}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{x+5}+2)} \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{x\to-1^+} h(x) = \lim_{x\to-1} \frac{1}{(\sqrt{x+5}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

y también

$$\lim_{x\to-1^-} h(x) = \lim_{x\to-1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}-x} = \frac{-1-1}{\sqrt{(-1)^2-2(-1)}-(-1)} = \frac{-2}{\sqrt{3}+1}$$

Por lo tanto no existe el $\lim\limits_{x\to-1} h(x)$, ya que $\lim\limits_{x\to-1^+} h(x) \neq \lim\limits_{x\to-1^-} h(x)$ □

Ejemplo. 47

Calcular: $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x\right)$

Solución.]

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x\right) &= \lim_{x\to-\infty}\left[(x^3+2x^2)^{\frac{1}{3}}-x\right] \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left[(x^3+2x^2)^{\frac{1}{3}}-x\right]\left[(x^3+2x^2)^{\frac{2}{3}}+(x^3+2x^2)^{\frac{1}{3}}x+x^2\right]}{\left[(x^3+2x^2)^{\frac{2}{3}}+(x^3+2x^2)^{\frac{1}{3}}x+x^2\right]} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{(x^3+2x^2)-x^3}{\left[(x^3+2x^2)^{\frac{2}{3}}+(x^3+2x^2)^{\frac{1}{3}}x+x^2\right]} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{\left[x^3(x+\frac{2}{x})\right]^{\frac{2}{3}}+x\left[x^3(1+\frac{2}{x})\right]^{\frac{1}{3}}+x^2} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2(x+\frac{2}{x})^{\frac{2}{3}}+x^2(1+\frac{2}{x})^{\frac{1}{3}}+x^2} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2\left[(x+\frac{2}{x})^{\frac{2}{3}}+(1+\frac{2}{x})^{\frac{1}{3}}+1\right]} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{(x+\frac{2}{x})^{\frac{2}{3}}+(1+\frac{2}{x})^{\frac{1}{3}}+1} = \frac{2}{1+1+1} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo. 48

Dada la función

$$
f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{5x^2+3x+1}}{\sqrt{2x^2-3}} & \text{si} \quad x \leq -4 \\[2ex] \dfrac{16-x^2}{5-\sqrt{x^2+9}} & \text{si} \quad -4 < x < 1 \end{cases}
$$

Determinar los límites laterales en $x=-4$ y el límite en $-\infty$.

Solución. Tenemos para $x \neq 0$

$$
f(x) = \frac{\sqrt{5x^2+3x+1}}{\sqrt{2x^2-3}} = \frac{\sqrt{x^2\left(5+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2\left(2-\dfrac{3}{x^2}\right)}}
$$

$$
= \frac{|x|\sqrt{\left(5+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{|x|\sqrt{\left(2-\dfrac{3}{x^2}\right)}} = \frac{\sqrt{\left(5+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt{\left(2-\dfrac{3}{x^2}\right)}}
$$

Por lo tanto

$$
\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\left(5+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt{\left(2-\dfrac{3}{x^2}\right)}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}
$$

Cuando $x \to -4^-$ el límite lo calculamos por evaluación

$$\lim_{x\to -4^-} f(x) = \frac{\sqrt{5(-4)^2+3(-4)+1}}{\sqrt{2(-4)^2-3}} = \frac{69}{29}$$

Cuando $x \to -4^+$, se cumple que $-4 < x < 1$. Se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{16-x^2}{5-\sqrt{x^2+9}} = \frac{16-x^2}{5-\sqrt{x^2+9}}\left(\frac{5+\sqrt{x^2+9}}{5+\sqrt{x^2+9}}\right) \\ &= \frac{(16-x^2)(5+\sqrt{x^2+9})}{25-(x^2+9)} = \frac{(16-x^2)(5+\sqrt{x^2+9})}{16-x^2+9} \\ &= 5+\sqrt{x^2+9} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to -4^+} f(x) = \lim_{x\to -4^+}(5+\sqrt{x^2+9}) = 5+\sqrt{25} = 10$$

$\square$

2.5.3. Ejercicios

Límites Infinitos

En los ejercicios del 1 al 18, obtenga el límite.

1.- $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x+2}{x^2-4}$

2.- $\displaystyle\lim_{z\to 2^-} \frac{-z+2}{(z-2)^2}$

3.- $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x}$

4.- $\displaystyle\lim_{s\to 3^+} \frac{\sqrt{s^2-9}}{s-3}$

5.- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-3}{x^3+x^2}$

6.- $\displaystyle\lim_{y\to 0^-} \frac{2-4y^3}{5y^2+3y^3}$

7.- $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{2x^3-5x^2}{x^2-1}$

8.- $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{6x^2+x-2}{2x^2-3x-2}$

9.- $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{x^3+9x^2+20x}{x^2+x-12}$

10.- $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h+2}-\sqrt{3}}{h}$

11.- $\displaystyle\lim_{z\to -1^+} \frac{2z^2-z+3}{z^3+2z^2+6z+5}$

12.- $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} \frac{x^3-x^2-x+10}{x^2+3x+2}$

13.- $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{[\![x]\!]-x}{3-x}$

14.- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}-1\right)$

15.- $\displaystyle\lim_{x\to 4^+} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x-4}$

16.- $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x^2-4}\right)$

17.- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$

18.- $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x-[\![2x-1]\!]}{x-2}$

Límites en el Infinito

En los ejercicios del 1 al 35, obtenga el límite.

1.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-3x}{x+1}$

2.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+5}{x^3}$

3.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x+5}{9x^3+2x+1}$

4.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3+2x^2-5}{8x^3+x+2}$

5.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^4-7x^2+2}{2x^4+1}$

6.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3-4}{5x+3}$

7.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^3-12x+7}{4x^2-1}$

8.- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}$

9.- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x+5}$

10.- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{2x^2-3}$

11.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3+5x^2-7}{10x^3-11x+5}$

12.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-3}{x^2-5x+4}$

13.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x}$

14.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x^3}{x^3-3x^2+6x}$

15.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^3-6x+2}{10x^3+5}$

16.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x^4+x}{2x^4+4x^2-x+6}$

17.- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x}$

18.- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x^2}{1+2x^2}$

19.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8x^{23}-7x^2+5}{2x^{23}+x^{22}}$

20.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4}{x^4-7x^3+7x^2+9}$

21.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|x|}{|x|+1}$

22.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}\right)$

23.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

24.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x^2+x}-2x\right)$

25.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

26.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+4}\right)$

27.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

28.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$

29.- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$

30.- $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

31.- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^3+2x^2-6x+1}{\sqrt{9x^6-3x^4+10}}\right)$

32.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\right)$

33.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^4+2x^2}-x^2\right)$

34.- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right)$

Asíntotas 2.6

Una primera aplicación del cálculo de límites consiste en el cálculo de las asíntotas de una función.

Hay tres tipos de asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas (aunque de hecho las asíntotas horizontales son un caso particular de éstas.)

2.6.1. Asíntotas Verticales

Definición: 2.21

Una asíntota vertical de una función $f(x)$ es una recta vertical $x = c$ si al menos uno de los enunciados es verdadero:

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$$

Las posibles asíntotas verticales de una función se encuentran entre los puntos que no están en el dominio de la función, aquellos que anulan el denominador en las funciones racionales, etc...

Para determinar si un punto constituye una asíntota vertical de la función, se tiene que cumplir que alguno de los límites laterales de la función en el punto sea $\pm\infty$.

En tal caso, se dirá que la función posee una asíntota vertical en dicho punto por el lado en el cual dicho límite sea $\pm\infty$.

Ejemplo. 49

Determine la asíntota vertical de la gráfica de la función f.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$$

Solución:. Calculemos el $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$, como $x \to 3^+$, $x-3>0$; de modo que $x-3=\sqrt{(x-3)^2}$. Así

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3} &= \lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{(x-3)(x+3)}}{\sqrt{(x-3)^2}} \\
&= \lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{(x-3)}\sqrt{(x+3)}}{\sqrt{(x-3)}\sqrt{x-3}} \\
&= \lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{(x+3)}}{\sqrt{x-3}} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{0^+} = +\infty
\end{aligned}$$

Por lo tanto $x=3$ es una asíntota vertical □

2.6.2. Asíntotas Horizontales

Definición: 2.22

La recta $y=b$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función f si al menos una de las proposiciones siguientes es verdadera:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = b$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = b$$

Las asíntotas horizontales, si existen, indican el valor al que se acerca la función cuando la variable independiente x se hace muy grande o muy pequeña.

Ejemplo. 50

Obtenga las asíntotas horizontales de la gráfica de la función definida por

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

Solución. Primero hallaremos $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

Dividiendo numerador y denominador por $\sqrt{x^2}$ tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}\end{aligned}$$

Como $x\to+\infty$, $x>0$; por tanto $|x|=x$. Así,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}\\ &= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}1}{\sqrt{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+0}}=1\end{aligned}$$

Por lo tanto $y=1$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

Ahora consideraremos $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

Dividiendo numerador y denominador por $\sqrt{x^2}$ tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}\end{aligned}$$

Como $x\to-\infty$, $x<0$; por tanto $|x|=-x$. Así,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{-x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}\\ &= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}-1}{\sqrt{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}}}\\ &= \frac{-1}{\sqrt{1+0}}=-1\end{aligned}$$

Así que $y=-1$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f. $\square$

2.6.3. Asíntotas Oblicuas

Definición: 2.23

La recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua de la gráfica de la función f si al menos una de las proposiciones siguientes es verdadera:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - b] = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx - b] = 0$$

Nota:
Una recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de la función $f(x)$ cuando existen y son finitos los límites:
$m = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$ y
$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$

Las asíntotas horizontales son un caso particular de las oblicuas para el caso en que $m = 0$.

Ejemplo. 51

Para la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ determine:

a. Asíntotas verticales y oblicuas.

b. Bosquejo gráfico.

Solución. Primero hallaremos las asíntotas verticales

a. $x = -1$ es una asíntota vertical ya que:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty$$
$$\lim_{x \to -1} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Ahora hallaremos las asíntotas oblicuas:

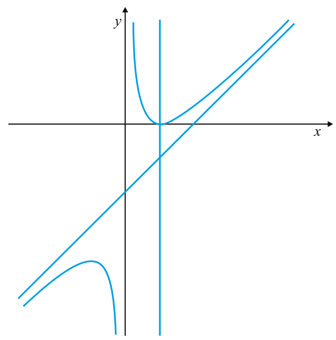
Calculemos m y n: $m = \lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{\frac{x^2}{x+1}}{x} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2}{x^2 + x} \right) = 1$

$n = \lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1} - x \right) = \left(\dfrac{x^2 - x^2 - x}{x+1} \right) = \left(\dfrac{-x}{x+1} \right) = -1$

Por lo tanto $f(x)$ tiene una asíntota oblicua en $y = x - 1$ cuando $x \to +\infty$.

Podemos comprobar que cuando $x \to -\infty$ tiene la misma asíntota oblicua.

b. Así que la gráfica de la función f es



$\square$

Ejemplo. 52

Para la función f definida por $f(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^2-9}}$ determine:

a. Dominio y raíces.

b. Asíntotas verticales y oblicuas.

c. Bosquejo gráfico.

Solución.

a. $D = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad x^2 - 9 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad (x-3)(x+3) > 0\} = (-\infty, -3) \bigcup (3, \infty)$

b. $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^2-9}} = +\infty \Rightarrow x = 3$ es una asíntota vertical.

Como f es par, entonces $x = -3$ también es asíntota vertical y $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$

Ahora hallaremos las pendientes de las asíntotas oblicuas

$$\begin{aligned}
m_1 &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2-9}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\frac{1}{x}\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\frac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x^2}}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}} \\
&= 3
\end{aligned}$$

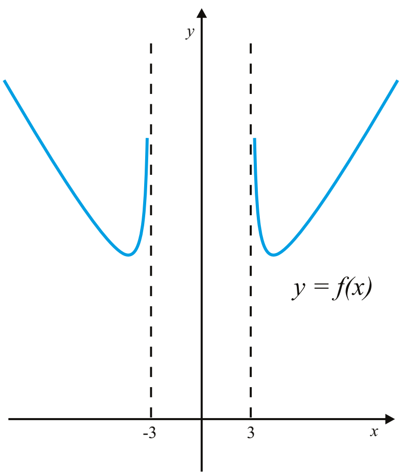
$$
\begin{aligned}
m_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2-9}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\frac{1}{-x}\sqrt{x^2-9}}\\
&= -\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\frac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x^2}}}\\
&= -\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}\\
&= -3
\end{aligned}
$$

Las constantes independientes de cada una de las rectas:

$$
\begin{aligned}
n &= \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)\pm 3x] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3x^2}{\sqrt{x^2-9}}\pm 3x\right]\\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2-9}}\left(x\pm\sqrt{x^2-9}\right)\\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2-9}}\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\pm 1\right]\\
&= \pm 3\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-9})(x+\sqrt{x^2-9})}{x\pm\sqrt{x^2-9}}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto las ecuaciones de las asíntotas oblicuas son: $y = 3x$ y $y = -3x$

c. La gráfica de la función f es:



$\square$

2.6.4. Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 12, obtenga las asíntotas horizontales y verticales y trace una gráfica de la función.

1.- $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

2.- $f(x) = \dfrac{4-3x}{x+1}$

3.- $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$

4.- $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$

5.- $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2-4}}$

6.- $f(x) = \dfrac{-3x}{\sqrt{x^2+3}}$

7.- $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2-9}$

8.- $f(x) = \dfrac{x^2}{4-x^2}$

9.- $f(x) = \dfrac{2x}{6x^2+11x-10}$

10.- $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+5x+6}}$

11.- $f(x) = \dfrac{4x^2}{\sqrt{x^2-2}}$

12.- $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$

En los ejercicios del 13 al 20, obtenga las asíntotas horizontales y verticales y trace una gráfica de la función.

13.- $3xy - 2x - 4y - 3 = 0$

14.- $2xy + 4x - 3y + 6 = 0$

15.- $x^2y^2 - x^2 + 4y^2 = 0$

16.- $xy^2 + 3y^2 - 9x = 0$

17.- $(y^2-1)(x-3) = 6$

18.- $2xy^2 + 4y^2 - 3x = 0$

19.- $x^2y - 2x^2 - y - 2 = 0$

20.- $x^2y + 4xy - x^2 + x + 4y - 6 = 0$

En los ejercicios del 21 al 28, obtenga las asíntotas verticales y oblicuas y trace una gráfica de la función.

21.- $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

22.- $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}$

23.- $f(x) = \dfrac{x^2-8}{x-3}$

24.- $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x+4}$

25.- $f(x) = \dfrac{x^2-4x-5}{x+2}$

26.- $f(x) = \dfrac{x^3-4}{x^2}$

27.- $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2+4}{x^2}$

28.- $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

27.- Para cada una de las siguientes funciones:

a) Halle el dominio de f

b) Determine las asíntotas verticales de la gráfica de la función f, si existen.

c) Determine las asíntotas horizontales u oblicuas de la gráfica de la función f, si existen.

d) Haga un bosquejo de la gráfica de f

i) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$

ii) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}$

iii) $\dfrac{x+1}{x^2-x-2}$

iv) $\dfrac{x^2-2x-8}{x^2+x-2}$

v) $\dfrac{x^3+x^2-14x-24}{x^2+x-2}$ vii) $\dfrac{x-\sqrt{2x-1}}{x^3-7x+6}$

vi) $\dfrac{x^3-3x^2-x+2}{x^2-3x+2}$ viii) $\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$

ix) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & \text{si} \quad x<1 \\ \dfrac{x^3-11x^2+38x-40}{x-5} & \text{si} \quad 1\leq x \quad x\neq 5 \end{cases}$

28.- Sea g la función definida por $g(x)=\dfrac{mx^3}{(x-n)^2}$ para $x\neq n$.

a) Hallar m y n sabiendo que la recta $y=2x-4$ es una asíntota de la gráfica de g.

b) Determinar si la gráfica de g es simétrica respecto al origen.

2.7 Funciones Continuas

El término continuo tiene el mismo sentido en matemáticas que en el lenguaje ordinario. Así se dice que una función es continua a lo largo de un intervalo incluido en su dominio la gráfica no presenta interrupciones o saltos. Es decir, cuando no es necesario levantar el lápiz del papel para dibujarla.

Las funciones continuas son las funciones que normalmente describen los fenómenos del mundo alrededor nuestro. Así ocurre con la posición de un vehículo o con su velocidad. No obstante se conocen también fenómenos que no presentan este comportamiento. Por ejemplo, los átomos de una molécula de hidrógeno solo pueden vibrar a determinados niveles discretos de energía, los átomos emiten luz en frecuencias discretas y no es un espacio continuo, etc.

Definición: 2.24

Sea f una función real con dominio D. Se dice que f es **continua en el punto** c si y solo si:

1. f está definida en c, es decir $c\in D$.
2. Existe límite de f cuando x tiende a c.
3. Se verifica $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c))$

Si en las condiciones 2 y 3 de la definición anterior se sustituye el límite cuando $x\to c$ por el límite cuando $x\to c^+$ (resp. $x\to c^-$) diremos que la función es continua por la derecha o continua por la izquierda respectivamente en c.

Una función es continua en un intervalo abierto $(a,b)\subset D$ si es continua en cada punto $c\in(a,b)$. Cuando una función digamos que es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ entenderemos que se trata de una función continua en el intervalo (a,b), continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

Una función se dice que es continua si es continua en punto de su dominio D.

2.7.1. Discontinuidades

Cuando una función f no sea continua en un punto c perteneciente a su dominio diremos que es discontinua en dicho punto. También diremos que es discontinua en aquellos puntos que no perteneciendo al dominio si existen intervalos a izquierda y derecha de dichos puntos completamente contenidos en el dominio de la función.

Un tipo particular de discontinuidades se producen cuando existe límite L de f cuando x tiende a c pero f no está definida en c o b ien $f(c) \neq L$. En este caso se dice q ue f presenta una discontinuidad evitable en c ya que basta redefinir f h aciendo $f(c) = L$ para que sea continua en ese punto.

En los demás casos, es decir cuando no existe el límite, diremos que las discontinuidades son no evitables. En concreto, si existen los límites por la izquierda y por la derecha en c pero estos no coinciden entre sí, se dice que f presenta una discontinuidad de salto y cuando no exista uno o ambos límites laterales se dice que la discontinuidad es esencial.

Ejemplo. 53

La función

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

Solución. En efecto,

$$\lim_{\to 1} f(x) = \lim_{\to 1}(2x-1) = 1 \neq f(1) = 3$$

Por tanto la función no es continua en $x = 1$. La discontinuidad es evitable ya que basta definir $f^*(1) = 1$ para que la nueva función

$$f^*(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

sea ahora continua.

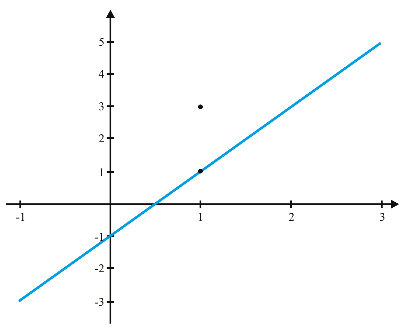


Figura 2.1: Discontinuidad evitable

□

Ejemplo. 54

La función
$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$
presenta una discontinuidad evitable en $x = 0$.

Solución. La expresión no esta definida en $x = 0$ por tanto la función no es continua en dicho punto. No obstante, hemos demostrado que
$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$
Por consiguiente, definiendo
$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$
es continua en toda la recta. Dicha función se conoce como la extensión continua de $f(x)$.

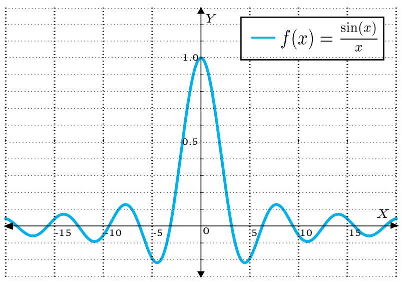


Figura 2.2: Discontinuidad evitable en $x = 0$

□

Ejemplo. 55

La función
$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$
presenta una discontinuidad esencial en $x = 0$.

Solución. En efecto, no existe límite finito cuando x tiende a 0, la función se hace cada vez más grande en las proximidades de $x = 0$. Independientemente del valor que asignemos a la función en 0 la discontinuidad sigue presente. Se dice que es una discontinuidad esencial.

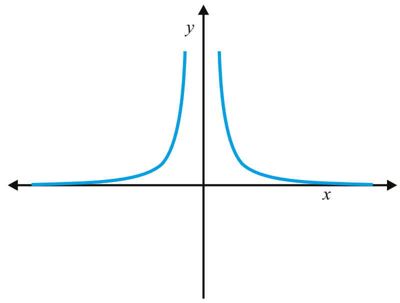


Figura 2.3: Discontinuidad infinita en $x = 0$

□

Ejemplo. 56

La función
$$f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$
presenta una discontinuidad esencial en $x = 0$.

Solución. La función oscila infinitamente entre +1 y -1 en las proximidades de $x = 0$. Por tanto, no existe límite. La función presenta una discontinuidad oscilatoria.

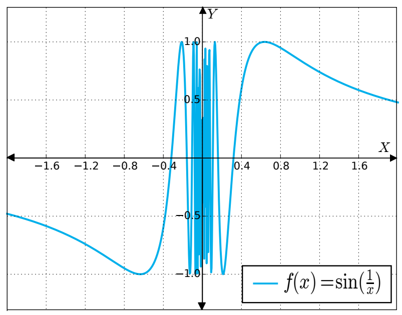


Figura 2.4: Discontinuidad Oscilatoria en $x = 0$

□

Ejemplo. 57

Dada $f(x) = \dfrac{x^2+5x}{x^2+4x-5}$, obtener:

a. Puntos de discontinuidad y su clasificación

b. Asíntotas verticales y horizontales.

Ejemplo. 57 (Continuación)

c. Esbozo de la gráfica

Solución.

a. Como $x^2+4x-5=(x+5)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=-5 \quad x=1$ resulta que el dominio es $D=\mathbb{R}-\{-5,1\}$
Calculemos $\lim\limits_{x\to -5} f(x) \quad y \quad \lim\limits_{x\to 1^{\pm}} f(x)$.

$$f(x)=\frac{x(x+5)}{(x-1)(x+5)}=\frac{x}{x-1}$$

Por lo que

$$\lim_{x\to -5} f(x)=\lim_{x\to -5}\frac{x}{x-1}=\frac{-5}{-5-1}=\frac{5}{6}$$

y la discontinuidad en $x=-5$ es removible.

En cambio

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} f(x)=\lim_{x\to 1^{\pm}}\frac{x}{x-1}=\pm\infty$$

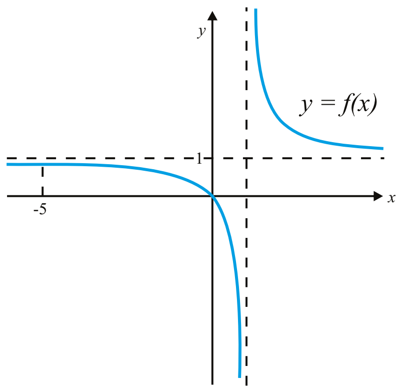
y la discontinuidad en $x=1$ es esencial.

b. Acabamos de probar que la recta $x=1$ es asíntota vertical. Para hallar las asíntotas horizontales calculamos

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x)=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1$$

Por lo que la recta $y=1$ es asíntota horizontal.

c. Sabemos que $f(0)=0$.
La gráfica de la función f es:



□

2.7.2. Operaciones con Funciones Continuas

La regla del cálculo proporcionan las siguientes propiedades de las funciones continuas.

Teorema: 2.18

Sean f y g funciones con el mismo dominio D, $\quad c \in D$ y supongamos que f y g son continuas en c. Entonces

1. La función suma $f+g$ es continua en c.
2. La función diferencia $f-g$ es continua en c.
3. la función producto por una constante kf es continua en c.
4. La función producto fg es continua en c.
5. La función cociente f/g es continua en c, siempre que $g(c) \neq 0$.
6. la función $\sqrt[n]{f}$ es continua en c.
7. La función $|f|$ es continua en c.

El siguiente resultado nos asegura que el símbolo de límite y las funciones continuas son intercambiables.

Teorema: 2.19 **Límites y composición**

Sean f y g funciones reales. Si

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

y g es continua en L se verifica

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(L)$$

es decir

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(\lim_{x \to c} f(x))$$

Corolario: 2.3

La composición de funciones continuas es a su vez continua.

Teorema: 2.20

Sea f una función uno-uno definida en un intervalo I. Entonces, si f es continua, su inversa f^{-1} es así mismo continua.

Ejemplo. 58

Considere la función

$$g(x)=\begin{cases} 3x^2-a & \text{si} \quad x<1 \\ b & \text{si} \quad x=1 \\ \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Determinar los valores a y b para que la función g sea continua en $x=1$.

Solución. Para que g sea continua en $x=1$, se tiene que cumplir que $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=g(1)$ es decir que $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=b$
Calculemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} g(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{x+3-4}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \frac{1}{(1+1)(\sqrt{1+3}+2)} = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Así, $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=b \Rightarrow b=\dfrac{1}{8}$.

Por otra parte $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=3-a \Rightarrow 3-a=\dfrac{1}{8} \Rightarrow a=\dfrac{23}{8}$ □

2.7.3. Continuidad de las Funciones Elementales

Ya sabemos que las funciones polinómicas son continuas en todos los puntos y también las racionales salvo en los ceros del denominador.

También es fácil analizar la continuidad de las funciones algebraicas. Por ejemplo

$$f(x)=\sqrt{x}$$

es continua para todo $x>0$. Es continua por la derecha en $x=0$ y no está definida para $x<0$.

En general las funciones algebraicas son continuas en aquellos puntos en que son válidas las reglas del cociente y la de los radicales. Es decir se deben excluir los ceros de los denominadores y los puntos en que los subradicandos correspondientes a los radicales pares sean negativos. En los ceros de estos radicales se examina la continuidad lateral.

2.7.4. Ejercicios

1.- Determine cuáles de las siguientes funciones son discontinuas en $a = 1$. En el caso de que la función se discontinua en $a = 1$, explique porqué sucede, esta discontinuidad es removible o esencial.

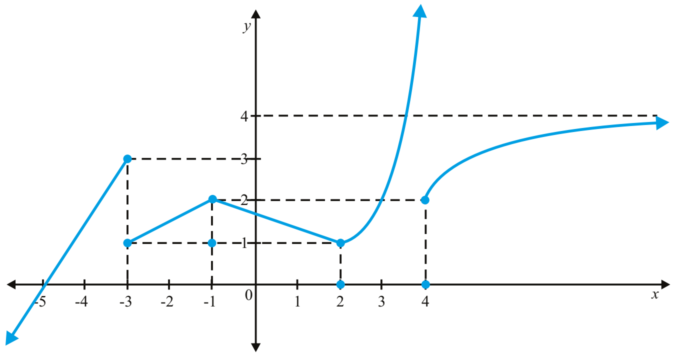
a) $\dfrac{x^3-1}{x-1}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 2-x & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$

c) $f(x) = x^2+x+1$

d) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

2.- Sea f una función cuya gráfica se ilustra. Indique en qué puntos de la recta real, f es discontinua y justifique su respuesta. Diga en cada caso si la discontinuidad discontinuidad es removible o esencial.



3.- Para cada una de las siguientes funciones:

a) Dibuje la gráfica de la función dada.

b) Determine en qué puntos la función dada es discontinua e indique qué tipo de discontinuidad tiene en cada uno de esos puntos.

i) $f(x) = \begin{cases} |x+3| & \text{si} \quad -5 \leq x < 0 \\ [\![3x-1]\!] & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ x^2-6x+6 & \text{si} \quad 1 < x \leq 5 \\ \dfrac{x^2-8x+15}{x-5} & \text{si} \quad 5 < x \end{cases}$

$$\text{ii)}\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+4} & \text{si} \quad x<-3 \quad x\neq -4\\[2ex] \sqrt{9-x^2} & \text{si} \quad -3\leq x<0\\[2ex] [\![2x+3]\!] & \text{si} \quad 0\leq x<1\\[2ex] 2 & \text{si} \quad x=1\\[2ex] x^2-4x+8 & \text{si} \quad 1<x\leq 4\end{cases}$$

4.- Sea $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{x}-1} & \text{si} \quad 0\leq x<1\\[2ex] a^2x^2-2ax+a^2 & \text{si} \quad 1\leq x\end{cases}$

a) Escriba las condiciones que debe cumplir la función f para que sea continua en $x=1$

b) Calcule $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

c) Halle los valores de la constante a tales que la función f dada sea continua en $x=1$

5.- Determine los valores de la constante a, tales que la función f sea continua en 2 y después dibuje la gráfica de f si:
$f(x)=\begin{cases} ax+1 & \text{si} \quad x<2\\ a^2-x^2+x & \text{si} \quad 2\leq x\end{cases}$

6.- Determine los valores de la constante a, tales que la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x-2}{x-1} & \text{si} \quad x<1\\[2ex] 6x^2-3ax+a^2 & \text{si} \quad 1\leq x\end{cases}$$

sea continua en $x=1$

7.- Para cada una de las siguientes funciones determine los valores de las constantes a y b tales que la función f sea continua en el conjunto de todos los números reales.

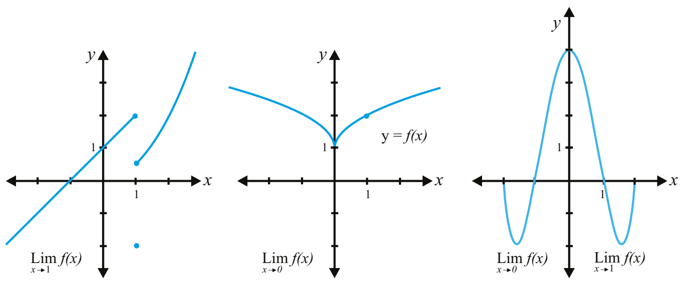
$$\text{a)}\quad f(x)=\begin{cases} ax+2 & \text{si} \quad x<1\\[2ex] x^2+2ax+b & \text{si} \quad 1\leq x\leq 4\\[2ex] 3ax-b & \text{si} \quad 4<x\end{cases}$$

$$\text{b)}\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & \text{si} \quad x<1\\[2ex] ax+b & \text{si} \quad 1\leq x<2\\[2ex] 3x-2 & \text{si} \quad 2\leq x\end{cases}$$

8.- ¿Existirá un valor de b para el cual, la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{si} \quad x<1\\[2ex] 2bx+b^2 & \text{si} \quad 1\leq x\end{cases}$$
sea continua en $a=1$?

9.- De acuerdo a las siguientes gráficas determine cada uno de los límites. Determine en que puntos la función es discontinua y clasifique la discontinuidad.



10.- Considere la función
$$f(x)=\begin{cases}3x^2-a & \text{si} \quad x<1\\[2ex] b & \text{si} \quad 1=x\\[2ex] \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} & \text{si} \quad 1<x\end{cases}$$
Determinar los valores de a, b para que la función sea continua en $x=1$.

11.- Sea $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ una función continua en el punto $x=-4$. Se define $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ por $g(x)=f(2x-10)+\dfrac{x^2-2}{x+3}$ ¿Es g continua en $a=3$? Diga porqué.

12.- Dada la siguiente función
$$f(x)=\begin{cases}x^3+7 & \text{si} \quad x<-2\\[2ex] ax^2-3 & \text{si} \quad -2\leq x<2\\[2ex] b & \text{si} \quad x=2\\[2ex] -x+7 & \text{si} \quad 2<x\end{cases}$$

a) Determinar los valores de las constantes a y b, que hacen de f una función continua en $x=2$

b) Reescriba la función f con los valores calculados de a, b. Estudie la continuidad o discontinuidad de f en $x=-2$.

13.- Considere la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4|x|} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{1}{4} & \text{si} \quad x = 0 \\ \\ \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x} & \text{si} \quad 0 < x \end{cases}$$

y estudie su continuidad en $x = 0$

14.- Determinar los valores de a, b para que la siguiente función sea continua en $x = 0$ y en $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si} \qquad x < 0 \\ \\ \dfrac{4 - \sqrt{4x+4}}{x^2 - 2x - 3} & \text{si} \quad 0 \leq x \& x \neq 3 \\ \\ b & \text{si} \qquad x = 3 \end{cases}$$

15.- Calcule los valores de a y b que hacen continua a la siguiente función en $x = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si} \quad x < -1 \\ a & \text{si} \quad x = -1 \\ bx^2 + 1 & \text{si} \quad -1 < x < 2 \end{cases}$$

16.- Determinar los valores de las constantes a, b y c que hacen continua en todo su dominio la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si} \quad x < -2 \\ \\ ax^2 + b & \text{si} \quad -2 \leq x < 1 \\ \\ c & \text{si} \quad x = 1 \\ \\ 1 - x & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

17.- Determine los valores de las constantes c y k que hacen continua la función en $x = 1$ y en $x = 4$.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ cx + k & \text{si} \quad 1 < x < 4 \\ -2x & \text{si} \quad 4 \leq x \end{cases}$$

Dar un bosquejo de la gráfica de esa función con los valores encontrados

18.- Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 4 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \\ 2ax + b & \text{si} \quad -1 < x \leq 2 \\ \\ x^2 - 4x + 4 & \text{si} \quad 2 \leq x \end{cases}$$

a) Encontrar los valores de a, b para que la función sea continua en $x = -1$ y en $x = 2$.

b) Graficar la función con los valores encontrados.

19.- Calcule los valores de a, b que hacen que la siguiente función sea continua en $x = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2a}{x} & \text{si} \quad x < -1 \\ b & \text{si} \quad x = -1 \\ x^2+1 & \text{si} \quad -1 < x < 2 \end{cases}$$

20.- Sea f la función definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ ax+b & \text{si} \quad -1 < x < 3 \\ -2 & \text{si} \quad 3 \leq x \end{cases}$$

a) Hallar los valores de las constantes a, b de modo que la siguiente función sea continua en $x=-1$ y en $x=3$.

b) Dibujar la gráfica de f con los valores obtenidos

Funciones Trigonométricas 2.8

2.8.1. Regla del Emparedado

Teorema: 2.21

Sean f, g y h tres funciones definidas en D tales que

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

para todo $x \in D$. Supongamos que D contiene intervalos de la forma (a,c) y (c,b) y que

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = L$$

Entonces

$$\lim_{x\to c} h(x) = L$$

Demostración. Dado que

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

Entonces

$$\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} h(x) \leq \lim_{x\to c} g(x)$$

Así que

$$L \leq \lim_{x\to c} h(x) \leq L$$

Por tanto

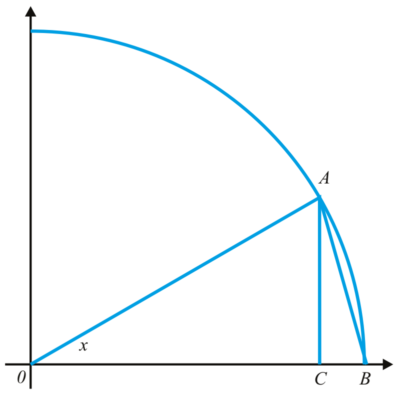
$$\lim_{x\to c} h(x) = L$$

□

Teorema: 2.22

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

Demostración. Consideremos el triángulo ABC de la figura contenido en la circunferencia de radio unidad.



Mediante la fórmula de Pitágoras y teniendo en cuenta que la longitud de la cuerda $\overline{AB}$ es menor que la del arco $\widehat{AB}$ se deduce

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 < \widehat{AB} = x^2$$

Pero $\overline{BC} = \operatorname{sen} x$ y $\overline{AC} = 1 - \cos x$. Por tanto,

$$\operatorname{sen}^2 x + (1 - \cos x)^2 < x^2$$

Por consiguiente,

$$-|x| < \operatorname{sen} x < |x| \quad \text{y} \quad -|x| < 1 - \cos x < |x|$$

o bien,

$$-|x| < \operatorname{sen} x < |x| \quad \text{y} \quad 1 - |x| < \cos x < 1 + |x|$$

Cuando x tiende a 0, también $|x|$ tiende a 0. Por tanto, por la regla del emparedado resulta

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

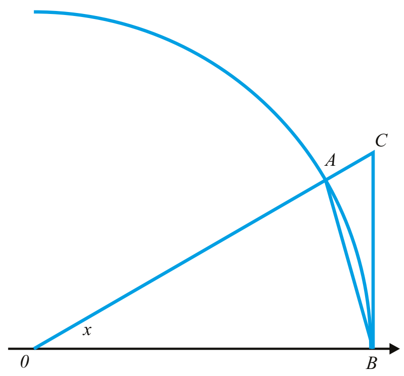
□

Teorema: 2.23

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Este límite constituye otro ejemplo de la forma indeterminada del tipo $0/0$.

Demostración. Ahora consideraremos la circunferencia de radio unidad y los triángulos OAB y OCB de la figura.



Para un arco positivo x suficientemente pequeño el área del triángulo OAB es menor que la del sector OAB correspondiente y esta a su vez menor que la del triángulo OCB. Es decir;

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

multiplicando por 2 y dividiendo por $\operatorname{sen} x$ se obtiene

$$1 < \frac{x}{senx} < \frac{1}{\cos x}$$

Tomando recíprocos resulta

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

Dicha relación es válida también es válida, para arcos negativos ya que

$$\cos x = \cos(-x) < \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

Con el límite buscado se obtiene la regla del emparedado a dicha relación y teniendo en cuenta que

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1$$

$\square$

Ejemplo. 59

Demostrar que

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$

Solución. En primer lugar observamos que la función $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ presenta un carácter oscilante alrededor de $x = 0$. No obstante, permanecen acotadas ya que sus valores se mantienen entre -1 y 1.

Por consiguiente,

$$\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leq 1$$

y

$$|x|\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leq |x|$$

De donde se sigue,

$$-|x| \leq x\operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq |x|$$

Aplicando la regla del emparedado resulta

$$\lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$

$\square$

El procedimiento seguido en el último ejemplo puede ser generalizado para enunciar el siguiente resultado que se utiliza con gran frecuencia.

Corolario: 2.4

Si $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ y $g(x)$ una función acotada en un intervalo abierto que contenga a c resulta

$$\lim_{x\to c}[f(x)g(x)] = 0$$

2.8.2. Continuidad de Funciones Trigonométricas

Como consecuencia de la regla del emparedado se demostró que

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0}\cos x = 1$$

Puesto que, $\operatorname{sen} 0 = 0$ y $\cos 0 = 1$, se tiene que

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0$$

lo que prueba la continuidad del seno y coseno en $x = 0$.

Para demostrar la continuidad del seno en un punto arbitrario $x = c$ escribimos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x &= \operatorname{sen}[c + (x - c)]\\ &= \operatorname{sen} c\cos(x - c) + \cos c\operatorname{sen}(x - c).\end{aligned}$$

por tanto,

$$\lim_{x\to c}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} c\left[\lim_{x\to c}\cos(x - c)\right] + \cos c\left[\lim_{x\to c}\operatorname{sen}(x - c)\right]$$

Puesto que, $x-c$ tiende a 0 cuando x tiende a c y tanto el seno como el coseno son continuas en $x=0$ resulta

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x &= \cos\left[\lim_{x\to c}(x-c)\right]+\cos c\operatorname{sen}\left[\lim_{x\to c}(x-c)\right]\\ &= \operatorname{sen} c\cos 0+\cos c\operatorname{sen} 0\\ &= \operatorname{sen} c\end{aligned}$$

La continuidad del coseno se deduce de la identidad

$$\cos x=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

De esta forma se trata de la composición de funciones continuas. Como la composición de funciones continuas es continua concluimos que el coseno es también una función continua.

La continuidad de las restantes funciones trigonométricas $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$, en aquellos puntos en que están definidas, es ya inmediata a partir de las reglas aritméticas. Las funciones inversas también son continuas.

Límites de Funciones Trigonométricas

Ejemplo. 60

Calcular el límite de $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 8x-\operatorname{sen} 4x}{x}$

Solución.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 8x-\operatorname{sen} 4x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 8x}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 4x}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{8\operatorname{sen} 8x}{8x}-\lim_{x\to 0}\frac{4\operatorname{sen} 4x}{4x}\\ &= 8\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 8x}{8x}-4\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 4x}{4x}=8-4=4\end{aligned}$$

□

Ejemplo. 61

Sea f la función definida:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x^2}{x^3} & \text{si} \quad x<0\\[2ex] 2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) & \text{si} \quad 0\le x\end{cases}$$

Hallar si existen:

❶ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ❷ $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x)$ ❸ $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$

Solución.

❶ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\cos\dfrac{\pi}{3} = 1$

❷ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{1-\cos x^2}{x^3}\right)\left(\dfrac{1+\cos x^2}{1+\cos x^2}\right)\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x^2}{x^3(1+\cos x^2)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x^2}{x^3} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+\cos x^2} =$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x^2}{x^4} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1+\cos x^2} = 1\times\dfrac{0}{2} = 0$

❸ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe ya que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

□

2.8.3. Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 41, calcular los límites.

1.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x}$

2.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\operatorname{sen} x}$

3.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x}{x}$

4.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} x}$

5.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a}$

6.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

7.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\tan x)}{\operatorname{sen} x}$

8.- $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\operatorname{sen}(\cos x)}{\cos x}$

9.- $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen}(x-\pi)}{x-\pi}$

10.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$

11.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{x}$

12.- $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

13.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{x}$

14.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 9x}{\operatorname{sen} 7x}$

15.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\operatorname{sen} 5x}$

16.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{sen}^2 5x}$

17.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{x}$

18.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2}{1-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

19.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{2x^2}$

20.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{2x}$

21.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{\operatorname{sen} 4x}$

22.- $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\frac{\pi}{2}-x}$

23.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{5x^2+7x}$

24.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9x^2+4x}{\operatorname{sen} x}$

25.- $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

26.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$

27.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen} 3x}$

28.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen} 3x}$

29.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{3x^2}$

30.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{2x}$

31.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\operatorname{sen} x}{2x^3}$

32.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 7x-\cos 5x}{x^2}$

33.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x+2\cos x-2}{\cos^2 x-x\operatorname{sen} x-1}$

34.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x(1-\cos x)}{x^3}$

35.- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\tan x}{\sqrt{2-2\cos^2 x}}$

36.- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\tan x}{\sqrt{2-2\cos^2 x}}$

37.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x}$

38.- Una función f está definida como sigue:

$$f(x)=\begin{cases} 5\operatorname{sen} x-a & \text{si} \quad x<\dfrac{\pi}{2} \\ 2 & \text{si} \quad x=\dfrac{\pi}{2} \\ 3\cos x+b & \text{si} \quad \dfrac{\pi}{2}<x \end{cases}$$

siendo a y b constantes. Determine valores de las constantes a y b, para que la función sea continua.

39.- Una función f está definida como sigue:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{3x^2+4x} & \text{si} \quad x<0 \\ b^2-\dfrac{3}{4} & \text{si} \quad x=0 \\ \dfrac{1-\cos x}{2x^2} & \text{si} \quad 0<x \end{cases}$$

a) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

b) Determine los valores de la constante b para que f sea continua en $x=0$

Teorema de Bolzano para las funciones continuas 2.9

Teorema: 2.24

Conservación del Signo de las Funciones Continuas.
Sea f continua en c y supongamos que $f(c)\neq 0$. Existe entonces un intervalo $(c-\delta, c+\delta)$ en el que f tiene el mismo signo que $f(c)$.

Demostración. Supongamos que $f(c)>0$, como f es continua en c, se tiene que

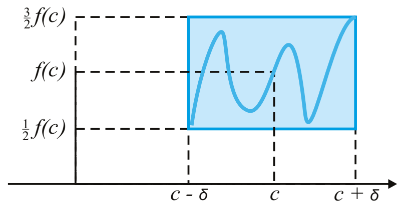
$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$$

Así que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon \text{ siempre que } c - \delta < x < c + \delta \tag{2.1}$$

Tomando el δ correspondiente a $\varepsilon = \dfrac{f(c)}{2}$ (esta ε es positiva) entonces (2.1) se transforma en

$$\frac{f(c)}{2} < f(x) < 3\frac{f(c)}{2} \text{ siempre que } c - \delta < x < c + \delta$$



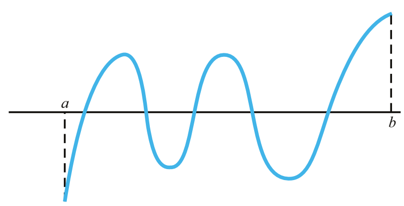
Aquí f(x)>0 para x próximo a c pues f(c)>0.

Entonces $f(x) > 0$ en este intervalo y por tanto $f(x)$ y $f(c)$ tienen el mismo signo. Si $f(c) < O$ se toma $\varepsilon = -\dfrac{f(c)}{2}$ y se llega a la misma conclusión. $\square$

Teorema: 2.25 — **Teorema de Bolzano.**

Sea f continua en cada punto del intervalo cerrado $[a,b]$ y supongamos que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos. Existe entonces por lo menos un c en el intervalo abierto (a,b) tal que $f(c) = 0$.

Demostración. Supongamos que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ tal como se muestra en la figura



Teorema de Bolzano.

Definamos $S = \{x \in [a,b] \,|\, f(x) \leq 0\}$. Como $f(a) < 0$, se tiene que $a \in S$ entonces $S \neq \emptyset$. Por lo tanto S está acotado superiormente puesto que es un conjunto no vacío de números reales, por lo tanto tiene extremo superior digamos c. Probaremos que $f(c) = 0$.

Por ser $f(c)$ un número real, entonces $f(c) > 0$, o , $f(c) < 0$, o , $f(c) = 0$.

a) Si $f(c) > 0$ como f es continua entonces por (24) existe un intervalo $(c-\delta, c+\delta)$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in (c-\delta, c+\delta)$. Luego ningún punto de S puede ser mayor que $c - \delta$, luego $c - \delta$ es una cota superior de S, pero $c - \delta < c$ y $c = \sup S$ absurdo. Por lo tanto $f(c) \not> 0$.

b) Si $f(c) < 0$, entonces por (24) existe un intervalo $(c-\delta, c+\delta)$ o $[c, c+\delta)$ si $c = a$, en el cual f es negativa y por tanto $f(x) < 0$ para algún $x > c$, luego c no es una cota superior de S, absurdo. Por lo tanto $f(c) \nless 0$.

Así que de a) y b) se tiene que $f(c) = 0$. Además $a < c < b$, ya que como $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. $\square$

Ejemplo. 62

Sea

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x = 1 \\ x^2 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Solución. f es una función definida en $[1,2]$ continua en $(1,2]$ y no continua en 1, $f(1) = -1 < 0$ y $f(2) = 4 > 0$ pero no existe ningún $x \in [1,2]$ tal que $f(x) = 0$. Esta función no cumple el Teorema de Bolzano. $\square$

Ejemplo. 63

Dada una función f de valores reales continua en $[0,1]$. Supongamos que $0 \leq f(x) \leq 1$ para cada x en $[0,1]$. Demostrar que existe por lo menos un punto c en $[0,1]$ para el cual $f(c) = c$.

Solución. Como $0 \leq f(x) \leq 1$, entonces $(f(1) = 1$ o $f(1) < 1)$ y $(f(0) = 0$ o $f(x) > 0)$.

1. Si $f(1) = 1$, o, $f(0) = 0$, queda demostrado el ejercicio.
2. Si $f(1) < 1$ y $f(0) > 0$, definamos una nueva función $g(x) = f(x) - x$ que es continua en $[0,1]$. Por otra parte tenemos que $g(0) = f(0) > 0$ y $g(1) = f(1) - 1 < 0$ así que aplicando el teorema de Bolzano existe un $c \in [0,1]$ tal que $g(c) = 0$ y de esta manera se tiene que $f(c) = c$

$\square$

Ejemplo. 64

Dada una función f de valores reales continua en $[a,b]$. Suponiendo que $f(a) \leq a$ y que $f(b) \geq b$, demostrar que f tiene un punto fijo en $[a,b]$.

Solución. Como $f(a) \leq a$ y $f(b) \geq b$, entonces $(f(a) < a$ o $f(a) = a)$ y $(f(b) > b$ o $f(b) = b)$

1. Si $f(b) = b$, o, $f(a) = a$, el ejercicio queda demostrado.
2. Si $f(a) < a$ y $f(b) > b$, definamos la función $g(x) = f(x) - x$ que es continua en $[a,b]$. Por otra parte tenemos que $g(a) = f(a) - a < 0$ y $g(b) = f(b) - b > 0$, aplicando el teorema de Bolzano a g se tiene que existe un $c \in [a,b]$ tal que $g(c) = 0$ y por tanto $f(c) = c$.

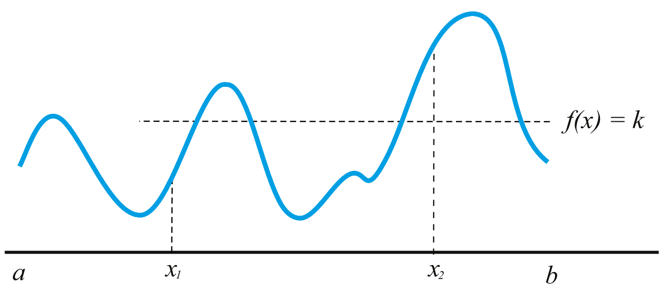
2.9.1. Teorema del valor intermedio para funciones continuas

La propiedad de los valores intermedios expresa que una función continua en un intervalo $[a,b]$ toma, al menos una vez todos los valores comprendidos entre los valores alcanzados en los extremos a y b. Así un ascensor de un edificio de 10 plantas que sube primero desde la planta baja a la séptima para bajar a la cuarta y luego subir a la última, ha pasado alguna vez por cada una de las plantas.

Teorema: 2.26 — **Propiedad de los valores intermedios**

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$. Si $x_1 < x_2$ son dos puntos cualesquiera de $[a,b]$ tales que $f(x_l) \neq f(x_2)$, la función f toma todos los valores comprendidos entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ por lo menos una vez en el intervalo (x_1, x_2).

Demostración. Supongamos que $f(x_1) < f(x_2)$ y sea λ tal que $f(x_1) < \lambda < f(x_2)$. Sea $g(x) = f(x) - \lambda$ una función definida en $[x_1, x_2]$, la cual continúa en cada punto de $[x_1, x_2]$.



Teorema del valor intermedio.

Por otra parte se tiene:

$$g(x_l) = f(x_l) - \lambda < 0 \text{ y } g(x_2) = f(x_2) - \lambda > 0.$$

Aplicando el Teorema de Bolzano a g existe un $c \in (x_1, x_2)$ tal que $g(c) = 0$ entonces existe un $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f(c) = \lambda$ $\square$

Aunque el teorema asegura la existencia de un punto c en el que alcanza el valor intermedio λ , no dice cómo encontrarlo. Para ello es necesario resolver la ecuación $f(x) = \lambda$.

Gráficamente el teorema significa que toda linea horizontal comprendida entre las líneas horizontales co-rrespondientes a $f(a)$ y $f(b)$ debe cortar a la gráfica de f al menos una vez.

En particular si una función continua en un intervalo es positiva en un extremo y negativa en el otro, de-be ser cero en algún punto del intervalo. Esto permite localizar las soluciones de una ecuación $f(x) = 0$, siempre que f sea continua, buscando intervalos en que la función cambie de signo.

2.9.2. Propiedad de los Valores Extremos

Teorema: 2.27 **Propiedad de los valores extremos**

Sea f una función continua en el intervalos cerrado $[a,b]$. Existe un $c \in [a,b]$ tal que $f(c)$ es un valor máximo, es decir $f(x) \leq f(c)$ para toda $x \in [a,b]$. Asimismo, existe existe un $d \in [a,b]$ tal que $f(d)$ es un valor mínimo, es decir $f(d) \leq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$

El teorema asegura que una función continua en un intervalo cerrado, siempre alcanza un máximo y un míni-mo absoluto en dicho intervalo. Lo que no dice es cuántas veces se alcanzan, ni dónde, ni cómo localizarlos. A pesar de ello el teorema es de gran utilidad práctica como se verá más adelante.

Capítulo 3

Derivada

Introducción 3.1

Los orígenes del Cálculo estuvieron motivados por el deseo de resolver diversos problemas vinculados al movimiento de los cuerpos, así como problemas de tipo geométrico de importancia en Óptica y problemas de cálculo de valores máximos y mínimos de una función dada. Simplificando, podemos destacar dos problemas principales:

- Determinar la tangente a una curva en un punto (el problema de las tangentes).
- Determinar el área encerrada por una curva (el problema de las cuadraturas).

Son los conceptos de derivada e integral, respectivamente, los que permiten resolver satisfactoriamente dichos problemas. Mientras que el concepto de integral tiene sus raíces en la antigüedad clásica, la otra idea fundamental del Cálculo, la derivada, no se formuló hasta el siglo XVII. Fue el descubrimiento efectuado por Sir Isaac Newton (1642 - 1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) de la relación entre estas dos ideas, tan dispares en apariencia, lo que inició el magnífico desarrollo del Cálculo. Si bien los trabajos de Newton y Leibniz son decisivos por sus aportaciones e influencia, no hay que olvidar que ellos son el punto culminante de un largo proceso en el que han participado científicos de la talla de Johannes Kepler (1571 - 1630), René Descartes (1596 - 1650), Pierre de Fermat (1601 - 1665), John Wallis (1616 -1703) e Isaac Barrow (1630 - 1677) entre otros.

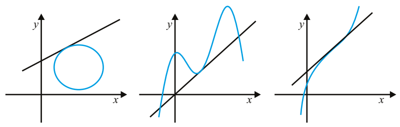
La recta tangente 3.2

En la primera mitad del siglo XVII no se conocían métodos generales para calcular la tangente a una curva en un punto de la misma. Este problema se presentaba con frecuencia en mecánica, en óptica y en geometría, y generalmente se resolvía, de forma geométrica, con técnicas adaptadas a cada caso particular. La dificultad está en que, siendo la tangente una recta, se precisa conocer dos puntos de la misma, o bien un punto y su pendiente, para poderla determinar.

3.2.1. Idea intuitiva de recta tangente.

Todo el mundo tiene una idea clara de lo que es la recta tangente a una circunferencia en uno de sus puntos, pero si tratamos de generalizar esa idea a otras curvas nos encontramos con cuestiones que esa idea no resuelve.

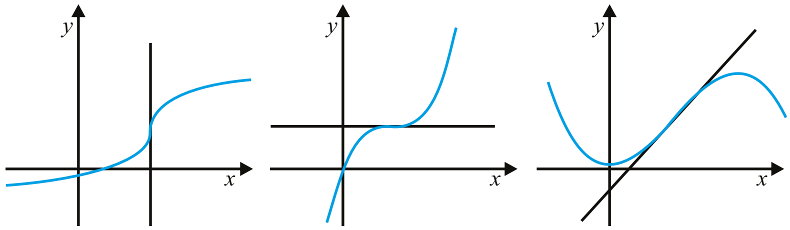
✻ ¿Puede la recta tangente cortar a la curva en más de un punto?
Repuesta. Sí, la recta tangente puede cortar a la curva en mas de un punto como se muestra en la gráfica siguiente:



Idea intuitiva de recta tangente

□

✻ ¿Puede atravesar la recta tangente a la curva por el punto de tangencia?
Repuesta. Sí, en un punto de inflexión la tangente atraviesa a la curva. Pudiéndose distinguir tres tipos de puntos de inflexión: de tangente vertical, de tangente horizontal y de tangente oblicua.



La tangente en un punto de inflexión

□

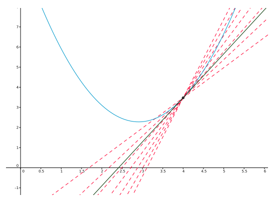
Nota:
En los puntos de discontinuidad no se define la recta tangente.

Definición: 3.25

Se llama tangente a una curva en un punto P a la recta que pasa por P con la misma dirección que la curva.

3.2.2. La pendiente de la Recta Tangente

Supongamos que queremos hallar la recta tangente a una curva de ecuación cartesiana $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. La estrategia, usada primero por Pierre de Fermat y más tarde por Newton, consiste en aproximar la tangente por rectas secantes cuyas pendientes sí pueden calcularse directamente. En particular, consideremos la recta que une el punto $(a, f(a))$ con un punto cercano, $(x, f(x))$, de la gráfica de f.



Esta recta se llama una secante (recta que corta a la curva, pero no es tangente a la curva). La pendiente de esta secante es:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

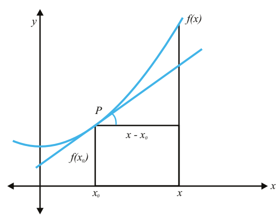
Observa que una recta secante es una buena aproximación de la recta tangente, siempre que el punto $(x, f(x))$ esté muy cerca de $(a, f(a))$.

Estas consideraciones llevan a definir la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ como la recta que pasa por dicho punto y cuya pendiente es igual al límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Así que la pendiente de la recta tangente se define

$$\tan \alpha = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Pendiente de la recta tangente.

Ejemplo. 65

¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 1$ en el punto $P = (1, 2)$?

Solución. La pendiente de la recta tangente viene dada por:

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

donde $(x_0, y_0) = (1, 2)$, así que

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 1 - 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x + 1}{1} = 2 \end{aligned}$$

□

3.2.3. Ejercicios

1.- En los problemas a continuación, obtenga una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la ecuación en el punto dado

a) $y = 9 - x^2$; $(2,5)$

b) $y = x^2 + 4$; $(-1,5)$

c) $y = 2x^2 + 4x$; $(-2,0)$

d) $y = x^2 - 6x + 9$; $(3,0)$

e) $y = x^3 + 3$; $(1,4)$

f) $y = 1 - x^3$; $(2,-7)$

2.- En los problemas a continuación, (a) Determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(x_1, f(x_1))$. (b) Determine los puntos de la gráfica donde la recta tangente es horizontal y utilice esto para dibujar la gráfica

a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 8$

b) $f(x) = 7 - 6x - x^2$

c) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 9x - 2$

d) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

3.- Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 + 3$ que sea paralela a la recta $8x - y + 3 = 0$

4.- Determine una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 - 4$ que sea paralela a la recta $3x + y = 4$

5.- Encuentre una ecuación de la recta normal a la curva $y = 2 - \frac{1}{3}x^2$ que sea paralela a la recta $x - y = 0$

6.- Obtenga una ecuación de cada recta normal a la curva $y = x^3 - 3x$ que sea paralela a la recta $2x + 18y - 9 = 0$

3.3 La Derivada de una Función

Definición: 3.26

Se dice que una función $f : I \mapsto \mathbb{R}$ es **derivable en un punto** $a \in I$, si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Explícitamente, f es derivable en a si hay un número $L \in \mathbb{R}$ verificando que para cada número $\varepsilon > 0$ existe algún número $\delta > 0$ tal que para todo $x \in I$ con $x \neq a$ y $|x - a| < \delta$ se tiene que

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L \right| < \varepsilon$$

Dicho número L se llama **derivada de** f en a lo representaremos por $f'(a)$ (notación debida a Lagrange).

La notación de Lagrange tiene la gran ventaja de poner de manifiesto que al aplicar la operación de derivación a una función obtenemos una nueva función, que está definida en todos los puntos donde la función dada sea derivable. Es usual considerar funciones derivadas definidas en intervalos.

Leibniz interpretaba ese símbolo como un “cociente diferencial”pues él lo entendía así: como un cociente de cantidades infinitesimales, y lo manejaba como un cociente; por ejemplo, se puede multiplicar o dividir, según convenga, por dx o $df(x)$. A partir del último tercio del siglo XIX, fueron totalmente abandonados los problemas que planteaban el uso de cantidades infinitesimales. Por eso, la interpretación de Leibniz de la derivada, aunque intuitiva, no es la que se sigue en la gran mayoría de los cursos de cálculo.

A pesar de lo dicho, es frecuente, sobre todo en libros de ingeniería, usar la notación de Leibniz y manejarla como él lo hacía. Creo que esto es útil porque la notación de Leibniz tiene una gran fuerza heurística, y no debe presentar ningún problema, siempre que no acabes creyendo que una derivada, tal como la hemos definido, es un cociente de infinitésimos. Y siempre que dicha notación se use como un mero simbolismo y no se hagan demostraciones apoyadas en su supuesta significación.

Una dificultad de la notación de Leibniz es que no es cómoda para representar la derivada en un punto concreto. Podemos entender que $\dfrac{df(x)}{dx}$ es la función derivada $f'(x)$, pero ¿cómo indicamos la derivada en punto concreto a? Las notaciones $\dfrac{df(a)}{dx}$ y $\dfrac{df(x)}{dx}(a)$ son confusas. Lo que suele hacerse es escribir:

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$$

que, realmente, es una notación incómoda. Una posible mejora sería escribir $\dfrac{df}{dx}(x)$ para representar $f'(x)$, en cuyo caso $\dfrac{df}{dx}(a)$ indicaría $f'(a)$.

La verdad es que la mayoría de los libros de ingeniería que usan estas notaciones lo hacen sin preocuparse mucho por su significado, y esa es una causa importante de que muchas veces no se entienda bien lo que escriben. Las notaciones son importantes y hay que manejarlas cuidadosamente. Y todavía más, cuando una notación se supone que tiene un significado casi mágico, y que por su fuerza simbólica ella sola, por sí misma, proporciona demostraciones.

Definición: 3.27

Dada una función $f : I \mapsto \mathbb{R}$ derivable en todo punto de I, se define la función derivada de f como la función $f' : I \mapsto \mathbb{R}$ que a cada punto $x \in I$ le hace corresponder la derivada de f en dicho punto.

Nota:

a) El límite $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se puede escribir también de la forma $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

b) A la expresión, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se le llama cociente incremental y se expresa de la forma:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Con lo cual la derivada no es más que el límite del cociente incremental cuando el incremento de x tiende a cero.

$$f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$$

Ejemplo. 66

Sea $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ Determine $f'(4)$.

Solución.

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(h+4)^2 + 3(h+4) + 1 - 45}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2h^2 + 16h + 32 + 3h + 12 + 1 - 45}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^2 + 19h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(2h + 19) = 19 \end{aligned}$$

□

Ejemplo. 67

Sea $f(x) = |x-3|$. Determine si existe $f'(3)$.

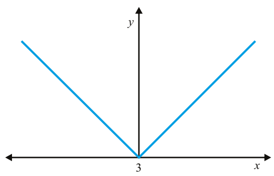
Solución.

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|3+h-3| - |3-3|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

Realizando los límites laterales se tiene que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

Por tanto $f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ no existe. Observe la gráfica de f



Note que pese a que f es continua en 3, no es derivable en este valor. Note que cuando x se acerca por la izquierda a 3, la pendiente de la recta tangente a f en x es -1, en cambio por la izquierda es 1. Esto se debe a que en $x = 3$ la gráfica tiene un pico.

□

Ejemplo. 68

Sea $f(x) = \sqrt{x}$. Encontrar la derivada de la función.

Solución.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

□

3.3.1. Derivadas Laterales

Definición: 3.28

Se dice que f es derivable por la izquierda en a si existe el límite:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

El valor de dicho límite se llama la derivada por la izquierda de f en a y lo notaremos por $f'(a^-)$.
Análogamente se dice que f es derivable por la derecha en a, si existe el límite:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

El valor de dicho límite se llama la derivada por la derecha de f en a y lo notaremos por $f'(a^+)$.

Teniendo en cuenta la relación que hay entre el límite de una función en un punto y los límites laterales, es claro que:

i) Si $a = maxI$, entonces la derivabilidad de f en a es lo mismo que la derivabilidad por la izquierda de f en a.

ii) Si $a = minI$, entonces la derivabilidad de f en a es lo mismo que la derivabilidad por la derecha de f en a.

iii) Si a no es un extremo de I, entonces equivalen las afirmaciones:

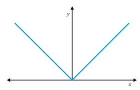
   a) f es derivable en a.

   b) Las derivadas por la izquierda y por la derecha de f en a existen y coinciden.

Ejemplo. 69

Calcular las derivadas laterales de la función valor absoluto, en el origen de coordenadas.

Solución.



$$
\begin{aligned}
&f(x)=|x|\\
&f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1\\
&f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{x}=-1
\end{aligned}
$$

Luego la función f no es derivable en el origen. □

3.3.2. Derivadas de Orden Superior

Definición: 3.29 **Derivadas de orden superior**

Dada la función f se define:

1. La primera derivada de f como la función $f'(x)$.
2. La segunda derivada de f:
$$f''(x) \quad \text{o} \quad \frac{d^2f}{dx^2}$$
como la derivada de $f'(x)$.
3. La tercera derivada de f:
$$f'''(x) \quad \text{o} \quad \frac{d^3f}{dx^3}$$
como la derivada de $f''(x)$.
4. En general, la n-ésima derivada de f :
$$f^{(n)}(x) \quad \text{o} \quad \frac{d^nf}{dx^n}$$
como la derivada de $f^{(n-1)}(x)$.

Ejemplo. 70

Encontrar la segunda derivada de la función $f(x)=\sqrt{x}$ utilizando la definición.

Solución. En el ejemplo (68), se determinó la primera derivada de f: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+h}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+h}}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{2h\sqrt{x}\sqrt{x+h}} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{2h\sqrt{x}\sqrt{x+h}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{2h\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{2\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})} \\
&= \frac{-1}{2\sqrt{x}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x})} = \frac{-1}{4x\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

□

3.3.3. Rectas Tangentes

Definición: 3.30

Supongamos que f es derivable en a, entonces la recta de ecuación cartesiana:

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

se llama recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, o recta tangente a f en $x = a$.

Cuando $f'(a) \neq 0$, la recta de ecuación:

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

es la recta normal a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, o recta normal a f en $x = a$

Ejemplo. 71

Determine la ecuación de la recta tangente a $y = \sqrt{x+7}$ en $x = 2$.

Solución.

1. Punto de Tangencia:
   Cuando $x = 2$, se tiene que: $y = 3$, por lo tanto el punto de tangencia es $(2,3)$

2. La pendiente m_T

$$
\begin{aligned}
m_T &= \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}\times\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+7)-9}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{(\sqrt{x+7}+3)}\\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

3. La intersección con el eje $Y : b_T$

   Dado que $m_T = \dfrac{1}{6}$ y la recta tangente pasa por $(2,3)$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
b_T &= y - m_T x = 3 - \frac{1}{6}2 = 3 - \frac{1}{3}\\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la ecuación de la recta tangente es:

$$
y = \frac{1}{6}x + \frac{8}{3}
$$

□

Ejemplo. 72

Determine el punto de intersección de las rectas tangentes a $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ en $x = -3$ y en $x = 3$ respectivamente.

Solución.

1. Puntos de tangencia:

   ✲ Si $x = -3$ entonces $y = 2$. Por lo tanto, la primera tangente (T_1) pasa por $(-3,2)$

   ✲ Si $x = 3$ entonces $y = \dfrac{1}{2}$. Por lo tanto, la segunda tangente (T_2) pasa por $\left(3,\dfrac{1}{2}\right)$.

2. Las pendientes m_{T_1} y m_{T_2}:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{(x+h-1)}{(x+h+1)} - \dfrac{x-1}{x+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{(x+h-1)(x+1)-(x-1)(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-1)(x+1)-(x-1)(x+h+1)}{h(x+h+1)(x+1)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h(x+h+1)(x+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{(x+h+1)(x+1)}$$
$$= \frac{2}{(x+1)^2}$$

Por lo tanto, $m_{T_1} = f'(-3) = \dfrac{1}{2}$ y $m_{T_2} = f'(3) = \dfrac{1}{8}$

3. Las intersecciones con el eje Y : b_{T_1} y b_{T_2}.
   Recta T_1: pasa por $(-3,2)$ y $m_{T_1} = \dfrac{1}{2}$. Así que

$$b_{T_1} = y - m_{T_1}x = 2 + \frac{1}{2}3 = \frac{7}{2}$$

   Recta T_2: pasa por $\left(3, \dfrac{1}{2}\right)$ y $m_{T_2} = \dfrac{1}{8}$. Así que

$$b_{T_2} = y - m_{T_2}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}3 = \frac{1}{8}$$

4. Ecuaciones de las tangentes:
   Ecuación recta (T_1):

$$y = \frac{x}{2} + \frac{7}{2} \tag{3.1}$$

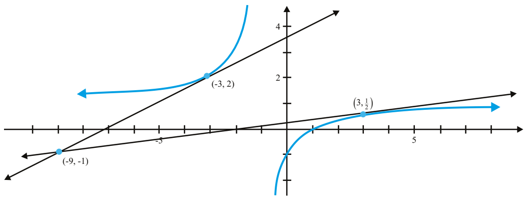
   Ecuación recta (T_2):

$$y = \frac{x}{8} + \frac{1}{8} \tag{3.2}$$

5. Puntos de intersección de las tangentes:
   Sustituyendo el valor de y dado por (3.1) en (3.2):

$$\frac{x}{2} + \frac{7}{2} = \frac{x}{8} + \frac{1}{8} \Rightarrow x = -9$$

   Sustituyendo $x = -9$ en cualquiera de las ecuaciones se obtiene que $y = -1$. Por lo tanto el punto de intersección de las tangentes es $(-9,-1)$.



□

3.3.4. Derivada y Continuidad

Teorema: 3.28

Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en dicho punto.

Demostración. En efecto, si $f : I \mapsto \mathbb{R}$ es derivable en a, de la ecuación de la recta tangente en $x = a$:

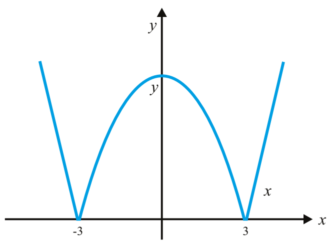
$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)} \qquad (x \in I, x \neq a)$$

se sigue que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ es decir, f es continua en a. □

Ejemplo. 73

Comprobar que la función $f(x) = |x^2 - 9|$ es continua en el punto $x = 3$, pero no es derivable en dicho punto. Comprobar el resultado gráficamente. ¿En qué otro punto tampoco será derivable?

Solución.



a) f es continua en $x = 3$
$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} |x^2 - 9| = 0 = f(0)$
b) f no es derivable en $x = 3$

$$f'(3) = \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{|x^2-9|}{x-3} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \dfrac{|x^2-9|}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = 6 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \dfrac{|x^2-9|}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-(x-3)(x+3)}{x-3} = -6 \end{cases}$$

Luego la función f no es derivable en $x = 3$ □

Ejemplo. 74 C

Comprobar que la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es continua en el punto $x = 0$, pero no es derivable en ese punto.

Solución.

a) f es continua en $x = 0$
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0 = f(0)$

b) f no es derivable en $x = 0$
$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}} = +\infty$

Luego la función no es derivable en $x = 0$. □

3.3.5. Reglas básicas de derivación

Teorema: 3.29 **(Reglas de derivación)**

a) Sea $f(x) = c$ una función constante entonces $f'(x) = 0$

b) Sea $f(x) = x$ la función identidad entonces $f'(x) = 1$

Demostración.

a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{c-c}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x+h-x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{h} = 1$

□

Teorema: 3.30 **(Reglas de derivación)**

Sean $f; g : I \mapsto \mathbb{R}$ dos funciones. Se verifican las siguientes afirmaciones:

i) La funciones suma, $f + g$, y producto, fg, son derivables en todo punto $a \in I$ en el que f y g sean derivables, y las derivadas respectivas vienen dadas por:
$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a); \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

ii) Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, la función cociente $\dfrac{f}{g}$ es derivable en todo punto $a \in I$ en el que f y g sean derivables, en cuyo caso se verifica que:
$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

Demostración. Las reglas de derivación se prueban muy fácilmente haciendo uso de las propiedades algebraicas de los límites y la definición de derivada. Es suficiente que tengas en cuenta las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\
\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\
\frac{(\frac{1}{g})(x)-(\frac{1}{g})(a)}{x-a} &= -\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\frac{1}{g(x)g(a)}
\end{aligned}$$

De la primera y segunda igualdades se deduce, tomando límites para $x \to a$, las reglas para la derivada de una suma y de un producto. Igualmente, de la tercera igualdad, se deduce la derivada de $\frac{1}{g}$, de donde, se obtiene la derivada de $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$ haciendo uso de la regla para derivar un producto. □

Como las funciones constantes tienen derivada nula en todo punto y la función identidad, $f(x) = x$, tiene derivada igual a 1 en todo punto, aplicando las reglas de derivación anteriores se obtiene el siguiente corolario:

Corolario: 3.5

Las funciones polinómicas son derivables en todo punto y las funciones racionales son derivables en todo punto de su conjunto natural de definición. Además la derivada de la función polinómica $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ en cada punto $x \in \mathbb{R}$ viene dada por:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$$

Ejemplo. 75

Sea $f(x) = 3x^4 + 2x^3$ entonces:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (3x^4)' + (2x^3)'\\
&= 3(x^4)' + 2(x^3)'\\
&= 3\times 4x^3 + 2\times 3x^2 = 12x^3 + 6x^2
\end{aligned}$$

Ejemplo. 76

Determine la ecuación de las rectas tangentes a $y = x^2 - 3x$ que se intersecten en el punto $\left(\frac{3}{2}, -4\right)$.

Solución.

1. Punto de tangencia.
   El hecho de que la tangente pase por $\left(\frac{3}{2},-4\right)$, no significa que $\left(\frac{3}{2},-4\right)$ sea el punto de tangencia, además $f\left(\frac{3}{2}\right) \neq -4$. Así, como este punto se desconoce supongamos que es (a,b).

2. La pendiente m_T

$$f'(x) = (x^2-3x)' = 2x-3$$

   por lo tanto $m_T = f'(a) = 2a-3$

3. La intersección con el eje Y: b_T
   Dado que la recta tangente pasa por (a,b), se tiene que

$$b_T = y - m_T x = b-(2a-3)a$$

   Por lo tanto la ecuación de la recta tangente es:

$$y = (2a-3)x+b-(2a-3)a$$

4. Hallar los valores de a y b
   Hay dos informaciones que no hemos utilizado:

   a) (a,b) es punto de tangencia, por lo tanto $f(a) = b$, es decir:

$$a^2-3a = b \tag{3.3}$$

   b) Por $\left(\frac{3}{2},-4\right)$ pasa la tangente, entonces debe satisfacer su ecuación:
   $-4 = (2a-3)\frac{3}{2}+b-(2a-3)a$ entonces

$$b = 2a^2-6a+\frac{1}{2} \tag{3.4}$$

   Sustituyendo b, dado por (3.3), en (3.4) :

$$a^2-3a = 2a^2-6a+\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$$

   Utilizando (3.3), para ambos valores de a se obtienen que $b = \frac{-1}{2}$. Por lo tanto hay dos puntos de tangencia:

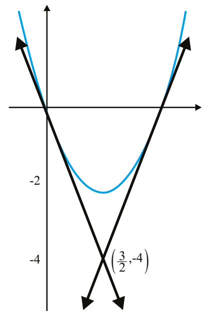
   i) Punto de tangencia $(a,b) = \left(\frac{3+\sqrt{7}}{2},-\frac{1}{2}\right)$. La ecuación de la recta tangente es:

$$y = x\sqrt{7}-\frac{3}{2}\sqrt{7}-4$$

   ii) Punto de tangencia $(a,b) = \left(\frac{3-\sqrt{7}}{2},-\frac{1}{2}\right)$. La ecuación de la recta tangente es:

$$y = -x\sqrt{7}+\frac{3}{2}\sqrt{7}-4$$

En la siguiente figura se muestra la gráfica de la función y las dos tangentes:



$\square$

Ejemplo. 77

Determine la tercera derivada de $f(x) = x^{12}$.

Solución.

$$f'(x) = 12x^{11}$$
$$f''(x) = 132x^{10}$$
$$f'''(x) = 1320x^{9}$$

$\square$

Ejemplo. 78

Sea $g(x) = (x+3)(x^3+2x^2-x-2)$, determinar $g'(x)$.

Solución.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= (x+3)'(x^3+2x^2-x-2)+(x+3)(x^3+2x^2-x-2)' \\
&= \left[(x)'+(3)'\right](x^3+2x^2-x-2)+(x+3)\left[(x^3)'+(2x^2)'-(x)'-(2)'\right] \\
&= (1+0)(x^3+2x^2-x-2)+(x+3)(3x^2+2\times 2x-1-0) \\
&= (x^3+2x^2-x-2)+(x+3)(3x^2+4x-1) = x^3+2x^2-x-2+3x^3+13x^2+11x-3 \\
&= 4x^3+15x^2+10x-5
\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo. 79

Sea $f(x) = (x^3+2x)g(x)$. Se sabe que $g(0) = 4$. Determine $f'(0)$.

Solución.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3+2x)'g(x)+(x^3+2x)g'(x) \\ &= (3x^2+2)g(x)+(x^3+2x)g'(x), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$f'(0) = 2g(0)+0g'(0) = 8$$

□

Ejemplo. 80

Sea $f(x) = \dfrac{x^4+1}{4x^2+1}$. Determine $f'(x)$

Solución.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^4+1)'(4x^2+1)-(x^4+1)(4x^2+1)'}{(4x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x^3(4x^2+1)-(x^4+1)8x}{(4x^2+1)^2} \\ &= \frac{8x^5+4x^3-8x}{(4x^2+1)^2} \end{aligned}$$

□

3.3.6. Ejercicios

1.- En los problemas siguientes, (a) Determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(x_1, f(x_1))$. (b) Determine los puntos de la gráfica donde la recta tangente es horizontal y utilice esto para dibujar la gráfica.

a) $f(x) = 3x^2-12x+8$
b) $f(x) = 7-6x-x^2$
c) $f(x) = x^3-6x^2-9x-2$
d) $f(x) = 2x^3-3x^2$

2.- Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2+3$ que sea paralela a la recta $8x-y+3 = 0$

3.- Determine una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2-4$ que sea paralela a la recta $3x+y = 4$

4.- Encuentre una ecuación de la recta normal a la curva $y = 2-\dfrac{1}{3}x^2$ que sea paralela a la recta $x-y = 0$

5.- Obtenga una ecuación de cada recta normal a la curva $y = x^3-3x$ que sea paralela a la recta $2x+18y-9 = 0$

6.- Encuentre el punto de la curva $y = \dfrac{1}{x}$ tal que la recta tangente en dicho punto corta a la recta x en el punto $(6,0)$.

7.- Una mosca camina de izquierda a derecha a lo largo de un camino representado por la parte superior de la curva $y = 9 - x^2$. Una araña espera en el punto $(5,0)$. Encuentre el punto sobre la gráfica $y = 9 - x^2$, donde la araña y la mosca se ven por primera vez. Ilustre gráficamente.

8.- Considere la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ con $0 < x$, tal como se ilustra:

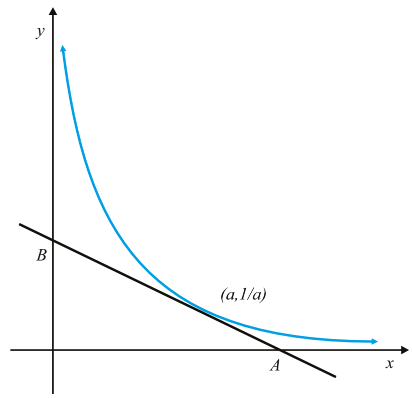


Figura 3.1:

a) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, \frac{1}{a})$.

b) Halle la distancia del punto A al punto B en función de a.

9.- Halle todos los puntos $(a, f(a))$ de la gráfica función $f(x) = x^2 - 2x + 4$, donde la recta tangente a esa gráfica en dicho punto sea perpendicular a la recta $x + 4y - 2 = 0$. Ilustre gráficamente.

10.- Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ que pasa paralela a la recta $2x + y - 5 = 0$. Ilustre gráficamente.

11.- Obtenga una ecuación a la recta tangente a la gráfica de : $f(x) = \sqrt{x-1}$ que sea perpendicular a la recta $2x + y + 1 = 0$. Ilustre gráficamente.

12.- Sea la función $f : [0,4] \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\ cx + 1 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Determina a, b y c sabiendo que f es continua en el intervalo cerrado $[0,4]$, derivable en el intervalo abierto $(0,4)$ y que $f(0) = f(4)$.

13.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x+3}} & \text{si} \quad -3 < x \leq 1 \\ \\ ax + b & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

Siguiendo un procedimiento análogo al ejercicio anterior, determine los valores de las constantes a y b tales que la función f dada sea derivable en el punto $x = 1$

14.- Sea

$$f(x)=\begin{cases} 1+\dfrac{a}{x-2} & \text{si} \quad x<1 \\ a+\dfrac{b}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad 1\leq x \end{cases}$$

a) ¿Que condiciones debe cumplir f para que sea continua en $x=1$?

b) Utilice la definición de derivadas laterales para calcular $f'(1^-)$ y $f'(1^+)$.

c) Determine los valores de a y b tales que la función dada sea derivable en $x=1$.

15.- Sea

$$f(x)=\begin{cases} a\sqrt{x}+b & \text{si} \quad 0<x<1 \\ x^2+3x-2, & \text{si} \quad 1\leq x \end{cases}$$

a) ¿Que condiciones debe cumplir f para que sea continua en $x=1$?

b) Utilice la definición de derivadas laterales para calcular $f'(1^-)$ y $f'(1^+)$.

c) Determine los valores de a y b tales que la función dada sea derivable en $x=1$.

16.- Sea

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}+2 & \text{si} \quad x\leq 0 \\ x^2-2x+3 & \text{si} \quad 0<x<3 \\ \sqrt{x-3}+1 & \text{si} \quad 3\leq x \end{cases}$$

a) Verifique que f es continua en $x=0$

b) Utilizando la definición calcule $f'(0^-)$ y $f'(0^+)$. Determine si $f'(0)$ existe o no existe.

c) Calcule $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ y determine si f es continua en $x=3$.

d) Determine porqué f no es derivable en $x=3$.

e) Calcule $f'(x)$ donde exista.

f) Trace la gráfica de f.

17.- Sea

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ x^2+2 & \text{si} \quad 1<x \end{cases}$$

a) Calcule si $f'(1)$ existe.

b) Trace la gráfica de f.

c) Calcule donde $f'(x)$ exista.

18.- Haciendo todo el procedimiento, verifique que :

a) $D_x\left[2\sqrt{x}+\dfrac{1}{3x^3}\right]=\dfrac{x^{7/2}-1}{x^4}$

b) $D_x\left[\sqrt{x}(x^2-20)\right]=\dfrac{5(x-2)(x+2)}{2\sqrt{x}}$

c) $D_x\left[\left(10-\dfrac{2}{x}\right)\left(3+\dfrac{1}{x}\right)\right]=\dfrac{4(1-x)}{x^3}$

d) $D_x\left[x^{\frac{1}{3}}(x-4)\right]=\dfrac{4(1-x)}{3x^{2/3}}$

e) $D_x\left[\sqrt[3]{6x^2-x^3}\right]=\dfrac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}$

f) $D_x\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{6x^2-x^3}}\right]=\dfrac{x-4}{x^{5/3}(6-x)^{4/3}}$

g) $D_x\left[\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}\right]=\dfrac{8}{(x-1)^3}$

h) $D_x\left[\dfrac{4-x)}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}\right]=\dfrac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$

i) $D_x\left[x^{2/3}(5-x)\right]=5/3\left(\dfrac{2-x}{x^{1/3}}\right)$

19.- Para cada una de la siguientes funciones calcule $f', f'' y f'''$ cuando:

a) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

b) $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$

c) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

e) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

f) $f(x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{x}$

g) $f(x)=\sqrt{x}$

h) $f(x)=5x^{2/3}-x^{5/3}$

20.- En los problemas a continuación encuentre la segunda derivada de la función dada

a) $y=-x^2+3x-7$

b) $y=15x^2-\pi^2$

c) $y=(-4x+9)^2$

d) $y=10x^{-2}$

e) $y=\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^3$

f) $y=x^3+8x^2-\dfrac{2}{x^4}$

g) $y=\dfrac{x^6-7x^3+1}{x^2}$

h) $f(x)=x^2(3x-4)^3$

i) $f(x)=(x^2+5x-1)^4$

21.- Obtenga una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y=x^3+3x^2-4x+1$ en el punto en el que el valor de la segunda derivada sea cero.

22.- Obtenga una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y=x^4$ en el punto en el que el valor de la tercera derivada sea 12.

Funciones de Clase C^n 3.4

Definición: 3.31

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, diremos que una función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ es de clase C^1 si es derivable y f' es una función continua. Si n es un número natural cualquiera, diremos que f es de clase C^n si f es n veces derivable y la derivada n-ésima $f^{(n)}$ es continua.
Por último, si una función admite derivadas de cualquier orden diremos que es de clase C^∞.

Usaremos la siguiente notación

$$\begin{aligned} C^1(A) &= \{f : A \mapsto \mathbb{R} \,|\, \text{existe } f' \text{ y es continua}\}, \\ C^2(A) &= \{f : A \mapsto \mathbb{R} \,|\, \text{existe } f'' \text{ y es continua}\} \end{aligned}$$

En general,

$$\begin{aligned} C^n(A) &= \{f : A \mapsto \mathbb{R} \,|\, \text{existe } f^{(n)} \text{ y es continua}\}, \\ C^\infty(A) &= \{f : A \mapsto \mathbb{R} \,|\, \text{existe } f^{(n)} \text{ para todo } n \text{ natural y es continua}\} \end{aligned}$$

Se tiene la siguiente cadena de inclusiones:

$$C^\infty(A) \subseteq C^{(n+1)}(A) \subseteq C^n(A) \subseteq \cdots \subseteq C^2(A) \subseteq C^1(A) \subseteq C(A);$$

donde $C(A)$ denota al conjunto de las funciones continuas en A. Para comprobar que las inclusiones son estrictas, tenemos que encontrar funciones de clase n que no sean de clase $n+1$. ¿Cómo buscamos una función con estas propiedades? La respuesta es sencilla: consideremos la función valor absoluto (o cualquiera otra con un pico) y, aunque todavía no hemos hablado de ello, calculemos una primitiva. Dicha primitiva se puede derivar una vez (obtenemos la función valor absoluto) pero no se puede volver a derivar. Si queremos que se pueda derivar más veces solo tenemos que integrar más veces. Esto es lo que hacemos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo. 81

La función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^{n+1} & \text{si} \quad x \geq a \\ 0 & \text{si} \quad x < a \end{cases}$$

es de clase C^n pero no de clase C^{n+1}. No es difícil comprobar que la derivada de orden $n+1$ no es continua en a:

$$f'(x) = \begin{cases} (n+1)(x-a)^n & \text{si} \quad x \geq a \\ 0 & \text{si} \quad x < a \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} (n+1)n(x-a)^{n-1} & \text{si} \quad x \geq a \\ 0 & \text{si} \quad x < a \end{cases}$$

y así sucesivamente

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (n+1)!(x-a) & \text{si} \quad x \geq a \\ 0 & \text{si} \quad x < a \end{cases}$$

Ejemplo. 81 (Continuación)

Esta función no es derivable en $x = a$ porque las derivadas laterales existen y no coinciden.

$$f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} (n+1)! & \text{si} \quad x \geq a \\ 0 & \text{si} \quad x < a \end{cases}$$

Obsérvese que la función f no es de clase $n+1$ porque no existe la derivada no porque no sea continua.

3.4.1. Derivada de Funciones Trigonométricas

Teorema: 3.31 **Derivadas de funciones trigonométricas**

a. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$

b. $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$

c. $(\tan x)' = \sec^2 x$

d. $(\cot x)' = -\csc^2 x$

e. $(\sec x)' = \sec x \tan x$

f. $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

Demostración.

$$\begin{aligned} a) \quad (\operatorname{sen} x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \operatorname{sen} h \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\operatorname{sen} x \frac{(\cos h - 1)}{h} + \frac{\operatorname{sen} h}{h} \cos x \right] \\ &= \operatorname{sen} x \times 0 + 1 \times \cos x = \cos x \end{aligned}$$

□

Ejemplo. 82

Sea $f(x) = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$. Determinar $f'(x)$

Solución.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1+\operatorname{sen} x)'(1-\cos x)-(1+\operatorname{sen} x)(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x(1-\cos x)-(1+\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x-\cos^2 x-\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}^2 x}{(1-\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x-\operatorname{sen} x-1}{(1-\cos x)^2} \end{aligned}$$

□

3.4.2. Regla de la cadena

Teorema: 3.32 **Derivación de una función compuesta o regla de la cadena**

Sean $f: I \mapsto \mathbb{R}$ y $g: J \to \mathbb{R}$ con $f(I) \subset J$, y sea $h = gof : I \to \mathbb{R}$ la función compuesta. Supongamos que f es derivable en $a \in I$ y que g es derivable en $f(a)$. Entonces h es derivable en a y $h'(a) = g'[f(a)]f'(a)$.

En particular, si g es derivable en J, la función compuesta $h = gof$ es derivable en todo punto de I donde f sea derivable

Note que si $y = fog(x)$ y $u = g(x)$, la regla de la cadena está dada por:
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

Ejemplo. 83

Determine la derivada de $f(x) = \sec(x^2+x+4)$

Solución. Sea $u = x^2+x+4$, así $f(x) = \sec u$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{df}{du}\frac{du}{dx} \\ &= \sec u \tan u(2x+1) \\ &= \sec(x^2+x+4)\tan(x^2+x+4)(2x+1) \end{aligned}$$

□

Ejemplo. 84

Determine la derivada de $f(x) = (1+\tan(3x))^4$

Solución. Sea $u = 1 + \tan(3x)$, entonces $f(x) = u^4$, por lo tanto

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{df}{du}\frac{du}{dx} \\ &= 4u^3(1+\tan(3x))' \end{aligned}$$

Para derivar $\tan(3x)$ se utiliza nuevamente la regla de la cadena, sea $w = 3x$ y $g(x) = \tan w$, así

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{dg}{dw}\frac{dw}{dx} \\ &= \sec^2 w \times 3 \\ &= 3\sec^2(3x) \end{aligned}$$

Por lo tanto,
$f'(x) = 4u^3 \times 3\sec^2(3x) = 12(1+\tan(3x))^3\sec^2(3x)$ □

Ejemplo. 85

Determine la derivada de $f(x) = \sqrt[6]{x^4 \operatorname{sen} x}$

Solución.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{6\sqrt[6]{(x^4 \operatorname{sen} x)^5}}.(x^4 \operatorname{sen} x)' \quad \text{(regla de la cadena)} \\ &= \frac{1}{6\sqrt[6]{(x^4 \operatorname{sen} x)^5}}.\left[(x^4)' \operatorname{sen} x + x^4(\operatorname{sen} x)'\right] \quad \text{(regla del producto)} \\ &= \frac{1}{6\sqrt[6]{(x^3 \operatorname{sen} x)^5}}.(4x^3 \operatorname{sen} x + x^4 \cos x) \end{aligned}$$

□

En el siguiente ejemplo se aplica varias veces la regla de la cadena.

Ejemplo. 86

Determine la derivada de $f(x) = \cos(\sqrt[4]{x \operatorname{sen} x})$

Solución. Utilizando la regla de la cadena

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(\sqrt[4]{x \operatorname{sen} x}) \times (\sqrt[4]{x \operatorname{sen} x})'$$

Aplicando la regla de la cadena

$$= -\operatorname{sen}(\sqrt[4]{x \operatorname{sen} x}).\frac{1}{4\sqrt[4]{(x \operatorname{sen} x)^3}}.(x \operatorname{sen} x)'$$

Aplicando derivada de un producto

$$= -\operatorname{sen}(\sqrt[4]{x \operatorname{sen} x}).\frac{1}{4\sqrt[4]{(x \operatorname{sen} x)^3}}.(\operatorname{sen} x + x\cos x)$$

□

3.4.3. Ejercicios

1.- Haciendo todo el procedimiento, verifique que

$$D_x\left[\left(\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\right)^2\right]=\frac{2\cos x}{(1-\operatorname{sen} x)^2}$$

2.- Halle la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)^2$

b) $f(x)=\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(3x)}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{\left(\sec x+\tan x\right)^2}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{\left(\csc x+\cot x\right)^3}$

e) $f(x)=\sec\sqrt{2x-1}$

f) $f(x)=\tan\sqrt[3]{5-6x}$

g) $f(x)=4x^3-x^2\cot^3\dfrac{1}{x}$

h) $f(x)=x\csc\dfrac{1}{x}$

i) $f(x)=x^2\cos 5x$

j) $f(x)=x^2\tan^3\dfrac{1}{x}$

k) $f(x)=x\sec\dfrac{1}{x}$

l) $f(x)=\dfrac{2\cos x}{\sqrt{2+\operatorname{sen} x}}$

m) $f(x)=\tan^2(x)\sec^3(x)$

n) $f(x)=5\cos^2(3x)$

o) $f(x)=x\sec^2(2x-1)$

3.- Halle todos los puntos $(a,f(a))$ de la gráfica de : $f(x)=x+2\operatorname{sen} x$ donde la recta tangente sea paralela al eje x

4.- Halle todos los intervalos de a pertenecientes al intervalo abierto $(\pi,2)$ tales que la recta tangente a la gráfica de $f(x)=\cos x$ en el punto $(a,f(a))$ sea paralela a la recta $x-2y+2=0$

5.- Halle todos los valores de a pertenecientes al intervalo abierto $(0,\pi)$ tales que la recta tangente a la gráfica de $f(x)=\cos x$ en el punto $(a,f(a))$ sea paralela a la recta $x-2y+2=0$. Ilustre gráficamente.

6.- Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ para: $y=\sqrt{x+\operatorname{sen}^2(2x)}$

7.- Halle la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la curva

a) $y=\sqrt{1+\cos x}$ en el punto $(\pi/2,1)$

b) $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{3+\cos^2 x}}$ en el punto $(0,1)$

8.- Halle la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{2x-1}{x+2}}$

b) $f(x)=\dfrac{-4}{(2x^2+x+1)^3}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{\left(x^2+2x\right)^3}$

9.- En los problemas siguientes, encuentre la derivada de la función dada

a) $y=(-5x)^{30}$
b) $y=(2x^2+x)^{200}$
c) $y=\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^5$
d) $y=\dfrac{1}{(x^3-2x^2+7)^4}$
f) $y=(3x-1)^4(-2x+9)^5$
g) $y=x^4(x^2+1)^6$
h) $y=\operatorname{sen}^3 x$
i) $y=\sec^2 x$
j) $f(x)=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2$
k) $F(x)=(2x+1)^3\tan^2 x$
l) $R(t)=\dfrac{(1+\cos t)^2}{(1+\operatorname{sen} t)^2}$
m) $y=\sqrt{x}\cos\sqrt{x}$
n) $y=\operatorname{sen}2x\cos 3x$
o) $f(x)=(\sec 4x+\tan 2x)^5$
p) $f(x)=\tan(\cos x)$
q) $f(x)=\operatorname{sen}^3(4x^2-1)$

3.5 Aplicaciones de la regla de la cadena

3.5.1. Derivación implícita

Una función es una relación entre dos magnitudes. Cuando en la fórmula que las relaciona, una de las magnitudes viene despejada en función de la otra, entonces se dice que la función viene definida de manera explícita $y=f(x)$. Cuando ninguna de las dos magnitudes está despejada en función de la otra, sino que las magnitudes están relacionadas mediante una ecuación, se dice que la función está definida de manera implícita $f(x;y)=0$

Las funciones definidas de manera implícita se pueden derivar directamente, sin necesidad de despejar una de las variables. Para ello basta con tener en cuenta que la variable y es función de la x y que, por tanto, cada vez que la derivemos hay que multiplicarla por su derivada (se trata de derivar una función compuesta).

Hay ecuaciones que no son funciones pero que podrían descomponerse en varias funciones, estas se pueden derivar sin necesidad de escribirlas de manera explícita. La derivada obtenida vale para todas las funciones.

Ejemplo. 87

Derivar la ecuación:

$$x^2+y^2=16$$

Solución. Una manera de hacerlo sería expresándola de manera explícita en dos funciones, sin embargo, no es necesario despejar la función, sino que podemos derivar directamente en la ecuación,

$$x^2+y^2=16 \Longrightarrow 2x+2yy'=0 \Longrightarrow y'=-\frac{x}{y}$$

$\square$

Nota:
Hay que evitar derivar funciones que no existen. Por ejemplo la ecuación $x^2+y^2=-4$ no representa ningún punto del plano y por tanto no tiene ningún significado analítico. No obstante, al ser una expresión algebraica podemos aplicar las reglas de derivación y derivarla $2x+2yy'=0$, y podríamos pensar que $y'=-\frac{x}{y}$, sin embargo, estas operaciones no tienen ningún sentido.

Ejemplo. 88

Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia:

$$(x-3)^2+(y-3)^2=2$$

en los puntos en que $x=4$. Comprobar el resultado gráficamente.

Solución. Derivando implícitamente la ecuación

$$2(x-3)+2(y-3)y'=0 \Longrightarrow y'=-\frac{x-3}{y-3}$$

Reemplazando $x=4$ en la ecuación de la circunferencia:

$$1+(y-3)^2=2 \Longrightarrow y-3=\pm 1 \Longrightarrow y=\left\{\begin{array}{l}4\\2\end{array}\right.$$

Con lo cual, para $x=4$ tenemos dos puntos de la circunferencia $P(4;4)$ y $Q(4;2)$ y hallamos la ecuación de la recta tangente en cada uno de ellos.

$$P(4;4) \Longrightarrow y-4=-\frac{4-3}{4-3}(x-4) \Longrightarrow y=-x+8$$

$$P(4,2) \Longrightarrow y-2=-\frac{4-3}{2-3}(x-4) \Longrightarrow y=x-2$$

□

Ejemplo. 89

Sea $x[f(x)]^3+xf(x)=12$. Si $f(2)=2$, determine $f'(2)$

Solución. Derivando ambos lados de la ecuación:

$$\begin{array}{rl}
& (x[f(x)]^3+xf(x))'=(12)' \\
\Longrightarrow & (x[f(x)]^3)'+(xf(x))'=0 \\
\Longrightarrow & (x)'[f(x)]^3+x([f(x)]^3)'+(x)'f(x)+xf'(x)=0 \\
\Longrightarrow & [f(x)]^3+x\times 3([f(x)]^2f'(x)+f(x)+xf'(x)=0 \\
\text{Evaluando en} \quad x=2 & [f(2)]^3+6([f(2)]^2f'(2)+f(2)+2f'(2)=0 \\
\Longrightarrow & 8+24f'(2)+2+2f'(2)=0 \\
\Longrightarrow & f'(2)=-\frac{10}{26}=-\frac{5}{13}
\end{array}$$

Ejemplo. 90

Calcule y' sabiendo que $y = \operatorname{sen}(x+y^2)$

Solución. Derivando ambos miembros de la ecuación con respecto a x se obtiene que:

$$\begin{aligned}
& y' = (\operatorname{sen}(x+y^2))' \\
\Longrightarrow\quad & y' = \cos(x+y^2)\times(x+y^2)' \\
\Longrightarrow\quad & y' = \cos(x+y^2)\times(1+2yy') \\
\Longrightarrow\quad & y' - 2yy'\cos(x+y^2) = \cos(x+y^2) \\
\Longrightarrow\quad & y' = \frac{\cos(x+y^2)}{1-2y\cos(x+y^2)}
\end{aligned}$$

□

3.5.2. Razón de cambio

En las aplicaciones frecuentemente aparecen dos o mas variables como por ejemplo x e y, digamos $x = f(t)$ e $y = g(t)$, que son funciones derivables con respecto al tiempo t, estas pueden estar relacionadas entre sí por medio de una ecuación.

La regla de la cadena permite obtener, implícitamente, la derivada de una función compuesta. Así, por ejemplo,

$$\frac{d(g(y(t)))}{dt} = g'(y)\frac{dy}{dt}.$$

Esta regla se puede aplicar para calcular razones de cambio de dos o mas variables que varían con el tiempo, que son las que resultan al derivar, aplicando la regla de la cadena, funciones como las mencionadas inicialmente (en las que aparecen dos o mas variables). Estas razones de cambio nos sirven para saber ¿qué tan rápido varía una cantidad en el tiempo?

Por ejemplo, suponga que se tiene un recipiente semiesférico, como el que se muestra en la Figura 3.2. Cuando el agua sale del recipiente, el volumen V, el radio r y la altura h del nivel del agua son las tres funciones que dependen del tiempo t.

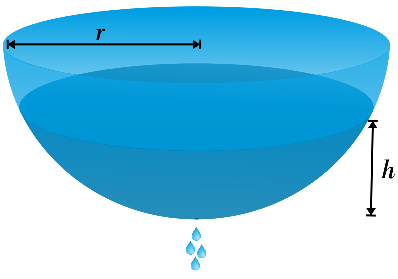


Figura 3.2: Recipiente Semiesférico

Estas tres variables están relacionadas entre sí, por la ecuación del volumen del casquete esférico; a saber

$$V = \frac{\pi}{3}h^2(3r - h) \tag{3.5}$$

Derivando implícitamente ambos lados de (3.5) con respecto al tiempo, se obtiene la siguiente ecuación de razones relacionadas

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left[6rh\frac{dh}{dt} + 3h^2\frac{dr}{dt} - 3h^2\frac{dh}{dt}\right]$$

Se puede observar que la razón de cambio del volumen, está ligada a las razones de cambio de la altura y del radio, en donde

1) $\dfrac{dV}{dt}$ es la razón o rapidez a la cual varía el volumen con respecto al tiempo

2) $\dfrac{dr}{dt}$ es la razón o rapidez a la cual varía el radio con respecto al tiempo

3) $\dfrac{dh}{dt}$ es la razón o rapidez a la cual varía la altura con respecto al tiempo

Así, por ejemplo, $\dfrac{dV}{dt} = 20cm^3/seg$ significa que el volumen está aumentando $20cm^3$ cada segundo, mientras que, $\dfrac{dV}{dt} = -25cm^3/seg$ significa que el volumen está disminuyendo $25cm^3$ cada segundo.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, en todo problema de razones relacionadas (o tasas relacionadas), se calcula la rapidez con que cambia una cantidad en términos de la razón de cambio de otra(s) cantidad(es).

Estrategia para resolver problemas de razón de cambio

1) De ser posible, trazar un diagrama que ilustre la situación planteada.

2) Leer cuidadosamente el problema, distinguir cuáles son los valores y razones de cambio conocidas y cuál es la razón de cambio que necesitamos calcular.

3) Plantear una ecuación que relacione las variables de razones de cambio dadas, con las variables cuyas razones de cambio han de determinarse.

4) Derivar implícitamente ambos miembros de la ecuación obtenida en (3) con respecto al tiempo, aplicando la regla de la cadena, con el fin de obtener la ecuación de razones relacionadas.

5) Sustituir en la ecuación resultante de (4), todos los valores conocidos de las variables y sus razones de cambio, a fin de hallar la razón de cambio requerida.

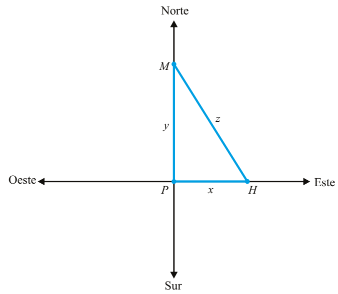
Ejemplo. 91

Una mujer que trota con rapidez constante de 6 km/h pasa por un punto P hacia el norte. Diez minutos más tarde un hombre que trota a razón constante de 12 km/h pasa por el mismo punto hacia el este. ¿Cuán rápido varía la distancia entre los trotadores veinte minutos después de que el hombre pasa por P?

Solución.

Se mide el tiempo en horas a partir del instante en que el hombre pasa por el punto P. Como se muestra en la figura, supongamos que el hombre H y la mujer M se encuentran a x y y kilómetros, respectivamente, del punto P. Sea z la distancia correspondiente entre los dos corredores.
Sabemos que

$$\frac{dx}{dt} = 12\frac{km}{h} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = 6\frac{km}{h}$$



Por el Teorema de Pitágoras, las variables x, y y z están relacionadas por:

$$z^2 = x^2 + y^2 \tag{3.6}$$

Derivando (3.6) con respecto a t:

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \tag{3.7}$$

Sustituyendo en (3.7) las razones conocidas resulta que:

$$z\frac{dz}{dt} = 12x + 6y$$

La distancia recorrida por el hombre es $x = 12 \times 1/3 = 4Km$ y la recorrida por la mujer es $y = 6 \times (1/3 + 1/6) = 3Km$. Así que cuando $t = 1/3h$, $z = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5km$. Finalmente,

$$5\frac{dz}{dt}\bigg|_{t=1/3} = 12 \times 4 + 6 \times 3$$

o bien,

$$\frac{dz}{dt}\bigg|_{t=1/3} = \frac{66}{5}Km/h$$

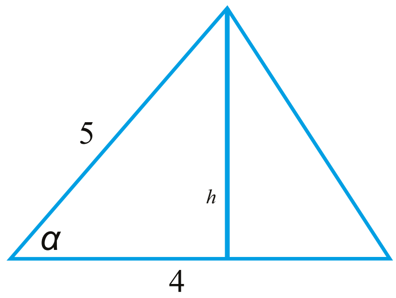
□

Ejemplo. 92

Dos de los lados de un triángulo tienen 4 y 5 metros de longitud y el ángulo entre ellos crece a razón de 0,06 rad/seg. Encuentre la razón con que aumenta el área del triángulo cuando el ángulo entre los lados de longitud fija es de $\pi/3$.

Solución. El area del triángulo viene dada por:

$$A = \frac{4h}{2} = 2h \tag{3.8}$$



Según la figura la altura del triángulo viene dada por:

$$h = 5\,\mathrm{sen}\,\alpha \tag{3.9}$$

Reemplazando (3.9) en (3.8) se tiene que:

$$A = 10\,\mathrm{sen}\,\alpha \tag{3.10}$$

Derivando ambos miembros de la ecuación (3.10) se tiene

$$\frac{dA}{dt} = 10\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}$$

Así que

$$\frac{dA}{dt} = 0,3\frac{m^2}{seg}$$

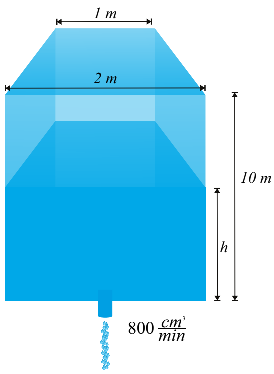
□

Ejemplo. 93

Un déposito tiene la forma de un prisma recto siendo los dos extremos superior e inferior trapecios regulares, cuya altura es de 1 m, la base mayor de 2 m y la base menor de 1 m. La altura del déposito inicialmente es de 10 m. El depósito inicialmente lleno de agua pierde líquido por una válvula inferior a la velocidad constante de 800 cm^3/min. Calcular la rapidez con la que disminuye la altura en ese instante y el tiempo en el que demora en vaciarse por completo el déposito.

Solución.

Solución.



El volumen del prisma viene dado por:

$$V = A_b h = \frac{(1+2)1}{2} h = \frac{3}{2} h \qquad (3.11)$$

Derivando con respecto al tiempo ambos miembros de la ecuación (3.11) se tiene

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3}{2}\frac{dh}{dt} \qquad (3.12)$$

Así que $\dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{1600}{3}\, cm/min$ El tiempo de vaciado del tanque viene dado por

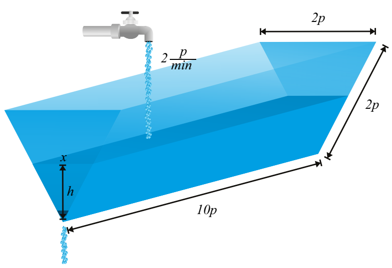
$$t = \frac{1000}{\frac{1600}{3}} = 1{,}99\, min$$

□

Ejemplo. 94

Una canaleta de riego con sección transversal en forma de V de 10 pies de longitud, abierta por su parte superior, con extremos en forma de triángulo equiláteros de 2 pies de lado, se bombea agua a razón de $2\, p^3/min$. Si la canaleta presenta una salida en una de sus tapas extremas por la cual se escapa líquido; Si la altura se eleva a razón de $1/8\, p/min$. Calcular la velocidad a la cual se escapa el agua en el momento en que la altura del agua es de $3/4\, p$.

Solución.



La rapidez con la que el agua entra menos la rapidez con la que el agua sale a la canaleta es igual a la rapidez con la que el volumen del agua aumenta en la canaleta:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV_E}{dt} - \frac{dV_S}{dt}$$

La relación entre las variables se obtiene del volumen del agua dentro de la canaleta:

$$V = 10A = 10\frac{xh}{2} = 5xh \qquad (3.13)$$

Como el triángulo es equilátero tenemos que:

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3} h \qquad (3.14)$$

Reemplazando (3.14) en (3.13) se tiene

$$V = \frac{10\sqrt{3}}{3}h^2 \tag{3.15}$$

Derivando (3.15) con respecto a t :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{20h}{\sqrt{3}}\frac{dh}{dt}$$

Como $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{1}{8}\,p/min$ y $h = \dfrac{3}{4}\,p$ entonces $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{15}{8\sqrt{3}}\,p^3/min$ así que

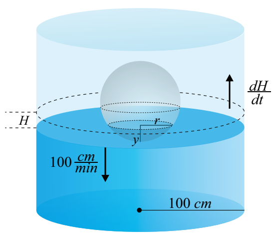
$$\begin{aligned}\frac{dV_S}{dt} &= \frac{dV_E}{dt} - \frac{dV}{dt}\\ &= 2\,p^3/min - \frac{15}{8\sqrt{3}}\,p^3/min = 0,9\,p^3/min\end{aligned}$$

□

Ejemplo. 95

Una pelota esférica de radio 50 cm se introduce lentamente dentro de un vaso cilíndrico de radio 1 m que está parcialmente lleno de agua. La pelota se introduce a razón de 10 cm/min. Calcular la velocidad a la que se eleva el nivel del agua cuando se ha introducido en el líquido la mitad de la pelota.

Solución.



El volumen V_1 introducido corresponde al de un casquete esférico de radio superior 50 cm y altura y

$$V_1 = \pi r y^2 - \frac{1}{3}\pi y^3 = \pi 50 y^2 - \frac{1}{3}\pi y^3$$

$$V_1 = \pi(50y^2 - \frac{1}{3}y^3) \tag{3.16}$$

El volumen V_2 del agua desalojada es:

$$V_2 = 10^4\pi H - \pi r^2 H \tag{3.17}$$

Como los dos volúmenes son iguales, se tiene

$$50y^2 - \frac{1}{3}y^3 = 10^4\pi H - \pi r^2 H \tag{3.18}$$

Derivando ambos miembros de la ecuación (3.18) con respecto al tiempo t se tiene:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{y(100-y)\dfrac{dy}{dt}}{10^4 - r^2}$$

Así que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{50(100-50)10}{10{,}000 - 2500} = 3,33cm/min$$

□

3.5.3. Ejercicios

Derivación Implícita

1.- Suponiendo que la ecuación dada define implícitamente a y como una función de x calcule y'

$$3x^2y - 3y = x^3 - 1$$

2.- Utilizando la diferenciación implícita en cada uno de los siguientes ejercicios, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la curva dada en el punto indicado:

a) $2xy^2 - 3y = x^3 + 1$, en el punto $(1, 2)$.

b) $\operatorname{sen}(xy) = x\cos y$, en el punto $(1, \frac{\pi}{4})$.

c) $\cos(xy^2) = 1 + \operatorname{sen} y$, en el punto$(1, 0)$.

3.- Suponiendo que la ecuación dada define a y implícitamente, como función de x, calcule y', y encuentre la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la curva dada en el punto indicado:

a) $y + \operatorname{sen}(xy^2) = y\cos x + 2$ en el punto $(\pi, 1)$

b) $\cos(x+y) = x + \dfrac{1}{2}$ en el punto $(0, \frac{\pi}{3})$

c) $x\cos(xy) + x^2y = \operatorname{sen} y + y - x$ en el punto $(1, \pi)$

d) $xy^2 - 3y = 2x^3 - 4$ en el punto $(1, 2)$

e) $y + \operatorname{sen}(xy^2) = y\cos x + 2$ en el punto$(\pi, 1)$

f) $3y^2 + \operatorname{sen}(xy) = y\cos x + x^2 + 2$ en el punto $(0, 1)$

4.- Verifique que las hipérbolas $xy = 2$, y , $x^2 - y^2 = 3$ se intersecan en ángulo recto.
Sugerencia= suponga que el punto (a, b) es un punto de intersección de las dos hipérbolas; y utilice derivación implícita para comprobar que las rectas tangentes a las dos curvas en el punto (a, b) son perpendiculares.

5.- Dos rectas que pasan por el punto $(-2, 8/5)$, son tangentes a la curva $x^2 - 5y^2 - 10x - 30y = -49$.
Encuentre una ecuación de cada una de estas rectas tangentes.

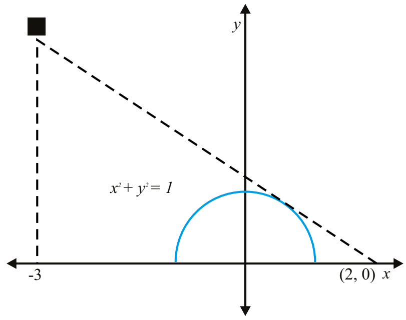
6.- La curva $x^2 - xy + y^2 = 16$ es una elipse con centro en el origen y eje mayor en la recta $y = x$. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes en los dos puntos donde la elipse intersecta al eje x.

7.- Suponga que la ecuación $x^2 - xy + y^2 = 1$ define implícitamente a y como una función de x dos veces derivable, calcule y' y y''.

8.- Suponga que la ecuación $x^2 - xy + y^2 = 6x - 9$ define implícitamente a y como función de x dos veces derivable, encuentre y'' en $(2, 1)$.

9.- Suponga que la ecuación $2x^2y - 4y^3 = 4$ define implícitamente a y como función de x dos veces derivable, encuentre y'' en $(2, 1)$.

10.- ¿Qué tan alto debe estar el foco en la figura dada, si el punto $(0, 2)$ está justo en el borde de la región iluminada?



11.- En los ejercicios a continuación, halle $\dfrac{dy}{dx}$ por derivación implícita.

a) $x^2+y^2=16$
b) $x^3+y^3=8xy$
c) $4x^2-9y^2=1$
d) $x^2+y^2=7xy$
e) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$
f) $\dfrac{3}{x}-\dfrac{3}{y}=2x$
g) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$
h) $2x^3y+3xy^3=5$
i) $x^2y^2=x^2+y^2$
j) $(2x+3)^4=3y^4$
k) $x^2=\dfrac{x+2y}{x-2y}$
l) $\dfrac{x}{\sqrt{y}}-4y=x$
m) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4y^2$
n) $\sqrt{y}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[4]{y}=x$
ñ) $\sqrt{xy}+2x=\sqrt{y}$
o) $y+\sqrt{xy}=3x^3$
p) $\dfrac{y}{\sqrt{x-y}}=2+x^2$
q) $x^2y^3=x^4-y^4$
r) $y=\cos(x-y)$
s) $x=\sec(x+y)$
t) $\sec^2 x+\csc^2 y=4$
u) $\cot(xy)+xy=0$
v) $x\,\mathrm{sen}\,y+y\cos x=1$
w) $\sec^2 y\cot(x-y)=\tan^2 x$
x) $\csc(x-y)+\sec(x+y)=x$
y) $(x+y)^2-(x-y)^2=x^3+y^3$
z) $y\sqrt{2+3x}+x\sqrt{1+y}=x$

12.- Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva $16x^4+y^4=32$ en el punto $(1,2)$.

13.- Halle una ecuación de la recta normal a la curva $x^2+xy+y^2-3y=10$ en el punto $(2,3)$.

14.- Halle una ecuación de la recta normal a la curva $9x^3-y^3=1$ en el punto $(1,2)$.

15.- Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva $x\sqrt[3]{y} = 14x + y$ en el punto $(2,-32)$.

16.- ¿En que punto de la curva $x+\sqrt{xy}+y=1$ es la recta tangente paralela al eje x?

17.- Hay dos rectas que pasan por el punto $(-1,3)$ que son tangentes a la curva $x^2+4y^2-4x-8y+3=0$. Obtenga una ecuación para cada una de estas rectas.

Razón de Cambio

1.- Si una bola de nieve se funde de modo que su área superficial disminuye a razón de 1 cm^2/min, encuentre la razón a la cual disminuye el diámetro cuando es de 10 cm.

2.- A mediodía, el velero A está a 150 km al oeste del velero B. El A navega hacia el este a 35 km/h y el B hacia el norte a 25 km/h. ¿Con qué rapidez cambia la distancia entre las embarcaciones a las 4:00 p.m?

3.- Un avión vuela horizontalmente a una altitud de 1mi a una velocidad de 500 mi/h y pasa sobre una estación de radar. Encuentre la razón a la que aumenta la distancia del avión a la estación cuando aquel está a 2 mi de esta.

4.- Dos automóviles empiezan a moverse a partir del mismo punto. Uno viaja hacia el sur a 60 mi/h y el otro hacia el oeste a 25 mi/h. ¿Con qué razón aumenta la distancia entre los dos automóviles 2 horas más tarde?

5.- Una lámpara proyectora situada sobre el piso ilumina una pared que está a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de alto camina desde la lámpara hacia el edificio a una velocidad de 1.6 m/seg, ¿Con qué rapidez decrece su sombra proyectada sobre el edificio cuando se encuentra a 4 m de este?

6.- Un hombre empieza a caminar hacia el norte a 4 p/seg desde un punto P. Cinco segundos más tarde, una mujer empieza a caminar hacia el sur a 5 p/seg desde un punto a 500 pies al este de P. ¿Con qué razón se separan 15 minutos después que la mujer empezó a caminar?

7.- Un diamante de béisbol es un cuadrado de 90 pies de lado. Un bateador golpea la pelota y corre hacia la primera base a una velocidad de 24 p/seg.

a) ¿Con qué razón disminuye su distancia a la segunda base cuando está a la mitad de la distancia de la primera?

b) ¿Con qué razón aumenta su distancia a la tercera base en el mismo momento?

8.- Un avión vuela a una velocidad constante de 300 Km/h pasa sobre una estación de radar a una altitud de 1 km y asciende formando un ángulo de 30°. ¿Con qué razón aumenta la distancia del avión a la estación de radar un minuto más tarde?

9.- Dos personas parten del mismo punto una camina hacia el este a 3 mi/h y la otra hacia el noroeste a 2 mi/h. ¿Con qué rapidez cambia la distancia entre ambas después de 15 minutos?

10.- Un hombre de 5 pies de altura camina a 4 p/seg alejándose en linea recta de la luz de una farola que está a 20 pies sobre el suelo. (a) ¿A qué ritmo se mueve el extremo de su sombra? (b) ¿A qué ritmo está cambiando la longitud de su sombra?

11.- Un globo asciende verticalmente sobre un punto A del suelo a razón de 15 p/seg. Un punto B del suelo dista 30 pies de A. Cuando el globo está a 40 pies de A, ¿A qué ritmo está cambiando su distancia al B?

12.- Una escalera de 20 pies de largo está apoyada en una casa. Hallar los ritmos a que: (a) baja por el muro su extremo superior si su apoyo dista 12 pies de la casa y se separa de ella a 2 p/seg, (b) está decreciendo la pendiente de la escalera.

13.- Una luz está en el suelo a 45 metros de un edificio. Un hombre de 2 metros de estatura camina desde la luz hacia el edificio a razón constante de 2 metros por segundo.¿A qué velocidad está disminuyendo su sombra sobre el edificio en el instante en que el hombre está a 25 metros del edificio?

14.- Un globo está a 100 metros sobre el suelo y se eleva verticalmente a una razón constante de 4 m/seg. Un automóvil pasa por debajo viajando por una carretera recta a razón constante de 60 m/seg.¿Con qué rapidez cambia la distancia entre el globo y el automóvil 1/2 segundo después?

15.- Un globo asciende a 5 m/seg desde un punto en el suelo que dista 30 m de un observador. Calcular el ritmo de cambio del ángulo de elevación cuando el globo está a una altura de 17,32 metros.

16.- La altura de un triángulo crece 1 cm/min y su área 2 cm^2/min. ¿Con qué razón cambia la base del triángulo cuando la altura es de 10 cm y el área de 100cm^2?

17.- Una lámpara está montada en el extremo superior de un poste de 15 pies de alto. Un hombre cuya altura es de 5 pies se aleja del poste a una velocidad de 5 $pies/seg$ a lo largo de una trayectoria recta. ¿Con qué rapidez se mueve la punta de su sombra cuando el hombre está a 40 pies del poste?

18.- Dos de los lados de un triángulo tienen 4 y 5 metros de longitud y el ángulo entre ellos crece a razón de 0,06 rad/seg. Encuentre la razón con que aumenta el área del triángulo cuando el ángulo entre los lados de longitud fija es de $\pi/3$.

19.- Dos lados de un triángulo tienen longitud de 12 m y 15 m. El ángulo entre ellos crece a razón de $2°/min$. ¿Con qué rapidez aumenta la longitud del tercer lado cuando el ángulo entre los lados de longitud fija es de 60°.

20.- Un faro está en una isla pequeña a 3 Km de distancia del punto más cercano P en una línea costera recta y su luz realiza 4 revoluciones por minuto. ¿Con qué rapidez se mueve el haz de luz a lo largo de la linea costera cuando está a 1 km de P?

21.- El agua se fuga de un tanque cónico invertido a razón de 10000 cm^3/min, al mismo tiempo que se bombea agua hacia el tanque con una razón constante. El tanque tiene 6 metros de altura y el diámetro en la parte superior es de 4 metros, si el nivel del agua sube a razón de 20 cm/min cuando la altura de ese nivel es de 2 metros, encuentre la razón a la que se bombea el agua al tanque.

22.- Una artesa de agua tiene 10 metros de largo y una sección transversal en forma de trapecio isósceles cuyo ancho en el fondo es de 30 cm, el de la parte superior 80 cm, y la altura 50 cm. Si la artesa se llena con agua a razón de 0,20 m^3/min, ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua cuando esta tiene 30 cm de profundidad?

23.- Si Angélica mide 1,80 metros de altura y se aleja de la luz de un poste del alumbrado público, que está a 9 metros de altura, a razón de 0,6 metros por segundo, entonces:

a) ¿Con qué rapidez aumenta la longitud de su sombra cuando Angélica está a 7,2 metros del poste? ¿A 9 metros?
b) ¿Con qué rapidez se mueve el extremo de su sombra?
c) Para seguir el extremo de su sombra, ¿a qué razón angular debe alzar la cabeza cuando su sombra mide 1,8 metros de largo?

24.- Un automóvil que se desplaza a razón de 9 m/seg, se aproxima a un cruce. Cuando el auto está a 36 metros de la intersección, un camión que viaja a razón de 12 m/seg, cruza la intersección. El auto y el camión se encuentran en carreteras que forman un ángulo recto entre sí. ¿Con qué rapidez se separan 2 segundos después de que el camión pasa dicho cruce?

25.- Un avión vuela con velocidad constante, a una altura de 3000 m, en una trayectoria recta que lo llevará directamente sobre un observador en tierra. En un instante dado, el observador advierte que el ángulo de elevación del aeroplano es de $\pi/3$ radianes y aumenta a razón de 1/60 radianes por segundo. Determine la velocidad del avión.

26.- Un atleta corre alrededor de una pista circular de 100 m de radio a una velocidad constante de 7 m/seg. El amigo del atleta está parado a una distancia de 200 m del centro de la pista. ¿Con qué rapidez cambia la distancia entre ellos cuando la distancia entre ellos es de 200 m?

27.- El minutero de un reloj tiene 8 mm de largo y el horario 4 mm. ¿Con qué rapidez cambia la distancia entre las puntas de las manecillas a una en punto?

28.- Una artesa rectangular tiene 8 pies de largo, 2 pies de ancho y 4 pies de profundidad. Si el agua fluye en ella a razón de 2 p^3/min, ¿Cómo está subiendo el nivel cuando el agua tiene 1 pie de profundidad?

29.- Está entrando líquido en un depósito cilíndrico vertical de 6 pies de radio a razón de 8 p^3/min. ¿A qué ritmo está subiendo el nivel?

30.- Se está vaciando un depósito cónico de 3 pies de radio y 10 pies de profundidad, a razón de 4 p^3/min. ¿Como está bajando el nivel cuando la profundidad del agua es de 6 pies? ¿A qué ritmo está disminu-yendo el radio de la superficie del agua?

31.- La longitud del largo de un rectángulo disminuye a razón de $2cm/seg$, mientras que el ancho aumenta a razón de $2cm/seg$. Cuando el largo es de 12 cm y el ancho de 5 cm, hallar:

a) la variación del área del rectángulo.

b) la variación del perímetro del rectángulo.

c) la variación de las longitudes de las diagonales del rectángulo.

32.- Dos lados de un triángulo miden 4 m y 5 m y el ángulo entre ellos aumenta con una rapidez de 0,06 rad/seg. Calcule la rapidez con que el área y la altura del triángulo se incrementan cuando el ángulo entre los lados es de $\pi/3$.

33.- Considere un depósito de agua en forma de cono invertido. Cuando el depósito se descarga, su volumen disminuye a razón de $50\pi m^3/min$. Si la altura del cono es el triple del radio de su parte superior, ¿con qué rapidez varía el nivel del agua cuando está a 5 m del fondo del depósito?

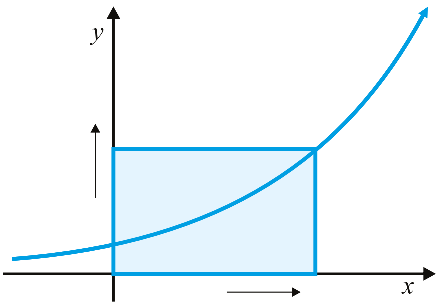
34.- Considere un triángulo rectángulo de catetos a y b. Si el cateto a decrece a razón de 0,5 cm/min y el cateto b crece a razón de 2 cm/min, determine la variación del área del triángulo cuando a mide 16 cm y b mide 12 cm.

35.- Dos lados paralelos de un rectángulo se alargan a razón de 2 cm/seg, mientras que los otros dos lados se acortan de tal manera que la figura permanece como rectángulo de área constante igual a $50cm^2$. ¿Cuál es la variación del lado que se acorta y la del perímetro cuando la longitud del lado que aumenta es de 5 cm?

36.- Un tanque cónico invertido de 10 m de altura y 3 m de radio en la parte superior, se está llenando con agua a razón constante. ¿A qué velocidad se incrementa el volumen del agua si se sabe que cuando el tanque se ha llenado hasta la mitad de su capacidad, la profundidad del agua está aumentando a razón de un metro por minuto? ¿Cuánto tiempo tardará el tanque en llenarse?

37.- Se vierte arena en el suelo a razón de $0,4m^3$ por segundo. La arena forma en el suelo una pila en la forma de un cono cuya altura es igual al radio de la base. ¿A qué velocidad aumenta la altura de la pila 10 segundos después de que se empezó a vertir la arena?

38.- Un rectángulo tiene dos de sus lados sobre los ejes coordenados positivos y su vértice opuesto al origen está sobre la curva de ecuación $y = 2^x$, según se muestra en la figura adjunta. En este vértice, la coordenada y aumenta a razón de una unidad por segundo. ¿Cuál es la variación del área del rectángulo cuando x = 2?



39.- Cuando un plato circular de metal se calienta en un horno, su radio aumenta a razón de 0,01 cm/min. ¿Cuál es la razón de cambio del área cuando el radio mide 50 cm?

40.- Cierta cantidad de aceite fluye hacia el interior de un depósito en forma de cono invertido (con el vértice hacia abajo) a razón de $3\pi m^3$ por hora. Si el depósito tiene un radio de 2,5 metros en su parte superior y una profundidad de 10 metros, entonces:

a) ¿Qué tan rápido cambia dicha profundidad cuando tiene 8 metros?

b) ¿A qué razón varía el área de la superficie del nivel del aceite en ese mismo instante?

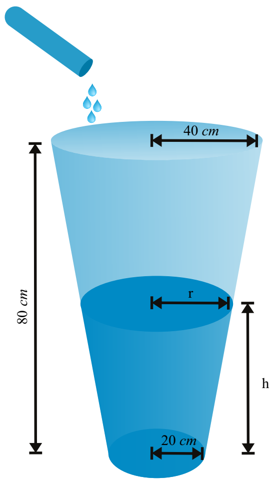
41.- Un globo aerostático se infla de tal modo que su volumen está incrementándose a razón de 84,951 dm^3/min. ¿Con qué rapidez está incrementándose el diámetro del globo cuando el radio es 3,05 dm?

42.- Las aristas de un cubo variable aumentan a razón de 3 centímetros por segundo. ¿Con qué rapidez aumenta el volumen del cubo cuando una arista tiene 10 centímetros de longitud?

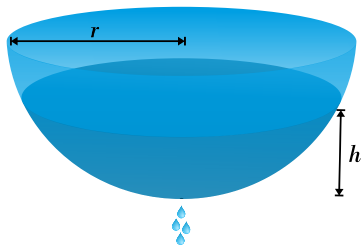
43.- De un tubo sale arena a razón de 16 dm^3/seg. Si la arena forma una pirámide cónica en el suelo cuya altura es siempre 1/4 del diámetro de la base, ¿con qué rapidez aumenta la pirámide cuando tiene 4 dm de altura?

44.- Una mujer, en un muelle, tira de un bote a razón de 15 metros por minuto sirviéndose de una soga amarrada al bote al nivel del agua. Si las manos de la mujer se hallan a 4,8 metros por arriba del nivel del agua, ¿con qué rapidez el bote se aproxima al muelle cuando la cantidad de cuerda suelta es de 6 metros?

45.- Se bombea agua a un tanque que tiene forma de cono truncado circular recto con una razón uniforme de 2 litros por minuto (1 litro = 1000 cm^3). El tanque tiene una altura de 80 cm y radios inferior y superior de 20 y 40 cm, respectivamente. ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua cuando la profundidad es de 30 cm?
Nota: El volumen V de un cono truncado circular recto de altitud h y radios inferior y superior a y b es: $V = \frac{\pi}{3}h(a^2+ab+b^2)$



46.- El agua está goteando del fondo de un depósito semiesférico de 8 dm de radio a razón de 2 $dm^3/hora$. Si el depósito estaba lleno en cierto momento, ¿con qué rapidez baja el nivel del agua cuando la altura es de 3 dm?
Nota: El volumen V de un casquete esférico de altura h de una esfera de radio r es: $V = \frac{\pi}{3}h^2(3r-h)$.



47.- Una partícula se está moviendo sobre una curva cuya ecuación es $\frac{xy^3}{1+y^2} = 8/5$. Suponga que la coordenada x se está incrementando a razón de 6 unidades/seg cuando la partícula está en el punto $(1,2)$.

a) ¿Con qué rapidez está cambiando la coordenada y del punto en ese instante?
b) ¿La partícula está ascendiendo o descendiendo en ese instante?

3.6 Derivadas de Funciones Exponenciales y Logarítmicas

Definición: 3.32

e es un número que cumple que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$$

Teorema: 3.33

Se tiene que

$$(e^x)' = e^x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Demostración.

a) Sea $f(x) = e^x$, así que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \\ &= e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \end{aligned}$$

b) Sea $y = \ln x$, entonces $x = e^y$, derivando a ambos lados utilizando derivación implícita: $(x)' = (e^y)'$ entonces $1 = e^y y'$. Por lo tanto: $(\ln x)' = y' = \dfrac{1}{e^y} = \dfrac{1}{x}$

□

Ejemplo. 96

Determine la derivada de la función exponencial $f(x) = a^x$.

Solución. Note que $f(x) = a^x = e^{x\ln a}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{x\ln a}\right)' & \\ &= e^{x\ln a}(x\ln a)' & \text{Por regla de la cadena y teorema anterior} \\ &= e^{x\ln a}(\ln a) & \text{Por ser } \ln a \text{ constante} \\ &= a^x \ln a & \end{aligned}$$

□

Ejemplo. 97

Determine la derivada de la función logarítmica $g(x) = \log_a x$.

Solución. Utilizando el teorema del cambio de base, se tiene que $g(x) = \left(\log_a x\right) = \left(\frac{lnx}{lna}\right)$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) \\ &= \frac{1}{lna}\left(\ln x\right)' = \frac{1}{lna}\frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x\ln a} \end{aligned}$$

□

Ejemplo. 98

Determine la derivada de la función logarítmica $g(x) = 5^{x^2+senx} - \log_4(x^2+1)$.

Solución.

$$\begin{aligned} g'(x) &= (5^{x^2+\operatorname{sen}x})' - (\log_4(x^2+1))' \\ &= 5^{x^2+\operatorname{sen}x}(x^2+\operatorname{sen}x)'\ln 5 - \frac{1}{(x^2+1)\ln 4}(x^2+1)' \\ &= 5^{x^2+\operatorname{sen}x}(2x+\cos x)\ln 5 - \frac{2x}{(x^2+1)\ln 4} \end{aligned}$$

□

Ejemplo. 99

Calcule y' sabiendo que $y^4 4^{x^2-x} = \ln(x^2+y^2)$

Solución. Derivando ambos miembros de la ecuación con respecto a x se obtiene:

$$\begin{aligned} & (y^4 4^{x^2-x})' = [\ln(x^2+y^2)]' \\ \Longrightarrow\quad & (y^4)' 4^{x^2-x} + y^4(4^{x^2-x})' = \frac{1}{x^2+y^2}(x^2+y^2)' \\ \Longrightarrow\quad & 4y^2y'4^{x^2-x} + y^4 4^{x^2-x}(x^2-x)'\ln 4 = \frac{2x+2yy'}{x^2+y^2} \\ \Longrightarrow\quad & y^2y'4^{x^2-x+1} + y^4 4^{x^2-x}(2x-1)\ln 4 = \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{2yy'}{x^2+y^2} \\ \Longrightarrow\quad & y^2y'4^{x^2-x+1} - \frac{2yy'}{x^2+y^2} = \frac{2x}{x^2+y^2} - y^4 4^{x^2-x}(2x-1)\ln 4 \\ \Longrightarrow\quad & y'\left(y^2 4^{x^2-x+1} - \frac{2y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2x}{x^2+y^2} - y^4 4^{x^2-x}(2x-1)\ln 4 \end{aligned}$$

□

3.6.1. Ejercicios

1.- Demostrar

a) $D_x\left[\ln(x+\sqrt{x^2+1}\right]=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

b) $D_x\left[\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\right]=\dfrac{1}{1+x^2}$

2.- En los ejercicios a continuación, obtenga la derivada de la función

a) $\ln(4+6x)$
b) $\ln\sqrt{1+x^2}$
c) $\ln(4+9x^2)$
d) $\ln(10-2x)^4$
e) $\ln(\ln x)$
f) $x\ln x$
g) $\cos(\ln x)$
h) $\ln(\cos x)$
i) $\ln(\sec 2x+\tan 2x)$
j) $\csc(\ln x)$
k) $\ln\sqrt{\tan x}$
l) $\ln\cos\sqrt{x}$
m) $\ln\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x^2+1}}$
n) $\sqrt[3]{\ln x^3}$
o) $\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1})$
p) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$
q) $\ln|x^3+1|$
r) $\ln|x^2-1|$
s) $\ln|\cos 3x|\ \ \ln\left|\tan 4x+\sec 4x\right|$
t) $\ln|\cot 3x-csc3x|$
u) $\ln|\dfrac{3x}{x^2+4}|$
v) $\operatorname{sen}(\ln|\sec 2x|)$

3.- En los ejercicios siguientes hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones

a) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$
b) $f(x)=\sqrt{1+\left(\ln x\right)^2}$
c) $f(x)=x^3\left(\ln x\right)^2$
d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\left(\ln x\right)^2}}{x}$
e) $f(x)=\dfrac{x}{\left(\ln x\right)^2}$
f) $f(x)=x^2\log_2\left(e^{3x}-5x\right)$
g) $f(x)=\log_{1/2}|x^2-2x-3|$
h) $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+\operatorname{sen} x\right)}{\cos x}$
i) $f(x)=xe^{\operatorname{sen}(2x)}$
j) $f(x)=\dfrac{1}{\left(1+e^{\cos(3x)}\right)^2}$
k) $f(x)=\sqrt{1+e^{\operatorname{sen}(2x)}}$
l) $f(x)=e^{1/x}+\dfrac{1}{e^x}$
m) $f(x)=e^{\sqrt{x}+\sqrt{e^x}}$
n) $f(x)=e^{\operatorname{sen}^2(3x)}$
o) $f(x)=\dfrac{1}{3}^{\ln x}$
p) $f(x)=e^{\cos^2(5x)}$

4.- En los ejercicios siguientes, hallar la derivada de cada una de las funciones

a) 5^{3x}
b) 4^{3x^2}
c) 7^{-3x}
d) 10^{x^2-2x}
e) $\dfrac{\ln x}{x}$
f) $x^{\sqrt{x}}$
g) $x^{\ln x}$
h) x^{x^2}
i) x^{x^x}
j) e^{3x-1}
k) e^{4x^2}
l) e^{-x^2}
m) $e^{\sqrt{x}}$
n) $e^{\frac{1}{x}}$
ñ) 2^{x^3}
o) e^{e^x}
p) $e^{e^{e^x}}$
r) $6^{\ln x}$
t) $e^{\sqrt{x}+\sqrt{e^x}}$
u) $\sqrt{1+e^{\operatorname{sen}(2x)}}$
v) $e^{1/x}+\dfrac{1}{e^x}$
w) $xe^{\operatorname{sen}(2x)}$
x) $\left(1+e^{\cos(3x)}\right)^{-2}$

5.- Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de: $f(x) = \ln x$ que sea perpendicular a la recta $y+2x+4=0$. Ilustre gráficamente.

6.- Para cada uno de los siguiente ejercicios, halle todos los puntos $(a, f(a))$ de la gráfica de la función f dada, donde la recta tangente a esa gráfica en el punto $(a, f(a))$ sea paralela a la recta dada:

a) $f(x) = 2x\ln x; 2x-2y-2=0$

b) $f(x) = x[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2]; y-x+2=0$

7.- Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ en el punto $(e^2, \frac{2}{e^2})$.

8.- Halle el punto $(a, f(a))$ de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ donde la recta tangente a esa gráfica en dicho punto pase por el origen.

9.- Halle el punto $(a, f(a))$ de la gráfica de la función $f(x) = \ln x$, donde la recta tangente a esa gráfica en el punto $(a, f(a))$, pase por el punto $(0,1)$.

10.- Suponiendo que la ecuación $\ln(x^2y) - 3x^2 + 4y = 1$ define a y implícitamente como función de x, calcule y', y encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica a la curva dada en el punto $(-1,1)$.

11.- En los ejercicios del 62 al 68, obtenga $\dfrac{dy}{dx}$ mediante diferenciación implícita

a) $\ln(xy) + x + y = 2$

b) $\ln\dfrac{x}{y} + xy = 1$

c) $x = \ln(x+y+1)$

d) $\ln(x+y) - \ln(x-y) = 4$

e) $x\ln(x^2y) + 3y^2 = 2x^2 - 1$

f) $x\ln y + y\ln x = xy$

g) $ye^x + xe^y + x + y = 0$

12.- Utilizando la diferenciación implícita en cada uno de los siguientes ejercicios, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la curva dada en el punto indicado:

a) $\ln(xy^2) + x^2 = y + 2$, en el punto $(1,-1)$.

b) $e^{xy} + x^2 = 4 - 3y^2$, en el punto $(0,1)$.

c) $xe^y + \ln y - x^2 = 0$, en el punto$(0,1)$.

d) $e^{xy} + x^2 - y^2 = 0$, en el punto$(0,1)$.

e) $\ln(xy^2 - 3) + 3x^2 + 2y = -1$, en el punto $(1,-2)$.

f) $xe^y + \ln(1+y) - 2y = x^3 - 6$, en el punto $(2,0)$.

g) $x^2e^y + \ln y + y^2 = x + 1$, en el punto$(0,1)$.

13.- Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva $y = \ln x$ en el, cuya abscisa es 2.

14.- Determine una ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = \ln x$ que es paralela a la recta $x+2y-1=0$

15.- Suponiendo que la ecuación dada define a y implícitamente, como función de x, calcule y', y encuentre la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la curva dada en el punto indicado:

a) $\ln(xy^2) - x^2 = y$ en el punto $(1,-1)$

b) $e^{xy}+x^2=4-3y^4$ en el punto $(0,1)$

16.- Para cada una de la siguientes funciones calcule $f', f'' y f'''$ cuando:

a) $f(x)=e^{-x^2}$

b) $f(x)=xe^x$

c) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

17.- Para cada una de la siguientes funciones calcule $y', y'' y\ y'''$ cuando:

a) $y=e^{2x}\cos x$

b) $y=\ln x^2$

c) $y=x(\ln x)^2$

d) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

e) $y=\ln x$

f) $y=\dfrac{1}{2}\left(\ln(1+x)-x\right)$

g) $y=e^x\operatorname{sen} x$

h) $y=e^x\left(\operatorname{sen} x\right)^2$

18.- En los problemas siguientes encuentre la derivada de la función dada.

a) $y=\ln(x^4+3x^2+1)$

b) $y=\ln(x^2+1)^2$

19.- $y=x-\ln|5x+1|$

c) $y=\dfrac{\ln x}{x}$

d) $y=x(\ln x)^2$

20.- $y=\dfrac{\ln 4x}{\ln 2x}$

e) $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

21.- $y=\ln(x\ln x)$

22.- $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$

f) $y=x\operatorname{sen}(\ln 5x)$

23.- $y=\sqrt{1+e^{-5x}}$

24.- $y=\ln(x^4+e^{x^2}$

g) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

h) $y=e^{3x}\ln(x^2+1)$

i) $y=\ln\left|\dfrac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}}\right|$

Derivadas de Funciones Trigonométricas Inversas 3.7

Teorema: 3.34 **Derivada de la función inversa**

Se tiene que:

$$\left[f^{-1}(x)\right]'=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Demostración. Supongamos que $y=f^{-1}(x)$, entonces $f(y)=x$ derivando a ambos lados utilizando derivación implícita se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Big(f(y)\Big)' &= (x)' \\
\Big(f(y)\Big)' &= 1 \\
f'(y)y' &= 1 && \text{Aplicando regla de la cadena} \\
y' &= \frac{1}{f'(y)} \\
\Big[f^{-1}(x)\Big]' &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} && \text{Reemplazando el valor de } y
\end{aligned}$$

□

Ejemplo. 100

Probar el teorema (34) con $f^{-1}(x) = \ln(x)$.

Solución. Si $f^{-1}(x) = \ln(x)$ entonces $f(x) = e^x$ y $f'(x) = e^x$, entonces

$$\Big[f^{-1}(x)\Big]' = \frac{1}{f'\Big(f^{-1}(x)\Big)} = \frac{1}{f'\Big(\ln x\Big)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

□

Teorema: 3.35 **Derivadas de funciones trigonométricas inversas**

Se tiene que:

a. $(\operatorname{arc\,sen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

c. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

d. $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

e. $(\operatorname{arcsec} x)' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

g. $(\operatorname{arccsc} x)' = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Demostración. a) Dado que el arcoseno es la función inversa del seno entonces si $f(x) = \operatorname{sen} x$ entonces

$$\begin{cases} f'(x) &= \cos x \\ f^{-1}(x) &= \operatorname{arc\,sen} x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(\operatorname{arc\,sen} x)' = \Big[f^{-1}(x)\Big]' &= \frac{1}{f'\Big(f^{-1}(x)\Big)} \\
&= \frac{1}{f'(\operatorname{arc\,sen} x)} \\
&= \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)}
\end{aligned}$$

Sea $y = \operatorname{arc\,sen} x$ como $\operatorname{arc\,sen}: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces

$$y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos y \geq 0$$

Así, de la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ se tiene que $\cos y = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}$ (se descarta $\cos y = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}$).
Además como $y = \operatorname{arc\,sen} x$ entonces $\operatorname{sen} y = x$

$$\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \cos y = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

Por lo tanto

$$(\operatorname{arc\,sen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\square$

Ejemplo. 101

Determine la derivada de $f(x) = \arctan\big(\operatorname{sen}(e^x)\big)$

Solución.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2(e^x)}\big(\operatorname{sen}(e^x)\big)' \\ &= \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2(e^x)}\cos(e^x)(e^x)' \\ &= \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2(e^x)}\cos(e^x)e^x \end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo. 102

Determine la derivada de $g(x) = 3^{x^6} \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{x^2-1})$

Solución.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(3^{x^6}\right)' \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{x^2-1}) + 3^{x^6}\big(\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{x^2-1})\big)' \\ &= 6x^5 3^{x^6} \ln 3 \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{x^2-1}) + 3^{x^6}\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x^2-1})^2}}(\sqrt{x^2-1})' \\ &= 6x^5 3^{x^6} \ln 3 \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{x^2-1}) + 3^{x^6}\frac{1}{\sqrt{1-x^2+1}}\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \\ &= 6x^5 3^{x^6} \ln 3 \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{x^2-1}) + 3^{x^6}\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

$\square$

3.7.1. Ejercicios

1.- Halle la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(1+x^2)$

b) $f(x) = x\Big(\arctan\left(\ln x\right)\Big)^2$

c) $f(x) = \arccos\frac{1}{x}$

d) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(1-x\right) + \sqrt{2x-x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{\left(1+x^2\right)\arctan x - x}{2}$

f) $f(x) = \ln\left(\operatorname{arc\,sen} x\right)$

g) $f(x) = \dfrac{x \operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln(\sqrt{1-x^2})$

h) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1-x}{2}\right)$

2.- Para cada uno de los siguiente ejercicios, halle todos los puntos $(a, f(a))$ de la gráfica de la función f dada, donde la recta tangente a esa gráfica en el punto $(a, f(a))$ sea paralela a la recta dada:

a) $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x\,; \quad x - \sqrt{3}y - 4 = 0$

b) $f(x) = \arctan x; \quad x - 2y + 4 = 0$

c) $f(x) = \arctan\frac{1}{x}; \quad x + 2y = 4$

d) $f(x) = \arctan\dfrac{1+x}{1-x}; \quad y - x = 1$

3.- Suponiendo que la ecuación dada define implícitamente a y como una función de x calcule y'

$$\arccos\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

4.- Suponiendo que la ecuación dada define a y implícitamente, como función de x, calcule y', y encuentre la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la curva dada en el punto indicado:

a) $\operatorname{arc\,sen} y + \sqrt{3+2xy} = 2x + \dfrac{\pi}{6}$ en el punto $(1, \frac{1}{2})$

b) $ye^{x^2+x-2} + x\arctan\dfrac{y}{2} = 2x^2 + \dfrac{\pi}{4}x$ en el punto $(1, 2)$

5.- Utilizando la diferenciación implícita, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la curva dada en el punto indicado:

$$\arctan y = xy^2 - x^2 + \frac{\pi}{4}, \text{en el punto } (1, 1).$$

6.- Para cada una de la siguientes funciones calcule f', f'' y f''' cuando:

a) $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$

b) $f(x) = \arctan\frac{1}{x}$

c) $y = \operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

d) $y = \left(\arctan\frac{1}{x}\right)^2$

e) $\operatorname{arc\,sen}(3x^2)$

f) $\arccos(x^3)$

g) $\operatorname{arc\,sen}(x^2+1)$

h) $\arccos(2x^2+1)$

i) $\arctan(x^2)$

j) $\arctan(\sqrt{x})$

k) $\operatorname{arc\,sen}(x^2)$

l) $\arccos(\sqrt{x})$

m) $x\arccos(2x)$

n) $\operatorname{sen} x \operatorname{arc\,sen}(2x)$

ñ) $\arccos(\operatorname{sen} x)$

o) $\arctan(\cos x)$

p) $\arctan(\sec x)$

q) $\arctan(\operatorname{sen} x)$

r) $\ln(\arctan x^2)$

s) $\arccos(2e^{3x})$

t) $x^2 \operatorname{arc\,sen}(\frac{1}{x})$

u) $\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

v) $\arccos\left(\frac{1}{x}\right)$

w) $\arccos\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)$

x) $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)$

y) $\sqrt{x} - \arctan\sqrt{x}$

z) $\arctan x + \arctan(x^3)$

7.- En los ejercicios siguientes, demostrar la identidad dada

a) $D_x\left[\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right] = \frac{1}{1+x^2}$

b) $D_x\left[\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right] = \frac{1}{1+x^2}$

c) $D_x\left[\arctan\left(\frac{x}{2}\right)^2\right] = \frac{8x}{16+x^4}$

d) $D_x\left[\left(x\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{4-x^2}\right)\right] = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

e) $D_x\left[4\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right) + x\sqrt{4-x^2}\right] = 2\sqrt{4-x^2}$

8.- En los ejercicios a continuación, obtenga $\frac{dy}{dx}$

a) $e^{x+y} = \arccos x$

b) $\ln(\operatorname{sen}^2 3x) = e^x + \arctan y$

c) $x \operatorname{sen} y + x^3 = \arctan y$

d) $\operatorname{arc\,sen}(xy) = \arccos(x+y)$

9.- En los ejercicios a continuación, calcular la derivada de cada función

a) $2^{\arctan x}$

b) $e^{\operatorname{arc\,sen} x}$

c) $3^{\operatorname{arc\,sen} x}$

d) $(\operatorname{arc\,sen} x)^{\arctan x}$

e) $(\arccos x)^x$

f) $(\cos x)^{(\operatorname{arc\,sen} x)}$

g) $\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

h) $\arctan(\tan^2 x)$

i) $\arctan(x+\sqrt{1+x^2})$

j) $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x - \cos x)$

k) $\arccos\sqrt{1-x^2}$

l) $\arctan\frac{1+x}{1-x}$

m) $[\arccos(x^2)]^{-2}$

n) $\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

o) $\operatorname{arc\,sen}(e^{4x})$

p) $\arctan(2^x)$

q) $\arctan(e^x)$

r) $\arccos(3^x)$

s) $\arctan(2x)$

t) $\frac{x\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2}$

Derivación logarítmica 3.8

Hemos visto cómo la derivación de una suma o resta es mucho más simple que la derivación de un producto o cociente. ¿Hay una forma de convertir un producto o cociente a una suma o resta? La pregunta anterior es respondida por la función logarítmica, en particular el logaritmo natural, pues:

$\ln(xy) = \ln x + \ln y$ (convierte un producto en una suma)

$\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$ (convierte un cociente en una resta)

$\ln(x^n) = n\cdot\ln x$ (convierte una potencia en un producto de una función por una constante)

Entonces si quiere hallar la derivada de $f(x) = y$ y esta función es producto o división de varias expresiones, es mejor: Entonces si quiere hallar la derivada de $f(x) = y$ y esta función es producto o división de varias expresiones, es mejor:

1. Simplificar $\ln y$
2. Aplicar derivación implícita a la ecuación $\ln y = \cdots$
   (recuerde que $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$)

Lo anterior nos permite, además, hallar la derivada de expresiones de la forma: $f(x)^{g(x)}$; igualmente la podemos calcular utilizando la igualdad $\mathbf{f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}}$

Ejemplo. 103

Determine la derivada de $g(x) = (2x^3+1)^{\operatorname{sen} x}$

Solución. Simplificando $\ln g(x) = \ln(2x^3+1)^{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x \ln(2x^3+1)$.
Derivando ambos lados

$$\begin{aligned}
\big(\ln g(x)\big)' &= \big(\operatorname{sen} x \ln(2x^3+1)\big)' \\
\frac{g'(x)}{g(x)} &= \big(\operatorname{sen} x\big)' \ln(2x^3+1) + \operatorname{sen} x\big(\ln(2x^3+1)\big)' \\
\frac{g'(x)}{g(x)} &= \cos x \ln(2x^3+1) + \operatorname{sen} x \frac{(2x^3+1)'}{(2x^3+1)} \\
\frac{g'(x)}{g(x)} &= \cos x \ln(2x^3+1) + \operatorname{sen} x \frac{6x^2}{(2x^3+1)} \\
g'(x) &= g(x)\left[\cos x \ln(2x^3+1) + \operatorname{sen} x \frac{6x^2}{(2x^3+1)}\right]
\end{aligned}$$

Sustituyendo $g(x)$ se obtiene

$$g'(x) = (2x^3+1)^{\operatorname{sen} x}\left[\cos x \ln(2x^3+1) + \operatorname{sen} x \frac{6x^2}{(2x^3+1)}\right]$$

Otra forma, es teniendo en cuenta que $g(x) = e^{\operatorname{sen} x \ln(2x^3+1)}$
Derivando ambos lados

$$g'(x) = \left(e^{\operatorname{sen} x \ln(2x^3+1)}\right)'$$

Aplicando la regla de la cadena

$$g'(x) = e^{\operatorname{sen} x \ln(2x^3+1)}\left(\operatorname{sen} x \ln(2x^3+1)\right)'$$

Derivada de un producto

$$\begin{aligned}
g'(x) &= e^{\operatorname{sen} x \ln(2x^3+1)}\left[\cos x \ln(2x^3+1) + \operatorname{sen} x\big(\ln(2x^3+1)\big)'\right] \\
g'(x) &= e^{\operatorname{sen} x \ln(2x^3+1)}\left[\cos x \ln(2x^3+1) + \operatorname{sen} x \frac{6x^2}{2x^3+1}\right]
\end{aligned}$$

Reemplazando $e^{\operatorname{sen} x \ln(2x^3+1)}$

$$g'(x) = (2x^3+1)^{\operatorname{sen} x}\left[\cos x \ln(2x^3+1) + \operatorname{sen} x \frac{6x^2}{2x^3+1}\right]$$

□

Ejemplo. 104

Utilizando derivada logarítmica calcular la derivada de la siguiente función

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{(3-x)}}{(1-x)\sqrt[3]{(3+x)^2}}$$

Solución. Aplicando logaritmo en ambos lado de la ecuación:

$$\ln f(x)=\ln\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{(3-x)}}{(1-x)\sqrt[3]{(3+x)^2}}\right)$$

Aplicando propiedades del logaritmo

$$=\frac{2}{3}\ln x-\frac{1}{3}\ln(3-x)-\ln(1-x)-\frac{2}{3}\ln(3+x)$$

Derivando ambos lados

$$\begin{aligned}
\big(\ln f(x)\big)'&=\left(\frac{2}{3}\ln x-\frac{1}{3}\ln(3-x)-\ln(1-x)-\frac{2}{3}\ln(3+x)\right)'\\
\frac{f'(x)}{f(x)}&=\left(\frac{2}{3}\ln x\right)'-\left(\frac{1}{3}\ln(3-x)\right)'-\Big(\ln(1-x)\Big)'-\left(\frac{2}{3}\ln(3+x)\right)'\\
\frac{f'(x)}{f(x)}&=\frac{2}{3x}-\frac{1}{3(3-x)}+\frac{1}{1-x}-\frac{2}{3(3+x)}\\
\frac{f'(x)}{f(x)}&=\frac{2(3-x)(1-x)(3+x)-x(1-x)(3+x)+x(3-x)(3+x)-2x(3-x)(1-x)}{3(3-x)(3+x)(1-x)x}\\
\frac{f'(x)}{f(x)}&=\frac{2(4x^2-9x+9)}{3(3-x)(3+x)(1-x)x}\\
f'(x)&=f(x)\left[\frac{2(4x^2-9x+9)}{3(3-x)(3+x)(1-x)x}\right]
\end{aligned}$$

Sustituyendo $f(x)$ se obtiene

$$f'(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{(3-x)}}{(1-x)\sqrt[3]{(3+x)^2}}\left[\frac{2(4x^2-9x+9)}{3(3-x)(3+x)(1-x)x}\right]$$

□

Ejemplo. 105

Calcular $f'(x)$ si $f(x)=x^2\operatorname{sen}x(1+x^2)^{-6}$.

Solución. Aplicando logaritmo en ambos lado de la ecuación:

$$\ln f(x) = \ln(x^2 \operatorname{sen} x(1+x^2)^{-6})$$

Aplicando propiedades del logaritmo

$$= 2\ln x + \ln(\operatorname{sen} x) - 6\ln(1+x^2)$$

Derivando ambos lados

$$\begin{aligned}
\big(\ln f(x)\big)' &= \big(2\ln x + \ln(\operatorname{sen} x) - 6\ln(1+x^2)\big)' \\
\frac{f'(x)}{f(x)} &= \big(2\ln x\big)' + \big(\ln(\operatorname{sen} x)\big)' - 6\big(\ln(1+x^2)\big)' \\
\frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{2}{x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - 6\frac{2x}{1+x^2} \\
\frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{2\operatorname{sen} x(1+x^2) + x\cos x(1+x^2) - 12x^2 \operatorname{sen} x}{x(1+x^2)\operatorname{sen} x} \\
\frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{(2-10x^2)\operatorname{sen} x + (1+x^2)x\cos x}{x(1+x^2)\operatorname{sen} x} \\
f'(x) &= f(x)\left[\frac{(2-10x^2)\operatorname{sen} x + (1+x^2)x\cos x}{x(1+x^2)\operatorname{sen} x}\right]
\end{aligned}$$

Sustituyendo $f(x)$ se obtiene

$$f'(x) = \frac{x\left[(2-10x^2)\operatorname{sen} x + (1+x^2)x\cos x\right]}{(1+x^2)^7}$$

□

3.8.1. Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 8, obtenga $\dfrac{dy}{dx}$ mediante diferenciación logarítmica

1.- $x^2(x^2-1)^3(x+1)^4$

2.- $(5x-4)(x^2+3)(3x^3-5)$

3.- $x^3 \operatorname{sen} x(1+x^6)^{-2}$

4.- $x^2(x^2+1)^2(x-1)^4$

5.- $\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt[3]{x^6+8}}$

6.- $\dfrac{x^2(x-1)^2(x+2)^3}{(x-2)^5}$

7.- $\dfrac{x^5(x+2)}{x-3}$

8.- $\dfrac{x^3+2x}{\sqrt[5]{x^7+1}}$

9.- $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}$

3.9 Formas indeterminadas. Regla de L'Hôpital

Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661-1704), publicó anónimamente en 1696 el primer libro de texto sobre cálculo diferencial, el cual tuvo gran éxito e influencia durante el siglo XVIII. En él aparecen los resultados que hoy llevan su nombre, que permiten resolver en muchos casos indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, que se presentan frecuentemente al estudiar el límite de un cociente de dos funciones. Si bien L'Hôpital era un escritor excepcionalmente claro y eficaz, la llamada "regla de L'Hôpital" no se debe a él sino a su maestro Jean Bernouilli (1667-1748).

Regla de L'Hôpital

La regla de L'Hôpital se pueden resumir en el siguiente esquema:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \quad \text{o} \quad \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nota:

1. La Regla solo es aplicable mientras se mantiene la indeterminación $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, por lo que antes de derivar siempre hay que comprobar.
2. Si la indeterminación se mantiene indefinidamente, entonces la regla no es aplicable.
3. En cualquier momento se pueden hacer manipulaciones algebraicas con el objeto de simplificar las derivadas.

Formalmente una Regla de L'Hôpital puede enunciarse de la siguiente manera:

Teorema: 3.36 **Regla del L'Hôpital**

Si f y g son funciones continuas en el intervalo $[a;b)$ y derivables en el intervalo $(a;b)$, con límite cero por la derecha del punto a, y además la derivada de la función g no se anula en ningún punto del intervalo $(a;b)$, entonces, si existe el $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ también existe el $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además ambos coinciden.

Ejemplos. 1

Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{RH}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x+x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{RH}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{2+2x} = \frac{1}{2}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{RH}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{RH}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{RH}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{6}{e^x} = 0$

Ejemplos. 1 (Continuación)

4. Si a y b son números positivos, determinar el límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\overset{RH}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x\ln a-b^x\ln b}{1}=\ln a-\ln b=\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$

5. Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}=a$ para todo real a.

En efecto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{RH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{1+ax}}{1}=a$$

Nota:
De ahora en adelante la función exponencial e^x la representaremos de la siguiente manera:

$$e^x=E(x)$$

6. Probar que para todo número real a, tenemos $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=E(a)$

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}E\left(\frac{\ln(1+ax)}{x}\right)$$

Como la función exponencial es continua se tiene

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=E\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}\right)$$

Por ejemplo anterior

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=E(a)$$

Nota:
Simplificación del límite. Siempre que sea posible, antes de abordar la Regla de L'Hôpital, es conveniente intentar simplificar el límite con objeto de que no se complique con la derivación. Para ello se sacan fuera del límite los factores que tengan un valor numérico.

Ejemplo. 106

Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+\cos x)(x^3-3)\operatorname{sen} x}{(x^2-x)\cos x}$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(1+\cos x)(x^3-3)\operatorname{sen} x}{(x^2-x)\cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1+\cos x)}{\cos x}\frac{(x^3-3)}{x-1}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1+\cos x)}{\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{(x^3-3)}{x-1}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\\
&= \frac{(1+1)}{1}\frac{-3}{-1}1 = 6
\end{aligned}$$

□

Ejemplos. 2 **Comportamiento de $\ln x$ y $E(x)$ para valores grandes de x**

a) Demostrar que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^b}{E(ax)} = 0$

Sean $[\![b]\!] = n$ y $m = [\![b]\!] + 1 = n+1$ dos enteros consecutivos que cumplen $n \le b < m$, entonces $x^n \le x^b < x^m$, así que $\dfrac{x^n}{E(ax)} \le \dfrac{x^b}{E(ax)} < \dfrac{x^m}{E(ax)}$, por lo tanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{E(ax)} \le \lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{E(ax)} < \lim_{x\to+\infty} \frac{x^m}{E(ax)} \tag{3.19}$$

Calculemos $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^m}{E(ax)}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^m}{E(ax)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Aplicando m veces la regla de L'Hôpital se tiene

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{m!}{a^m E(ax)} = 0$$

Así que de la ecuación (3.19) se tiene que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{E(ax)} = 0$$

b) Demostrar que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\ln x\right)^b}{x^a} = 0$

Sea $t = \ln x$ entonces $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\ln x\right)^b}{x^a} = \lim_{t\to+\infty} \dfrac{t^b}{E(ax)} = 0$

Además de $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ existen otras **Formas indeterminadas**

La regla de L'Hôpital pretende resolver los cinco casos de indeterminación del límite:
$0.\infty, 1^{\infty}, 0^{\infty}, \infty^{\infty}, \infty^{0}$. Hay que hacer notar que la Regla de L'Hôpital solo se pueden aplicar directamente a los dos casos $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$. Para resolver los cinco casos restantes habrá que transformarlos en uno de los dos tipos anteriores. Algunos de los casos se ilustran con los ejemplos que se dan a continuación:

Ejemplos. 3

1.) $(0.\infty)$ Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ln x = 0$ para cada $\alpha > 0$.

Solución

Supongamos $t = \frac{1}{x}$, y como $x \to 0^+$ entonces $t \to +\infty$, además $x^{\alpha}\ln x = -\frac{\ln t}{t^{\alpha}}$. Así que

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ln x = -\lim_{t\to +\infty} \frac{\ln t}{t^{\alpha}} = 0$$

2.) (0^0) Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} x^x &= \lim_{x\to 0^+} E(x\ln x)\\
&= E\Big(\lim_{x\to 0^+} x\ln x\Big) = E(0)\\
&= 1
\end{aligned}$$

3.) $(\infty-\infty)$ Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

Solución.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen} x - x}{x\operatorname{sen} x}\right) &= \left[\frac{0}{0}\right]\\
\overset{RH}{=} \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\cos x - 1}{x\cos x + \operatorname{sen} x}\right) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x - 1}{x}}{\cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}}\\
&= \frac{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0^+} \cos x + \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}\\
&= \frac{0}{1+1} = 0
\end{aligned}$$

Ejemplos. 3 (Continuación)

4.) (1^∞) Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to 0^+} E\left(\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)\right)\\
&= E\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)\right) = E\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}\right)\\
&\overset{RH}{=} E\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}}{2x}\right) = E\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen} x}{2x\cos x}\right)\\
&= E\left(-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

5.) (0^0) Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\tan x}$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} x^{\tan x} &= \lim_{x\to 0^+} E(\tan x \ln x) = E\left(\lim_{x\to 0^+}\tan x\ln x\right)\\
&= E\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}\right) \overset{RH}{=} E\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}}\right)\\
&= E\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x}\right) = E\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen} x}{x}\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen} x\right)\\
&= E(0) = 1
\end{aligned}$$

3.9.1. Ejercicios

Encuentre el límite. Aplique la regla de L'Hopital donde resulte apropiado.

1.- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^a-1}{x^b-1}$

2.- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$

3.- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\operatorname{sen} x}$

4.- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} nx}$

5.- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x+\operatorname{sen} x}$

6.- $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\tan x}{x}$

7.- $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x}{x^3}$

8.- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{(x\operatorname{sen} x)^{\frac{3}{2}}}$

9.- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^x-x}{1-x+\ln x}$

10.- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-2^x}{x}$

11.- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

12.- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

13.- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\ln x}{\sqrt{x}}$

14.- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{5x}$

15.- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(2x)}{3x}$

16.- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$

17.- $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} xe^x$

18.- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}\ln x$

19.- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2}$

20.- $\displaystyle\lim_{x\to\pi} (x-\pi)\cot x$

21.- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{1/x} - x$

22.- $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$

23.- $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2}$

24.- $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{2x^2-13x+21}$

25.- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

26.- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2-x)e^x - x - 2}{x^3}$

27.- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$

28.- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x - 2\operatorname{sen} x}{(x\sin x)^{3/2}}$

29.- $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

30.- Hallar c de modo que $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = 4$

31.- Determinar el límite del cociente

$$\frac{(\operatorname{sen} 4x)(\operatorname{sen} 3x)}{x \operatorname{sen} 2x}$$

cuando $x \to 0$ y también cuando $x \to \pi/2$.

32.- ¿Para qué valores de las constantes a y b es

$$\lim_{x\to 0}(x^{-3}\operatorname{sen} 3x + ax^{-2} + b) = 0?$$

33.- Para un cierto valor de c, el

$$\lim_{x\to\infty}\{(x^5+7x^4+2)^c - x\}$$

es finito y no nulo. Determinar ese c y calcular el valor del límite.

34.- Determine un valor de c que hace que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{9x - 3\operatorname{sen} 3x}{5x^3}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

Sea continua en $x = 0$. Explique por qué su valor de c funciona.

35.- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,sen} 5x}{x}$

36.- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\arctan\frac{2}{x}$

37.- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\left(\arctan\sqrt{x}\right)^2}{x\sqrt{x+1}}$

Capítulo 4

Aplicaciones de la Derivada

Introducción 4.1

Una de los mayores atractivos al estudiar un concepto o tema matemático es comprender su aplicabilidad en diferentes campos como el económico, el social, el físico, el industrial, entre otros.

En este capítulo se estudia las aplicaciones de la derivada: valores máximos y mínimos, concavidad y convexidad, intervalos de crecimiento o decrecimiento de una función, que posibilitan su representación gráfica y su comprensión analítica y estudiando algunos modelos matemáticos en los que aplican tales conceptos.

Monotonía 4.2

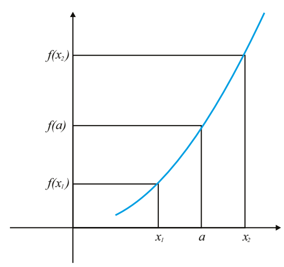
Definición: 4.33

Sea f una función definida en un intervalo (a,b). Se dice que f es creciente en el intervalo (a,b) si $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ tal que $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$

Definición: 4.34

Se dice que una función f es creciente en $x = a$ si existe un entorno de a para el que se cumple:

1. $f(a) \leq f(x)$ para todo punto x de dicho entorno con $a < x$
2. $f(a) \geq f(x)$ para todo punto x de dicho entorno con $a > x$.



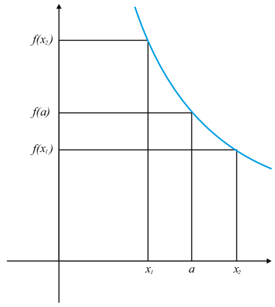
Definición: 4.35

Sea f una función definida en un intervalo (a,b). Se dice que f es decreciente en el intervalo (a,b) si $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ tal que $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) \geq f(x_2)$

Definición: 4.36

Se dice que una función f es decreciente en $x = a$ si existe un entorno de a para el que se cumple:

1. $f(a) \geq f(x)$ para todo punto x de dicho entorno y con $a < x$
2. $f(a) \leq f(x)$ para todo punto x de dicho entorno y con $a > x$.



Nota:
Cuando las desigualdades de las definiciones anteriores son estrictas, hablamos de función estrictamente creciente o decreciente

4.2.1. Extremos Relativos

Definición: 4.37

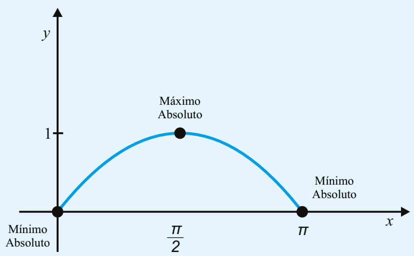
Sea f una función de valores reales definida en un conjunto S de números reales.

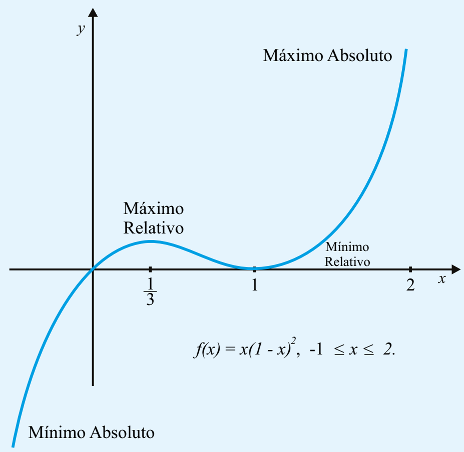
- Se dice que la función f tiene un máximo absoluto en el conjunto S si existe por lo menos un punto $c \in S$ tal que
$$f(x) \leq f(c) \quad \text{para todo} \quad x \in S$$
El número $f(c)$ se le llama máximo absoluto de f en S.
- Se dice que la función f tiene un mínimo absoluto en el conjunto S si existe por lo menos un punto $c \in S$ tal que
$$f(x) \geq f(c) \quad \text{para todo} \quad x \in S$$
El número $f(c)$ se le llama mínimo absoluto de f en S.

Definición: 4.38

Sea f una función de valores reales definida en un conjunto S de números reales.

- f tiene un máximo relativo en un punto $c \in S$ si existe un cierto intervalo abierto I que contiene c tal que
$$f(x) \leq f(c) \quad \text{para todo} \quad x \in I \cap S.$$
- El concepto de mínimo relativo se define del mismo modo con la desigualdad invertida. Es decir, un máximo relativo en c es un máximo absoluto en un cierto entorno de c, si bien no es necesariamente un máximo absoluto en todo el conjunto S.





Definición: 4.39

Un número que es un máximo relativo o un mínimo relativo de una función f se denomina valor extremo o extremo de f.

Nota:
En el caso particular de funciones definidas en intervalos, los extremos relativos solo se pueden alcanzar en puntos del interior del intervalo, nunca en sus extremos.

Al igual que la monotonía, la noción de extremo relativo no tiene nada que ver con la continuidad o derivabilidad de la función en un principio. Solo depende del valor de la función en un punto y en los puntos cercanos.

Los extremos relativos también se denominan óptimos locales, dando lugar a los términos máximo local y mínimo local.

Teorema: 4.37 **Anulación de la derivada en un extremo interior.**

Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ derivable en $a \in A$. Si f tiene un extremo relativo en un punto interior a de A, entonces $f'(a) = 0$.

Demostración. Definamos en A una función Q como sigue:

$$Q(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si} \quad x \neq a \\ f'(a) & \text{si} \quad x = a \end{cases}$$

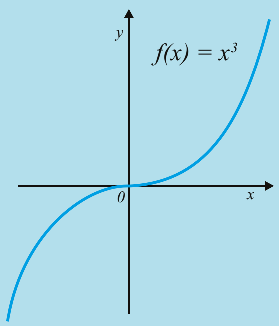
Como $f'(a)$ existe, se tiene que $Q(x) \to Q(a)$ cuando $x \to a$, así que Q es continua en a.
Queremos demostrar que $Q(a) = 0$. Así que para conseguirlo, probaremos $Q(a) > 0$ y $Q(a) < 0$ nos llevan a una contradicción.

Supongamos que $Q(a) > 0$. Por la propiedad de conservación del signo de las funciones continuas, existe un intervalo que contiene a a en el que $Q(x)$ es positiva. Por lo tanto $f(x) > f(a)$ cuando $x > a$ y $f(x) < f(a)$ cuando $x < a$, entonces f no tiene un extremo en a. Luego $Q(a) > 0$ no se cumple. En forma similar se prueba que $Q(a) < 0$ no se cumple. Por lo tanto $Q(a) = 0$, así que $f'(a) = 0$. $\square$

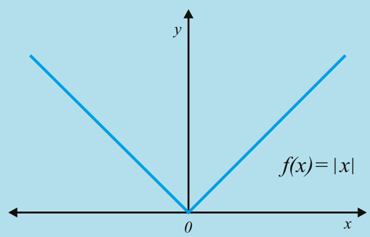
Definición: 4.40

Se dice que c es un punto crítico de f si $f'(c) = 0$, o no existe $f'(c)$

Nota:
Es importante notar que los extremos de f son puntos críticos, pero no todo punto crítico es extremo relativo.



Aquí $f'(0) = 0$ pero no existe extremo en 0.



Hay extremo en 0, pero f´(0) no esxiste

El teorema 37 supone que la derivada $f'(c)$ existe en el extremo, es decir, el teorema 37 nos dice que en ausencia de puntos angulosos la derivada necesariamente debe anularse en un extremo, si este se presenta en el interior de un intervalo.

Nótese que los puntos candidatos a ser extremo relativo están entre aquellos que verifican la condición necesaria anterior y aquellos donde la derivada de la función no existe.

4.2.2. Ejercicios

1.- Calcular los puntos críticos de las siguientes funciones

1) $y = 6 - 2x - x^2$
2) $y = 3x^4 - 4x^3$
3) $y = (x-1)^3$
4) $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 17$
5) $y = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{4}{3}x^3$
6) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x + 2$
7) $y = (x^3 - 1)^4$
8) $y = (x^2 - 1)^4$
9) $y = 3x^3 - 3x^2 + 12x - 5$

Teorema del Valor Medio 4.3

El teorema del valor medio para derivadas es importante en Cálculo porque muchas de las propiedades de las funciones pueden deducirse fácilmente a partir de él. Antes de demostrar el teorema del valor medio, examinaremos uno de sus casos particulares a partir del cual puede deducirse. Este caso particular recibe el nombre de **Teorema de Rolle** en honor al matemático frances Michel Rolle quien fue su descubridor.

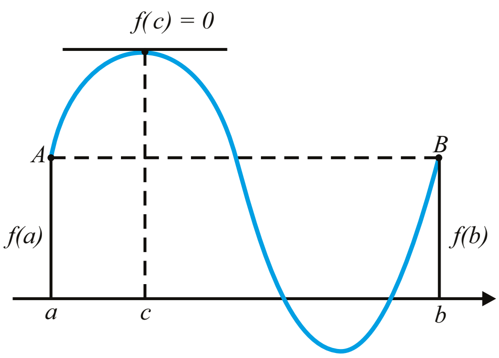
Teorema: 4.38 **Teorema de Rolle**

Sea f una función continua en todos los puntos de un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en cada punto del intervalo abierto (a,b). Supongamos también que

$$f(a) = f(b)$$

Entonces existe por lo menos un punto c en el intervalo abierto (a,b) tal que $f'(c) = 0$.

Demostración. Supongamos que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$, por el teorema de los valores extremos para funciones continuas, f debe alcanzar su máximo absoluto M y su mínimo absoluto m en algún punto del intervalo cerrado $[a,b]$. El teorema 37 nos dice que ningún extremo puede ser alcanzado en puntos interiores (de otro modo sería nula la derivada allí). Luego, ambos valores extremos son alcanzados en los extremos a y b. Pero como $f(a) = f(b)$, esto significa que $m = M$, Y por tanto f es constante en $[a,b]$. Esto contradice el hecho de que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Resulta pues que $f'(c) = 0$ por lo menos en un c que satisfaga $a < c < b$, lo que demuestra el teorema. $\square$



Interpretación geométrica del teorema de Rolle.

Ejemplo. 107

1.- ¿Es aplicable el teorema de Rolle a la función $f(x) = |x-2|$ en $[0,4]$?
Solución.
Lo primero que vamos a hacer es escribir la función dada como sigue, ya que se trata de una función de valor absoluto.

$$f(x) = \begin{cases} -(x-2) & \text{si} \quad x < 2 \\ x-2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Veamos si nuestra función cumple todas las condiciones:
Continuidad en $[0,4]$:
La continuidad de f solo puede fallar en el punto 2. La función será continua en 2 si los límites laterales son iguales y su valor coincide con el valor de $f(2)$:
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \big[-(x-2)\big] = 0$
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \big[(x-2)\big] = 0$
$f(2) = 2-2 = 0$
Por lo tanto la función f es continua en 2
Derivabilidad en $(0,4)$:
La derivabilidad de f solo puede fallar en el punto 2. Para probar que es derivable en 2 hay que ver si se cumple que $f'(2^+ = f'(2^-)$:
$f'(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-(x-2)-(2-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-(x-2)}{x-2} = -1$
$f'(2^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-(x-2)-(2-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)}{x-2} = 1$
Luego $f'(2^-) \neq f'(2^+)$, entonces no existe ningún $c \in (0,4)$ que verifique $f'(c) = 0$ ya que no se cumplen todos los requisitos del Teorema de Rolle □

2.- Halla a, b y c para que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si} \quad x \leq 3 \\ bx+3 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

cumpla el Teorema de Rolle en $[-1,7]$
Solución.
Hallemos los valores para que nuestra función cumpla todas estas condiciones:

Continuidad en $[-1,7]$:
La continuidad de f solo puede fallar en el punto 3. La función será continua en 3 si los límites laterales son iguales y su valor coincide con el valor de $f(3)$:
$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \big(x^2+ax\big) = 9+3a$
$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \big(bx+c\big) = 3b+c$
$f(3) = 9+3a$
Así que $9+3a = 3b+c$

Derivabilidad en $(-1,7)$:
La derivabilidad de f solo puede fallar en el punto 3. Para probar que es derivable en 3 hay que ver si se cumple que $f'(3^+) = f'(3^-)$:

Ejemplo. 107 (Continuación)

$$\begin{aligned} f'(3^-) &= \lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2+ax-9-3a}{x-3} \\ &= \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3} + \lim_{x\to 3^-}\frac{a(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-3^2}{x-3} + \lim_{x\to 3^-}\frac{a(x-3)}{x-3} \\ &= \lim_{x\to 3^-}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} + \lim_{x\to 3^-}\frac{a\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = 6+a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(3^+) &= \lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+}\frac{bx+c-(3b+c)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+}\frac{bx-3b}{x-3} \\ &= \lim_{x\to 3^+}\frac{b\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = b \end{aligned}$$

Así que $b = 6+a$

Reunamos todas las condiciones que se dan para la continuidad y derivabilidad, que no son mas que las definidas por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} b = 6+a \\ 9+3a = 3b+c \end{array}\right\} \Rightarrow 9+3a = 18+3a+c \Rightarrow c = -9$$

La función debe tener el mismo valor en los extremos del intervalo

$f(-1) = f(7)$

Así que

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 1+a(-1) = 1-a \\ f(7) = 7b+9 \end{array}\right\} \Rightarrow 1-a = 7b+9 \Rightarrow 1-a = 51+7a \Rightarrow a = -\frac{25}{4}$$

Por lo tanto $a = -\frac{25}{4}$, $b = -\frac{1}{4}$ y $c = -9$ Por lo que la siguiente función cumplirá el teorema de Rolle

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{25}{4}x & \text{si} \quad x \le 3 \\ -\frac{1}{4}x+3 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

$\square$

Teorema: 4.39 **Teorema del valor medio para derivadas**

Si f es una función continua en todo un intervalo cerrado $[a,b]$ que tiene derivada en cada punto del intervalo abierto (a,b), existe por lo menos un punto c interior a (a,b) para el que

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a) \tag{4.1}$$

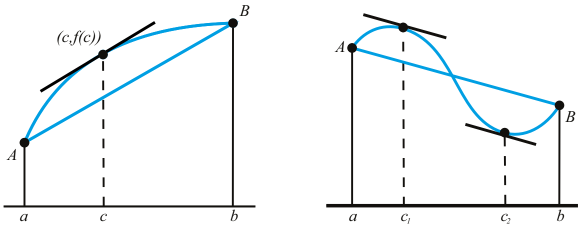
Demostración. Para aplicar el teorema de Rolle necesitamos una función que tenga valores iguales en los extremos a y b. A fin de construirla, modificamos f en la forma siguiente:

$$h(x) = f(x)(b-a) - x[f(b) - f(a)]$$

Entonces $h(a) = h(b) = bf(a) - af(b)$ y como h es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces aplicando el teorema de Rolle existe un $c \in (a,b)$ tal que $h'(c) = 0$, así que $f'(c)(b-a) - [f(b) - f(a)] = 0$. Por lo tanto

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$\square$



Significación geométrica del teorema del valor medio

Ejemplo. 108

Emplee el Teorema del valor medio para demostrar que: $e^x - 1 \leq xe^x$ para todo número real x.

Solución. Sea $f(t) = te^t - e^t + 1$, y apliquemos el teorema del valor medio a la función f sobre cada intervalo cerrado de la forma $[0,x]$ para $x > 0$, y $[x,0]$ para $x < 0$.
En efecto existe un $c \in (0,x)$ tal que

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= xf'(c) \\ xe^x - e^x + 1 &= xce^c \geq 0 \\ xe^x - e^x + 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $e^x - 1 \leq xe^x$ para $x \geq 0$.

Ahora aplicando el teorema del valor medio al intervalo cerrado $[x,0]$ para $x < 0$.
En efecto existe un $c \in (x,0)$ tal que

$$\begin{aligned} f(0) - f(x) &= -xf'(c) \\ -xe^x + e^x - 1 &= -xce^c \leq 0 \\ -xe^x + e^x - 1 &\leq 0 \end{aligned}$$

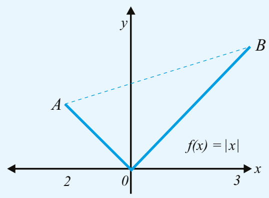
Así que $e^x - 1 \leq xe^x$. En conclusión para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $e^x - 1 \leq xe^x$ $\square$

Ejemplo. 109

Es importante comprobar que el teorema del valor medio puede dejar de cumplirse si hay algún punto entre a y b en el que la derivada no existe. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en todo el eje real y tiene derivada en todos los puntos del mismo excepto en 0. En la figura se ha dibujado su gráfica en el intervalo $[-2,3]$. La pendiente de la cuerda que une A y B es:

$$\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)} = \frac{3-2}{3+2} = \frac{1}{5}$$

pero la derivada no es igual a $\frac{1}{5}$ en ningún punto.



4.3.1. Ejercicios

1.- Demostrar que la desigualdad $\frac{x}{1+x} < log(1+x) < x$ se verifica para todo $x > 0$.

2.- Demostrar que $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x-y|$, para cualesquiera $x; y \in \mathbb{R}$.

3.- Demostrar que $|\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(ay)| \leq |a||x-y|$, $\forall x; y \in \mathbb{R}$.

4.- Sea $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a;b]$ y derivable en $(a;b)$ verificando $f(a) = f(b) = 0$. Probar que para todo número real λ existe un punto $c \in (a;b)$ tal que $f'(c) = \lambda f(c)$. (Indicación: Considérese la función $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = e^{-\lambda x} f(x)$; $\forall x \in [a;b]$).

5.- Prueba que $\operatorname{arc\,sen}(x) + \operatorname{arc\,cos}(x) = \frac{\pi}{2}$ para todo $x \in [-1;1]$.

6.- Demuestra que

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x$$

para cualquier x positivo

7.- Sea $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ una función derivable, verificando que $f(0) = 0$ y que $|f'(x)| \leq |f(x)|$; $\forall x \in [0;1]$. Probar que $f(x) = 0$; $\forall x \in [0;1]$.

4.4 Criterio de la primera derivada para los extremos

4.4.1. Derivadas y monotonía

Teorema: 4.40

Sea f una función continua en $[a,b]$ y y derivable en (a,b). Tenemos entonces:

❶ Si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$, f es creciente en $[a,b]$.

❷ Si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a,b)$, f es decreciente en $[a,b]$.

❸ Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, f es estrictamente creciente en $[a,b]$.

❹ Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, f es estrictamente decreciente en $[a,b]$.

❺ Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, f es constante en $[a,b]$.

Demostración.

❸ Supongamos $x,y \in [a,b]$ tal que $a \leq x < y \leq b$, y apliquemos el teorema del valor medio a $[x,y]$. De donde

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) \quad \text{donde} \quad x < c < y \tag{4.2}$$

Así que $f(y) - f(x) > 0$, luego $f(y) > f(x)$, con lo que f es estrictamente creciente.

❹ Supongamos $x,y \in [a,b]$ tal que $a \leq x < y \leq b$, y apliquemos el teorema del valor medio a $[x,y]$. De donde

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) \quad \text{donde} \quad x < c < y \tag{4.3}$$

Así que $f(y) - f(x) < 0$, luego $f(y) < f(x)$, con lo que f es estrictamente decreciente.

❺ Supongamos $x,y \in [a,b]$ tal que $a \leq x < y \leq b$, y aplicando el teorema del valor medio a $[x,y]$. Se tiene que $f(y) = f(x)$ con lo que f es constante en $[a,b]$.

□

A partir de este Teorema, el estudio de la monotonía de una función derivable en un dominio se puede realizar estudiando el signo de su función derivada en dicho dominio. Este método, será una potente herramienta a la hora de conocer las características gráficas de una función dada algebraicamente.

Ejemplo. 110

Estudiemos la monotonía de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ definida en $\mathbb{R}$.

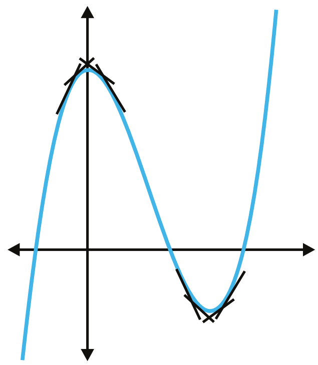
Solución.

① $f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 = 2.$

② Estudiando el signo de la derivada con las raíces calculadas: f es creciente en $(-\infty,0) \cup (2,\infty)$ y decreciente en $(0,2)$

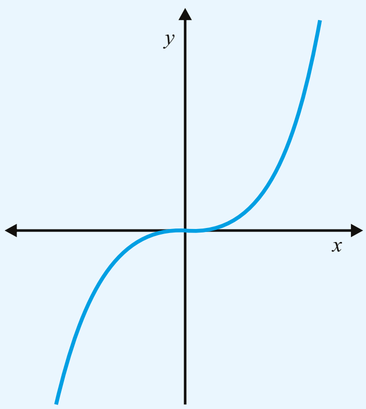
□

Es evidente que la monotonía en la gráfica corresponde con lo estudiado en el teorema (40) acerca del signo de la derivada. Una interpretación de esto bastante interesante para la comprensión de esta sección es observar lo que ocurre con las pendientes de las tangentes a la gráfica en los intervalos. Se puede observar que en los intervalos en los que la función es creciente, las rectas tangentes también lo son y en los que la función es decreciente, las rectas tangentes son decrecientes también. Esto era de esperar, ya que, según vimos en la interpretación geométrica de la derivada, la pendiente de la recta tangente en un punto coincidía con la derivada en dicho punto.



Nota:
En general, el recíproco del teorema anterior, no es cierto, es decir, no todas las funciones derivables en un punto y crecientes (o decrecientes) en el punto no tienen porqué tener derivada positiva (o negativa). Lo único que podemos asegurar es que si una función es derivable y creciente (o decreciente), entonces $f'(a) \geq 0$ (o $f'(a) \leq 0$)

Ejemplo. 111



Consideremos la función $f(x) = x^3$, gráficamente se puede notar que se trata de una función creciente en todo su dominio y, en particular en $x = 0$. Sin embargo, es evidente que no es positiva ya que $f'(0) = 0$

El teorema 40 podemos emplearlo para demostrar que se presenta un extremo siempre que la derivada cambia de signo.

Teorema: 4.41 **Criterio de la primera derivada para los extremos**

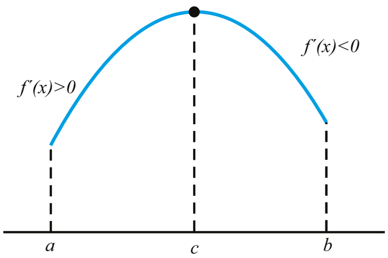
Supongamos f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), excepto posiblemente en un punto c. Entonces

1. Si $f'(x)$ es positiva para todo $x < c$ y negativa para todo $x > c$, f tiene un máximo relativo en c.

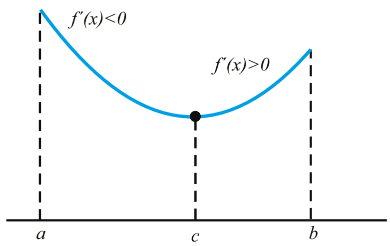
Teorema: 4.41 (Continuación)

❷ Si, $f'(x)$ es negativa para todo $x < c$ y positiva para todo $x > c$, f tiene un mínimo relativo en c.

Demostración. En el caso ❶, el teorema 40 ❶ nos dice que f es estrictamente creciente en $[a,c]$ y estrictamente decreciente en $[c,b]$, luego $f(x) < f(c)$ para todo $x \neq c$ en (a,b), con lo que f tiene un máximo relativo en c, con esto demuestra ❶ y la demostración de ❷ se realiza análogamente. □



a. Máximo relativo en c



b. Mínimo relativo en c

4.4.2. Esquema para estudiar el crecimiento de una función

1) Calculamos el dominio de la función.
2) Calculamos la derivada de la función.
3) Calculamos los puntos donde la derivada es cero, es decir, resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$.
4) Estudiamos el signo que tiene la derivada en cada uno de los intervalos en que queda dividida la recta real al considerar los puntos críticos (puntos con derivada cero) y los puntos donde la función no es derivable o no es continua.

Ejemplo. 112

Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = x^3 - 12x + 6$

Solución. $Dom f = \mathbb{R}$, la función es continua y derivable en el dominio por ser una función polinómica.

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \quad ; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x+2)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \quad x = -2$$

x	$f'(x)$	$f(x)$
$x < -2$	Positiva$(+)$	Crece
$-2 < x < 2$	Negativa$(-)$	Decrece
$x > 2$	Positiva$(+)$	Crece

Por lo tanto:

La función es creciente en $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

La función es decreciente en $(-2,2)$

La función tiene un máximo relativo en $(-2,22)$ y un mínimo relativo en $(2,-10)$

$\square$

Teorema: 4.42 **Teorema del Valor Intermedio para la Derivada**

Sea I un intervalo abierto y $f: I \mapsto \mathbb{R}$ derivable. Entonces $f'(I)$ es un intervalo.

Nota:
El teorema del valor intermedio para la derivada no es una consecuencia del teorema del valor intermedio. Sería necesario que la función fuera de clase C^1 para garantizarnos la continuidad de la derivada. Sin embargo, se pueden encontrar funciones derivables cuya derivada no es una función continua.

La primera aplicación del teorema del valor intermedio para la derivada es que el estudio de la monotonía se simplifica sobremanera. Una vez que sabemos que la derivada no se anula (en un intervalo), basta evaluar en un punto arbitrario para saber su signo.

Ejemplo. 113

Estudiemos la monotonía de la función $f(x)=1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}$ para $x>0$.

Solución. Para ello, veamos cuándo se anula la derivada:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x=x+1$$

Por tanto, f' no se anula nunca. El teorema del valor intermedio para las derivadas nos asegura que f es estrictamente monótona en $\mathbb{R}^+$. En efecto, si la derivada cambiase de signo, tendría que anularse, cosa que no ocurre.

Una vez que sabemos que f' tiene el mismo signo en todo $\mathbb{R}^+$, podemos averiguar dicho signo evaluando en cualquier punto. Por ejemplo $f'(1)>0$, con lo que f es estrictamente creciente. $\square$

Lo que hemos visto en el ejemplo anterior, lo podemos repetir con cualquier función cuya derivada no se anule.

Corolario: 4.6

Sea I un intervalo abierto y $f: I \mapsto \mathbb{R}$ una función derivable con $f'(x)\neq 0$, para todo $x\in I$. Entonces f es estrictamente monótona.

4.4.3. Extremos Absolutos

Acabamos de ver cómo el estudio de la imagen de una función nos da automáticamente, si existen, los extremos absolutos. En el caso de que tengamos garantizado la existencia de dichos extremos antes de estudiar monotonía, es posible ahorrar algunos cálculos. Eso quiere decir que los extremos absolutos se tienen que alcanzar en uno de los siguientes puntos:

a) puntos críticos,

b) extremos del intervalo, o

c) puntos donde la función no sea continua o no sea derivable.

Ejemplo. 114

Determine, si existen los extremos absolutos (máx. y mín.) de la función: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ en el intervalo $[-3, 2]$

Solución. Como f es continua en el intervalo dado, la existencia de máximo y mínimo absoluto está garantizada por el teorema (27) (propiedad de los valores extremos).

Hallemos los puntos críticos por medio de la derivada.

$$\begin{array}{ll} f'(x) = 4x^3 - 16x = 0 & \Leftrightarrow \quad 4x(x^2-4) = 0 \\ 4x(x-2)(x+2) = 0 & \Rightarrow \quad x = 0 \quad x = 2 \quad x = -2 \quad \text{son los únicos puntos críticos} \end{array}$$

Los extremos absolutos se escogen entre los siguientes valores: $f(-3)$, $f(2)$, $f(0)$ y $f(-2)$. Hemos reducido el problema de averiguar el valor máximo o mínimo en todo un intervalo a averiguar el máximo o el mínimo de cuatro números.

Solo hace falta echar un vistazo para encontrarlos:

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^4 - 8(-3)^2 + 16 = 25 \\ f(-2) &= (-2)^4 - 8(-2)^2 + 16 = 0 \\ f(0) &= 0^4 + 80^2 + 16 = 16 \\ f(2) &= (2)^4 - 8(2)^2 + 16 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

Máximo absoluto de f en $[-3, 2]$ es $f(-3) = 25$

Mínimo absoluto de f en $[-3, 2]$ es $f(-2) = f(2) = 0$ □

Ejemplo. 115

Considere la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{si} \quad -3 \leq x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Determine los extremos absolutos de f en el intervalo $[-3, 3]$.

Solución. La función es continua en todos los puntos del intervalo $[-3,3]$. Por el teorema (27) (propiedad de los valores extremos), $f(x)$ posee máximo y mínimo absoluto en el intervalo considerado. Para determinarlos, se considera primero la derivada de f:

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad -3 \leq x < 1 \\ 2x & \text{si} \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Dado que $f'(1^-) = 3$ y $f'(1^+) = 2$, la derivada de f no existe en $x = 1$ y por lo tanto este es un punto crítico de f.

Por otro lado, la derivada no se anula en ningún punto del intervalo. En consecuencia, el único punto crítico es $x = 1$.

Los extremos absolutos de f se escogen entre los siguientes valores: $f(1)$; $f(-3)$ y $f(3)$

$$f(1) = 1^2 - 2 = -1$$
$$f(-3) = 3(-3) - 4 = -13$$
$$f(3) = 3^2 - 2 = 7$$

Por lo tanto:

Máximo absoluto de f en $[-3,3]$ es $f(3) = 7$
Mínimo absoluto de f en $[-3,3]$ es $f(-3) = -13$ □

4.4.4. Ejercicios

Emplee el criterio de la primera derivada para clasificar los extremos locales

1.- $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

2.- $f(x) = \dfrac{3x^4+1}{x^3}$

3.- $f(x) = 3x^5 - 20x^3$

4.- $f(x) = (x^3-1)^4$

5.- $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 17$

6.- $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 12x - 5$

7.- $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-4}$

8.- $f(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{x}}$

9.- $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

10.- $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$

11.- $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

12.- $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 5$

13.- $f(x) = (x-4)^2(x+2)^3$

14.- $f(x) = (x-1)^3(x-3)$

15.- $f(x) = (x-4)^{1/3} - 3$

16.- $f(x) = (x+2)^3 + 2$

17.- $f(x) = \dfrac{4x^2}{3x^2+1}$

18.- $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-9}$

Encuentre los extremos absolutos de la función dada en el intervalo indicado

18.- $f(x) = -x^2 + 4x$; $[0,4]$

19.- $f(x) = (x-2)^2$; $[1,6]$

20.- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$; $[-3,2]$

21.- $f(x) = -x^3 - x^2 + 5x$; $[-1,1]$

22.- $f(x) = x^4 + 4x^3 - 10$; $[0,4]$

23.- $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$; $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$

24.- Determinar el máximo absoluto de la función

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-2|} \quad x \in \mathbb{R}$$

4.5 Criterio de la Derivada Segunda para los Extremos

Para decidir si en un punto crítico c existe un máximo o un mínimo (o ni uno ni otro), necesitamos más información acerca de la función f. Ordinariamente el comportamiento de f en un punto crítico puede determinarse a partir del signo algebraico de la derivada en las proximidades de c. El teorema que sigue hace ver que un estudio del signo de la derivada segunda en las cercanías de c puede también ser de utilidad.

Teorema: 4.43 — **Condición suficiente de extremo relativo**

Sea c un punto crítico de f en un intervalo abierto (a,b); esto es, supongamos $a < c < b$ y que $f'(c) = O$. Supongamos también que exista la derivada segunda f'' en (a,b). Tenemos entonces:

❶ Si f" es negativa en c, f tiene un máximo relativo en c.

❷ Si f" es positiva en c, f tiene un mínimo relativo en c.

Ejemplo. 116

Sea $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2 - 6x + 4$. Halle los extremos relativos de la función utilizando el criterio de la derivada segunda para los extremos. Indique en cada caso si es un máximo o mínimo relativo.

Solución.
Derivando la función se tiene que:

$$f'(x) = x^3 - 7x - 6 = (x+1)(x^2 - x - 6) = (x+1)(x-3)(x+2)$$

Luego, $x = -1$, $x = 3$ y $x = -2$ son puntos críticos de f.
Calculemos la segunda derivada de la función y evaluemos en ella los puntos críticos. Así: $f''(x) = 3x^2 - 1$ entonces $f''(-1) = -4 < 0$, $f''(3) = 20 > 0$ y $f''(-2) = 5 > 0$.
Entonces -1 es un máximo relativo de f, 2 y -2 son mínimos relativos de f. □

4.5.1. Generalización de las Condiciones Suficientes

Proposición: 4.15

Sea I un intervalo, $a \in I$ y n un número natural mayor o igual que 2. Sea $f : I \mapsto \mathbb{R}$ una función de clase n verificando

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0; \quad f^{(n)}(a) \neq 0$$

a) Si n es impar,

  i) $f^{(n)}(a) > 0$, f es estrictamente creciente en a

  ii) $f^{(n)}(a) < 0$, f es estrictamente decreciente en a

b) Si n es par:

  i) si $f^{(n)}(a) > 0$, f tiene un mínimo relativo en a,

  ii) si $f^{(n)}(a) < 0$, f tiene un máximo relativo en a.

Ejemplo. 117

Calcular los extremos relativos de la función $f(x) = x^6 + 2x^4 + 15$

Solución. La derivada de la función es $f'(x) = 6x^5 + 8x^3 = 2x^3(3x^2 + 4)$ que se anula solo en $x = 0$.
La derivada segunda es $f''(x) = 30x^4 + 24x^2$ y al reemplazar $x = 0$ se tiene $f''(0) = 0$. Como esta derivada se anula la condición suficiente (43) no nos da información y hay que aplicar la generalización de esta.

Para ello se halla la derivada tercera $f'''(x) = 120x^3 + 48x$ cuyo valor en $x = 0$ es $f'''(0) = 0$.
La derivada cuarta es $f^{(iv)}(x) = 360x^2 + 48$ y su valor en $x = 0$ es $f^{(iv)}(0) = 48$ que es positiva y n es un número par, por lo tanto f tiene en $x = 0$ un mínimo relativo. □

Ejemplo. 118

Calcular los puntos donde la función $f(x) = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^4}{2} + x^3 + 1$ es creciente

Solución. La derivada de la función es $f'(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 = x^2(x^2 + 2x + 3) = x^2[(x+1)^2 + 2]$ que se anula solo en $x = 0$.
La derivada segunda es $f''(x) = 4x^3 + 6x^2 + 6x$ y al reemplazar $x = 0$ se tiene $f''(0) = 0$. Como esta derivada se anula la condición suficiente (43) no nos da información y hay que aplicar la generalización de esta.

Para ello se halla la derivada tercera $f'''(x) = 12x^2 + 12x + 6$ cuyo valor en $x = 0$ es $f'''(0) = 6 > 0$ que es positiva y n es impar, por lo tanto f es creciente en $x = 0$ □

4.5.2. Problemas de Optimización

En la ciencia, la ingeniería y la administración es frecuente interesarse por los valores máximos y mínimos de funciones; por ejemplo, una compañía está naturalmente interesada en maximizar los ingresos al mismo tiempo que en minimizar los costos. La proxima vez que el lector vaya al supermercado haga este experimento: mida la altura y el diámetro de todas las latas que contengan, por ejemplo 16 onza de alimento (28,9 plg3). El hecho de que todas las latas de este volumen especificado tengan las mismas medidas no es una casualidad, puesto que existen dimensiones especificas que minimizarán la cantidad de metal utilizado y, por consiguiente, minimizaran el costo de fabricación a la compañía. Así por el estilo, muchos de los llamados autos económicos tienen aspectos que son notablemente semejantes. No se trata precisamente del simple hecho de que una compañía copie el éxito de otra, sino, más bien, que para un volumen determinado los ingenieros procuran lograr un diseño que minimice la cantidad de material empleado.

Sugerencias Útiles

En los ejemplos y problemas que siguen habrá que interpretar la descripción verbal para establecer una función de la cual se busca un valor máximo o mínimo. Estos son los tipos de problemas verbales que realzan el poderío del cálculo y proporcionan una de las muchas respuestas posibles a la añeja pregunta de: "¿para que sirve?"A continuación se señalan los pasos importantes en la solución de un problema de aplicación de máximos y mínimos.

1) Cuando sea necesario, realice una ilustración.

2) Introduzca variables y fíjese en toda relación que existe entre ellas.

3) Utilizando todas las variables correspondientes, se escribe la función que hay que optimizar.

4) Esta función, normalmente, dependerá de más de una variable. Se busca una relación entre ellas, despejando la más cómoda y escribiendo la función a optimizar en términos de una sola variable.

5) Se busca el máximo o el mínimo de f en $[a;b]$. Para ello se puede proceder:

   a) Si f es derivable en $[a,b]$, el máximo y mínimo absoluto se alcanzará en un máximo o mínimo relativo o en un punto de los extremos del intervalo. Por lo tanto, se calculan los extremos relativos comprendidos entre a y b, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y se calculan $f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(b)$; el mayor será el máximo absoluto y el menor será el mínimo absoluto.

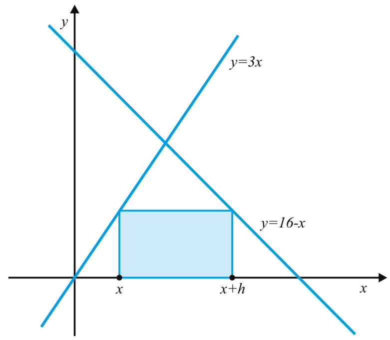
   b) Si hay algún punto de $[a,b]$ en el que f no sea derivable pero sí continúa, calcularemos además el valor de f en ese punto, pues podría ser un extremo absoluto.

   c) Si f no es continua en algún punto de $[a,b]$ se estudiará el comportamiento de la función en las cercanías de dicho punto.

Ejemplo. 119

Entre todos los rectángulos que tienen dos de sus vértices sobre el eje x positivo y los otros dos vértices sobre las rectas $y = 3x$, y, $y = 16 - x$. Hallar el rectángulo de área máxima.

Solución. Representamos gráficamente la situación:



Hallemos la altura y la base del rectángulo, las cuales son:
Por un lado: altura $= y = 3x$, y, base$= h$. Por otra parte se tiene que: altura $= y = 16-x-h$, así que $h = 16-x-y$ entonces

$$h = 16-x-3x = 16-4x$$

Por lo tanto el área del rectángulo viene dada por

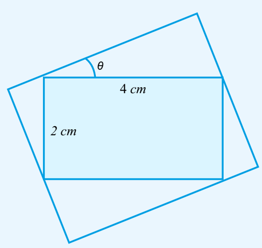
$$A = 3x(16-4x) = 48x-12x^2 \tag{4.4}$$

Derivando con respecto a x ambos lados de la ecuación (4.4) se tiene $A' = 48-24x$. Estudio del signo de A'
Si $0 < x < 2$; $A' = 48-24x > 0$; A es est. creciente en $(0,2)$

Si $2 < x$; $A' = 48 - 24x < 0$; A es est. decreciente en $(2,\infty)$
Por lo tanto; por la condición suficiente de máximo local (criterio de la derivada) podemos afirmar que para $x = 2$ el área $A = 48$ máximo. □

Ejemplo. 120

Calcular el área máxima del rectángulo que se puede circunscribir alrededor de un rectángulo dado de longitud 4 cm y anchura 2cms



Demostración. Elegimos como variable el ángulo θ en radianes. Entonces, el área del rectángulo circunscrito es

$$A(\theta) = (4\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta)(2\cos\theta + 4\operatorname{sen}\theta) \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \tag{4.5}$$

Derivando ambos miembros de la ecuación (4.5) con respecto a θ

$$\begin{aligned} A'(\theta) &= (-4\operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta)(2\cos\theta + 4\operatorname{sen}\theta) + (4\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta)(-2\operatorname{sen}\theta + 4\cos\theta) \\ &= 4\cos^2\theta - 16\operatorname{sen}^2\theta + 16\cos^2\theta - 4\operatorname{sen}^2\theta \\ &= 16(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + 4(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \\ &= 20(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \\ &= 20\cos 2\theta \end{aligned}$$

Para obtener los puntos críticos igualamos a cero la derivada $A'(\theta) = 0$, entonces $\cos 2\theta = 0$. Dado que $2\theta \in [0, \pi]$, la única solución de esta ecuación es el punto crítico

$$2\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

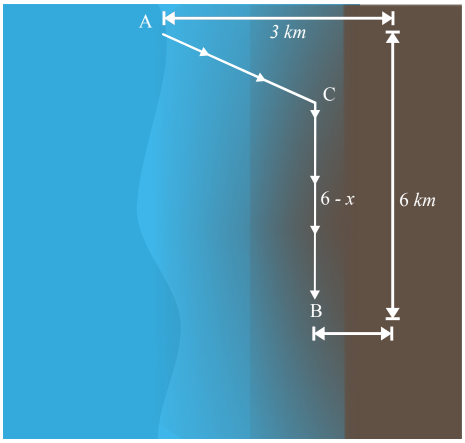
Observemos que si $\theta \in [0, \frac{\pi}{4})$ entonces $\cos 2\theta > 0$ y $A'(\theta) > 0$. Además $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ entonces $\cos 2\theta < 0$ y $A'(\theta) < 0$. En consecuencia, el área máxima del rectángulo circunscrito se alcanza en $\frac{\pi}{4}$ y su valor $A(\frac{\pi}{4}) = 18$

□

Ejemplo. 121

Un nadador A se encuentra a 3 km de la playa enfrente de una caseta. Desea ir a un punto B, situado en la misma playa, a 6 km de la caseta. Sabiendo que nada a 3 km/h y anda por la arena a 5 km/h. ¿A qué punto debe dirigirse el nadador para llegar a B en el menor tiempo posible.?

Solución.



El tiempo que demora el nadador de ir e A hasta B viene dado por:

$$T = T_1 + T_2 \tag{4.6}$$

donde T_1 es el tiempo que tarda el nadador de ir de A hasta C y T_2 es el tiempo que demora el nadador de ir de C hasta B. Así que $T_1 = \frac{\sqrt{9+x^2}}{3}$ y $T_2 = \frac{6-x}{5}$.

Reemplazando T_1 y T_2 en la ecuación (4.6) se tiene:

$$T(x) = \frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{6-x}{5} \tag{4.7}$$

Derivando ambos miembros de la ecuación (4.7) con respecto a x tenemos que

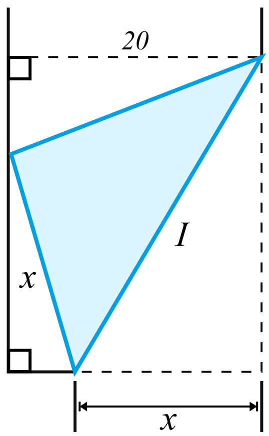
$$\frac{dT}{dx} = \frac{x}{3\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{5} \tag{4.8}$$

Igualando a cero $\frac{dT}{dx}$ se tiene que $\frac{x}{3\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{5} = 0$ entonces $5x = 3\sqrt{9+x^2}$, resolviendo esta ecuación se tiene que $x = \frac{9}{4} = 2,25$ Km. Así que el nadador debe ir a punto que esta a 2,25 Km de la caseta para que el tiempo sea el menor posible. $\square$

Ejemplo. 122

Una pieza rectangular de papel muy larga tiene 20 centímetros de ancho. Se va a doblar la esquina inferior derecha a lo largo del pliegue que se muestra en la figura, de modo que la esquina apenas toque el lado izquierdo de la página. Calcular el área mínima de la zona triangular determinada por el doblez.

Solución.



El área del triángulo rectángulo formado es:

$$A = \frac{xy}{2} \tag{4.9}$$

El valor de y en términos de θ es :

$$y = \frac{20}{\operatorname{sen}(2\theta)} \tag{4.10}$$

Como $x = y\tan\theta$ entonces reemplazando y se tiene que el valor de x en términos de θ viene dado por:

$$x = \frac{10}{\cos^2(\theta)} \tag{4.11}$$

Reemplazando (4.10) y (4.11) en (4.9) se tiene

$$A = \frac{50}{\operatorname{sen}\theta cos^3\theta} \tag{4.12}$$

Derivando ambos miembros de la ecuación (4.12 con respecto a θ

$$\begin{aligned}\frac{dA}{d\theta} &= -50\frac{\cos^4\theta - 3\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}^2\theta\cos^6\theta}\\ &= -50\frac{\cos^4\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta\cos^6\theta}\\ &= -50\frac{\cos^2\theta(\cos^2\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta)}{\operatorname{sen}^2\theta\cos^6\theta}\\ &= -50\frac{(\cos^2\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta)}{\operatorname{sen}^2\theta\cos^4\theta}\end{aligned}$$

Si $\dfrac{dA}{d\theta} = 0$, entonces $\cos^2\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta = 0$; $3tan^2\theta = 1$; $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

Estudio del signo de $\dfrac{dA}{d\theta}$

Si $0 < \theta < \dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{dA}{d\theta} < 0$; A es est. decreciente en $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$

Si $\dfrac{\pi}{6} < \theta$; $\dfrac{dA}{d\theta} > 0$; A es est. creciente en $\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right)$

Por lo tanto; por la condición suficiente de mínimo local (criterio de la 1a derivada) podemos afirmar que para $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ el área A es minima.

Los valores de x y y serán:

$$\begin{aligned}x &= \frac{10}{\cos^2(\frac{\pi}{6})} = \frac{10}{(\sqrt{3}/2)^2} = \frac{40}{3}\\ y &= \frac{20}{\operatorname{sen}(\pi/3)} = \frac{40\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

El área del triángulo es:

$$A = \frac{800\sqrt{3}}{9}$$

□

Ejemplo. 123

Hallar el rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un rombo de diagonales 4 m y 3 m.

Solución.

El área del rectángulo es:

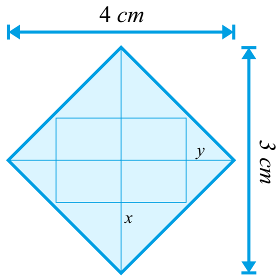
$$A = xy \tag{4.13}$$

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{x/2}{2} = \frac{(3-y)/2}{3/2}$$

de donde

$$y = \frac{12-3x}{4} \tag{4.14}$$



Sustituyendo (4.17) en (4.16) se tiene:

$$A = \frac{12-3x^2}{4} \tag{4.15}$$

El área del rectángulo es:

$$A = xy \tag{4.16}$$

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{x/2}{2} = \frac{(3-y)/2}{3/2}$$

de donde

$$y = \frac{12-3x}{4} \tag{4.17}$$

Sustituyendo (4.17) en (4.16) se tiene:

$$A = \frac{12-3x^2}{4} \tag{4.18}$$

Derivando con respecto a x la ecuación (4.18) obtenemos

$$\frac{dA}{dx} = \frac{3(2-x)}{2} \tag{4.19}$$

Si $\frac{dA}{dx} = 0$, entonces $x = 2m$, $y = 3/2m$. Así que para $x = 2m$, $\frac{d^2A}{dx^2} < 0$, luego, el área es máxima en $x = 2$. El rectángulo deberá tener base 2 m altura 1.5 m y área 3 m^2 □

4.5.3. Ejercicios

1.- Se quiere construir el marco para una ventana rectangular de 16 m^2. El metro del tramo horizontal cuesta 3 euros y el del tramo vertical 5 euros. Determine:

a) Las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.

b) ¿Cuánto cuesta el marco?

2.- Encuentre las dimensiones de los triángulos isósceles inscritos en la región comprendida entre el gráfico de $f(x) = (x^2+1)^{-1}$ y el eje x, de manera que el área de la región sombreada sea máxima.

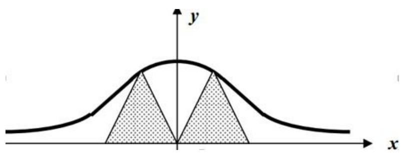


Figura 4.1:

3.- En un triángulo isósceles se inscribe un rectángulo de manera que uno de sus lados reposa sobre la hipotenusa. Determinar las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir de esa manera, considerando que los catetos del triángulo miden 2 m.

4.- Un triángulo isósceles tiene un vértice en el origen, la base paralela al eje x con los extremos en la curva $12y = 36 - x^2$. Determine las dimensiones del triángulo de área máxima.

5.- Demostrar que de todos los rectángulos de perímetro P dado, el de máxima área es el cuadrado.

6.- Se desea construir un tanque con forma de paralelepípedo rectangular de 45 m^3 de volumen, con la parte superior abierta según indica la figura. El largo del rectángulo base debe ser doble del ancho. El material de la base tiene un costo de $100\$/m^2$ y el de las paredes de $80\$/m^2$. Determina las dimensiones del recipiente para que el costo de los materiales sea mínimo, así como el correspondiente precio del tanque.

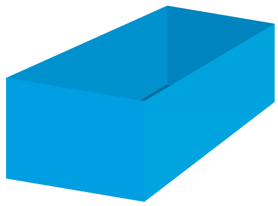


Figura 4.2:

7.- Se desea construir una caja con tapa utilizando un cartón rectangular que mide 5 pies$\times$ 8 pies. Esta se realiza cortando las regiones sombreadas de la figura y luego doblando por las líneas discontinuas, ¿Cuáles son las dimensiones x, y, z que maximizan el volumen de la caja?

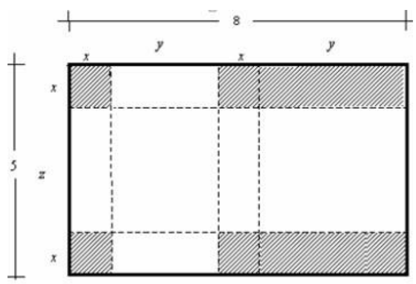


Figura 4.3:

8.- Un fabricante de cajas va a fabricar una caja cerrada con un volumen de 288 cm^2 cuya base será un rectángulo con una longitud tres veces mayor que su anchura. Determine cuáles son las dimensiones más económicas.

9.- Obtenga una ecuación de la tangente a la curva $y = x^3 - 3x^2 + 5x$ cuya pendiente sea mínima.

10.- Un jardinero dispone de 160 metros de alambre que va a utilizar para cercar una zona rectangular y dividirla en tres partes, colocando las alambradas de las divisiones paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener la zona cercada para que el área sea la mayor posible?

11.- Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que tiene dos vértices en el eje x y sus otros dos vértices pertenecen a la parábola cuya ecuación es $y = 16 - x^2$

12.- De todas las parejas de números reales cuyas componentes positivas tienen producto dado, encontrar aquella para la cual la suma de esas componentes es mínima.

13.- Un triángulo isósceles tiene base b y lados iguales de longitud a. Encuentre las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en el triángulo de manera que uno de sus lados coincide con la base del triángulo.

14.- Una ventana tiene forma de un rectángulo coronado por un triángulo equilátero. Encuentre las dimensiones del rectángulo para el cual el area de la ventana es máxima, si el perímetro de la misma debe ser de 12 pies.

15.- Trazar una recta de modo que pase por un punto $P(1,4)$ y que la suma de las longitudes de los segmentos positivos cortados por dicha recta en los ejes coordenados, sea la menor posible.

16.- Dados dos puntos $A(1,4)$ y $B(3,0)$ en la elipse $2x^2+y^2=18$. Hallar el tercer punto C tal que el área del triángulo ABC sea la mayor posible.

17.- Una cerca de 8 pies de alto al nivel del suelo va paralela a un edificio alto. La cerca dista a 1 pie del edificio. Calcule la longitud de la escalera más corta que se pueda apoyar entre el suelo y el edificio por encima de la reja.

18.- Encuentre el punto de la gráfica $y=x^2+1$ más cercano al punto $P(3,1)$.

19.- Determine las dimensiones del rectángulo que se puede inscribir en un semicírculo de radio r de manera que dos de sus vértices estén sobre el diámetro.

20.- Dos aeroplanos A y B vuelan horizontalmente a la misma altura. La posición del aeroplano B es al suroeste del A, a 20 km. al oeste y 20 km. al sur de A. Si el aeroplano A vuela hacia el oeste a 16 km/min.

a) ¿En cuántos segundos estarán los mas cerca el uno del otro?

b) ¿Cuál será su distancia más corta?

21.- Un alambre de 36 cm de largo se va a partir en dos partes. Una de las partes se ha de doblar en forma de triángulo equilátero y la otra forma de rectángulo cuya longitud es el doble de su anchura. ¿Cómo se debe partir el alambre para la suma de las areas del triángulo y el rectángulo sea máxima?

22.- Encuentre la ecuación de la recta tangente a la elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ en el primer cuadrante y que forma con los ejes coordenados el triángulo de menor area posible.

23.- Se consideran las rectas que pasan por el punto $(1,8)$ y cortan a los semiejes positivos. Determinar la distancia mínima entre los puntos de corte y obtener la recta que verifica dicha propiedad.

24.- El perímetro de un triángulo isósceles es $2p$. ¿Cuánto deben medir sus lados para que el volumen del cuerpo engendrado por la rotación del triángulo en torno a su base sea el mayor posible.

25.- El perímetro de un triángulo isósceles es $2p$. ¿Cuánto deben medir sus lados para que el volumen del cono engendrado por la rotación del triángulo en torno a su altura bajada sobre la base sea el mayor posible.

26.- Girando un rectángulo de perímetro p alrededor de uno de sus lados, se genera un cilindro circular recto. Calcule las dimensiones del rectángulo que producen el cilindro de mayor volumen.

27.- Determinar los puntos de máxima y mínima pendiente de la gráfica de la función

$$y = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in \mathbb{R}.$$

28.- Se considera la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Determinar, de entre los triángulos isósceles inscritos en dicha elipse, con un vértice en el punto $(0,b)$ y base paralela al eje OX, el que tenga área máxima.

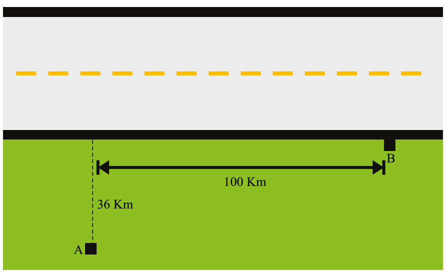
29.- En un triángulo está inscrito un rectángulo de forma que uno de los lados yace en uno de los lados del triángulo y dos vértices, en otros dos. Encuentre el área máxima posible del rectángulo si la del triángulo es igual a A.

30.- A las 13:00 horas el barco A se encuentra 30 millas al sur del barco B y viaja hacia el norte a 15 millas por hora. El barco B navega hacia el oeste a 10 millas por hora. ¿A qué hora se alcanza la distancia mínima entre las dos embarcaciones?

31.- Un veterinario cuenta con 30 metros de malla de metal y quiere construir 6 jaulas para perros levantando primero una cerca alrededor de una región rectangular, y dividiendo luego la región en seis rectángulos iguales mediante cinco rejas paralelas a uno de los lados. ¿Cuáles son las dimensiones de la zona rectangular para que las que el área total es máxima?.

32.- Se tenderá un cable desde una central eléctrica situada al lado de un río de 900 metros de ancho hasta una fábrica en el otro lado, 3000 metros río abajo. El costo de tender el cable bajo el agua es 85 por metro, y el costo sobre tierra es 84 por metro. ¿Cuál es la ruta más económica sobre la cual tender el cable?

33.- Un vehículo debe trasladarse desde el punto A hasta el punto B de la figura. El punto A dista 36 Km de una carretera rectilínea. Sobre la carretera el vehículo puede desarrollar una velocidad de $100\,Km/h$, mientras que sobre el terreno puede desarrollar una velocidad de $80\,Km/h$.



a) Se desea saber cuál es el recorrido que debe realizar el conductor para que el tiempo empleado en ir desde A hasta B sea mínimo.

b) Calcula ese tiempo.

34.- Se desea construir un oleoducto de un punto A a otro punto B que distan $10Km$ y se encuentran en riberas opuestas y luego sobre el suelo de C a B. El costo por Kilometro de una tubería bajo el agua es cuatro veces más del costo sobre tierra. Calcule la posición de C que minimizará el costo.

35.- Una carretera A que va de norte a sur y otra carretera B que va de este a oeste se cruza en un punto P. A las 10 horas un automóvil pasa por P viajando hacia el norte sobre A a $80Km/h$. En ese mismo momento, un avión que vuela hacia el este a $320Km/h$ y a una altura de 8500 m, pasa exactamente por arriba del punto de la carretera B que se encuentra 160 Km al oeste de P. Suponiendo que el automóvil y el avión mantienen la misma velocidad y dirección. ¿A qué hora se encontraran más cerca uno de otro?

36.- Hay que construir un silo de forma cilíndrica rematado por una bóveda semiesférica. El costo de construcción por m^2 es doble en la bóveda que en la parte cilíndrica. Calcular las dimensiones, si el volumen se fija de antemano, para que los costos de producción sean mínimos.

37.- Dos fabricas A y B que se encuentran a 4 millas una de la otra, emiten humo con partículas que contaminan el aire de la región. Suponga que el número de partículas provenientes de cada fábrica es directamente proporcional a la cantidad de humo e inversamente proporcional al cubo de la distancia desde la fábrica. ¿Qué punto entre A y B tendrá la menor contaminación si la fabrica A emite el doble de humo que la fabrica B?

38.- Una pequeña isla está a 2 millas, en línea recta del punto más cercano P de la ribera de un gran lago. Si un hombre puede remar en su bote a 3 millas por hora y caminar 4 millas por hora, ¿Dónde debe desembarcar para llegar a un pueblo que está 10 millas playa abajo del punto P, en el tiempo más corto? Suponga que el hombre usa su bote de motor que avanza 20 millas por hora, ¿Dónde debe desembarcar?

39.- Un hombre que navega en una barca de remos a 2 millas del punto más cercano de una costa recta, desea llegar a su casa, la cual está en la citada costa a 6 millas de dicho punto. El hombre puede remar a razón de 3 millas por hora y caminar a 5 millas por hora. ¿Qué debe hacer para llegar a su casa en el menor tiempo posible? Si el hombre tiene una lancha a motor que puede viajar a 15 millas por hora. ¿Qué debe hacer para llegar en el menor tiempo posible?

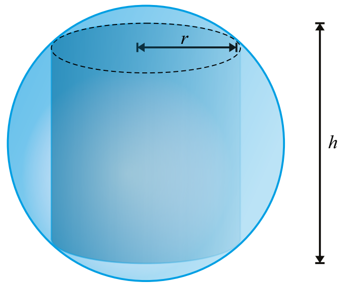
40.- Un torpedero está anclado a 9 Km del punto más próximo de la orilla. Se necesita enviar a un mensajero al campamento situado en la orilla. La distancia entre este y el punto más próximo referido, es igual a 15 Km. Teniendo en cuenta que el mensajero recorre a pie 5 Km/h, y en una barca, remando, 4 Km/h, en qué punto de orilla debe desembarcar para llegar al campamento lo más pronto posible.

41.- Se desea construir un almacén con un volumen de 100 metros cúbicos que tenga techo plano y base rectangular cuya anchura sea tres cuartas partes de su longitud. El costo por metro cúbico de los materiales es de 36 dólares para el piso, 54 dólares para los lados y 27 dólares para el techo. ¿Qué dimensiones minimizan el costo?.

42.- Una pista de 400 metros de longitud está formada por dos semicírculos iguales y dos partes rectas también iguales ¿Cuáles son las dimensiones de la pista que encierra la mayor área?. La pista encierra tres áreas, un rectángulo y dos semicírculos. ¿Cuáles son las dimensiones de la pista que encierra el rectángulo de mayor área?.

43.- Hallar el área total máxima de un cilindro inscrito en una esfera de radio R.

44.- Se consideran los cilindros rectos de base circular de radio r y altura h inscritos en una esfera de radio R dado.

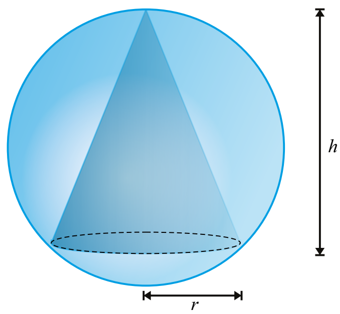


a) Determina r y h para que el cilindro tenga volumen máximo.

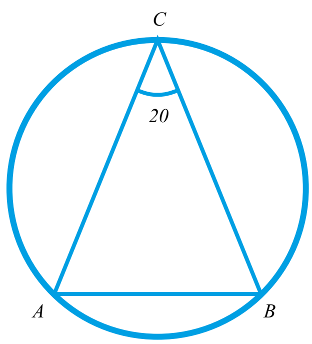
b) Determina las dimensiones r y h para que el cilindro tenga superficie lateral máxima.

c) ¿ Qué porcentaje del volumen de la esfera ocupa el cilindro de máximo volumen?

45.- Encuentra las dimensiones r y h del cono recto de base circular de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de radio R dado.



46.- Considera una circunferencia de radio R dado. Se inscriben en ella triángulos isósceles ABC .



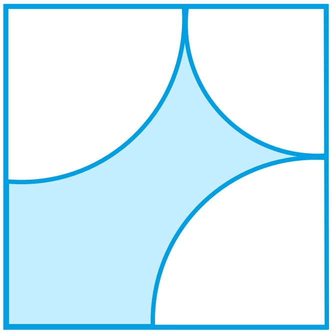
a) Calcula el perímetro de los triángulos en función del ángulo θ.

b) Halla el triángulo de perímetro máximo.

47.- Una ventana tiene forma de rectángulo terminado por un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. La porción rectangular ha de ser de cristales transparente y la parte circular ha de ser de cristales de color que admite solo la mitad de luz por metro cuadrado que el cristal transparente. El perímetro total de la ventana ha de tener longitud fija P. Hallar, en función de P, las dimensiones de la ventana que deja pasar la mayor cantidad posible de luz.

48.- Se considera un cuadrado de lado 1m. En tres vértices consecutivos de él se toman los centros de tres circunferencias de forma que los radios de las que tienen centros en vértices consecutivos, sumen 1m. (ver figura).

1 m



a) Encuentra los valores extremos de los radios de forma que los cuadrantes de círculo sombreados no se solapen.

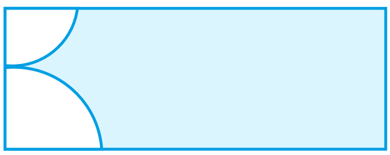
b) Halla los radios de las circunferencias para que el área sombreada sea:

I. máxima

II. mínima

c) Calcula dichas áreas.

49.- Sea un rectángulo de lados a y b con $b > a$. En los vértices de uno de los lados de longitud a se consideran dos cuadrantes de círculo con centros en aquellos, y radios cuya suma es a.



a) Halla los radios de los círculos para que el área sombreada del rectángulo sea:

i) máxima

ii) mínima

b) Calcula dichas áreas en función de a y b

50.- Un recipiente con pared vertical de altura h se encuentra sobre un plano horizontal. De un orificio en la pared del recipiente fluye un chorro. Determine la posición del orificio con la que el alcance del chorro será el máximo si la velocidad del líquido que fluye es igual a $\sqrt{2gx}$.

51.- La fabrica A debe unirse mediante una carretera con la línea férrea rectilínea en la que se encuentra el poblado B. La distancia AC desde la fábrica hasta el ferrocarril es igual a a, En tanto que la distancia BC por el ferrocarril es igual a b. El costo del transporte de las mercancías por la carretera es k veces $(k > 1)$ mayor que por el ferrocarril. ¿En qué punto D del segmento BC hay que trazar la carretera desde la fábrica para que el costo del transporte de la mercancía desde la fábrica hasta el poblado B sea el mínimo?

52.- Se va a inscribir un cono circular recto dentro de otro cono circular recto de volumen dado, con el mismo eje y con el vértice del cono interior tocando la base del exterior. ¿Cuál debe ser la razón de sus alturas para que el cono inscrito tenga el máximo volumen?.

53.- Se desea construir una tienda de campaña con forma de pirámide de base cuadrada. Un poste de metal colocado en el centro será el soporte de la tienda. Se cuenta con s pies cuadrados de loma para los cuatro lados del albergue y X es la longitud de la base. Demuestre que:

a) El volumen V de la tienda es $V = \dfrac{1}{6}x\sqrt{s^2 - x^4}$.

b) V alcanza un valor máximo cuando $x = \sqrt{2}$ veces la longitud del poste.

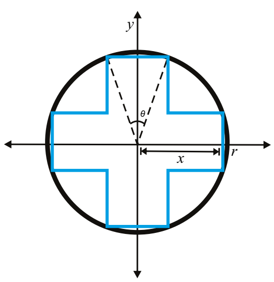
54.- Un embudo cónico, de radio de base R y altura H está lleno de agua. Una esfera pesada está sumergida en el embudo. ¿Cuál ha de ser el radio de la esfera para que el volumen de agua expulsada del embudo por la parte sumergida de la esfera, sea el mayor posible?

55.- Dado un cierto punto A en una circunferencia, trazar una cuerda BC paralela a la tangente en el punto A de modo que el área del triángulo ABC sea la mayor posible.

56.- Encuentre el radio de la base y la altura de un cono circunscrito a una esfera si el volumen del cono tiene el valor mínimo de los posibles y el radio de la esfera es igual a R.

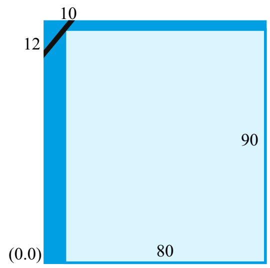
57.- Tres puntos A, B y C se hallan situados de modo que $< (ABC) = \pi/3$. Un automóvil sale del punto A, en el mismo momento del punto B parte un tren. El auto avanza hacia el punto B a 80 Kilómetros por hora, el tren se dirige hacia el punto C a 50 Kilómetros por hora. Teniendo en cuenta que la distancia $AB = 200Km$, ¿En qué momento, al comenzar el movimiento, será mínima la distancia entre el automóvil y el tren?

58.- Determinar el área máxima de una cruz simétrica inscrita en un círculo de radio r (ver la figura).



59.- Un punto luminoso está situado en la línea de los centros de dos esferas y se encuentra fuera de ellas. ¿Con qué posición del punto luminosos será máxima la suma de las áreas de las partes iluminadas de las superficies de las esferas?

60.- Un espejo plano de dimensiones 80 cm y 90 cm, se rompe por una esquina según una recta. De los dos trozos que quedan, el menor es un triángulo de catetos 10 cm y 12 cm, correspondientes a las dimensiones menor y mayor del espejo respectivamente. Hallar el área máxima del espejo rectangular que se puede obtener con el trozo mayor.

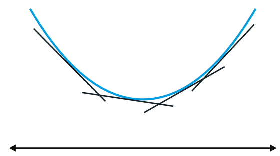


61.- Un trozo de madera de 12 dm de largo tiene forma de un tronco cono circular recto de diámetros 4 dm y $(4+h)$ dm en sus bases, donde $h \geq 0$. Determinar en función de h el volumen del mayor cilindro circular recto que se puede cortar de este trozo de madera, de manera que su eje coincida con el del tronco cono.

Concavidad y Convexidad 4.6

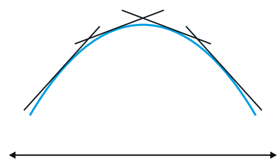
Definición: 4.41

Se dice que una función f es convexa (cóncava hacia arriba) en un punto $(a, f(a))$ si existe un entorno del punto $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ en el que la recta tangente a la curva está situada por debajo de la gráfica de la función.



Definición: 4.42

Se dice que una función f es cóncava (cóncava hacia abajo) en un punto $(a, f(a))$ si existe un entorno del punto $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ en el que la recta tangente a la curva esta situada por encima de la gráfica de la función.



Definición: 4.43

Diremos que una función es convexa en un intervalo (a,b) si lo es en todos sus puntos.

Definición: 4.44

Diremos que una función es cóncava en un intervalo (a,b) si lo es en todos sus puntos.

Definición: 4.45

Un punto $(a, f(a))$ es punto de inflexión de f, si f es cóncava a la izquierda de $(a, f(a))$ y convexa a su derecha o viceversa.

Si f es derivable en un punto de inflexión $(a, f(a))$, entonces la recta tangente a f en dicho punto atraviesa a la gráfica de f en $(a, f(a))$

Teorema: 4.44 **Condiciones suficientes de concavidad y convexidad**

Si f es una función con derivada segunda continúa en c, se verifica

a) $f''(c) > 0$, la gráfica de f es convexa en c.

b) $f''(c) < 0$, la gráfica de f es cóncava en c.

Teorema: 4.45 **Condición necesaria de punto de inflexión**

Si f es una función con derivada segunda continua en un punto c y f tiene en c un punto de inflexión, entonces $f''(c) = 0$.

Teorema: 4.46 **Condición suficiente de punto de inflexión**

Si f es una función con derivada tercera continua en un punto c y $f''(c) = 0$, si $f'''(c) \neq 0$ entonces c es un punto de inflexión de f.

Nota:
Entre los candidatos a puntos de inflexión, hay que tener en cuenta no solo aquellos puntos donde se anulan $f''(x)$ sino también donde no existen.

Ejemplo. 124

Estudiar la concavidad, convexidad y hallar los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 + 3x^2$
Solución. Calculamos sus derivadas de primer y segundo orden las cuales son:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x \quad \text{y} \quad f''(x) = 6x + 6$$

Como $f''(x) > 0$ en $x > -1$, f en convexa.
$f''(x) < 0$ en $x < -1$, f es cóncava y $x = -1$ es un punto de inflexión.

□

b) $f(x) = \sqrt[5]{3x-1}$
Solución. Calculamos sus derivadas de primer y segundo orden las cuales son

$$f'(x) = \frac{3}{5\sqrt[5]{(3x-1)^4}} \quad \text{y} \quad f''(x) = \frac{-12}{25\sqrt[5]{(3x-1)^9}}$$

Como $f''(x) \neq 0$ solo hay que considerar el punto $x = \frac{1}{3}$ del dominio en el que la función no es derivable, y, estudiar el signo de $f''(x)$ antes y después de él.
En $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ se cumple que $f''(x) > 0$, luego f es convexa y $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ se cumple que $f''(x) < 0$, luego f es cóncava. Por tanto $x = \frac{1}{3}$ es un punto de inflexión de f.

□

Las tres proposiciones anteriores se pueden generalizar en el siguiente resultado

Proposición: 4.16

Si f es una función que tiene derivadas continuas hasta orden n en un punto $x_0 \in D$ y $f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ entonces

a) Si n es par

i) $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f$ es convexa en x_0
ii) $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava en x_0

b) Si n es impar entonces x_0 es un punto de inflexión de f

Ejemplo. 125

Hallar los puntos de inflexion de $f(x) = \frac{2x^7}{7} + \frac{x^5}{5} + 25$

Solución. Se calcula la derivada de segundo orden $f''(x) = 12x^5 + 4x^3 = 4x^3(3x^2 + 1)$ que únicamente se anula en $x = 0$.
Hallando la derivada tercera $f'''(x) = 60x^4 + 12x^2$ cuyo valor en $x = 0$ es $f'''(0) = 0$. Al ser cero esta derivada se calculan las derivadas siguientes en $x = 0$ hasta encontrar la primera que no se anule, obteniéndose:

$$f^{(4)}(x) = 240x^3 + 24x \text{ en } x = 0 \text{ es } f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = 720x^2 + 24 \text{ en } x = 0 \text{ es } f^{(5)}(0) = 24$$

Como la primera derivada no nula en $x = 0$ es de orden impar, $n = 5$, se concluye que $x = 0$ es un punto de inflexión. □

4.6.1. Esquema para estudiar la curvatura de una función

1) Calculamos el dominio de la función.

2) Calculamos la derivada segunda de la función.

3) Calculamos los puntos donde la derivada segunda es cero, es decir, resolvemos la ecuación $f''(x) = 0$.

4) Estudiamos el signo que tiene la derivada segunda en cada uno de los intervalos en que queda dividida la recta real al considerar los puntos con derivada segunda cero y los puntos donde la función no es derivable o no es continua.

Ejemplo. 126

Determina la curvatura de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$.

Solución. El dominio de la función es $\mathbb{R}$. Por tanto, trabajaremos sobre todo el conjunto de los números reales.

Calculamos $f''(x) = 6x - 6$ y resolvemos la ecuación $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$. En el intervalo $(-\infty, 1)$ la segunda derivada de f es negativa entonces f es cóncava en este intervalo y en $(1, \infty)$ la segunda derivada de f es positiva así que f es convexa en este intervalo. □

4.6.2. Ejercicios

Determine los intervalos de concavidad

1.- $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

2.- $f(x) = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$

3.- $f(x) = 3x^5 - 20x^3$

4.- $f(x) = (x^3 - 1)^4$

5.- $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 17$

6.- $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 12x - 5$

7.- $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$

8.- $f(x) = \dfrac{3x + 1}{\sqrt{x}}$

9.- $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

10.- $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

11.- $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 5$

12.- $f(x) = (x-4)^2(x+2)^3$

13.- $f(x) = (x-1)^3(x-3)$

14.- $f(x) = (x-4)^{1/3} - 3$

15.- $f(x) = (x+2)^3 + 2$

16.- $f(x) = \dfrac{4x^2}{3x^2+1}$

17.- $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-9}$

18.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

a) Encuentra las condiciones que deben verificar los parámetros para que f alcance un máximo y un mínimo relativo.

b) Si se verifica el enunciado anterior, demuestra que en el punto medio del segmento que une los puntos donde se alcanzan el máximo y el mínimo relativo se alcanza un punto de inflexión.

19.- Hallar los puntos de inflexion de la siguiente función $f(x) = \dfrac{x^9}{9} + \dfrac{x^7}{7} + x$

20.- Determine los puntos de concavidad o convexidad de las siguientes funciones

a) $f(x) = x^5 + x$

b) $f(x) = -x^7 - x + 1$

Representación Gráfica de Funciones 4.7

Para elaborar gráficas de funciones se sugiere seguir los ocho pasos siguientes:

1. Establecer el dominio de la función.
2. Establecer la simetría de las gráficas. Es decir, determinar si es par, impar o ninguna.
3. Establecer las asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.
4. Establecer los puntos críticos.
5. Analizar la monotonía. Es decir, determinar los intervalos de crecimiento y los intervalos de decreci-miento.
6. Establecer los extremos relativos.
7. Analizar la concavidad. Es decir, determine los intervalos donde es cóncava hacia arriba y los interva-los donde es cóncava hacia abajo.
8. Establecer los Puntos de Inflexión.

Ejemplo. 127

Graficar $f(x) = \dfrac{x}{x^4+3}$

Solución. Siguiendo los pasos indicados tenemos:

Paso 1 Dominio. $Dom(f) = \mathbb{R}$

Paso 2 Simetría. $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^4+3} = -\dfrac{x}{x^4+3} = -f(x)$ por lo tanto f es impar.

Paso 3 Asíntotas.
Verticales: No hay por qué $x^4+3 \neq 0$
Horizontales: Calculamos límite al infinito

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^4+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}+\frac{3}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^3}}{1+\frac{3}{x^4}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

Note que idéntico resultado se obtendría tomando límite a menos infinito, es decir:

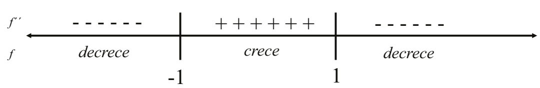
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^4+3} = 0$$

Por tanto el eje x ($y=0$) es asíntota horizontal tanto para el infinito positivo como para el infinito negativo.
Paso 4 Puntos Críticos.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^4+3-4x^4}{(x^4+3)^2} = -3\frac{x^4-1}{(x^4+3)^2} \\ &= -3\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x^4+3)^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que $x=1$ y $x=-1$ son puntos críticos.

Paso 5 Monotonía.
Analizando el signo de la primera derivada, se concluye que:



Paso 6 Extremos. Por el criterio de la primera derivada observamos que:

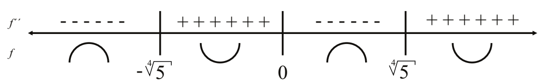
1. En $x=-1$ la primera derivada cambia de signo, de negativo a positivo, por tanto aquí existe un Mínimo local.

2. En $x=1$ la primera derivada cambia de signo, de positivo a negativo, por tanto aquí existe un Máximo local.

Paso 7 Concavidad: Debemos analizar la segunda derivada

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= D_x\left[-3\frac{x^4-1}{(x^4+3)^2}\right]\\
&= -3\frac{4x^3(x^4+3)^2-8x^3(x^4+3)(x^4-1)}{(x^4+3)^4} = -3\frac{4x^3(x^4+3)-8x^3(x^4-1)}{(x^4+3)^3}\\
&= -3\frac{4x^7+12x^3-8x^7+8x^3}{(x^4+3)^3} = -3\frac{-4x^7+20x^3}{(x^4+3)^3}\\
&= 12x^3\frac{(x^4-5)}{(x^4+3)^3} = 12\frac{(x^2-\sqrt{5})(x^2+\sqrt{5})}{(x^4+3)^3}\\
&= 12x^3\frac{(x-\sqrt[4]{5})(x+\sqrt[4]{5})(x^2+\sqrt{5})}{(x^4+3)^3}
\end{aligned}
$$

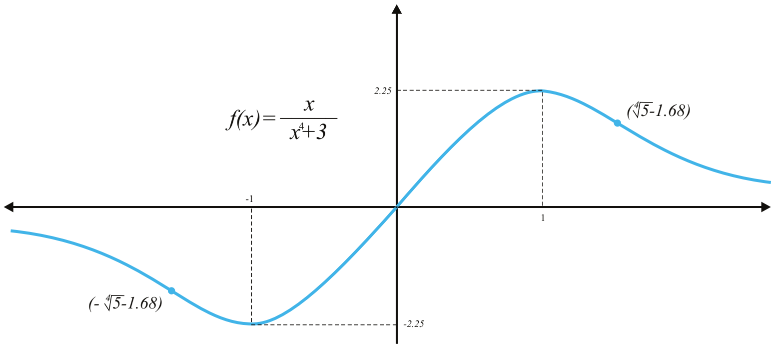
Entonces



Paso 8 Puntos de Inflexión
Como la segunda derivada cambia de signo tanto en $x = 0$, $x = \sqrt[4]{5}$ y $x = -\sqrt[4]{5}$ entonces existen tres puntos de inflexión: $\left(-\sqrt[4]{5}, f(-\sqrt[4]{5})\right)$, $(0,0)$ y $\left(\sqrt[4]{5}, f(\sqrt[4]{5})\right)$.

En conclusión:

x	$f'(x)$	$f''(x)$	f
$x < -\sqrt[4]{5}$	$-$	$-$	Decrece y cóncava hacia abajo
$x = -\sqrt[4]{5}$		0	Punto de inflexión
$-\sqrt[4]{5} < x < -1$	$-$	$+$	Decrece y cóncava hacia arriba
$x = -1$	0	$+$	Punto crítico. Mínimo local
$-1 < x < 0$	$+$	$+$	Crece y cóncava hacia arriba
$x = 0$		0	Punto de inflexión
$0 < x < 1$	$+$	$-$	Crece y cóncava hacia abajo
$x = 1$	0	$-$	Punto crítico. Máximo local
$1 < x < \sqrt[4]{5}$	$-$	$-$	Decrece y cóncava hacia abajo
$x = \sqrt[4]{5}$		0	Punto de inflexión
$x > \sqrt[4]{5}$	$-$	$+$	Decrece y cóncava hacia abajo



$\square$

Ejemplo. 128

Graficar $\dfrac{x^2}{x+1}$

Solución. Siguiendo los pasos indicados tenemos:
Paso 1 Dominio. $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

Paso 2 Simetría. $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{-x+1} = \dfrac{x^2}{-x+1}$, por lo tanto f no es par ni impar.

Paso 3 Asíntotas.
Verticales: Por inspección de la regla de correspondencia, en x = -1 la función no se define (división entre cero) por tanto aquí hay una asíntota vertical. Además:

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x+1} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2}{x+1} = -\infty$$

Horizontales: Calculamos límites al infinito

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{0} = \infty$$

Por tanto, no hay asíntota horizontal.

Asíntota Oblicua:
Para esta función se tiene:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

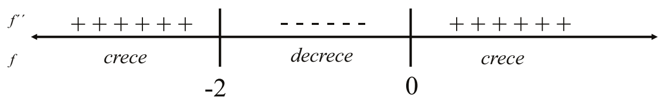
$$b = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2}{x+1} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

Por tanto, hay una asíntota oblicua $y = x - 1$

Paso 4 Puntos Críticos.

$$\begin{aligned} f'(x) = D_x\left[\frac{x^2}{x+1}\right] &= \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

por lo tanto, tenemos puntos críticos en: $x = 0$ y $x = -2$
Paso 5 Monotonía: Analizando el signo de f



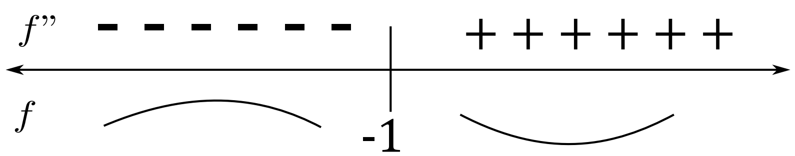
Paso 6 Extremos: por el criterio de la primera derivada observamos que:

1. En $x = -2$ la primera derivada cambia de signo, de positivo a negativo, por tanto aquí existe un Máximo local.
2. En $x = 0$ la primera derivada cambia de signo, de negativo a positivo, por tanto aquí existe un Mínimo local.

Paso 7 Concavidad: Debemos analizar la segunda derivada

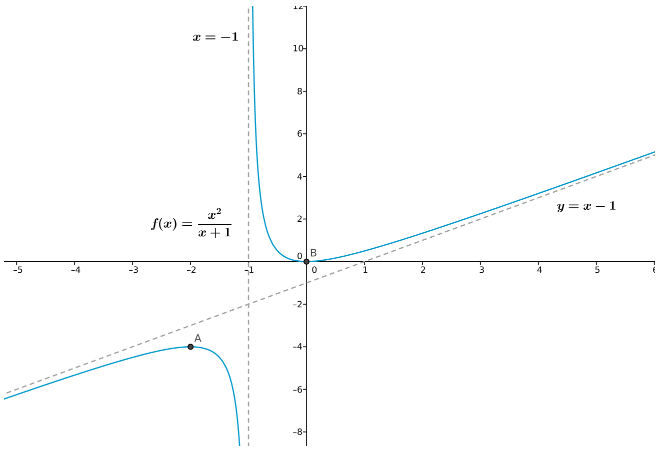
$$\begin{aligned} f''(x) = D_x\left[\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\right] &= \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x)2(x+1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(2x+2)(x+1) - (2x^2+4)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{2x^2+4x+2-2x^2-4x}{(x+1)^3} \\ &= \frac{2}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

Entonces



Paso 8 Puntos de Inflexión
No hay. Aunque la función f cambia de concavidad en $x = -1$, pero como no es punto del dominio, tiene asíntota, entonces no es un punto de inflexión En conclusión:

x	$f'(x)$	$f''(x)$	f
$x<-2$	$+$	$-$	Crece y cóncava hacia abajo
$x=-2$	0	$-$	Punto Crítico. Máximo Local
$-2<x<-1$	$-$	$-$	Decrece y cóncava hacia abajo
$-1<x<0$	$-$	$+$	Decrece y cóncava hacia arriba
$x=0$	0	$+$	Punto Crítico. Mínimo Local
$0<x<1$	$+$	$-$	Crece y cóncava hacia abajo
$x>0$	$+$	$+$	Crece y cóncava hacia arriba



□

4.7.1. Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 26, trace la gráfica de la función f determinando: los extremos relativos de f; los puntos de inflexión de la gráfica de f; los intervalos en los cuales f crece; los intervalos en los cuales f decrece; dónde la gráfica es cóncava hacia arriba; donde lo es hacia abajo; las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas, si hay alguna.

1.- $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

2.- $f(x)=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$

3.- $f(x)=3x^5-20x^3$

4.- $f(x)=(x^3-1)^4$

5.- $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+17$

6.- $f(x)=3x^3-3x^2+12x-5$

7.- $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-4}$

8.- $f(x)=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x}}$

9.- $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$

10.- $f(x)=x^3+3x^2-4$

11.- $f(x)=x^3+2x^2+x-5$

12.- $f(x) = (x-4)^2(x+2)^3$

13.- $f(x) = (x-1)^3(x-3)$

14.- $f(x) = (x-4)^{1/3} - 3$

15.- $f(x) = (x+2)^3 + 2$

16.- $f(x) = \dfrac{4x^2}{3x^2+1}$

17.- $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-9}$

18.- $f(x) = \dfrac{5x^2}{x^2-4}$

19.- $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

20.- $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$

21.- $f(x) = \dfrac{x^2+9}{x}$

22.- $f(x) = \sin 2x - \cos 2x; \quad x \in [-\frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi]$

23.- $f(x) = x\sqrt{25-x^2}$

24.- $f(x) = x - \tan x;\ x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi])$

25.- $f(x) = (3x-2x^2)e^x$

26.- $f(x) = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$

Bibliografía

[1] LEITHOLD, LOUIS. El cálculo, 7a ed. Oxford, 1994.

[2] LARSON, E., HOSTETLER, ROBERT R., EDWARDS, BRUCE H, Cálculo, vol 1. 8a ed. McGraw-Hill, 2004

[3] TOM M. APÓSTOL, Calculus Volumen I ed. Editorial Reverte 1978.

[4] MICHAEL SPIVAK. Cálculo Infinitesimal. Reverte Ediciones S.A., México D.F., 2 Reimpresión edition, 1996.

[5] ALBERTO CAMACHO. Cálculo Diferencial. Ediciones Díaz de Santos, S.A. Albazan, 2. 28037 Madrid. 2009.

[6] IGNACIO CANALS NAVARRETE. Cálculo diferencial e integral I. Editorial Reverte 2008.

[7] MAYNARD KONG. Calculo Diferencial. Pontificia Universidad Católica del Perú. Cuarta edición 2001.

[8] THOMAS, GEORGE B., Cálculo de una variable, 12a ed., 2010.

ACERCA DE LOS AUTORES

Jorge Rodríguez Contreras

Licenciado en Matemática de la Universidad del Atlántico (1977), Especialista en Matemática Avanzada de la Universidad Nacional (1984), Magíster en Matemática de la Universidad Autónoma de Barcelona (2000). Doctor en Matemática de la Universidad de Barcelona (2003). Director del Grupo de Investigación Sistemas Dinámicos y EDOS categorizado en A1 por Colciencias. Entre sus publicaciones se encuentran libros y artículos referentes a las Ecuaciones Diferenciales y Sistemas Dinámicos.

Angélica Arroyo Cabrera

Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad del Atlántico (2012), Especialista en Estadística Aplicada de la Universidad del Atlántico (2013), Magister en Ciencias Matemáticas de la Universidad del Atlántico (2016). Miembro del Grupo de investigación Sistemas Dinámicos y EDOS categorizado en A1 por Colciencias. Entre sus publicaciones se encuentran libros y artículos referentes a las Ecuaciones Diferenciales y Sistemas Dinámicos.

Lesly Salas Medina

Matemático de la Universidad del Atlántico (2008), Magíster en Estadística Aplicada Universidad del Norte (2011), docente de programas de Pregrado, Especialización y Maestría en las áreas de Cálculo, Didáctica de las Matemáticas, y Estadística aplicada a la Salud Pública. Miembro del grupo de Investigación Sistemas Dinámicos y EDOS categorizado en A1 por Colciencias. Entre sus publicaciones se encuentran artículos en cada una de las áreas en las que ha participado como docente, al igual que publicaciones que hacen referencia a las Ecuaciones Diferenciales y Sistemas Dinámicos.