3o. Y 4o. DE
ENSEÑANZA
MEDIA

geometria

ARTURO CARDONA V.

GEOMETRIA

ARTURO CARDONA VALENCIA
–Profesor de la Universidad de Antioquia.

GEOMETRIA

CURSOS TERCERO Y CUARTO

ENSEÑANZA MEDIA

SEPTIMA EDICION

CONTIENE EL DESARROLLO DEL PROGRAMA VIGENTE
DEL MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL

Editorial Bedout S.A.

Editorial Bedout – Medellín – Colombia

ADVERTENCIA.

En este curso de Geometría se ha procurado un total y completo desarrollo del programa oficial vigente para tratar de llenar y satisfacer las múltiples necesidades de profesores y alumnos.

Por consiguiente, el profesor encontrará en él todo el material necesario para desarrollar el programa conforme lo ordena el Ministerio de Educación. Además, como la Geometría es una materia que se estudia para aprender a pensar, en este curso se le ha dado mucha importancia al raciocinio, demostraciones y solución de problemas.

Como toda demostración va acompañada de un buen número de ejercicios de aplicación, tanto gráficos como numéricos, el profesor podrá perfectamente hacer la parcelación por lecciones diarias, lo que resultaría de gran utilidad para el alumno.

GEOMETRIA RACIONAL

INTRODUCCION

Cuerpo. Superficie. Línea. Punto.

Definiciones.– Se denomina cuerpo todo lo que ocupa un lugar en el espacio.

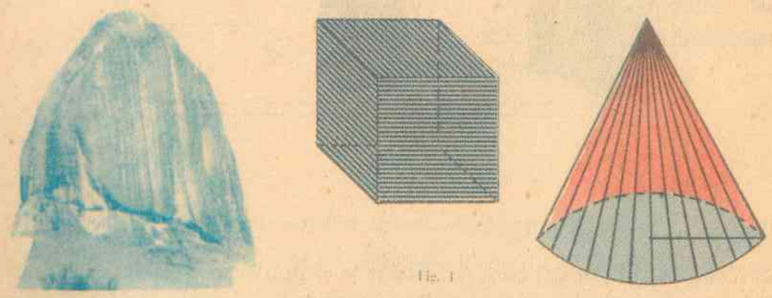


Fig. 1

Tanto el espacio como los cuerpos que lo ocupan se consideran como conjuntos constituídos por infinitos puntos.

Los cuerpos están limitados por superficies, las superficies, están limitadas por líneas y las líneas están limitadas por puntos.

Las superficies, las líneas y el punto no tienen realidad física fuera del cuerpo, pero para su estudio las aislamos y las concebimos por medio de consideraciones abstractas.

Los cuerpos tienen tres dimensiones: *largo, ancho y alto.* La última dimensión puede llamarse grueso, espesor o profundidad.

Las superficies tienen dos dimensiones: *largo y ancho.*

Las líneas tienen una dimensión: *la longitud.*

El punto no tiene dimensiones pero se puede concebir abstractamente como un punto ortográfico, la huella que deja la punta de un lápiz al caer verticalmente sobre una hoja de papel o el punto común entre dos rectas que se cortan.

Cuerpo geométrico.– Cuerpo geométrico es todo lo que ocupa un lugar en el espacio, esté o no ocupado por materia. Así por ejemplo, si de un estante que está lleno de libros retiramos uno de ellos, el lugar vacío que queda, es un cuerpo geométrico. Luego: tanto el estante como los libros que contiene como el lugar vacío son cuerpos geométricos (fig. 2).

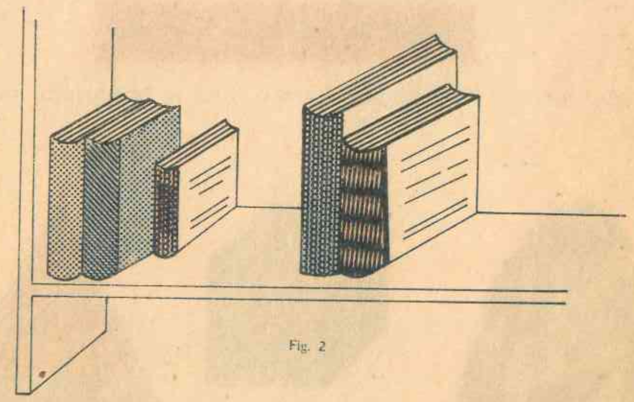


Fig. 2

Los cuerpos, las superficies, las líneas y el punto se consideran formas geométricas y su representación gráfica se hace por medio de las figuras geométricas.

Plano.– El plano se considera como un conjunto de infinitos puntos.

Todo plano contiene enteramente cualquier recta que pasa por dos de sus puntos.

Geometría.–La geometría es la ciencia que estudia la extensión de las figuras geométricas y las define teniendo en cuenta las relaciones que hay entre ellas, las cuales se pueden expresar mediante los axiomas, los postulados y los teoremas.

La geometría comprende: *la geometría plana y la geometría del espacio.*

La geometría plana estudia las propiedades de las figuras cuyos elementos están situados en un mismo plano.

La geometría del espacio estudia las propiedades de las figuras cuyos elementos no están situados en un mismo plano.

Axioma. Axioma es una verdad evidente por si misma.

Ejemplo: Por dos puntos pasa una recta y solo una.

Postulado. Postulado es una proposición que no se ha podido demostrar, pero que se admite como evidente, o supuesto que se establece para que sirva de fundamento a una demostración.

Ejemplo: Por un punto exterior a una recta solo se puede trazar una paralela a dicha recta.

Teorema. Teorema es una proposición cuya verdad necesita demostración para hacerla evidente.

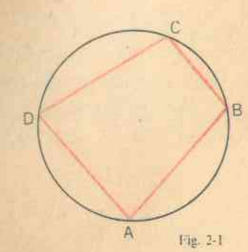


Fig. 2-1

Ejemplo: En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia los ángulos opuestos son suplementarios (fig. 2–1).

En el enunciado de un teorema se distinguen dos partes: la hipótesis que es lo que se da como cierto y la tesis que es lo que se demuestra.

Ejemplo:

Hipóteis: ABCD cuadrilátero inscrito.

Tesis: $<A + <C = 180^o$

$<D + <B = 180^o$

Teorema recíproco. Teorema recíproco es el que resulta de otro tomando la tesis por hipótesis y la hipótesis por tesis.

En el teorema anterior el recíproco es: si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son suplementarios, el cuadrilátero está inscrito en una circunferencia.

Corolario. Corolario es una verdad que se deduce fácilmente de otra.

Ejemplo: Todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes.

Problema.– Problema es una proposición encaminada a averiguar cantidades desconocidas cuando se conocen ciertos datos.

Los problemas pueden ser: *gráficos, numéricos o literales.*

Problemas gráficos.– Problemas gráficos son aquellos cuya respuesta es una gráfica.

Ejemplo: Construir un triángulo conociendo los tres lados.

Problemas numéricos.– Problemas numéricos son aquellos cuya respuesta es un número.

Ejemplo: Calcular la longitud de una circunferencia, conociendo su radio.

Problemas literales.– Problemas literales son aquellos cuya respuesta es una fórmula.

Ejemplo: Expresar la diagonal del cuadrado en función del lado.

Instrumentos.– Los instrumentos indispensables para el estudio de esta materia son: la regla graduada, el transportador, la escuadra de 60 grados, la escuadra de 45 grados y el compás (fig. 3).

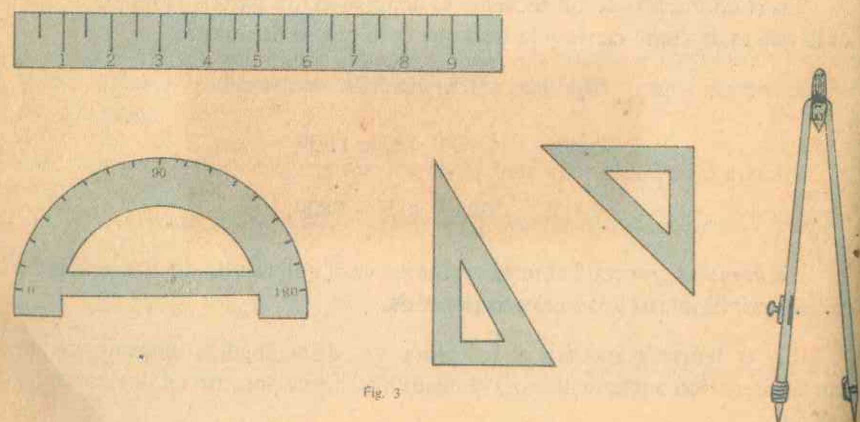


Fig. 3

UNIDAD 1

LINEA

Clases de líneas.– Generalmente se distinguen dos clases de líneas: *la línea recta y la línea curva.*

Línea recta.– Línea recta es un conjunto de infinitos puntos que conservan siempre una misma dirección y sentido.

Un hilo bien tirante, la intersección de dos planos, el cordel que sostiene una plomada, etc., nos dan una idea intuitiva de la línea recta (fig. 4).

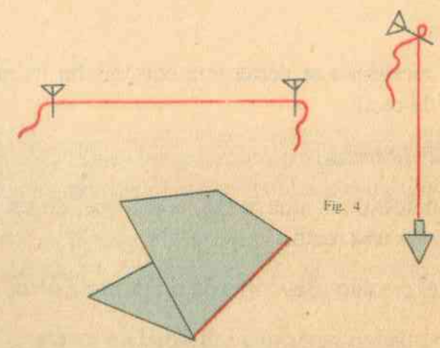


Fig. 4

La recta es ilimitada, por lo tanto, su longitud se considera indefinida; la recta MN (fig.5).

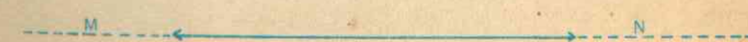


Fig. 5

Semirrecta.– Si se fija un punto en una recta indefinida, esta queda dividida en dos *semirrectas* que también se prolongan indefinidamente en sentido contrario.

El punto que se fija se llama origen de las semirrectas; el punto O (fig. 6).

Fig. 6

Las semirrectas se pueden limitar fijando puntos a uno y otro lado del origen; las semirrectas OA y OB (fig. 7).

Fig. 7

Segmento rectilíneo.– Si se fijan dos puntos en una recta indefinida, la parte de recta comprendida entre ellos, se denomina *segmento rectilíneo;* el segmento CD (fig. 8).

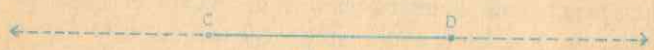


Fig. 8

El segmento rectilíneo se denomina con mucha frecuencia, simplemente recta o segmento de recta.

Propiedades de la recta.

Dos puntos determinan una recta, o sea que, de un punto a otro no se puede trazar más que una recta.

Una recta es el camino más corto de un punto a otro.

Por un punto pueden pasar una infinidad de rectas.

En una recta hay una infinidad de puntos.

Dos rectas diferentes solamente pueden tener un punto común o no tener ninguno.

Segmentos ordenados y segmentos orientados.– Toda recta se puede considerar en dos sentidos y, por lo tanto, se tendrá una ordenación diferente de sus puntos para cada sentido. Así por ejemplo, si en la fig. 9 un móvil recorre la recta *a* en la dirección indicada por la flecha, el punto A es anterior al punto B y cualquier punto que ocupe el móvil entre A y B, es posterior a A y anterior a B. Si el móvil se mueve en dirección contraria a la indicada por la

flecha, sucede todo lo contrario. Como el punto A es anterior al punto B, el segmento AB tiene sentido contrario al segmento BA.

Fig. 9

El punto donde empieza un segmento se llama origen y el punto donde termina se llama extremo. En la fig. 9, el origen de la recta AB es A y el extremo es B. En la misma figura el origen de la recta BA es B y el extremo es A.

Cuando en un segmento de recta se establece diferencia entre el origen y el extremo, dichos segmentos se llaman: segmentos ordenados u orientados.

Congruencia segmentaria.– Dos segmentos de recta son iguales o congruentes cuando al colocar el uno sobre el otro coinciden en todos sus puntos.

Los segmentos AB y CD de la fig. 10, son congruentes: AB ≅ CD.

Fig. 10

Todo segmento de recta es congruente consigo mismo; así AB ≅ AB o AB ≅ BA. Todos los segmentos de rectas iguales son congruentes.

Operaciones con segmentos rectilíneos.– Con los segmentos rectilíneos se pueden efectuar todas las operaciones que se efectúan con los números naturales.

Estas operaciones se pueden efectuar gráficamente o por medio del cálculo, teniendo en cuenta los números que representan la medida de los segmentos.

EJERCICIOS GRAFICOS.

Suma de segmentos.– Sumar los segmentos a, b y c.

Se toma una recta indefinida y a partir de un punto cualquiera se trasladan los segmentos que se van a sumar, uno a continuación del otro, de tal modo que el extremo del primero coincida con el origen del segundo, el extremo del segundo coincida con el origen del tercero, y así sucesivamente; el segmento AB (fig. 11) representa la suma de los segmentos dados.

Fig. 11

Sustracción de segmentos. Restar del segmento AB el segmento CD.

Sobre el segmento AB se traslada el segmento CD de modo que A coincida con C; el segmento sobrante DB, es la diferencia entre los dos (fig. 12).

Fig. 12

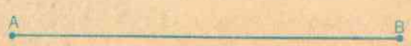
Multiplicación de un segmento por un número. Multiplicar el segmento *a* por 5.

Se toma una recta indefinida y a partir de un punto cualquiera se traslada a ella el segmento *a* las veces que indica el número 5.

El segmento AB (fig. 13), es 5 veces mayor que el segmento *a*.

Fig. 13

División de un segmento entre un número.– Dividir el segmento AB entre 4.



Con el compás o con una regla graduada se toma un segmento que esté contenido 4 veces en el segmento AB.

El segmento AC (fig. 14), es la cuarta parte del segmento AB.

Fig. 14

EJERCICIOS

1o. Trazar con la regla los segmentos de recta que tengan las dimensiones siguientes:

1.	12 cm	3.	25 mm
2.	1.5 dm.	4.	0.05 m.

2o. Trazar con la regla una longitud de 60 m. a una escala de 3 mm por metro.

3o. Calcular gráficamente la suma de tres segmentos que miden respectivamente 1.5, 2.8, y 3.7 cm.

4o. Un segmento mide 3 cm. ¿Cuál es la longitud de un segmento 5 veces mayor, en mm.?

5o. Calcular en mm. la quinta parte de un segmento de 3 dm. de longitud.

6o. Expresar gráficamente un segmento de 3.5 km. a una escala de 3.5 mm. por km.

7o. Expresar gráficamente los segmentos que resultan al multiplicar el segmento AB que mide 4 cm. por los números 2, 2.5, 2.75 y 3.

8o. Expresar gráficamente los segmentos que resultan al multiplicar el segmento AB que mide 2 cm. por los números 3/2, 4/3 y 5/4.

9o. Expresar gráficamente los segmentos que resultan al multiplicar el segmento AB que mide 12 cm. por los números 1/2, 3/4, 5/8 y 9/10.

10o. Calcular en metros la suma de los segmentos cuyos valores respectivos son:

1. 3.5 cm., 0.07 m. y 5.5 dm.
2. 35 mm., 0.009 Dm. y 1.05 m.

11o. Calcular en decímetros la suma de los segmentos cuyos valores respectivos son:

1. 3.7 m., 0.05 Dm. y 35.5 cm.
2. 3/4 de m., 5/4 de dm. y 7/8 de cm.

12o. Calcular en metros la diferencia entre los segmentos cuyos valores respectivos son:

1. 3.5 dm. y 12.5 cm.
2. 3/5 de Dm. y 7/8 de dm.

13o. Calcular en centímetros la diferencia entre los segmentos cuyos valores respectivos son:

1. 35 m. y 0.55 Dm.
2. 8/9 de dm. y 9/8 de mm.

14o. Si un segmento AB que mide 25 m. se recorta a partir de A en 1/8 de su longitud y a partir de B se prolonga en 2/3 de su longitud; ¿cuál es la medida del segmento que resulta?

15o. Si un segmento AB que mide 40 cm. se recorta a partir de A en 1/5 de su longitud y a partir de B hacia la izquierda se recorta en 3/8 de su longitud; ¿cuál es la medida del segmento que resulta?

16o. Un segmento AB mide 50 cm. Si a partir de A se recorta en 5/8 de su longitud y el resultado se multiplica por 15, ¿cuál es la longitud del segmento que resulta?

17o. Un segmento AB mide 7/8 de m. Si a partir de B se prolonga en 3/16 de su longitud y el resultado se multiplica por 3/4, ¿cuánto mide el segmento que resulta?

UNIDAD 2

ANGULO

Definiciones. El plano se considera como un conjunto de infinitos puntos.

Si en un plano se determina un punto y, a partir de él, se trazan semirrectas en todo sentido, el plano queda dividido en varias regiones o porciones cada una de las cuales podemos denominar como ángulo.

Por consiguiente:

Angulo es un conjunto de infinitos puntos limitado por dos semirrectas del mismo origen.

El origen común se llama vértice y las dos semirrectas, lados del ángulo.

En el plano M (fig. 15), se determina el punto O y se trazan las semirrectas:

OA, OB, OC, OD.

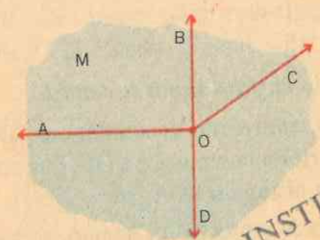


Fig. 15

Las regiones o porciones AOB, BOC, COD, DOA, son ángulos.

Los ángulos se designan por una letra mayúscula colocada en el vértice; por tres letras mayúsculas colocada una en el vértice y una en cada lado; por una letra minúscula o un número colocado dentro del ángulo (fig. 16).

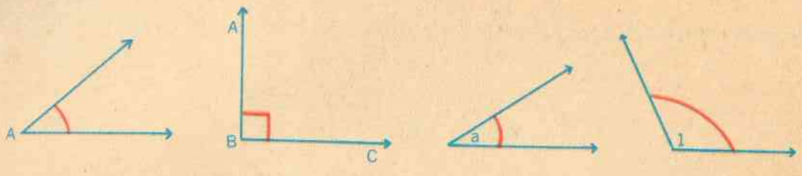


Fig. 16

Generación de los ángulos. Un ángulo se considera generado por dos semirrectas del mismo origen de las cuales una permanece fija en el plano y la otra gira alrededor del origen.

La recta que gira está generando en todo momento una infinidad de semirrectas del mismo origen, por consiguiente, podemos fenir que:

Angulo es la porción de plano formado por un conjunto de semirrectas del mismo origen.

Si en la figura 17, se supone que las dos semirrectas OA y OB coincidén, el ángulo es nulo. Al girar la semirrecta OB alrededor de su origen hasta obtener la posición OB, engendra el ángulo AOB.

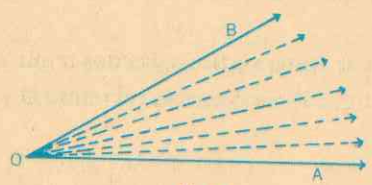


Fig. 17

Clasificación de los ángulos según su sentido.

Cualquiera de las semirrectas generadas por OB (fig. 17), es posterior a la semirrecta OA y anterior a la semirrecta OB. Por consiguiente, el ángulo AOB tiene sentido diferente al ángulo BOA.

La semirrecta donde empieza un ángulo, se llama lado inicial y la semirrecta donde termina, se llama lado final.

Los ángulos en los cuales se hace diferencia entre el lado inicial y el lado final, se llaman: *ángulos ordenados u orientados.*

Si en la generación de los ángulos la semirrecta generadora se dirige en sentido contrario a las agujas del reloj, los ángulos generados son positivos y si, por el contrario, la semirrecta generadora se dirige en el mismo sentido de las agujas del reloj, los ángulos generados son negativos (figs. 17-1 y 17-2).

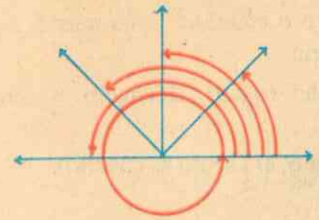


Fig. 17-1

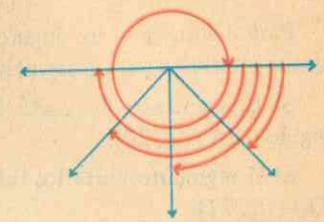


Fig. 17-2

Los ángulos orientados tienen su aplicación principalmente en trigonometría.

Magnitud de un ángulo. La magnitud o valor de un ángulo no depende de la longitud de sus lados, sino de la mayor o menor abertura que hay entre ellos (fig. 18).

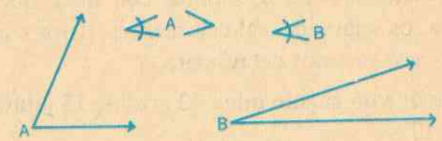


Fig. 18

Angulo convexo y ángulo cóncavo. Si en un plano cualquiera M se trazan dos semirrectas del mismo origen que no sean opuestas, el plano queda dividido en dos regiones o porciones de distinto tamaño (fig.19).

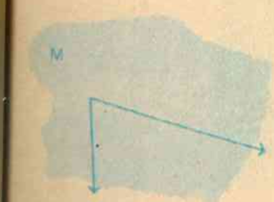


Fig. 19

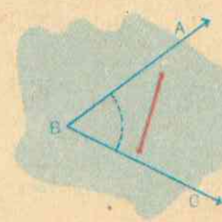


Fig. 20

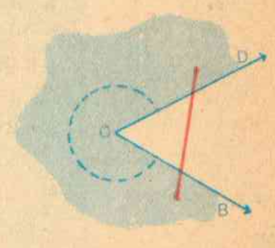


Fig. 21

La porción menor se denomina ángulo convexo y la porción mayor se denomina ángulo cóneavo.

Para distinguir si un ángulo es convexo o cóncavo, basta unir dos de sus puntos interiores por un segmento cualquiera.

Si el segmento no corta los lados del ángulo, el ángulo es convexo. Angulo CBA (fig. 20).

Si el segmento corta los lados del ángulo, el ángulo es cóncavo. El ángulo BOD (fig. 21).

Nota: En este texto solo se trata de ángulos convexos.

Medida de los ángulos. Medir un ángulo es compararlo con otro que se toma como unidad.

La unidad es el grado sexagesimal que equivale a $\frac{1}{360}$ del ángulo de una vuelta, o el grado centesimal que equivale a $\frac{1}{400}$ del ángulo de una vuelta.

El grado sexagesimal se divide en 60 minutos y el minuto se divide en 60 segundos.

Los grados sexagesimales se indican con un pequeño cero, los minutos con un acento y los segundos con dos acentos. Estos símbolos se colocan a la derecha y en la parte superior del número.

Para indicar que un ángulo mide 42 grados, 13 minutos y 17 segundos, se escribe: $42^o 13' 17''$.

los grados centesimales se indican por medio de una g pequeña que se coloca a la derecha del número y en la parte superior.

Para facilitar la reducción de grados sexagesimales a centesimales y de centesimales a sexagesimales se dan las siguientes relaciones:

a	360^o	corresponden	400^g
a	90^o	"	100^g
a	45^o	"	50^g
a	1^o	"	$\frac{50^g}{45}$ o $\frac{10^g}{9}$

Según lo anterior para reducir cualquier número de grados sexagesimales a centesimales, basta multiplicar el número de grados por $\frac{10}{9}$.

Ejemplo: Reducir 35 grados sexagesimales a centesimales.

Solución.

$$35 \times \frac{10}{9} = \frac{350}{9}$$

$$350 : 9 = 38^g, 88$$

R. $38^g,88$

Nota: Cuando en grados sexagesimales hay minutos y segundos, se hacen las reducciones del caso.

a	400^g	corresponden	360^o
a	100^g	"	90^o
a	50^g	"	45^o
a	1^g	"	$\frac{45^o}{50}$ o $\frac{9^o}{10}$

Según lo anterior podemos reducir cualquier número de grados centesimales a sexagesimales; basta multiplicar el número de grados por $\frac{9}{10}$.

Ejemplo: Reducir 42 grados centesimales a sexagesimales.

Solución.

$$42 \times \frac{9}{10} = \frac{378}{10}$$

$$378 : 10 = 37^o 48'$$

R. $37^o 48'$

Los ángulos se miden con el transportador que es un semicírculo de doble graduación de 0^o a 180^o (fig. 22).

Según la (fig. 22), para medir un ángulo se coloca el centro del transportador en el vértice del ángulo teniendo en cuenta que uno de los lados coincida con el diámetro.

El otro lado indica el número de grados que es la medida del ángulo.

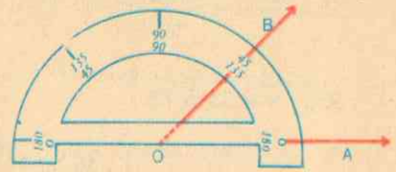


Fig. 22

Medida en radianes. En esta medida la unidad es el radián.

Radián. Radián es un arco de círculo cuya longitud es equivalente a la de un radio del mismo círculo. Luego:

Radián es la medida de arco correspondiente a un radio.

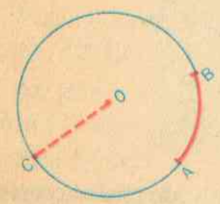


Fig. 22-1

En la figura 22–1, el arco AB equivale a la longitud del radio OC. A este arco se le llama radián y está contenido en la circunferencia 2π veces, por lo tanto, un ángulo de 360° equivale 2π radianes o sea 6.2832 radianes.

Un radián equivale a 57.2958° ó 57°17' 44."8

Un grado equivale a 0.0174533 radianes.

Relaciones entre grado sexagesimal y el radián. En todos los sistemas los arcos son proporcionales a sus medidas, por lo tanto, el paso de un sistema de unidades a otro se reduce a establecer una simple proporción.

Para facilitar la reducción de grados sexagesimales a radianes y viceversa, se dan las siguientes equivalencias:

a 360° corresponde 2π r.

a 180° " π r.

a 90° " $\frac{\pi}{2}$ r.

a 60° " $\frac{\pi}{3}$ r.

a 45° corresponde $\frac{\pi}{4}$ r.

a 30° " $\frac{\pi}{6}$ r.

a 1° " $\frac{\pi}{180}$ r.

Valor arco de un grado: $\frac{\pi}{180}$ radián.

Valor arco de n grados: $\frac{\pi}{180}$ radián x n.

Valor arco de un radián: $\frac{180}{\pi}$ grados.

Valor arco de ω radianes: $\frac{180}{\pi}$ grados x ω.

Para reducir cualquier número de grados sexagesimales a radianes, basta multiplicar el número de grados por: $\frac{\pi}{180}$.

Ejemplo: Reducir 25 grados sexagesimales a radianes.

Solución.

$$25 \times \frac{\pi}{180}$$

$$\frac{25 \times 3.14}{180} = 0.4361 \text{ radianes.}$$

Nota: Si el arco consta de grados, minutos y segundos para expresarlo en radianes, se reduce a segundos lo mismo que los 180° de la fórmula.

Para reducir cualquier número de radianes a grados sexagesimales, basta multiplicar el número de radianes por: $\frac{180}{\pi}$.

Ejemplo: Reducir 1.75 radianes a grados sexagesimales.

Solución.

$$1.75 \times \frac{180}{\pi}$$

$$\frac{1.75 \times 180}{3.14} = 100^\circ\ 19'\ 6''.\frac{1}{2}$$

Clasificación de ángulos. Los ángulos se clasifican de acuerdo con su amplitud y de acuerdo con su posición.

De acuerdo con su amplitud, los ángulos reciben los siguientes nombres:

Angulo agudo, ángulo recto, ángulo obtuso, ángulo plano, ángulo de una vuelta, ángulos complementarios y ángulos suplementarios (fig. 23).

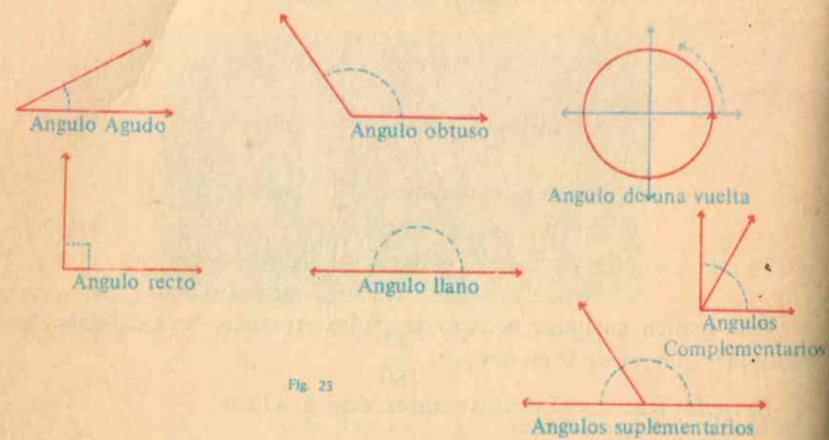


Fig. 23

Angulo agudo. Angulo agudo es el que mide menos de 90º.

Angulo recto. Angulo recto es el que mide 90º.

Angulo obtuso. Angulo obtuso es el que mide más de 90º y menos de 180º.

Angulo plano. Angulo plano es el que mide 180º.

Angulo de una vuelta. Angulo de una vuelta es el que mide 360º.

Angulos complementarios. Angulos complementarios son dos ángulos cuya suma es igual a un recto.

Angulos suplementarios. Angulos suplementarios son dos ángulos cuya suma es igual a dos rectos.

De acuerdo con su posición, los ángulos reciben los siguientes nombres:

Angulos opuestos por el vértice, ángulos adyacentes y ángulos colaterales (fig. 24).

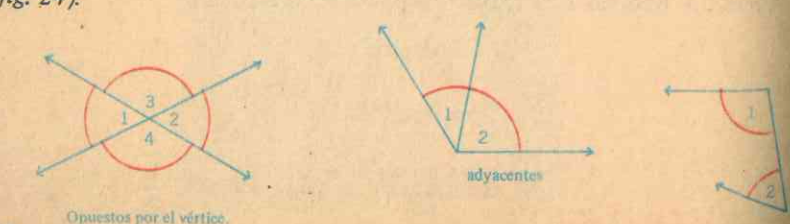


Fig. 24

Angulos opuestos por el vértice son los que tienen el mismo vértice y los lados del uno son la prolongación de los lados del otro.

Angulos adyacentes son los que tienen un mismo vértice y un lado común.

Angulos colaterales son los que tienen un lado común.

Congruencia angular. Si dos ángulos tienen la misma medida, se llaman ángulos congruentes. Los ángulos ABC y DEF (fig. 25).

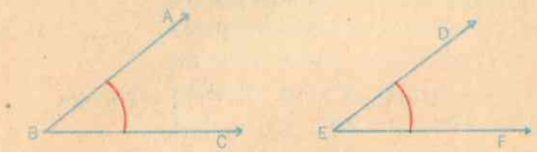


Fig. 25

$\measuredangle ABC = \measuredangle DEF$

Luego: $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$.

Teniendo en cuenta que la igualdad de dos ángulos y su congruencia significan lo mismo se puede, perfectamente, sustituir uno de los enunciados por el otro.

Propiedades de los ángulos. Los ángulos que tienen el mismo complemento son congruentes.

Los ángulos que tienen el mismo suplemento son congruentes.
Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
Todos los ángulos rectos son congruentes.
Todos los ángulos de lados colineales son congruentes.
Todos los ángulos de una vuelta son congruentes.
Los suplementos de ángulos congruentes son congruentes.
Los complementos de ángulos congruentes son congruentes.

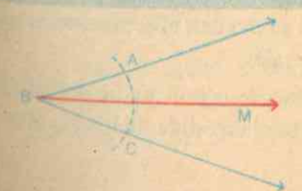


Fig. 26

Bisectriz de un ángulo. Bisectriz de un ángulo es la semirrecta interior que, partiendo del vértice, divide el ángulo en dos ángulos congruentes. La bisectriz BM (fig. 26).

TEOREMA. Si dos ángulos son adyacentes suplementarios sus bisectrices forman un ángulo recto.

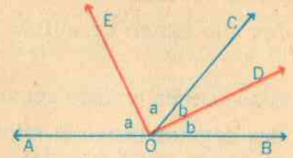


Fig. 26-1

Hipót.: $\measuredangle$ AOC + $\measuredangle$ COB = 2 rectos
OE y OD bisectrices
Tesis : $\measuredangle$ EOD = 1 recto.

Tenemos:

$2a + 2b = 2$ rectos $\qquad \measuredangle a + \measuredangle b = \measuredangle EOD$

$2(a + b) = 2$ rectos

$a + b = 1$ recto

Luego: EOD = 1 recto.

TEOREMA. Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

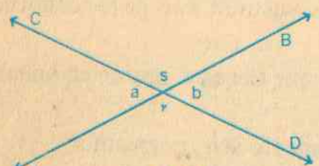


Fig. 26-2

Hipót.: $\measuredangle$ a y $\measuredangle$ b opuestos por el vértice.
Tesis: $\measuredangle a \cong \measuredangle b$.

Tenemos:

$\measuredangle a + \measuredangle s = 2$ rectos

$\measuredangle b + \measuredangle s = 2$ rectos.

Los ángulos a y b tienen como suplemento el mismo ángulo s.

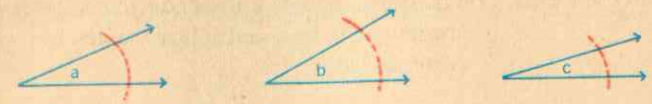
Luego: $< a \cong < b$.

Operaciones con los ángulos. Con los ángulos se pueden efectuar todas las operaciones que se efectúan con los números naturales.

Estas operaciones pueden efectuarse gráficamente o por medio del cálculo, teniendo en cuenta los números que representan la medida de los ángulos.

EJERCICIOS GRAFICOS.

Suma de ángulos. Sumar los ángulos a, b y c.



Se toma una recta indefinida y haciendo centro en un punto cualquiera A se describe un arco. Con la misma medida y haciendo centro en los vértices de los ángulos, que se van a sumar, se describen arcos que corten los lados de los ángulos. Tomando una a una la medida de dichos arcos se trasladan al arco trazado en la recta, uno a continuación del otro hasta obtener el punto C. Al unir el punto C con el punto A se obtiene el ángulo BAC que representa la suma de los ángulos dados (26–3).

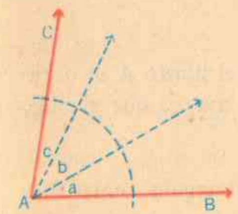
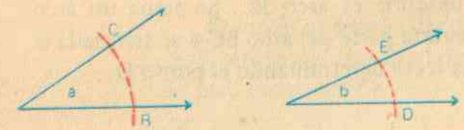


Fig. 26-3

Sustracción de ángulos. Restar del ángulo *a* el ángulo *b*.



Se toma una recta indefinida y haciendo centro en un punto cualquiera A se describe un arco. Con la misma medida y haciendo centro en los vértices de los ángulos, que se van a restar, se determinan los arcos BC y DE. Se toma el arco BC del ángulo mayor y se translada al arco trazado en la recta, luego se toma el arco DE y haciendo centro en C se determina el punto D.

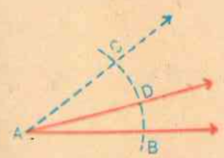


Fig. 26-4

Al unir el punto D con el punto A se obtiene el ángulo BAD que es la diferencia entre los ángulos dados (fig. 26-4).

Multiplicación de un ángulo por un número. Multiplicar el ángulo *a* por 5.

Se toma una recta indefinida y haciendo centro en un punto cualquiera A se describe un arco. Con la misma medida y haciendo centro en el vértice, del ángulo que se va a multiplicar, se describe un arco que corte sus lados.

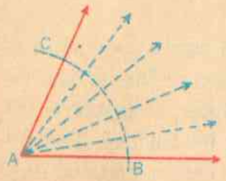


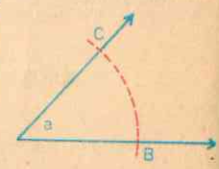
Fig. 26-5

Se toma la medida de este arco y se translada al arco trazado en la recta las veces que indica el número, uno a continuación del otro, hasta obtener el punto C.

Al unir el punto C con el punto A se obtiene el ángulo BAC que es 5 veces mayor que el ángulo *a* (fig. 26–5).

División de un ángulo entre un número. Dividir el ángulo *a* entre 4.

Se toma una recta indefinida y haciendo centro en un punto cualquiera A se describe un arco. Con la misma medida y haciendo centro en el vértice, del ángulo que se va a dividir se describe el arco BC. Se toma un arco equivalente a la cuarta parte del arco BC y se translada al arco trazado en la recta determinando el punto D.



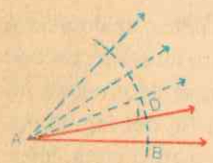


Fig. 26-6

Al unir el punto D con el punto A se obtiene el ángulo BAD que es la cuarta parte el ángulo *a*. (Fig. 26–6).

CONSTRUCCIONES.

1o. Trazar la bisectriz al ángulo ABC (fig. 26–7).

Haciendo centro en el vértice B se traza un arco cualquiera AC que corte los lados del ángulo, luego haciendo centro en los puntos A y C se trazan arcos que al cortarse determinan el punto M.

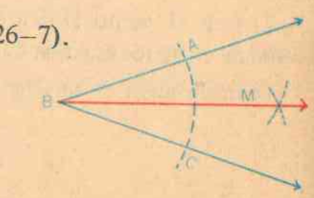


Fig. 26-7

Al unir el punto B con el punto M se tiene la bisectriz pedida.

2o: Construír un ángulo congruente a un ángulo dado ABC (fig. 27).

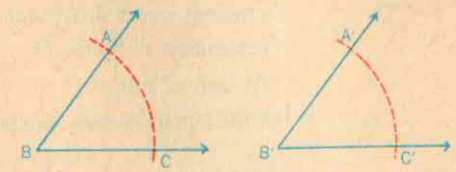


Fig. 27

Primer caso. Con el compás.

Haciendo centro en el vértice B se traza un arco cualquiera AC que corte los lados del ángulo, y en una recta indefinida se toma el punto B' y a partir de él y con la misma medida se traza otro arco A' C' igual a AC.

Al unir el punto B' con A' se tiene el ángulo pedido.

Segundo caso. Con el transportador (fig. 27-1).

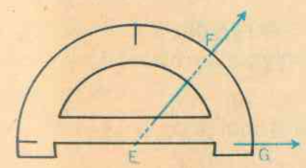


Fig. 27-1

Se mide el ángulo dado y luego se coloca el centro del transportador en un punto E de una recta indefinida, teniendo en cuenta que la recta coincida con el diámetro, luego se marca el punto F frente al número de grados que corresponde a la medida del ángulo.

Al unir el punto E con F, se tiene el ángulo pedido.

3o. Trazar la bisectriz de un ángulo cuyo vértice no se conoce (fig. 27–2).

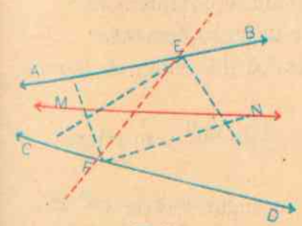


Fig. 27-2

Primer caso. Las rectas concurrentes AB y CD forman el ángulo dado.

Se traza una secante cualquiera EF que al cortar las dos rectas forma cuatro ángulos interiores.

Trazando las bisectrices de estos cuatro ángulos se determinan los puntos M y N.

Al unir el punto M con el punto N se tiene la bisectriz pedida.

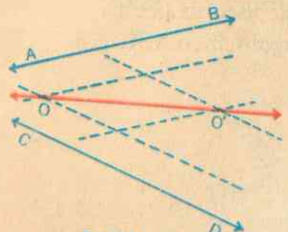


Fig. 27-3

Segundo caso. A una distancia cualquiera pero igual se trazan a las rectas AB y CD paralelas que al cortarse determinan el punto O. Luego aumentando un poco la distancia se trazan otras dos paralelas que al cortarse determinan el punto O´.

Al unir el punto O con el punto O´se tiene la bisectriz pedida (fig. 27–3).

PROBLEMAS GRAFICOS

3o. Construir un ángulo que sea el doble de un ángulo dado.
4o. Construir un ángulo que sea igual a la suma de tres ángulos dados.
5o. Construir un ángulo que sea igual a la diferencia de dos ángulos dados.
6o. Construir un ángulo que sea cinco veces mayor a un ángulo dadq.
7o. Construir un ángulo que sea la cuarta parte de un ángulo dado.
8o. Empleando el transportador, construir los siguientes ángulos:

1.	30 grados	3.	105 grados
2.	75 »	4.	135 »

9o. Empleando solamente una regla trazar aproximadamente los siguientes ángulos:

1.	15 grados	3.	90 grados
2.	45 »	4.	120 »

Comprobar con el transportador.

EJERCICIOS

1o. Calcular el valor de un ángulo que es el triple de 12^0 5' 18".
2o. Calcular el valor de un ángulo que es 5 veces 3º25' 35".
3o. Calcular el valor de un ángulo que es 1/6 parte de 37º 45' 18".
4o. Calcular el valor de un ángulo que es el triple de su complemento.
5o. Calcular el valor de un ángulo que es el triple de su suplemento.
6o. Calcular el valor de dos ángulos suplementarios que están en la relación de 5 a 3.

7o. Calcular el valor de dos ángulos cuya suma es de 80^0 y su relación es de 3 a 5.

8o. Si dos rectas se cortan y el valor de uno de los ángulos es de 35^0 45'. Calcular el valor de los tres ángulos restantes.

9o. Calcular el valor de dos ángulos complementarios sabiendo que uno es el doble del otro.

10o. Calcular el valor de dos ángulos suplementarios sabiendo que uno es cinco veces el otro.

11o. Calcular el complemento de los siguientes ángulos:

1.	75º 25'	3.	2º 25' 15"
2.	15º 28'	4.	65º 2' 3"

12o. Calcular el suplemento de los siguientes ángulos:

1.	135º	3.	120º 30' 30"
2.	95º 25'	4.	112º 35' 25"

13o. Calcular el número de grados del ángulo formado por las manecillas del reloj a las $2^1/4$.

14o. Un ángulo tiene 36^0 más que su suplemento. Calcular los dos ángulos.

15o. Un ángulo tiene 12^0 más que su complemento. Calcular los dos ángulos.

16o. El suplemento de un ángulo es cinco veces el doble del ángulo menos 30º. Calcular el ángulo.

17o. Un ángulo es cuatro veces el triple de su suplemento menos 40º. Calcular el suplemento.

18o. Si a partir del punto O se trazan las semirrectas OA, OB, OC, OD y OE que determinen ángulos congruentes, ¿cuál será el número de grados de cada uno?

19o. Si el complemento del ángulo X es 3X, calcular el valor del ángulo X.

20o. Si el suplemento del ángulo 2X es 6X, calcular el valor del ángulo X.

UNIDAD 3

PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO.

Posiciones relativas de un punto y una recta.– Un punto y una recta pueden ocupar las siguientes posiciones relativas:

1. El punto está contenido en la recta (fig. 28).
2. El punto está fuera de la recta (fig. 29).

Fig. 28

Fig. 29

Posiciones relativas de dos rectas en el plano.– Dos rectas en el plano pueden ocupar las siguientes posiciones relativas:

1. Tener un punto común. En este caso las rectas se intersecan (fig. 30).
2. No tener ningún punto común. En este caso las rectas son paralelas (fig. 31).

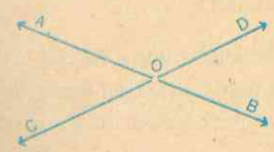


Fig. 30

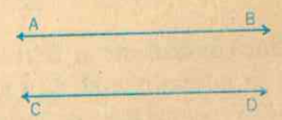


Fig. 31

RECTAS PERPENDICULARES.

Definiciones.– Dos rectas son perpendiculares cuando al cortarse forman cuatro ángulos congruentes, siendo en este caso ángulos rectos (fig. 32).

$$< AOC \cong < COB \cong BOD \cong < DOA = 90^0$$

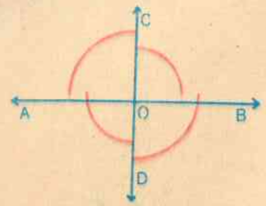


Fig. 32

Con mucha frecuencia se emplea el símbolo ⊥ para reemplazar la palabra perpendicular.

Cuando dos rectas al cortarse no son perpendiculares, se dice que son oblicuas.

TEOREMA.– Por un punto exterior a una recta se puede trazar una perpendicular a dicha recta y solo una.

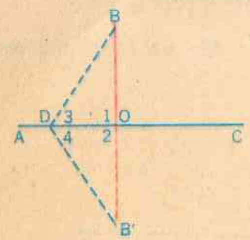


Fig. 33

Hipót.: B punto exterior a AC

Tesis: BO ⊥ AC.

Prolongamos BO y tomamos OB' ≅ BO y trazamos BD y DB'.

Si se dobla la parte superior de la figura sobre la parte inferior, OBD coincidirá con OB'D, por lo tanto:

$\angle 1 \cong \angle 2$ por construcción

$\angle 3 \cong \angle 4$ por coincidir.

Por consiguiente si la recta BD fuera perpendicular a AC, el $\angle 3$ sería recto lo mismo que el $\angle 4$ y la línea BDB′ tendría que ser recta, lo que es imposible puesto que por los puntos B y B′ no puede pasar más que una recta que es BB′. Luego BO ⊥ AC

Distancia de un punto a una recta.– La distancia de un punto a una recta es la perpendicular trazada de dicho punto a la recta.

Mediatriz de un segmento.– Se llama mediatriz de un segmento a la perpendicular levantada en el punto medio del segmento.

APLICACIONES

1. Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los extremos de un segmento dado AB.

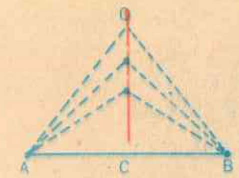


Fig. 34

El lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los extremos del segmento AB, es la mediatriz OC del segmento AB (fig. 34).

TEOREMA.– Toda línea poligonal convexa es menor que cualquier otra línea envolvente que termine en sus extremos.

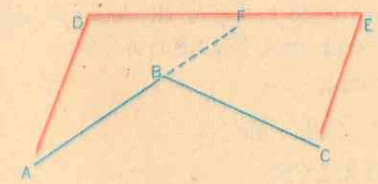


Fig. 35

Hipót.: ABC, línea envuelta

ADEC, línea envolvente

Tesis: ABC < ADEC.

Se prolonga AB hasta encontrar el punto F.

Siendo la recta la distancia menor entre dos puntos, tenemos:

$$AB + BF < AD + DF$$
$$BC < BF + FE + EC.$$

Sumando ordenadamente estas dos desigualdades, nos da:

$$AB + BF + BC < AD + DF + BF + FE + EC.$$

Suprimiendo en cada miembro el término común BF, nos queda:

$$AB + BC < AD + DF + FE + EC.$$

Luego: ABC < ADEC

TEOREMA.– Si desde un punto exterior a una recta, se trazan una perpendicular y varias oblicuas a dicha recta:

1. La perpendicular es menor que cualquier oblicua.

2. Dos oblicuas que se apartan igualmente del pie de la perpendicular son iguales.

3. De dos oblicuas que se apartan desigualmente del pie de la perpendicular, la que se aparta más es la mayor.

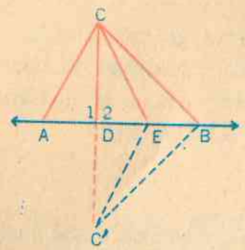


Fig. 36

Hipót.: CD ⊥ AB.
CA, CE, CB oblicuas.
DA = DE; DB > DA.

Tesis: CD < CE; CE = CA; CB > CE.

Se prolonga CD y se toma DC′ = CD; se une el punto C,′con B y con E.

1. Si hacemos girar la parte superior de la figura alrededor de AB, el punto C caerá en el punto C′; CE coincidirá con C′E y CB con C′B.

Como CDC′es una línea recta, tenemos:

$$CD + DC' < CE + EC'$$
$$2\ CD < 2\ CE$$

Luego: CD < CE

2. Si hacemos girar la figura DCA alrededor de CD, el $\angle 1$ coincidirá con el $\angle 2$, por ser rectos y el segmento DA coincidirá con DE por ser congruentes.

Por consiguiente la figura DCA coincidirá con DCE.

Luego: CE = CA

3. Si consideramos las líneas CBC′, y CEC′, tenemos:

$$CB + BC' > CE + EC'$$
$$CB \cong BC' \text{ y } CE \cong EC'$$
$$\text{Por lo tanto: } 2CB > 2CE$$

Luego: CB > CE.

APLICACIONES.

Construcción de perpendiculares.

Para la construcción o trazo de perpendiculares, se utiliza generalmente la escuadra cuyo manejo es sencillo y los alumnos aprenden a manejarla mediante una breve explicación del profesor.

Resolveremos a continuación los diferentes casos que se presentan utilizando el compás.

1. Trazar la mediatriz a un segmento dado AB (fig. 37).

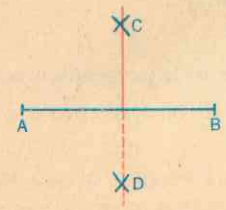


Fig. 37

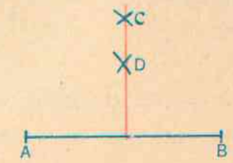


Fig. 38

Respuesta. 1. Haciendo centro en los puntos A y B del segmento dado y con una abertura de compás mayor que la mitad del segmento, se describen por ambos lados arcos que al cortarse determinan los puntos C y D respectivamente.

La recta CD que une estos dos puntos, es la mediatriz pedida.

Respuesta. 2. Haciendo centro en los puntos A y B del segmento dado y con una abertura de compás mayor que la mitad del segmento, se describen arcos que al cortarse determinan el punto C; se acorta un poco la abertura del compás y se describen arcos que al cortarse determinan el punto D.

La recta CD que une estos dos puntos, es la mediatriz pedida (fig. 38).

2. Trazar una perpendicular en un punto cualquiera de una recta (fig. 39).

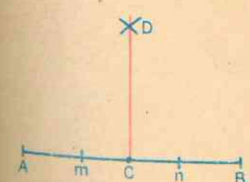


Fig. 39

Respuesta. Se tiene el punto C de la recta AB.

Haciendo centro en el punto C con una abertura cualquiera de compás, se describen los arcos m y n.

Luego haciendo centro en los puntos m y n se describen arcos que al cortarse determinan el punto D.

La recta CD que une estos dos puntos, es la perpendicular pedida.

3. Trazar una perpendicular a una recta dada por un punto C exterior a ella (fig. 40).

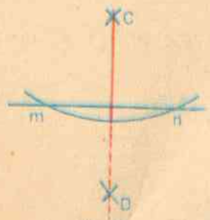


Fig. 40

Respuesta. Haciendo centro en el punto C y con una abertura de compás mayor que la distancia del punto a la recta, se describe un arco que corte a la recta en los puntos m y n.

Luego haciendo centro en los puntos m y n, se describen arcos que al cortarse determinan el punto D.

La recta CD que une estos dos puntos, es la perpendicular pedida.

4. Trazar una perpendicular en el extremo de un segmento dado AB. (fig. 41).

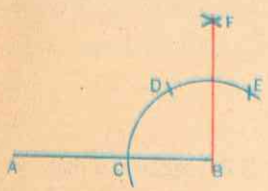


Fig. 41

Respuesta. Haciendo centro en el punto B con una abertura cualquiera de compás, se describe un arco que corte al segmento AB en el punto C y con la misma abertura de compás se determina el punto D y haciendo centro en D se determina el punto E.

Luego haciendo centro en los puntos D y E se describen arcos que al cortarse determinan el punto F.

La recta FB que une estos dos puntos, es la perpendicular pedida.

RECTAS PARALELAS

Definiciones. - Rectas paralelas son aquellas que, estando en un mismo plano no se intersecan por más que se prolonguen. Las rectas AB y CD. (fig. 42).

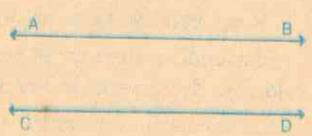


Fig. 42

Con frecuencia se utiliza el símbolo || para reemplazar la palabra paralela.

Postulado de Euclides. – Por un punto exterior a una recta solo se puede trazar una paralela a dicha recta.

Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre si.

TEOREMA. – Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre si.

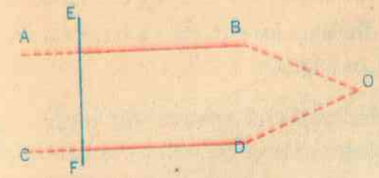


Fig. 43

Hipót.: AB ⊥ EF, CD ⊥ EF.

Tesis: AB || CD.

Si AB y CD no fueran paralelas, desde el punto O donde se cortan tendríamos dos perpendiculares a la misma recta EF, lo que es imposible.

Luego: AB || CD.

APLICACIONES.

1. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a cierta distancia del segmento dado AB?

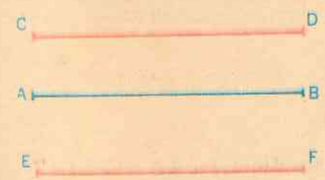


Fig. 44

El lugar geométrico de los puntos del plano que están a cierta distancia del segmento AB, son los segmentos CD y EF paralelos a AB a la distancia dicha (fig. 44).

Angulos formados por dos rectas cortadas por una transversal. Dos rectas cortadas por una transversal forman ocho ángulos que considerados de dos en dos, reciben los siguientes nombres:

Angulos alternos internos, ángulos alternos externos, ángulos correspondientes, ángulos colaterales internos y ángulos colaterales externos (fig.45).

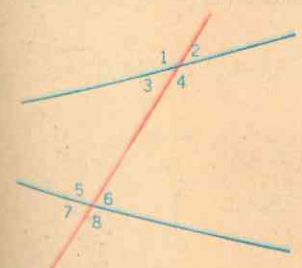


Fig. 45

Angulos alternos internos son dos ángulos internos situados a uno y otro lado de la secante, no adyacentes. Los ángulos 3 y 6, 4 y 5.

Angulos alternos externos son dos ángulos externos situados a uno y otro lado de la secante, no adyacentes. Los ángulos: 1 y 8, 2 y 7.

Angulos correspondientes son dos ángulos, el uno interno y el otro externo, situados a un mismo lado de la secante, no adyacentes. Los ángulos: 1 y 5, 3 y 7, 2 y 6, 4 y 8.

Angulos colaterales internos son dos ángulos internos situados a un mismo lado de la secante, no adyacentes. Los ángulos: 3 y 5, 4 y 6.

Angulos colaterales externos son dos ángulos externos situados a un mismo lado de la secante, no adyacentes. Los ángulos: 1 y 7, 2 y 8.

TEOREMA. Dos paralelas cortadas por una transversal, forman ocho ángulos a saber: cuatro agudos congruentes entre si y cuatro obtusos también congruentes entre si.

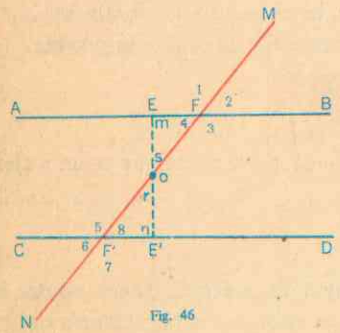


Fig. 46

Hipót.: AB ∥ CD, MN transversal

Tesis: $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 4 \cong \measuredangle 8 \cong \measuredangle 6$

$\measuredangle 1 \cong \measuredangle 3 \cong \measuredangle 5 \cong \measuredangle 7$

Por 0 punto medio de FF´ se traza EE´ perpendicular a AB y CD.

OF ≅ OF´ por construcción

$\measuredangle s \cong \measuredangle r$ por opuestos por el vértice.

Los segmentos EF y F´E´ son simétricos con relación al punto O y por lo tanto son congruentes.

$\measuredangle m \cong \measuredangle n$ por rectos.

Luego: $\measuredangle 4 \cong \measuredangle 8$

$\measuredangle 4 \cong \measuredangle 2$ por opuestos por el vértice.

$\measuredangle 8 \cong \measuredangle 6$ por opuestos por el vértice.

Por lo tanto:

$\measuredangle 2 \cong \measuredangle 4 \cong \measuredangle 8 \cong \measuredangle 6.$

Siendo los ángulos agudos congruentes, los ángulos obtusos que son suplementos de ángulos congruentes, serán congruentes.

Luego:

$\measuredangle 1 \cong \measuredangle 3 \cong \measuredangle 5 \cong \measuredangle 7.$

De este teorema sacamos las siguientes conclusiones:

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal:

1. Los ángulos alternos internos, son congruentes.
2. Los ángulos alternos externos, son congruentes.
3. Los ángulos correspondientes, son congruentes.
4. Los ángulos colaterales internos, son suplementarios.
5. Los ángulos colaterales externos, son suplementarios.

TEOREMA.– Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos son congruentes o suplementarios:

Congruentes, si ambos son agudos u obtusos.

Suplementarios, si el uno es agudo y el otro obtuso.

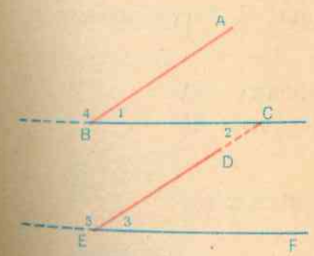


Fig. 47

Hipót. : BA ∥ ED, BC ∥ EF.

Tesis: $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 3$, $\measuredangle 4 \cong \measuredangle 5$

$\measuredangle 1 + \measuredangle 5 = 180^o$

1. Prolongamos el lado ED hasta encontrar el lado BC y obtener el ángulo 2.

$\measuredangle 3 \cong \measuredangle 2$, por alternos internos

$\measuredangle 2 \cong \measuredangle 1$, por alternos internos

Luego: $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 3.$

Los ángulos obtusos 4 y 5 que son suplementos de ángulos congruentes, serán congruentes.

Luego: $< 4 \cong < 5$.

2. Los ángulos 1 y 5 son suplementarios por ser el $< 1 \cong < 3$ y el $< 4 \cong < 5$.

Luego: $< 1 + < 5 = 180$.

TEOREMA.– Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son congruentes o suplementarios:

Congruentes, si ambos son agudos u obtusos.

Suplementarios, si el uno es agudo y el otro obtuso.

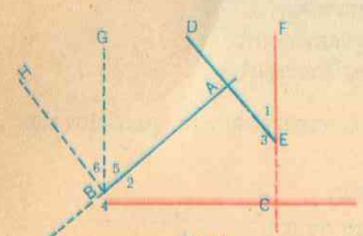


Fig. 48

Hipót.: $BA \perp ED$, $BC \perp EF$.

Tesis: $\sphericalangle 2 \cong \sphericalangle 1$, $\sphericalangle 4 \cong \sphericalangle 3$.

$\sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 180^{\circ}$

Se prolongan AB y FE y obtenemos los ángulos 4 y 3 respectivamente.

Se traza $BH \perp AB$ y $BG \perp BC$, se tiene:

$BH \parallel DE$, por ser ambas perpendiculares a BA.

$BG \parallel EF$, por ser ambas perpendiculares a BC.

Por lo tanto: 1o.

$< 1 \cong < 6$, por tener sus lados respectivamente paralelos.

$< 2 \cong < 6$, por tener ambos el < 5 como complemento.

Luego: $< 2 \cong < 1$.

Los ángulos 4 y 3 que son suplementos de ángulos congruentes, serán congruentes.

Luego: $< 4 \cong < 3$.

2o. Los ángulos 2 y 3 son suplementarios por ser el $< 2 \cong < 1$ y $< 4 \cong < 3$.

Luego: $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 180^{\circ}$

APLICACIONES

Construcción de paralelas.

Casos que se presentan utilizando el compás:

1o. Por un punto C trazar una paralela a una recta dada AB (fig. 49).

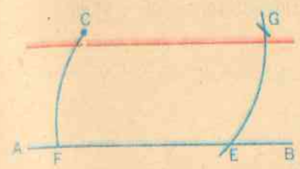


Fig. 49

Respuesta 1. Haciendo centro en el punto C, con una abertura cualquiera de compás se describe un arco que interseque a la recta dada en el punto E, luego haciendo centro en E y con la misma medida se describe el arco CF y haciendo centro de nuevo en el punto E, se toma un arco EG igual al arco CF.

Al unir el punto C con el punto G, se tiene la paralela pedida.

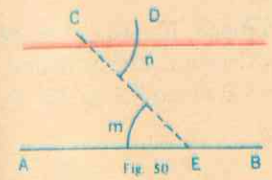


Fig. 50

Respuesta 2. Se traza desde el punto C una oblicua cualquiera que interseque a la recta dada en el punto E formando el ángulo m.

Luego se construye el $\sphericalangle$ n congruente con m.

La recta CD es la paralela pedida (fig. 50).

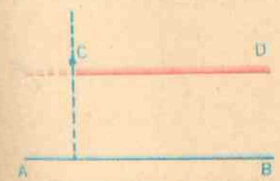


Fig. 51

Respuesta 3. Se traza desde el punto C una perpendicular a la recta AB (utilizando los procedimientos explicados). Luego en el punto C de esta última perpendicular se traza la perpendicular CD siendo esta la paralela pedida (fig. 51).

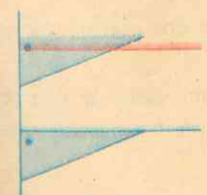


Fig. 52

La escuadra se utiliza como lo muestra la figura 52.

Los dibujantes utilizan para el trazo de paralelas una escuadra en forma de T.

Los carpinteros utilizan para el trazo de paralelas un aparato especial llamado gramil.

EJERCICIOS

Simetría de dos puntos con respecto a un punto, una recta y un plano.

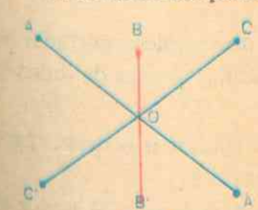


Fig. 52-1

1. Dos puntos son simétricos con respecto a un punto, llamado centro de simetría, cuando este punto es el punto medio del segmento que une dichos puntos. Los puntos A y A´ ; B y B´ ; C y C´ son simétricos con respecto al punto O (fig. 52–1).

2. Dos puntos son simétricos con respecto a una recta, llamada eje de simetría, cuando esta recta es mediatriz del segmento que une dichos puntos. Los puntos A y A´ ; B y B´ ; C y C´ ; D y D´, son simétricos con respecto a la recta MN (fig. 52–2).

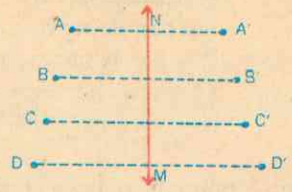


Fig. 52-2

3. Dos puntos son simétricos con respecto a un plano, llamado plano de simetría, cuando este plano es mediatriz del segmento que une dichos puntos. Los puntos A y A´ ; B y B´, son simétricos con respecto al plano P; (fig. 52–3).

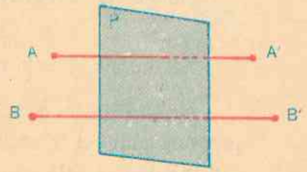


Fig. 52-3

4. Hallar un punto de una recta que equidiste de dos puntos que están situados fuera y a un mismo lado de la recta.

5. Hallar un punto de una recta que equidiste de dos puntos que están situados fuera y a uno y otro lados de la recta.

6. Dos puntos están situados fuera y a un mismo lado de una recta. Calcular la distancia más corta que hay entre los dos puntos pasando por un punto de la recta.

7. Trazar ángulos alternos internos de 35^o.

8. Trazar ángulos alternos externos de 130^o.

9. Trazar ángulos correspondientes de 45^o.

10. Uno de los ángulos obtusos formados por dos paralelas cortadas por una transversal es cuatro veces un ángulo agudo. Calcular el valor de todos los ángulos.

11. En el problema anterior uno de los ángulos agudos es la quinta parte de un ángulo obtuso. Calcular el valor de todos los ángulos.

12. En el mismo problema un ángulo obtuso es 4 veces más 20 grados un ángulo agudo. Calcular el valor de los ocho ángulos.

13. En el mismo problema un ángulo agudo es la quinta parte más 30 grados de un ángulo obtuso. Calcular el valor de los ocho ángulos.

14. En la figura 52–4 se tiene dos paralelas cortadas por dos transversales que forman 14 ángulos, si el ángulo 5 mide 45^o y el ángulo 9 mide 105^o, ¿cuál es el valor de los catorce ángulos?

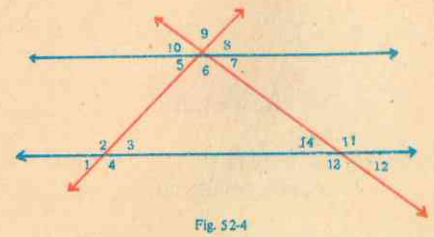


Fig. 52-4

15. Si en el problema anterior el ángulo 6 mide 110^o y el ángulo 11 mide 135^o, ¿cuál es el valor de los catorce ángulos?

16. Si en el problema anterior el ángulo 5 es la mitad del ángulo 6 y el ángulo 6 es tres veces el ángulo 7, ¿cuál es el valor de los catorce ángulos?

UNIDAD 4

TRIANGULO

Definiciones. Triángulo es un conjunto de puntos limitado por la intersección de tres semiplanos en un mismo plano.

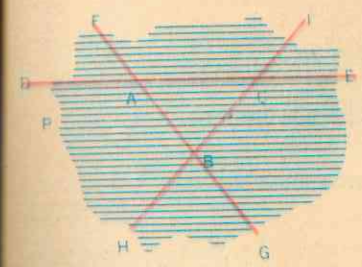


Fig. 53

En el plano P (fig. 53), se trazan los segmentos DE, FG, HI.

El segmento DE divide al plano P en dos semiplanos.

El segmento FG divide al plano P en dos semiplanos.

El segmento HI divide al plano P en dos semiplanos.

Por consiguiente:

La región ABC que es un conjunto de infinitos puntos comunes a tres semiplanos de un mismo plano, cuyos contornos se cortan dos a dos, se denomina triángulo.

Todo triángulo consta de tres vértices, tres lados y tres ángulos.

Los tres lados y los tres ángulos, se llaman elementos del triángulo.

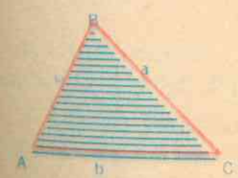


Fig. 54

Los ángulos de un triángulo se designan generalmente por tres letras mayúsculas colocadas en los vértices, y los lados opuestos a los ángulos con las mismas letras pero minúsculas. El triángulo ABC (fig. 54).

Con mucha frecuencia se emplea el símbolo $\triangle$ para reemplazar la palabra triángulo.

TEOREMA. La suma de los ángulos interiores de un triángulo, es igual a dos ángulos rectos.

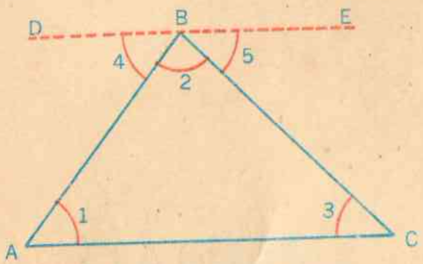


Fig. 55

Hipót.: $\triangle$ ABC.

Tesis: $\measuredangle 1 + \measuredangle 2 + \measuredangle 3 = 2R$

Trazamos por el vértice B la recta DE $\parallel$ AC y formamos los ángulos 4 y 5.

$$\measuredangle 4 + \measuredangle 2 + \measuredangle 5 = 2R. \qquad (1)$$

$\measuredangle 4 \cong \measuredangle 1$, por alternos internos.

$\measuredangle 5 \cong \measuredangle 3$, por alternos internos.

Sustituyendo en (1) los ángulos 4 y 5 por sus iguales 1 y 3, tenemos:

$$\measuredangle 1 + \measuredangle 2 + \measuredangle 3 = 2R.$$

Angulo exterior de un triángulo. Angulo exterior de un triángulo es el que está formado por un lado y la prolongación del lado adyacente. El ángulo 1 (fig. 56).

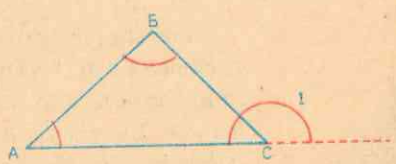


Fig. 56

TEOREMA. La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a cuatro ángulos rectos.

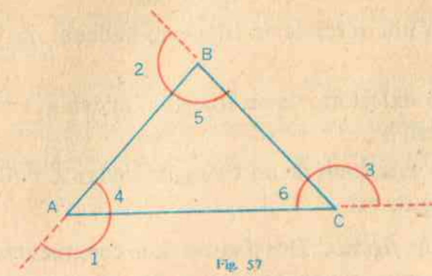


Fig. 57

Hipót.: $\triangle$ ABC, 1, 2 y 3 ángulos exteriores

Tesis: $\measuredangle 1 + \measuredangle 2 + \measuredangle 3 = 4R$.

Se tiene:

$\measuredangle 1 + \measuredangle 4 = 2R$ (suplementarios)

$\measuredangle 2 + \measuredangle 5 = 2R$ (suplementarios)

$\measuredangle 3 + \measuredangle 6 = 2R$ (suplementarios)

Sumando ordenadamente, nos da:

$$\measuredangle 1 + \measuredangle 4 + \measuredangle 2 + \measuredangle 5 + \measuredangle 3 + \measuredangle 6 = 6R.$$

$$\measuredangle 4 + \measuredangle 5 + \measuredangle 6 = 2R.$$

Luego: $\measuredangle 1 + \measuredangle 2 + \measuredangle 3 = 4R$.

COROLARIO. Todo ángulo exterior de un triángulo, es igual a la suma de los ángulos interiores, no adyacentes.

EJERCICIOS:

1. En un triángulo uno de los ángulos interiores es el doble del segundo y el segundo es el triple del tercero. Calcular los tres ángulos.
2. Los ángulos interiores de un triángulo son como 2, 3 y 4. Calcular su valor.
3. Los ángulos exteriores de un triángulo son como 3, 5 y 7. Calcular su valor.
4. Los ángulos interiores de un triángulo son como $\frac{1}{2}$, 1 y $\frac{3}{2}$. Calcular su valor.

5. El ángulo exterior de un triángulo es tres veces el ángulo interio[r] adyacente. Calcular el valor de los dos ángulos.

6. Los ángulos interiores de un triángulo miden x, 2x y 3x. ¿Qué clase d[e] triángulo es?

7. Los ángulos exteriores de un triángulo miden x, x+ 60 y x+ 30. ¿Qu[é] clase de triángulo es?

8. Los ángulos exteriores de un triángulo miden x + 40, x + 60 y x + 8[0] ¿Qué clase de triángulo es?

Congruencia de figuras. Dos figuras son congruentes cuando tienen la misma forma y el mismo tamaño esto es que, al superponerse coincidan en todos sus puntos. Esta superposición puede ser: por translación o por rotación.

Triángulos congruentes. Dos triángulos son congruentes cuando existe correspondencia entre sus elementos. Si los pares de lados correspondientes son congruentes y los pares de ángulos correspondientes son congruentes, se dice que los triángulos son congruentes. Los triángulos ABC y A´B´C´. (fig. 58).

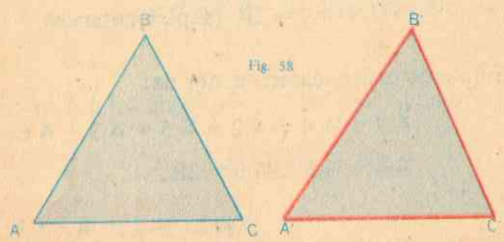


Fig. 58

De la congruencia de los triángulos ABC y A´B´C´, se deduce:

$AB = A'B'$	o	$AB \cong A'B'$
$BC = B'C'$	o	$BC \cong B'C'$
$AC = A'C'$	o	$AC \cong A'C'$
$\measuredangle A = \measuredangle A'$	o	$\measuredangle A \cong \measuredangle A'$
$\measuredangle B = \measuredangle B'$	o	$\measuredangle B \cong \measuredangle B'$
$\measuredangle C = \measuredangle C'$	o	$\measuredangle C \cong \measuredangle C'$

Teniendo en cuenta que la igualdad y la congruencia significan lo mismo podemos, por lo tanto, utilizar o sustituir un término por el otro.

Dos triángulos son congruentes cuando todos sus elementos son respectivamente congruentes.

Se consideran tres casos principales de congruencia de triángulos.

Primer caso. *TEOREMA.* Dos triángulos son congruentes, cuando tienen un lado congruente adyacente a ángulos respectivamente congruentes (fig. 59).

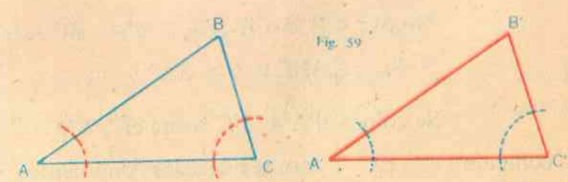


Fig. 59

Hipót.: $AC \cong A'C', \measuredangle A \cong \measuredangle A', \measuredangle C \cong \measuredangle C'$.
Tesis : $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Se coloca el $\triangle A'B'C'$ sobre el $\triangle ABC$.

El lado A´C´ coincidirá con AC por ser lados congruentes.

El $\measuredangle$ A´ coincidirá con el $\measuredangle$ A, por ser ángulos congruentes.

El $\measuredangle$ C´ coincidirá con el $\measuredangle$ C, por ser ángulos congruentes.

Por consiguiente los lados A´B´ y C´B´ tomarán respectivamente la dirección de AB y CB y los puntos B´ y B coincidirán, porque dos rectas que se cortan no pueden tener más de un punto común.

Luego: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Segundo caso. *TEOREMA.* Dos triángulos son congruentes, cuando tienen un ángulo congruente comprendido entre lados respectivamente congruentes (fig. 60).

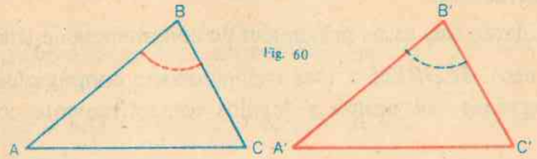


Fig. 60

Hipót.: $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$, $BA \cong B'A'$, $BC \cong B'C'$
Tesis : $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Se coloca el $\triangle A'B'C'$ sobre el $\triangle ABC$.

El $\measuredangle B'$ coincidirá con el $\measuredangle B$, por ser ángulos congruentes.
El lado $B'A'$ coincidirá con BA, por ser lados congruentes.
El lado $B'C'$ coincidirá con BC, por ser lados congruentes.

Por consiguiente los puntos A' y C' caerán respectivamente en A y C y los lados $A'C'$ y AC coincidirán, porque entre dos puntos no se puede trazar más de una recta.

Luego: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Tercer caso. *TEOREMA.* Dos triángulos son congruentes cuando tienen sus tres lados respectivamente congruentes (fig. 61).

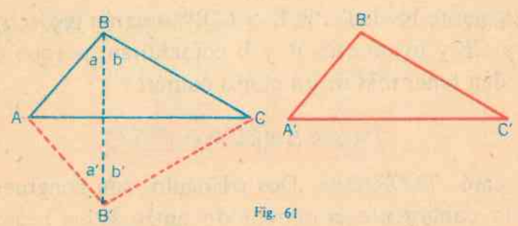


Fig. 61

Hipót.: $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $AC \cong A'C'$.
Tesis : $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Se coloca el $\triangle A'B'C'$ debajo del $\triangle ABC$ de modo que AC coincida con $A'C'$ y se traza BB'.

$AB \cong AB'$, por hipótesis.
$BC \cong B'C$, por hipótesis.

Los triángulos BAB' y BCB' son isósceles y por consiguiente:

$\measuredangle a \cong \measuredangle a'$
$\measuredangle b \cong \measuredangle b'$

Sumando ordenadamente, se tiene:

$\measuredangle a + \measuredangle b \cong \measuredangle a' + \measuredangle b'$

Por lo tanto: $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$ y los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen un ángulo congruente, comprendido entre lados respectivamente congruentes.

Luego: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Congruencia de triángulos rectángulos.

A los triángulos rectángulos se les puede aplicar casos especiales de congruencia, por tener un elemento igual que es el ángulo recto.

Por consiguiente dos triángulos rectángulos son congruentes cuando tienen iguales respectivamente:

1. *La hipotenusa y un ángulo agudo.*
2. *Un cateto y un ángulo agudo.*
3. *Los dos catetos.*
4. *La hipotenusa y un cateto.*

TEOREMA. En todo triángulo un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

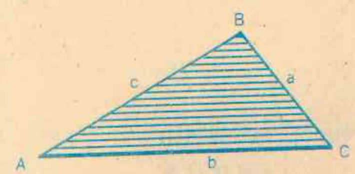


Fig. 62

Hipót.: $\triangle ABC$, b lado mayor
Tesis : $b < c + a$
$a > b - c$

Siendo la recta la menor distancia entre dos puntos, tenemos:

$$b < c + a$$
$$c < b + a$$
$$a < b + c$$

Si se toma la desigualdad:

$c + a > b$, y se resta c de ambos miembros, resulta:

$c + a - c > b - c$

Luego: $a > b - c$.

Si a la misma desigualdad: $c + a > b$, se resta a de ambos miembros, nos da: $c + a - a > b - a$.

Luego: $c > b - a$.

Siendo b el lado mayor se tiene:

$b > c$

Luego: $b > c - a$.

TEOREMA. Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente congruentes y los ángulos comprendidos entre ellos son desiguales, al mayor ángulo se le opone el mayor lado.

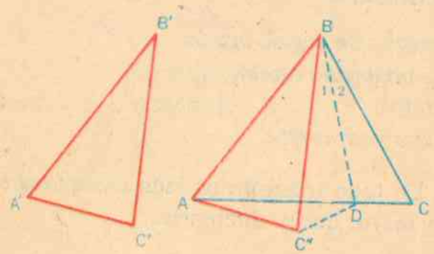


Fig. 63

Hipót.: $AB \cong A'B'$.
$CB \cong C'B'$.
$\measuredangle B > \measuredangle B'$.

Tesis: $AC > A'C'$

Se coloca el triángulo $A'B'C'$ sobre el triángulo ABC de modo que los lados iguales AB y $A'B'$ coincidan y C' caiga sobre C''.

Se traza la bisectriz BD del ángulo $C''BC$ y la recta $C''D$.

$\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$, por construcción.

$C''B \cong CB$, por ser ambos iguales a $C'B'$.

Los triángulos $C''BD$ y CBD son iguales por tener un ángulo congruente entre lados respectivamente congruentes.

Por lo tanto: $DC = DC''$

En el triángulo ADC'', tenemos:

$$AC'' < AD + DC''.$$
$$AC'' < AD + DC$$

Luego: $A'C' < AC$.

Clasificación de los triángulos.

Con relación a sus lados, los triángulos se clasifican en equiláteros, isósceles y escalenos.

Triángulo equilátero es el que tiene sus tres lados congruentes entre sí. El triángulo ABC (fig. 64).

Triángulo isósceles es el que tiene dos lados congruentes entre sí. El triángulo ABC (fig. 65).

Triángulo escaleno es el que tiene sus tres lados desiguales entre sí. El triángulo ABC (fig. 66).

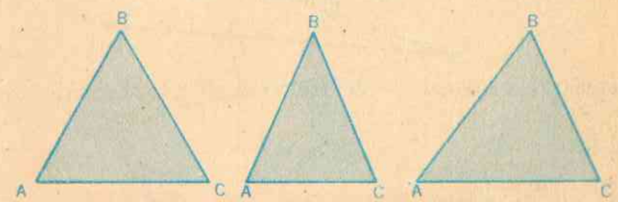


Fig. 64 Fig. 65 Fig. 66

Con relación a sus ángulos, los triángulos se clasifican en acutángulos, rectángulos y obtusángulos.

Triángulo acutángulo es el que tiene sus tres ángulos agudos. El triángulo ABC (fig. 67).

Triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto. El triángulo ABC (fig. 68).

En un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto, se llaman catetos y el lado opuesto al ángulo recto, se llama hipotenusa.

Triángulo obtusángulo es el que tiene un ángulo obtuso. El triángulo ABC (fig. 69).

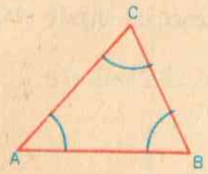


Fig. 67

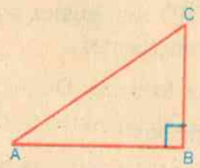


Fig. 68

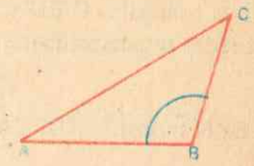


Fig. 69

Base de un triángulo es uno cualquiera de sus lados.

En un triángulo rectángulo se suele tomar como base la hipotenusa y en el triángulo isósceles el lado desigual.

Un triángulo no puede tener sino un ángulo recto.

Un triángulo no puede tener sino un ángulo obtuso.

Perímetro de un triángulo es la suma de sus lados.

TEOREMA. El lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los lados de un ángulo, es la bisectriz de dicho ángulo.

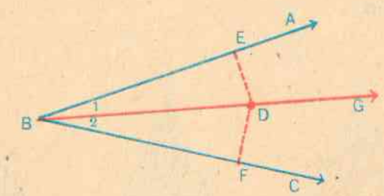


Fig. 70

Hipót.: D punto de la bisectriz BG
del ∡ ABC.
DE ⊥ BA, DF ⊥ BC.
Tesis : DE = DF.

Los triángulos rectángulos BED y BFD, tienen:

∡ 1 ≅ ∡ 2, por construcción.
hipotenusa BD común.
Por lo tanto: Δ BED ≅ Δ BFD.
Luego: DE = DF.

Líneas y puntos notables en el triángulo.

Altura. Altura es la perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación.

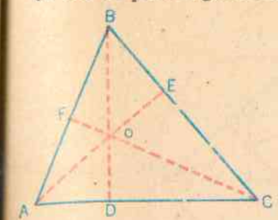


Fig. 71

Todo triángulo tiene tres alturas una correspondiente a cada lado, las cuales concurren a un mismo punto.

El punto donde concurren las tres alturas se llama *ortocentro.*

Las alturas BD, AE, CF, y el *ortocentro* O del Δ ABC (fig. 71).

Mediana. Mediana es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

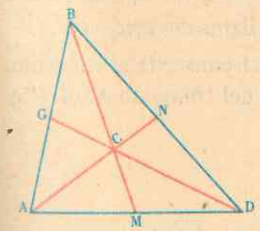


Fig. 72

Todo triángulo tiene tres medianas, una correspondiente a cada lado, las cuales concurren a un mismo punto.

El punto donde concurren las tres medianas, se llama *baricentro o centro de gravedad.*

Las medianas BM, AN, DG, y el *baricentro* C del Δ ABD (fig. 72).

Bisectriz. Bisectriz es la de cualquiera de los ángulos del triángulo.

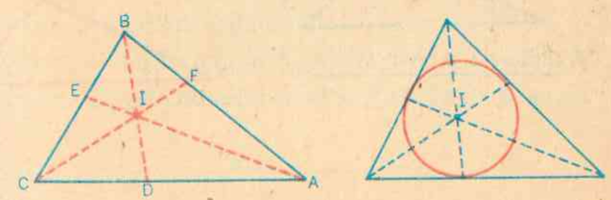


Fig. 73

Todo triángulo tiene tres bisectrices, una para cada ángulo, las cuales concurren a un mismo punto.

El punto donde concurren las tres bisectrices se llama *incentro.*

El *incentro* es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

Las bisectrices BD, CF, AE y el *incentro* I del $\triangle$CBA (fig. 73).

Mediatriz. Mediatriz es la perpendicular trazada en el punto medio de un lado.

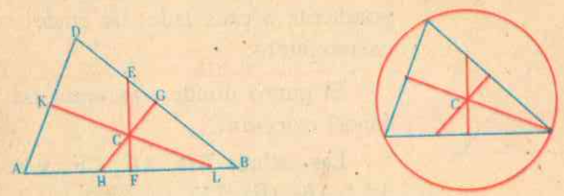


Fig. 74

Todo triángulo tiene tres mediatrices que concurren a un mismo punto.

El punto donde concurren las tres mediatrices, se llama *circuncentro*.

El *circuncentro* es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Las mediatrices EF, KL, HG y el *circuncentro* C del triángulo ADB (fig. 74).

CONSTRUCCIONES

1. Construir un triángulo conociendo un lado y los ángulos adyacentes (fig. 75).

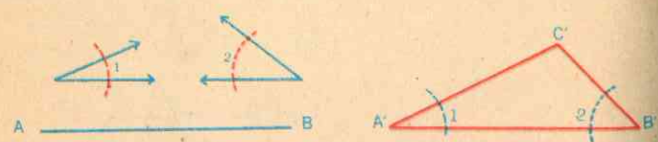


Fig. 75

Respuesta. Se tiene el lado AB y los ángulos 1 y 2.

Se toma A´B´= AB; se construye el ∡ A´= ∡ 1 y ∡ B´= ∡ 2, resultando así el $\triangle$A´C´B´ que es el $\triangle$ pedido.

2. Construir un triángulo conociendo dos lados y el ángulo comprendido (fig. 76).

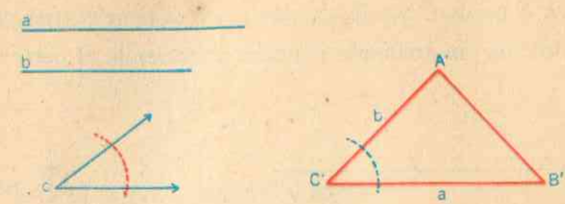


Fig. 76

Respuesta. Se tienen los lados a y b y el ∡ C.

Se construye un ∡ C´= ∡C; en los lados del ángulo se toman C´B´= a y C´A´= b.

Al unir los puntos A´ y B´ se tiene el triángulo pedido C´A´B´.

3. Construir un triángulo conociendo los tres lados (fig. 77).

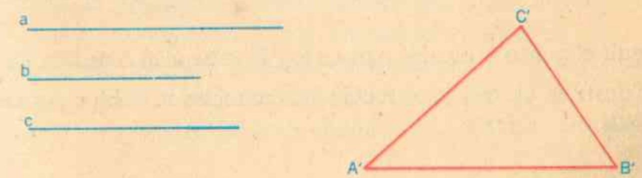


Fig. 77

Respuesta. Se tienen los lados a, b y c.

Se traza A´B´ igual a uno cualquiera de los lados y haciendo centro en A´ y B´ con medidas respectivamente iguales a los lados b y c se describen arcos que al cortarse determinan el punto C´.

Al unir el punto C´ con los puntos A´ y B´ se tiene el $\triangle$ pedido A´C´B´.

4. Construir un triángulo isósceles conociendo la base y la altura (fig. 78).

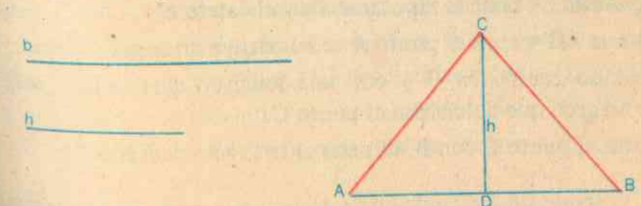


Fig. 78

Respuesta. Se tiene la base b y la altura h.

Se toma el segmento AB = b; se traza la mediatriz CD = h.

Al unir el punto C con los puntos A y B se tiene el triángulo pedido ACB.

5. Construir un triángulo isósceles conociendo el perímetro y la altura (fig. 79).

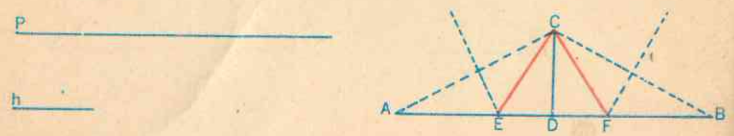


Fig. 79

Respuesta. Se tiene el perímetro p y la altura h.

Se toma AB = p; se traza la mediatriz CD = h y se une el punto C con A y con B.

Las mediatrices de los segmentos CA y CB determinan en AB los puntos E y F.

Al unir el punto C con los puntos E y F se tiene el Δ pedido ECF.

6. Construir un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa y un cateto (fig. 80).

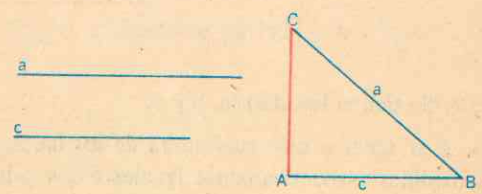


Fig. 80

Respuesta. Se tiene la hipotenusa a y el cateto c.

Se toma AB = c; en el punto A se construye un ángulo recto.

Haciendo centro en B y con una longitud igual a la hipotenusa a, se describe un arco que determine el punto C.

Al unir el punto C con B, se tiene el triángulo pedido.

7. Construir un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa y un ángulo agudo (fig. 81).

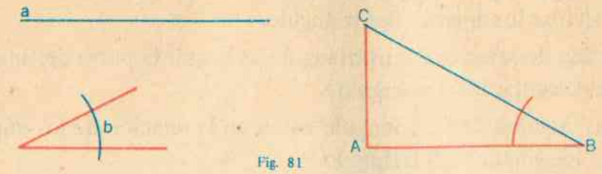


Fig. 81

Respuesta. Se tiene la hipotenusa a y el ángulo b.

Se toma un segmento cualquiera y se construye el ∡B = ∡b.

Haciendo centro en B con una medida igual a la hipotenusa a se determina el punto C.

La perpendicular del punto C a la recta determina el triángulo pedido CAB.

PROBLEMAS GRAFICOS.

1. Construir un triángulo equilátero conociendo el perímetro.
2. Construir un triángulo equilátero conociendo la altura.
3. Construir un triángulo isósceles conociendo la base y un ángulo adyacente.
4. Construir un triángulo isósceles conociendo la altura y uno de los lados iguales.
5. Construir un triángulo rectángulo isósceles conociendo la altura.
6. Construir un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa y la altura correspondiente.

EJERCICIOS.

1. El perímetro de un triángulo es de 54 cm. Calcular sus lados si están en la relación de los números 2, 3 y 4.

2. El perímetro de un triángulo isósceles es de 84 cm. Calcular sus lados sabiendo que el lado desigual es la mitad de uno de los lados iguales.

3. El perímetro de un triángulo isósceles es de 124 cm. Calcular sus lados sabiendo que uno de los lados iguales es 3 veces el lado desigual.

4. Los ángulos de un triángulo escaleno miden 50, 60 y 70 grados respectivamente. Calcular el valor de los ángulos que se forman en el incentro del triángulo.

5. En un triángulo ABC el ángulo A es el doble del ángulo B y el ángulo B es el triple del ángulo C. Calcular el valor de los ángulos.

6. En un triángulo isósceles el ángulo de la base es 5 veces el ángulo del vértice. Calcular los ángulos del triángulo.

7. El ángulo interior de un triángulo es la quinta parte del ángulo exterior adyacente. Calcular los dos ángulos.

8. Los ángulos de un triángulo están en la relación de los números 3, 5 y 7. Calcular los ángulos del triángulo.

9. El ángulo del vértice de un triángulo isósceles es la sexta parte del ángulo de la base. Calcular los ángulos del triángulo.

10. Dos ángulos de un triángulo miden 35º 28' y 40º 25' respectivamente. Calcular el tercer ángulo y cada uno de los ángulos exteriores.

11. En un triángulo ABC, el ángulo A es un tercio del ángulo B y el ángulo B es un cuarto del ángulo C. Calcular los ángulos del triángulo.

12. En un triángulo isósceles el ángulo formado por los lados iguales es la quinta parte de uno de los ángulos de la base. Determinar el ortocentro del triángulo y calcular el valor de los ángulos consecutivos formados alrededor de dicho punto.

13. El ángulo de la base de un triángulo isósceles es 3 veces el ángulo del vértice. Determinar el ortocentro del triángulo y calcular el valor de los ángulos consecutivos formados alrededor de dicho punto.

14. Calcular el valor de los ángulos formados en el incentro de un triángulo isósceles, si el ángulo formado por los lados iguales mide 45 grados.

15. Calcular el valor de los ángulos formados en el incentro de un triángulo isósceles si el ángulo de la base es 4 veces más 20º el ángulo formado por los lados iguales.

16. Calcular el valor de los ángulos formados en el incentro de un triángulo isósceles si el ángulo formado por los dos lados iguales es la cuarta parte de uno de los ángulos de la base.

17. Calcular el valor de los ángulos formados en el ortocentro de un triángulo escaleno sabiendo que una de las alturas determina dos ángulos de 30 y 40 grados respectivamente:

18. Calcular el valor de los ángulos formados en el ortocentro de un triángulo escaleno sabiendo que una de las alturas determina dos ángulos de 25º30' y 35º30' respectivamente.

19. Calcular el valor de los ángulos formados en el incentro de un triángulo rectángulo isósceles.

20. Los ángulos de un triángulo obtusángulo miden 130, 40 y 10 grados respectivamente. Calcular los ángulos formados en el incentro del triángulo.

UNIDAD 5

CIRCUNFERENCIA. CIRCULO.

Definiciones. Se llama circunferencia al lugar geométrico de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto del mismo plano, o al conjunto de todos los puntos de un plano que están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro (fig. 82).

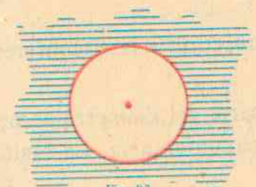


Fig. 82

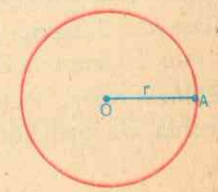


Fig. 83

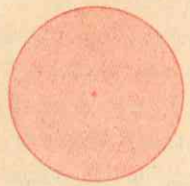
La circunferencia divide al plano que la contiene en dos regiones o porciones: una interior y otra exterior.

Radio. Radio es el segmento que va desde el centro a un punto de la circunferencia. El radio OA o r (fig. 83).

Las circunferencias o los círculos se denominan por una letra que se coloca en el centro y la que representa el radio: La circunferencia de la figura 83, se expresa C (Or).

Como el conjunto de todos los puntos de una circunferencia y sus puntos interiores determinan una superficie circular, se puede definir que:

Círculo es el conjunto de una circunferencia y sus puntos interiores (fig. 84).



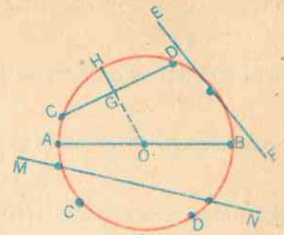


Fig. 85

Con frecuencia se emplea el símbolo ⊙ para reemplazar las palabras circunferencia o círculo.

Diámetro. Diámetro es el segmento que une dos puntos de la circunferencia, pasando por el centro. El diámetro AB (fig. 85).

Cuerda. Cuerda es el segmento que une dos puntos de la circunferencia. La cuerda CD (fig. 85).

Secante. Secante es el segmento que corta a la circunferencia en dos puntos. La secante MN (fig. 85).

Tangente. Tangente es el segmento que corta a la circunferencia en un solo punto. La tangente EF (fig. 85).

Flecha o Sagita. Flecha o sagita es la parte del diámetro perpendicular a una cuerda, comprendida entre ésta y la circunferencia. La sagita GH (fig. 85).

Arco. Arco es una parte determinada de la circunferencia. El arco CSD (fig. 85).

Semicircunferencia. Semicircunferencia es cada uno de los arcos iguales determinados por el diámetro.

Semicírculo. Semicírculo es la porción de plano limitado por una semicircunferencia.

Sector circular. Sector circular es la porción de círculo limitada por dos radios y el arco comprendido. El sector AOB (fig. 86).

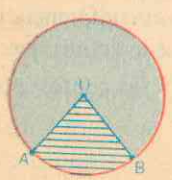


Fig. 86

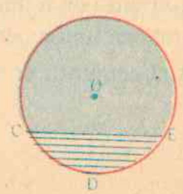


Fig. 87

Segmento circular. Segmento circular es la porción de círculo comprendida entre una cuerda y su arco. El segmento CDE (fig. 87).

Propiedades. Todos los radios de una misma circunferencia o circunferencias iguales, son iguales.

Todos los diámetros de una misma circunferencia o circunferencias iguales, son iguales.

El diámetro es la mayor de las cuerdas y es el doble del radio.

El centro de una circunferencia es un centro de simetría de la curva.

Todo diámetro de una circunferencia es un eje de simetría de la curva.

Posiciones relativas de un punto y una circunferencia. Un punto y una circunferencia pueden ocupar las siguientes posiciones relativas:

1. El punto está contenido en la circunferencia. En este caso la distancia del punto al centro es igual al radio. El punto A (fig. 88).

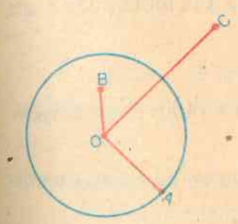


Fig. 88

2. El punto está en el interior de la circunferencia. En este caso la distancia del punto al centro es menor que el radio. El punto B (fig. 88).

3. El punto está en la parte exterior de la circunferencia. En este caso la distancia del punto al centro es mayor que el radio. El punto C (fig. 88).

Posiciones relativas de una recta y una circunferencia. Una recta y una circunferencia pueden ocupar las siguientes posiciones relativas:

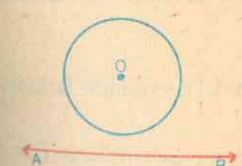


Fig. 89

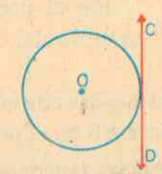


Fig. 90

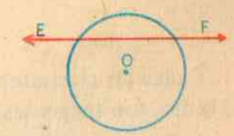


Fig. 91

1. La recta no tiene ningún punto común con la circunferencia. En este caso se dice que la recta es exterior. La recta AB (fig. 89).

2. La recta tiene un punto común con la circunferencia. En este caso se dice que la recta es tangente. La recta CD (fig. 90)

3. La recta corta a la circunferencia en dos puntos. En este caso se dice que la recta es secante. La recta EF (fig. 91).

CONSTRUCCIONES

1. Trazar varias circunferencias del mismo radio tangentes a una recta dada AB (fig. 92).

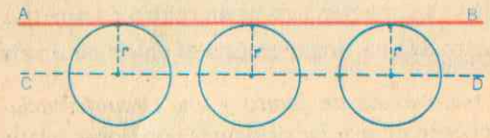


Fig. 92

Respuesta. El lugar geométrico para los centros de todas las circunferencias del mismo radio tangentes a una recta, es la paralela a la recta dada a una distancia igual al radio.

Se traza la recta CD paralela a AB a una distancia r.

Todas las circunferencias trazadas con centro en CD y radio r son tangentes a la recta AB.

2. Trazar varias circunferencias tangentes a una recta en un mismo punto (fig. 93).

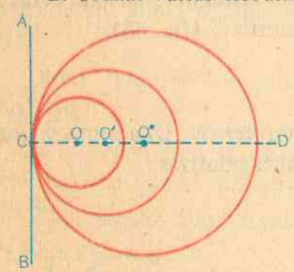


Fig. 93

Respuesta. El lugar geométrico para los centros de todas las circunferencias tangentes a una recta en un mismo punto, es la perpendicular levantada en dicho punto.

Por el punto C de la recta AB se traza la perpendicular CD.

Todas las circunferencias trazadas con centro en CD, variando la longitud del radio, son tangentes a la recta AB en el punto C.

3. Trazar varias circunferencias tangentes a dos rectas paralelas (fig. 94).

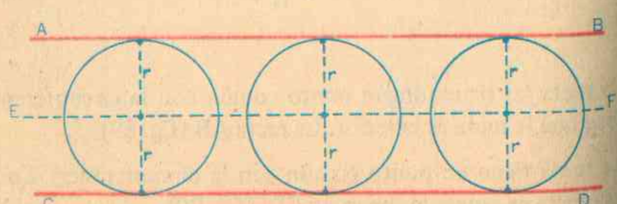


Fig. 94

Respuesta. El lugar geométrico para los centros de todas las circunferencias tangentes a dos rectas paralelas, es la paralela media.

Se traza la recta EF paralela a las rectas AB y CD a una misma distancia r.

Todas las circunferencias trazadas con centro en EF y radio r, son tangentes a las rectas AB y CD.

4. Trazar varias circunferencias tangentes a dos rectas concurrentes (fig. 95).

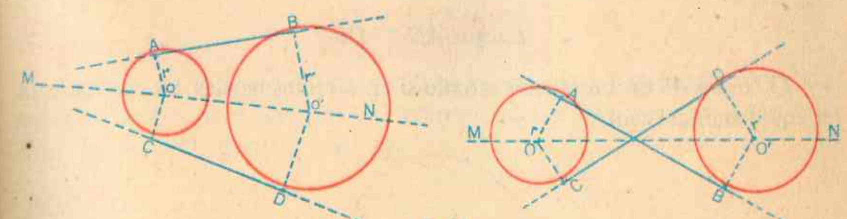


Fig. 95

Respuesta. El lugar geométrico para los centros de todas las circunferencias tangentes a dos rectas concurrentes, es la bisectriz del ángulo determinado por ellas.

Se traza la bisectriz MN.

Las circunferencias trazadas con centro en la bisectriz MN y con radios r y r´, son tangentes a las rectas AB y CD.

TEOREMA. Todo diámetro perpendicular a una cuerda divide tanto a la cuerda como al arco subtendido por ella en partes iguales.

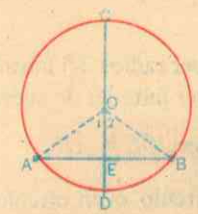


Fig. 96

Hipót.: AB, cuerda; CD diámetro
CD ⊥ AB
Tesis: EA = EB ; AD = DB

Se unen los puntos A y B con el centro O.

Los triángulos rectángulos OEA y OEB son iguales por tener iguales la hipotenusa y un cateto, a saber:

OA = OB, radios del mismo círculo.
OE, cateto común.

Luego: EA = EB.

Si los ángulos centrales 1 y 2 son iguales por estar opuestos a lados iguales, los arcos correspondientes son iguales.

Luego: AD = DB.

TEOREMA. En un mismo círculo o en círculos iguales, las cuerdas iguales equidistan del centro.

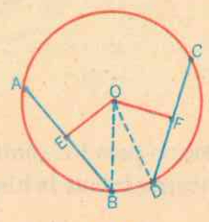


Fig. 97

Hipót.: $AB = CD$; $OE \perp AB$; $OF \perp CD$
Tesis : $OE = OF$.

Trazamos los radios OB y OD.

Los triángulos rectángulos OEB y OFD son iguales por tener iguales la hipotenusa y un cateto, a saber:

OB = OD, por ser radios del mismo círculo.
EB = FD, por ser mitades de cuerdas iguales.

Luego: OE = OF.

Recíproco. En un mismo círculo o en círculos iguales, las cuerdas que equidistan del centro son iguales.

Corolario. En un mismo círculo o en círculos iguales, la cuerda que dista menos del centro es mayor que la que dista más.

Igualdad de arcos. Dos arcos de una misma circunferencia o de circunferencias iguales, son iguales si corresponden a ángulos iguales en el centro. Los arcos AB y A´B´(fig. 98).

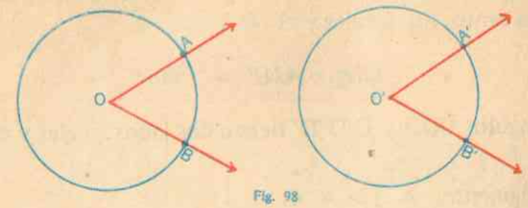


Fig. 98

Desigualdad de arcos. Dos arcos de una misma circunferencia o de circunferencias iguales, son desiguales, si corresponden a ángulos desiguales en el centro. Los arcos AB y A´B´(fig. 99).

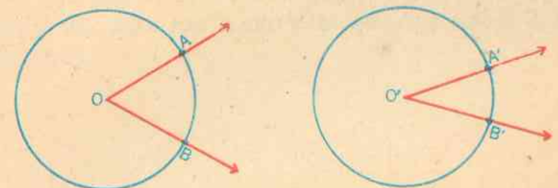


Fig. 99

TEOREMA. En un mismo círculo o en círculos iguales, cuerdas iguales subtienden arcos iguales, y de dos cuerdas desiguales la mayor subtiende arco mayor.

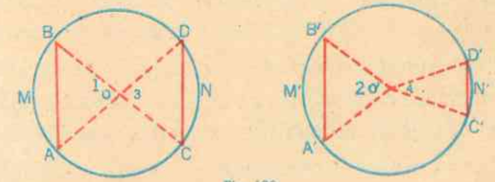


Fig. 100

Hipót.: $O = O'$; $AB = A'B'$; $CD > C'D'$
Tesis: $AMB = A'M'B'$; $CND > C'N'D'$

Los triángulos AOB y A´O´B´tienen sus tres lados respectivamente iguales, por lo tanto, son iguales y el ∢ 1 = ∢ 2.

Luego: AMB = A´M´B´.

Los triángulos COD y C´O´D´ tienen dos lados iguales y el lado CD > C´D´.

Por consiguiente: ∢ 3 > ∢ 4.

Luego: CND > C´N´D´.

Recíproco. En un mismo círculo o en círculos iguales, arcos iguales son subtendidos por cuerdas iguales, y de dos arcos desiguales el mayor es subtendido por la cuerda mayor.

UNIDAD 6

ANGULOS RELACIONADOS CON LA CIRCUNFERENCIA

Con relación a la circunferencia o al círculo, se tienen los siguientes ángulos: *Angulo Central, Angulo Inscrito, Angulo Semiinscrito, Angulo Exinscrito, Angulo Interior y Angulo Exterior.*

Angulo Central. Angulo central es un ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus lados son semirrectas que determinan dos radios. El ángulo AOB (fig. 101).

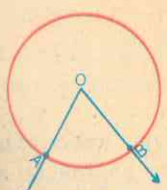


Fig. 101

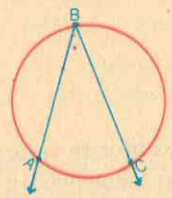


Fig. 102

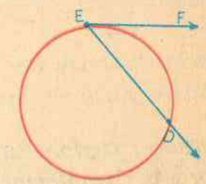


Fig. 103

Angulo Inscrito o Periférico. Angulo inscrito o periférico es un ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son semirrectas que determinan dos cuerdas. El ángulo ABC (fig. 102).

Angulo semiinscrito. Angulo semiinscrito es un ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia y uno de sus lados es una semirrecta tangente y el otro es una semirrecta que determina una cuerda. El ángulo DEF (fig. 103).

Angulo Exinscrito. Angulo exinscrito es el ángulo adyacente a un ángulo inscrito. El ángulo 1 (fig. 104).

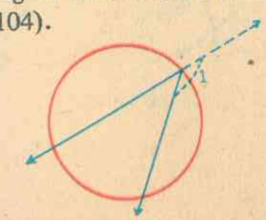


Fig. 104

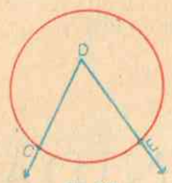


Fig. 105

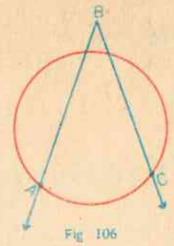


Fig. 106

Angulo Interior. Angulo interior es un ángulo cuyo vértice es un punto interior de la circunferencia y sus lados son semirrectas que cortan a la circunferencia. El ángulo CDE (fig. 105).

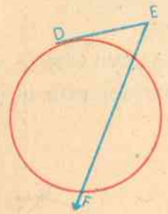


Fig. 107

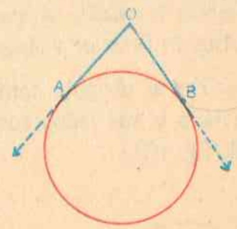


Fig. 108

Angulo Exterior. Angulo exterior es un ángulo cuyo vértice es un punto exterior a la circunferencia y sus lados pueden ser: dos semirrectas secantes, una semirrecta tangente y otra secante o dos semirrectas tangentes. Los ángulos ABC, DEF y AOB (figs. 106, 107 y 108).

TEOREMA. Dos ángulos centrales de una misma circunferencia o de circunferencias iguales son directamente proporcionales a sus arcos correspondientes.

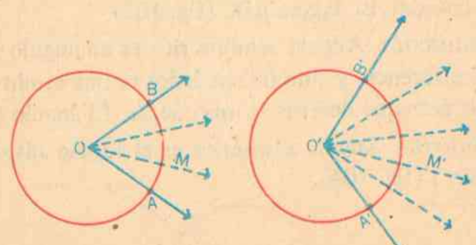


Fig. 109

Hipót. : $\measuredangle$ AOB y A´O´B´.

AMB y A´M´B´ arcos correspondientes.

Tesis: $\dfrac{\measuredangle \text{ AOB}}{\measuredangle \text{ A´O´B´}} = \dfrac{\text{AMB}}{\text{A´M´B´}}$

Siendo los arcos AMB y A´ M´ B´ conmensurables, tomamos una misma medida común que esté contenida 3 veces en el arco AMB y 5 veces en el arco A´M´B´.

Trazando radios por los puntos de división de los arcos el ángulo AOB queda dividido en 3 partes iguales y el ángulo A´O´B´ queda dividido en 5 partes iguales. Por lo tanto:

$$\frac{\text{Arco AMB}}{\text{Arco A´M´B´}} = \frac{3}{5} \text{ y } \frac{\measuredangle \text{ AOB}}{\measuredangle \text{ A´O´B´}} = \frac{3}{5}$$

Luego: $\dfrac{\measuredangle AOB}{\measuredangle A´O´B´} = \dfrac{\text{Arco } AMB}{\text{Arco } A´M´B´}$

Corolarios. 1. La medida de un ángulo cualquiera es el arco comprendido entre sus lados trazado desde el vértice como centro.

2. La medida de un ángulo recto es un cuadrante, la medida de un ángulo plano es una semicircunferencia y la medida del ángulo de una vuelta es una circunferencia.

TEOREMA. La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.

Se distinguen tres casos:

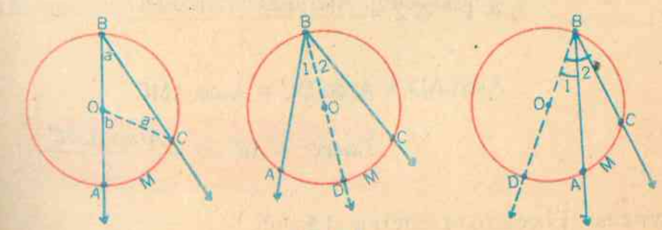


Fig. 110

Hipót. : $\measuredangle$ ABC inscrito en la $\odot$ O.

Tesis: $\measuredangle ABC = \dfrac{\text{Arco AMC}}{2}$

Primer caso. Un lado pasa por el centro.

Se traza el radio OC y se forma el Δ isósceles COB en el cual, se tiene:

$$\measuredangle a = \measuredangle a'$$

$\measuredangle a + \measuredangle a' = b$, por ser el $\measuredangle$ b exterior al Δ COB.

$$2a = b$$

$$\measuredangle a = \frac{b}{2}$$

Siendo la medida del $\measuredangle$ b su arco correspondiente AMC, se tiene:

$$a = \frac{\text{AMC}}{2}$$

Luego: $\measuredangle ABC = \dfrac{\text{Arco AMC}}{2}$

Segundo caso. El centro es interior al ángulo.

Trazando el diámetro BD. Resulta:

$$\measuredangle ABC = \measuredangle 1 + \measuredangle 2.$$

$$\measuredangle 1 = \frac{\text{Arco AD}}{2}$$

$$\measuredangle 2 = \frac{\text{Arco DC}}{2}$$

$$\measuredangle 1 + \measuredangle 2 = \frac{\text{Arco AD} + \text{Arco DC}}{2}$$

Arco AD + Arco DC = Arco AMC.

Luego: $\measuredangle ABC = \dfrac{\text{Arco AMC}}{2}$

Tercer caso. El centro es exterior al ángulo.

Trazando el diámetro BD. Resulta:

$$\measuredangle ABC = \measuredangle 2 - \measuredangle 1$$

$$\measuredangle 2 = \frac{\text{Arco DC}}{2}$$

$$\measuredangle 1 = \frac{\text{Arco DA}}{2}$$

$$\measuredangle 2 - \measuredangle 1 = \frac{\text{Arco DC} - \text{Arco DA}}{2}$$

Arco DC − Arco DA = Arco AMC.

Luego: $\measuredangle ABC = \dfrac{\text{Arco AMC}}{2}$

Corolarios. 1. Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

2. Todos los ángulos inscritos en un mismo arco son iguales.

Arco capaz de un ángulo. El arco que es el lugar geométrico de los vértices de todos los ángulos iguales a un ángulo dado, se llama *arco capaz* de contener dicho ángulo (fig. 111).

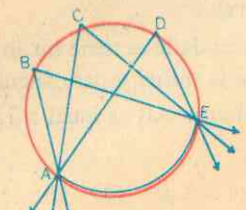


Fig. 111

TEOREMA. La medida de un ángulo semiinscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.

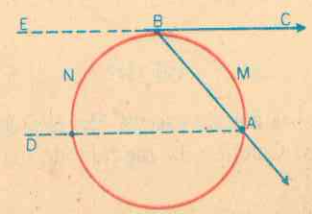


Fig. 112

Hipót.: $\measuredangle$ ABC semiinscrito en la $\odot$ O.

Tesis: $\measuredangle ABC = \frac{\text{Arco AMB}}{2}$

Se traza AD paralela a BC y se prolonga esta hasta E.

Arco AMB = Arco DNB

$\measuredangle$ ABC = $\measuredangle$ BAD por alternos internos

$\measuredangle BAD = \frac{\text{Arco DNB}}{2}$, por inscrito.

Luego: $\measuredangle ABC = \frac{\text{Arco AMB}}{2}$

EJERCICIOS

1. En una circunferencia dada se tiene un ángulo inscrito, construir un ángulo central de doble valor.

2. En una circunferencia dada se tiene un ángulo central, construir un ángulo inscrito del mismo valor.

3. En una circunferencia dada se tiene un ángulo central, construir un ángulo semiinscrito que valga la mitad y otro ángulo semiinscrito de igual valor.

4. En la figura 113, el arco AB es igual a 75 grados. Calcular la medida del ángulo ABC.

R. 52^{o} $30'$

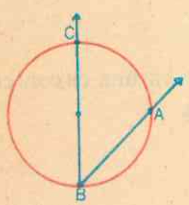


Fig. 113

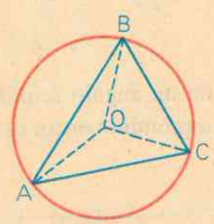


Fig. 114

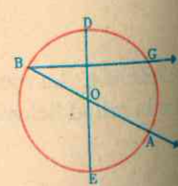


Fig. 115

5. En la figura 114, los ángulos A y C del triángulo ABC miden respectivamente 45 y 70 grados. Calcular la medida de los ángulos centrales AOB, BOC y COA.

R. 140^{o}, 90^{o} y 130^{o}

6. En la figura 115, el arco AC mide 60 grados. Calcular la medida de los ángulos EOA, ABC y BOE.

R. 60^{o}, 30^{o} y 120^{o}

7. En la figura 116, el ángulo 1 mide 115 grados y el ángulo 2 mide 55 grados. Calcular los arcos AB, BC y CA.

R. 130^{o}, 120^{o} y 110^{o}

8. En la figura 117, el ángulo B del triángulo ABC mide 40 grados. Calcular el arco DBE.

R. 140^{o}

9. En la figura 118, el ángulo A mide 90 grados y el ángulo 1 mide 65 grados. Calcular los ángulos 4, 2, 3 y 5.

R. 40^{o}, 45^{o}, 70^{o} y 50^{o}

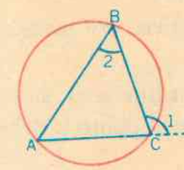


Fig. 116

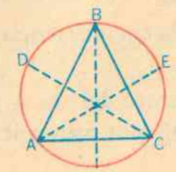


Fig. 117

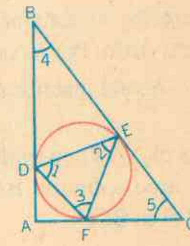


Fig. 118

Cuadriláteros inscriptibles. Un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia cuando todos sus vértices son puntos de la circunferencia.

TEOREMA. Los ángulos opuestos de todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia son suplementarios.

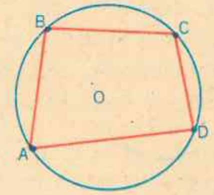


Fig. 119

Hipót. : ABCD cuadrilátero inscrito

Tesis: $\measuredangle A + \measuredangle C = 2\,r.$

$\measuredangle B + \measuredangle D = 2\,r.$

Como todos los ángulos en este cuadrilátero son inscritos, se tiene:

$$\measuredangle A = \frac{\text{Arco BCD}}{2}$$

$$\sphericalangle C = \frac{\text{Arco BAD}}{2}$$

$$\sphericalangle A + \sphericalangle C = \frac{\text{Arcos BCD + BAD}}{2} \quad \text{o} \quad \frac{360^\circ}{2}$$

Luego: $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^\circ$ *o 2r.*

Lo mismo se demuestra con los ángulos B y D.

Recíproco. Todo cuadrilátero que tiene sus ángulos opuestos suplementarios es inscribible en una circunferencia (fig. 119).

Hipót.: $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 2r.$

Tesis: ABCD cuadrilátero inscrito.

Se describe la circunferencia O que contenga los puntos B, A y D del cuadrilátero dado. Por lo tanto:

El $\sphericalangle$ A está inscrito en la circunferencia y tiene por medida la mitad del arco BCD.

Como el $\sphericalangle$ C es suplemento del $\sphericalangle$ A por hipótesis, su medida será la mitad del arco sobrante BAD y por consiguiente el punto C debe estar contenido en el arco BCD.

CONSTRUCCIONES

1. Por un punto pueden pasar una infinidad de circunferencias (fig. 120).

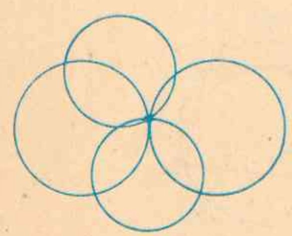


Fig. 120

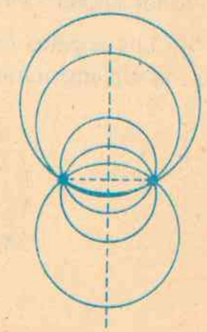


Fig. 121

2. Por dos puntos pueden pasar una infinidad de circunferencias (fig.121).

3. Por tres puntos no puede pasar más que una sola circunferencia.

Problema. Construir una circunferencia que pase por los puntos A, B y C no alineados (fig. 122).

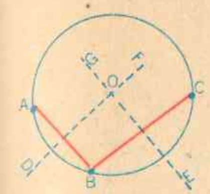


Fig. 122

Respuesta. Se une el punto A con el punto B y el punto B con el punto C y se trazan las mediatrices FD y GE que al cortarse determinan el punto O.

La circunferencia descrita desde el punto, como centro, es la circunferencia pedida.

4. *Problema.* Construir una circunferencia que sea tangente a una recta en un punto dado y pase por un punto exterior a la recta (fig. 123).

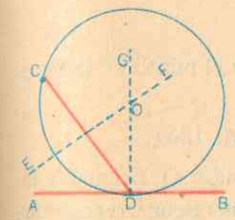


Fig. 123

Respuesta. Se tiene el punto D de la recta AB y el punto exterior C.

Se une el punto D con el punto C y se trazan la mediatriz EF y la perpendicular GD; el punto O intersección de estas dos perpendiculares es el centro de la circunferencia pedida.

5. *Problema.* Trazar desde un punto exterior a una circunferencia dos tangentes a la circunferencia dada (fig. 124).

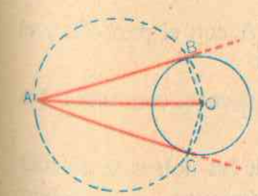


Fig. 124

Respuesta. Se une el centro O de la circunferencia con el punto A y con AO por diámetro se describe una circunferencia auxiliar que al cortar la circunferencia O determina los puntos B y C.

Al unir el punto A con los puntos B y C se tienen las tangentes pedidas.

Las tangentes trazadas desde un punto exterior a una circunferencia son congruentes y forman con la recta que une el punto con el centro de la circunferencia, ángulos congruentes.

6. *Problema.* Trazar las tangentes comunes a dos circunferencias.

1. *Exteriormente* (fig. 125).

Respuesta. Con un radio O´E igual a la diferencia de los radios de las circunferencias dadas y haciendo centro en O´ se describe una circunferencia auxiliar. Desde el punto O y empleando el mismo procedimiento del problema anterior, se trazan las tangentes OE y OF. Se une el punto O´ con los puntos E y F y se prolonga hasta determinar los puntos B y D. Por el punto O se trazan paralelas a O´B y O´D y se obtienen los puntos A y C.

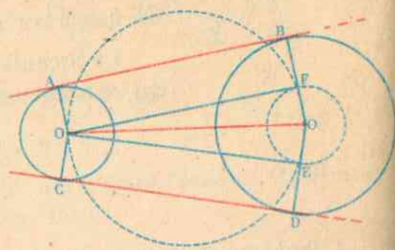


Fig. 125

Al unir el punto A con el punto B y el punto C con el punto D, se tiene las tangentes pedidas.

2. *Interiormente* (fig. 126).

Respuesta. Con un radio O´E igual a la suma de los radios de las circunferencias dadas y haciendo centro en O´se describe una circunferencia auxiliar. Desde el punto O y empleando el mismo procedimiento de los problemas anteriores se trazan las tangentes OE y OF. Se une el punto O´con los puntos E y F y se determinan los puntos A y C.

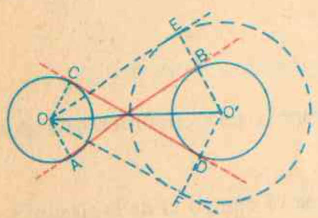


Fig. 126

Al unir el punto A con el punto B y el punto C con el punto D, se tienen las tangentes pedidas.

El correaje de las poleas son aplicaciones de las tangentes comunes a dos circunferencias, tanto exteriores como interiores.

Las exteriores se aplican cuando el movimiento de las poleas se efectúa en el mismo sentido y las interiores cuando el movimiento es en sentido contrario (fig. 127).

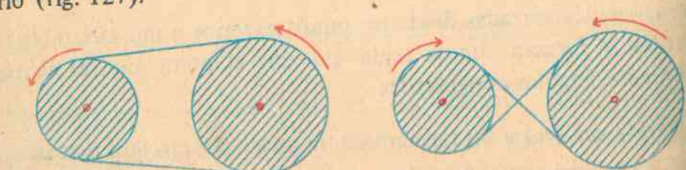


Fig. 127

UNIDAD 7

POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS

Dos circunferencias pueden ocupar las siguientes posiciones relativas:

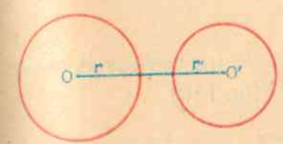


Fig. 128

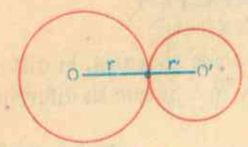


Fig. 129

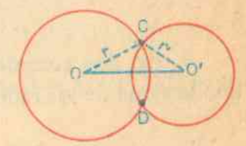


Fig. 130

1o. Las circunferencias no tienen ningún punto común y son exteriores. En este caso todos los puntos de cada una de ellas, son exteriores (fig. 128).

2o. Las circunferencias tienen un punto común y son exteriores. En este caso se dice que son tangentes exteriores y todos los demás puntos de cada una son exteriores (fig. 129).

3o. Las circunferencias tienen dos puntos comunes. En este caso se dice que son secantes (fig. 130).

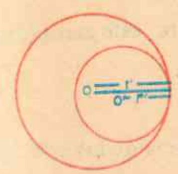


Fig. 131

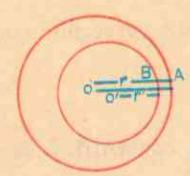


Fig. 132

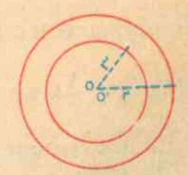


Fig. 133

4o. Las circunferencias tienen un punto común y una es interior a la otra. En este caso se dice que son tangentes interiores y todos los puntos de una de ellas son interiores a la otra (fig. 131).

5o. Las circunferencias no tienen ningún punto común y una es interior a la otra. En este caso todos los puntos de una de ellas son interiores a la otra (fig. 132).

6o. Las circunferencias no tienen ningún punto común y tienen el mismo centro. En este caso se dice que las circunferencias son concéntricas (fig. 133).

Relaciones entre los radios y las distancias de los centros. 1. En dos circunferencias exteriores la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios (fig. 128).

$$OO' > r + r'$$

2. En dos circunferencias tangentes exteriores, la distancia de los centros es igual a la suma de los radios (fig. 129).

$$OO' = r + r'$$

3. En dos circunferencias secantes, la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia (fig. 130).

$$OO' < r + r' \qquad OO' > r - r'$$

4. En dos circunferencias tangentes interiormente, la distancia de los centros es igual a la diferencia de los radios (fig. 131).

$$OO' = r - r'$$

5. En dos circunferencias interiores la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios (fig. 132).

$$OO' = r - r' - BA$$

Al suprimir el término –BA del segundo miembro, este aumenta.

Luego: $OO' < r - r'$

6. En dos circunferencias concéntricas, la distancia de los centros es igual a cero (fig. 133).

$$OO' = O$$

CONSTRUCCIONES

1. Problema. Con un radio dado trazar una circunferencia tangente a dos rectas no paralelas (fig. 134).

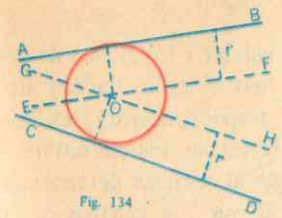


Fig. 134

Respuesta. Se tienen las rectas AB y CD y el radio dado r.

A una distancia igual al radio se trazan a las rectas dadas las paralelas EF y GH que al cortarse determinan el punto O que es el centro de la circunferencia pedida.

2. Problema. Trazar dos circunferencias tangentes exteriores en un punto de una recta y que pasen por dos puntos dados (fig. 135).

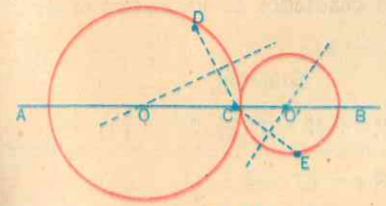


Fig. 135

Respuesta. Se tiene la recta AB y el punto C y los puntos dados D y E.

Se une el punto C con los puntos D y E.

Las mediatrices trazadas a los segmentos CD y CE al cortar la recta AB determinan los puntos O y O´que son los centros de las circunferencias pedidas.

3. Problema. Con un radio dado trazar una circunferencia tangente a una recta y a una circunferencia dadas (fig. 136).

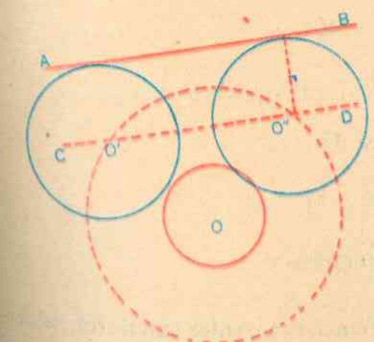


Fig. 136

Respuesta. Se tiene la recta AB, la circunferencia O y el radio r.

A una distancia igual al radio r se traza la recta CD paralela a AB. Con un radio igual al radio dado más el radio de la circunferencia y haciendo centro en O se traza una circunferencia auxiliar que al cortar la paralela CD determina los puntos O´y O´´ que son centros de la circunferencia pedida.

4. Problema. Con un radio dado trazar una circunferencia tangente a dos circunferencias dadas (fig. 137).

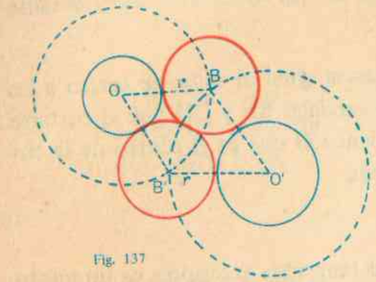


Fig. 137

Respuesta. Se tienen las circunferencias O y O´ y el radio dado r.

Con radios iguales a los radios de las circunferencias más el radio dado y haciendo centro, respectivamente, en los puntos O y O´ se trazan dos circunferencias auxiliares que al cortarse determinan los puntos B y B´ que son centros de la circunferencia pedida.

PROBLEMAS.

1. Calcular la distancia de los centros de dos circunferencias tangentes exteriores, sabiendo que la suma de los cuadrados de los radios es de 25 $cm.^2$ y el producto de ellos es de 12 cm^2.

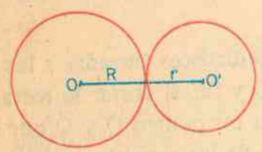


Fig. 138

Solución.

$R^2 + r^2 = 25\ cm^2.$ (1)

$R.r = 12\ cm^2$ (2)

Al multiplicar por 2 la (2) igualdad, nos da:

$2\,R.r = 24$ (3)

Sumando ordenadamente (1) y (3), resulta:

$R^2 + 2\,Rr + r^2 = 49$

$(R + r)^2 = 49$

$\sqrt{(R + r)^2} = \sqrt{49}$

$R + r = 7$

R. $OO' = 7$

2. Calcular los radios de dos circunferencias tangentes exteriores, sabiendo que la suma de los radios es de 20 cm. y el radio de la mayor es igual al cuadrado del radio de la menor.

Solución.

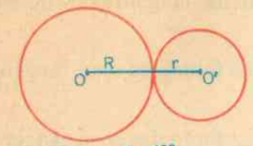


Fig. 139

$R + r = 20$ cm. (1)

$R = r^2$ (2)

Sustituyendo en (1) el valor de R por su igual r^2, resulta:

$r^2 + r = 20$

$r^2 + r - 20 = 0$

$\left.\begin{array}{r} R + r = 20 \\ r = 4 \end{array}\right\} R = 16$

Factorizando tenemos:

$(r + 5)(r - 4) = 0$

$r + 5 = 0; r = -5$

$r - 4 = 0; r = 4$

R. $R = 16.\ r = 4$

3. La diferencia de los radios de dos circunferencias tangentes interiores es de 3 cm. y el producto de los mismos es de 40 cm. Calcular los radios.

Solución.

$R - r = 3$ (1)

$R.\,r = 40$ (2)

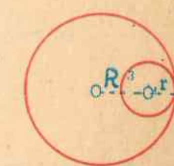


Fig. 140

En la igualdad (1), tenemos:

$R = 3 + r$ (3)

Sustituyendo en la igualdad (2) R por su valor $3 + r$, resulta:

$(3 + r)\,r = 40$

$r^2 + 3r - 40 = 0$

Factorizando tenemos:

$(r + 8)(r - 5) = 0$

$r + 8 = 0; r = -8$

$r - 5 = 0; r = 5$

$\left.\begin{array}{r} R - r = 3 \\ r = 5 \end{array}\right\} R = 8$

R. $R = 8.\ r = 5$

4. La distancia de los centros de dos circunferencias tangentes es de 44 cm. Si sus radios están en la relación de 8 a 3:

a) ¿Cuál es el valor de los radios para que las circunferencias sean tangentes exteriormente?

b) ¿Cuál es el valor de los radios para que las circunferencias sean tangentes interiormente?

Solución 1.

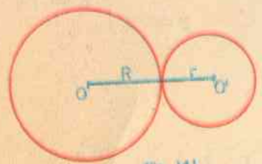


Fig. 141

$$OO' = R + r = 44$$

$$\frac{R}{r} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{R + r}{r} = \frac{8 + 3}{3}$$

$$\frac{44}{r} = \frac{11}{3}$$

$$11\,r = 44 \times 3$$

$$r = \frac{44 \times 3}{11}$$

$$r = 12 \qquad R = 44 - 12 = 32$$

R. R = 32. r = 12.

Solución 2.

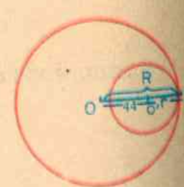


Fig. 142

$$44 + r = R$$

$$\frac{R}{r} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{44 + r}{r} = \frac{8}{3}$$

$$8\,r = 3\,(44 + r)$$

$$8\,r = 132 + 3\,r$$

$$8\,r - 3\,r = 132$$

$$5\,r = 132$$

$$r = \frac{132}{5} = 26.4$$

R. R = 70.4. r = 26.4

$$R = 44 + 26.4 = 70.4$$

5. La distancia de los centros de dos circunferencias tangentes interiores es de 12 cm. Calcular los radios sabiendo que están en la relación de 4 a 3.

Solución.

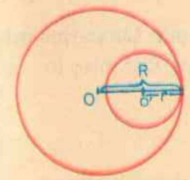


Fig. 143

$$OO' = 12$$

$$r + 12 = R$$

$$\frac{R}{r} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{r + 12}{r} = \frac{4}{3}$$

$$4r = 3\,(r + 12)$$

$$4r = 3r + 36$$

$$4r - 3r = 36$$

$$r = 36$$

R. R = 48. r = 36.

$$R = 36 + 12 = 48.$$

6. ¿Cuál es la distancia entre los centros de dos circunferencias tangentes exteriores si la suma de los cuadrados de los radios es de 45 cm.^{2} y el producto de ellos es de 18 cm.^{2} ?

R. 9 cm.

7. La distancia entre los centros de dos circunferencias tangentes interiores es de 3 cm. Si estas dos circunferencias fueran tangentes exteriores, el radio de la mayor sería 4 veces el de la menor. Calcular los radios.

R. R = 4. r = 1.

8. Tres circunferencias cuyos centros están sobre una misma recta son tangentes exteriormente. La distancia entre el centro de la primera y el centro de la tercera es de 27 cm. Calcular sus radios sabiendo que el radio de la primera es dos veces el radio de la segunda y el radio de la segunda es dos veces el radio de la tercera.

R. R = 12. r = 6. r' = 3.

9. La suma de los radios de dos circunferencias tangentes exteriores es de 42 cm. y el radio de la mayor es igual al cuadrado del radio de la menor. Calcular los radios de las dos circunferencias.

R. R = 36. r = 6.

10. La suma de los radios de dos circunferencias tangentes exteriores es de 4/9 de m. y el radio de la menor es igual al cuadrado del radio de la mayor. Calcular los radios de las dos circunferencias.

R. R = 1/3 . r = 1/9.

11. La diferencia entre los radios de dos circunferencias tangentes interiores es de 4 cm. y el producto de los mismos es de 96 cm. Calcular los radios.

R. R = 12. r = 8.

12. La distancia entre los centros de dos circunferencias tangentes es de 48 cm. Si sus radios están en la relación de 5 a 3; ¿cuál es la longitud de los radios para que las circunferencias sean tangentes exteriormente?

R. R = 30. r = 18.

13. En el problema anterior. ¿Cuál es la longitud de los radios para que las circunferencias sean tangentes interiormente?

R. R = 120. r = 72.

UNIDAD 8

POLIGONOS

Definiciones. Polígono es un conjunto de infinitos puntos limitado por la intersección de varios semiplanos en un mismo plano.

En el plano P (fig. 144), se trazan los segmentos FG, HI, JK, LM, NQ.

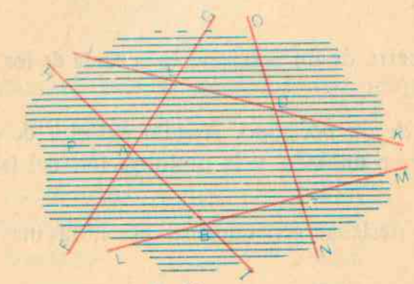


Fig. 144

El segmento FG divide el plano P en dos semiplanos.
El segmento HI divide el plano P en dos semiplanos.
El segmento JK divide el plano P en dos semiplanos.
El segmento LM divide el plano P en dos semiplanos.
El segmento NQ divide el plano P en dos semiplanos.

La región ABCDE que es un conjunto de infinitos puntos comunes a varios semiplanos de un mismo plano, cuyos contornos se cortan dos a dos, se denomina polígono.

Por consiguiente:

Polígono es un conjunto de infinitos puntos de un plano cuyo contorno es una línea poligonal convexa cerrada que está en dicho plano.

En un polígono hay que considerar los lados, los ángulos, los vértices, las diagonales y el perímetro.

Lados. Lados de un polígono son los segmentos que forman su contorno.

Angulos. Angulos de un polígono son los formados por dos lados consecutivos.

Vértices. Vértices de un polígono son los de los ángulos del polígono.

Diagonales. Diagonales de un polígono son los segmentos que unen dos vértices no consecutivos. La diagonal AD (fig. 145).

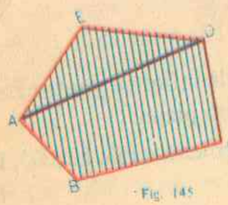


Fig. 145

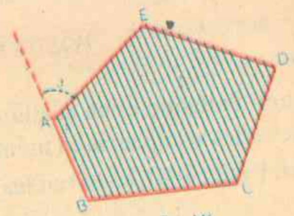


Fig. 146

Perímetro. Perímetro de un polígono es la suma de los lados que forman su contorno.

Angulo exterior de un polígono. Angulo exterior de un polígono es el que está formando por un lado y la prolongación del lado adyacente. El ángulo a (fig. 146).

Los polígonos se designan generalmente por letras mayúsculas colocadas en los vértices.

Clases de polígonos:

Polígono convexo. Polígono convexo es aquel cuyo contorno es una línea poligonal convexa y por consiguiente cada uno de los ángulos interiores es menor que 180°. El polígono ABCDE (fig. 147).

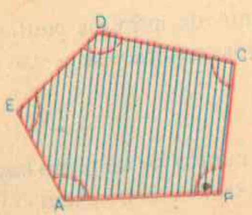


Fig. 147

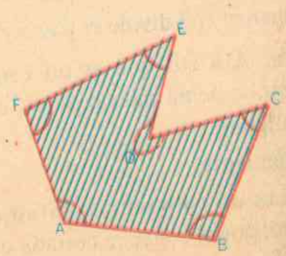


Fig. 148

Polígono cóncavo. Polígono cóncavo es aquel cuyo contorno es una línea poligonal cóncava y uno o varios ángulos interiores son mayores que 180°. El polígono ABCDEF (fig. 148).

Polígono equilátero. Polígono equilátero es el que tiene todos sus lados congruentes.

Polígono equiángulo. Polígono equiángulo es el que tiene todos sus ángulos congruentes.

Polígono regular. Polígono regular es el que, siendo convexo, tiene tanto sus lados como sus ángulos congruentes. El polígono ABCDEF (fig. 149).

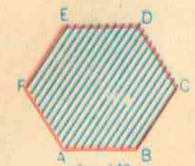


Fig. 149

Teniendo en cuenta el número de lados, los polígonos toman los siguientes nombres:

Triángulo	*3 lados*
Cuadrilátero	*4 lados*
Pentágono	*5 lados*
Hexágono	*6 lados*
Heptágono	*7 lados*
Octágono	*8 lados*
Eneágono	*9 lados*
Decágono	*10 lados*
Endecágono	*11 lados*
Dodecágono	*12 lados*
Pentedecágono	*15 lados*

Los demás polígonos se designan según el número de lados:

Polígono de 14 lados, polígono de 18 lados, etc.

Polígonos congruentes. Dos polígonos son congruentes cuando existe correspondencia entre sus elementos. Si los pares de lados correspondientes son congruentes y los pares de ángulos correspondientes son congruentes, se dice que los polígonos son congruentes. Los polígonos ABCDE y A´B´C´D´E´ (fig. 150).

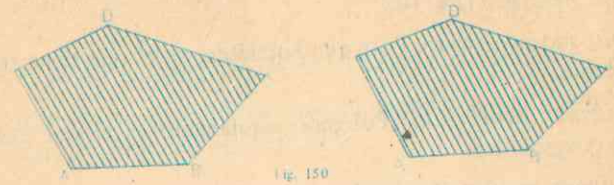


Fig. 150

De la congruencia de los polígonos ABCDE y A´B´C´D´E´, se deduce:

$AB = A'B'$	o	$AB \cong A'B'$
$BC = B'C'$	o	$BC \cong B'C'$
$CD = C'D'$	o	$CD \cong C'D'$
$DE = D'E'$	o	$DE \cong D'E'$
$EA = E'A'$	o	$EA \cong E'A'$
$\measuredangle A = \measuredangle A'$	o	$\measuredangle A \cong \measuredangle A'$
$\measuredangle B = \measuredangle B'$	o	$\measuredangle B \cong \measuredangle B'$
$\measuredangle C = \measuredangle C'$	o	$\measuredangle C \cong \measuredangle C'$
$\measuredangle D = \measuredangle D'$	o	$\measuredangle D \cong \measuredangle D'$
$\measuredangle E = \measuredangle E'$	o	$\measuredangle E \cong \measuredangle E'$

Como la igualdad y la congruencia significan lo mismo, podemos sustituir un término por el otro.

Corolario. Dos polígonos congruentes pueden descomponerse en igual número de triángulos congruentes y dispuestos del mismo modo.

TEOREMA. La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo es igual a tantas veces dos ángulos rectos como lados tiene el polígono menos dos.

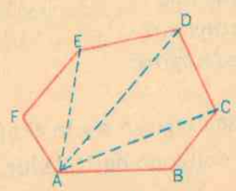


Fig. 151

Hipot. : Polígono de n lados.
Tesis: Suma ángulos interiores: 2 r (n–2) o 180º (n–2)

Al trazar desde el vértice A todas las diagonales que parten de dicho vértice, el polígono queda descompuesto en tantos triángulos como lados tiene el polígono menos dos, o sea n – 2 triángulos.

Como la suma de los ángulos del polígono es la misma que la de los ángulos de los triángulos y la suma de los ángulos interiores de cada triángulo es igual a 2 rectos, tenemos:

Suma ángulos interiores: 2r(n – 2) o 180º (n – 2)

Valor de un ángulo interior de un polígono regular. Como el polígono regular tiene iguales todos sus ángulos interiores, el valor de uno de ellos será igual a la suma de todos los ángulos dividida entre el número de lados, luego:

Valor ángulo interior: $\dfrac{2r(n-2)}{n}$ o $\dfrac{180^\circ(n-2)}{n}$

TEOREMA. La suma de los ángulos exteriores de todo polígono convexo, es igual a cuatro ángulos rectos.

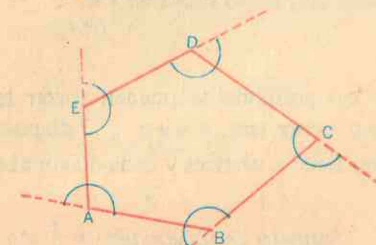


Fig. 152

Hipót. : Polígono de n lados
Tesis: Suma ángulos exteriores: 4 r. o 360º

El ángulo interior y el ángulo exterior en cada vértice son suplementarios y por consiguiente suman 2r. Por lo tanto la suma total de los ángulos interiores y exteriores de un polígono es igual a 2rn.

Restando de la suma total de los ángulos interiores y exteriores, los ángulos interiores, tenemos:

$$2rn - 2r(n-2) = 2rn - 2rn + 4r.$$

Reduciendo nos da: Suma ángulos exteriores = 4r. o 360º

Valor de un ángulo exterior de un polígono regular. Como todos los ángulos interiores de un polígono regular son iguales, los exteriores también serán iguales y por lo tanto el valor de uno de ellos será igual a la suma de todos los ángulos dividida entre el número de lados, luego:

$$\textit{Valor ángulo exterior} = \frac{4\,r}{n} \quad o \quad \frac{360^o}{n}$$

TEOREMA. El número de diagonales de un polígono es igual al producto de la mitad del número de lados del polígono por el número de lados menos tres.

Hipót.: Polígono de n lados.

Tesis: Número de diagonales:

$\frac{n}{2}$ (n – 3)

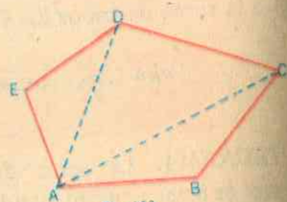


Fig. 153

De cada vértice del polígono se pueden trazar tantas diagonales como lados tiene el polígono menos tres, o sea n – 3 diagonales.

Como el polígono tiene n vértices y cada diagonal está repetida dos veces, tenemos:

$$\textit{Número de diagonales} = \frac{n}{2}(n-3)$$

Valor de los distintos elementos de los primeros 10 polígonos regulares.

Polígonos.	Lados.	Angs. ints.	Angs. exts.	Angulo interior.	Angulo exterior.	Diagonales.
triángulo	3	180º	360º	60º	120º	0
cuadrilátero	4	360º	360º	90º	90º	2
pentágono	5	540º	360º	108º	72º	5
hexágono	6	720º	360º	120º	60º	9
heptágono	7	900º	360º	128º34'17" $\frac{1}{7}$	51º25'42" $\frac{6}{7}$	14
octógono	8	1080º	360º	135º	45º	20
eneágono	9	1260º	360º	140º	40º	27
decágono	10	1440º	360º	144º	36º	35
undecágono	11	1620º	360º	147º16'21" $\frac{9}{11}$	32º43'38" $\frac{2}{11}$	44
dodecágono	12	1800º	360º	150º	30º	54

PROBLEMAS

1. Calcular el valor de los ángulos interiores y el número de diagonales de un polígono de 18 lados.

Solución.

De la fórmula 2 r (n – 2), se deduce:

$$180^o\,(18-2) = 180 \times 16 = 2.880^o$$

R. 2.880º

De la fórmula $\frac{n}{2}$ (n - 3), se deduce:

$$\frac{18}{2}\,(18-3), = 9 \times 15 = 135$$

R. 135 diagonales.

2. Calcular el número de lados de un polígono sabiendo que sus ángulos interiores suman 4.140.

Solución.

De la fórmula, 2r(n – 2), se deduce:

$$180^o\,(n-2) = 4.140$$
$$180\,n - 360 = 4.140$$
$$180\,n = 4.140 + 360$$
$$n = \frac{4.500}{180} = 25$$

R. 25 lados.

3. Calcular el número de diagonales de un polígono, sabiendo que sus ángulos interiores suman 2.160.

Solución.

De la fórmula, 2 r (n – 2), se deduce:

$$180^o\,(n-2) = 2.160$$
$$180n - 360 = 2.160$$
$$180n = 2.160 + 360$$
$$n = \frac{2.520}{180} = 14 \text{ lados.}$$

Aplicando la fórmula $\frac{n}{2}(n-3)$, se tiene:

$$\frac{14}{2}(14-3) = 7 \times 11 = 77.$$

R. 77 diagonales.

4. El valor del ángulo interior de un polígono regular es de $\frac{7}{4}$ de recto. Calcular el número de lados y las diagonales del polígono.

Solución.

Aplicando la fórmula, $\frac{2r(n-2)}{n}$ se tiene:

$$\frac{2(n-2)}{n} = \frac{7}{4}$$

$$8(n-2) = 7n$$

$$8n - 16 = 7n$$

$$8n - 7n = 16$$

$$n = 16$$

Aplicando la fórmula, $\frac{n}{2}(n-3)$ se tiene:

$$\frac{16}{2}(16-3) = 8 \times 13 = 104.$$

R. 16 lados y 104 diagonales.

5. El número de diagonales de un polígono es 27. Calcular sus lados.

Solución.

Aplicando la fórmula, $\frac{n}{2}(n-3)$, se tiene:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 27$$

$$n(n-3) = 54$$

$$n^2 - 3n - 54 = 0$$

Factorizando, tenemos:

$$(n+6)(n-9) = 0$$

$$n + 6 = 0;\ n = -6$$

$$n - 9 = 0;\ n = 9$$

R. 9 lados.

6. Calcular el ángulo interior de un polígono regular, sabiendo que el número de diagonales es 35.

Solución.

Aplicando la fórmula, $\frac{n}{2}(n-3)$, se tiene:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 35.$$

$$n(n-3) = 70$$

$$n^2 - 3n - 70 = 0$$

Factorizando, tenemos:

$$(n-10)(n+7) = 0$$

$$n - 10 = 0;\ n = 10$$

$$n + 7 = 0;\ n = -7$$

$$n = 10 \text{ lados}$$

Aplicando la fórmula, $\frac{2r(n-2)}{n}$ se tiene:

$$\frac{180(10-2)}{10} = 18 \times 8 = 144$$

R. 144.

7. Los ángulos interiores y los ángulos exteriores de un polígono suman 40 rectos. Calcular los lados del polígono. *R. 20*

8. El ángulo interior de un polígono regular mide $\frac{16}{9}$ de recto. Calcular los lados del polígono. *R. 18*

9. Los ángulos interiores de un polígono suman 4.680°. Calcular los lados del polígono.

R. 28

10. Los ángulos interiores y exteriores de un polígono suman 5.760°. Calcular los lados del polígono.

R. 32

11. Los ángulos interiores de un polígono suman 7.920°. Calcular las diagonales del polígono.

R. 989

12. Calcular las diagonales de un polígono si sus ángulos interiores y exteriores suman 7.560°.

R. 819

13. Si los ángulos interiores de un polígono suman 100 rectos. Calcular las diagonales que se pueden trazar en dicho polígono.

R. 1.274

14. El ángulo interior de un polígono regular mide 165°. Calcular los lados del polígono.

R. 24

15. El ángulo interior de un polígono regular mide 172° 30'. Calcular las diagonales del polígono.

R. 1.080

16. Calcular el número de lados del polígono regular cuyo ángulo interior mide $\frac{13}{7}$ de recto.

R. 28

17. Calcular el número de diagonales del polígono regular cuyo ángulo interior mide $\frac{32}{17}$ de recto.

R. 527

18. Los ángulos de un pentágono ABCDE son como los números 2, 3, 4, 5 y 6. Calcular el valor de cada uno de los ángulos.

R. $A = 54°$; $B = 81°$; $C = 108°$; $D = 135°$; $E = 162°$.

19. Si el número de diagonales de un polígono es 35, calcular sus lados.

R. 10

20. Calcular el ángulo interior de un polígono regular, sabiendo que el número de diagonales es 44.

R. $147°\ 16'\ 21''\ \frac{9}{11}$

CUADRILATEROS

Definiciones. Se llama cuadrilátero al polígono de cuatro lados. El cuadrilátero ABCD (fig. 154).

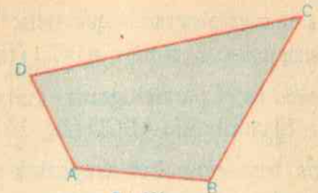


Fig. 154

Clasificación de los cuadriláteros. Los cuadriláteros se clasifican en *paralelogramos, trapecios y trapezoides.*

Paralelogramo. Paralelogramo es el cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos. El paralelogramo ABCD (fig. 155).

Fig. 155

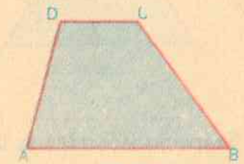


Fig. 156

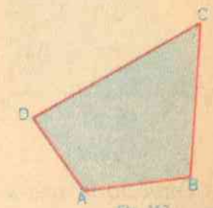


Fig. 157

Trapecio. Trapecio es el cuadrilátero que tiene solamente dos lados opuestos paralelos. El trapecio ABCD (fig. 156).

Trapezoide. Trapezoide es el cuadrilátero cuyos lados opuestos no son paralelos. El trapezoide ABCD (fig. 157).

Clasificación de los paralelogramos. Los paralelogramos se clasifican en *cuadrados, rectángulos, rombos y romboides.*

Cuadrado. Cuadrado es el paralelogramo que tiene los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos rectos. El cuadrado ABCD (fig. 158).

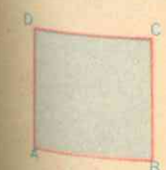


Fig. 158

Fig. 159

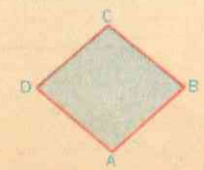


Fig. 160

Fig. 161

Rectángulo. Rectángulo es el paralelogramo que tiene los lados contiguos desiguales y los cuatro ángulos rectos. El rectángulo ABCD (fig. 159).

Rombo. Rombo es el paralelogramo que tiene sus cuatro lados iguales y los ángulos contiguos desiguales. El rombo ABCD (fig. 160).

Romboide. Romboide es el paralelogramo que tiene los lados y los ángulos contiguos desiguales. El romboide ABCD (fig. 161).

Clasificación de los trapecios. Los trapecios se clasifican en: *trapecio rectángulo, trapecio isósceles y trapecio escaleno.*

Trapecio rectángulo. Trapecio rectángulo es el que tiene dos ángulos rectos. El trapecio ABCD (fig. 162).

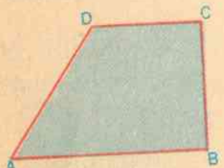


Fig. 162

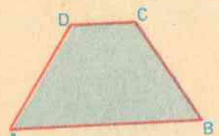


Fig. 163

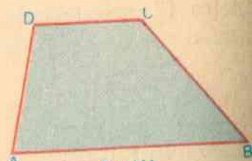


Fig. 164

Trapecio isósceles. Trapecio isósceles es el que tiene iguales los lados no paralelos. El trapecio ABCD (fig. 163).

Trapecio escaleno. Trapecio escaleno es el que no es ni rectángulo ni isósceles. El trapecio ABCD (fig. 164).

Bases del trapecio son los dos lados paralelos.

Altura del trapecio es la distancia entre las dos bases.

Base media del trapecio es la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos.

PROPIEDADES DE LOS PARALELOGRAMOS

TEOREMA. En todo paralelogramo sus lados opuestos son iguales.

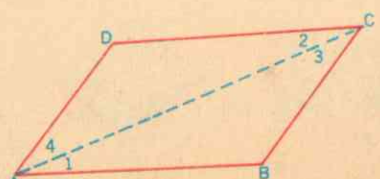


Fig. 165

Hipót. : AB ∥ DC; AD ∥ BC.

Tesis : AB = DC; AD = BC.

Se traza la diagonal AC.

Los triángulos ADC y ABC son iguales por tener un lado igual adyacente a ángulos respectivamente iguales, a saber:

AC lado común a ambos triángulos.

∡ 1 = ∡ 2, por alternos internos.

∡ 3 = ∡ 4, por alternos internos.

Luego: AB = DC y AD = BC

Recíproco. Un cuadrilátero es un paralelogramo si sus lados opuestos son iguales.

TEOREMA. En todo paralelogramo sus ángulos opuestos son iguales.

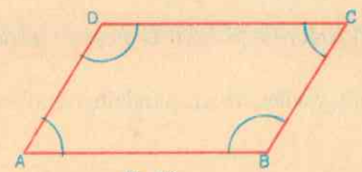


Fig. 166

Hipót.: AB ∥ DC, AD ∥ BC

Tesis: ∡ A = ∡ C, ∡ B = ∡ D.

Los ángulos A y C tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en sentido contrario lo mismo que los ángulos B y D.

Luego: ∡ A = ∡ C, y ∡ B = ∡ D

Recíproco. Un cuadrilátero es un paralelogramo si sus ángulos opuestos son iguales.

TEOREMA. Todo cuadrilátero que tiene dos lados opuestos iguales y paralelos es un paralelogramo.

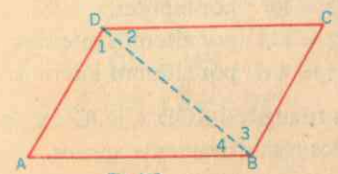


Fig. 167

Hipót. AB = DC, AB ∥ DC
Tesis: ABCD paralelogramo

Se traza la diagonal DB.

Los triángulos ABD y BDC son iguales por tener un ángulo igual comprendido entre lados respectivamente iguales, a saber:

$\measuredangle 2 = \measuredangle 4$ por alternos internos
AB = DC por hipótesis.
BD común a ambos triángulos.

Como en triángulos iguales a lados iguales se oponen ángulos iguales, se tiene:

$$\measuredangle 1 = \measuredangle 3$$

Siendo los ángulos 1 y 3 alternos internos, resulta:

$$AD \parallel BC$$

Luego: El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

TEOREMA. Las diagonales de un paralelogramo se dividen mutuamente en partes iguales.

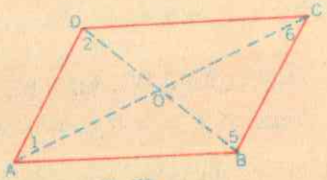


Fig. 168

Hipót.: ABCD paralelogramo
AC y BD diagonales.
Tesis : OA = OC, OB = OD.

Considerando los triángulos AOD y BOC, tenemos:

AD = BC por hipótesis.
$\measuredangle 2 = \measuredangle 5$ por alternos internos.
$\measuredangle 1 = \measuredangle 6$ por alternos internos.

Por lo tanto: Los triángulos AOD y BOC son iguales por tener un lado igual adyacente a ángulos respectivamente iguales.

Luego: OA = OC y OB = OD.

Recíproco. Si las diagonales de un cuadrilátero se dividen mutuamente en partes iguales, es un paralelogramo.

Propiedades particulares. El rectángulo, el rombo y el cuadrado son paralelogramos que además de tener las propiedades generales de todos los paralelogramos, tienen otras particulares.

Las diagonales de un rectángulo son iguales.
Las diagonales de un rombo son desiguales y perpendiculares entre sí.
Las diagonales de un rombo son bisectrices de los ángulos del rombo.
Las diagonales de un cuadrado son iguales y perpendiculares entre sí.
Las diagonales de un cuadrado son bisectrices de los ángulos del cuadrado.
En todo paralelogramo la intersección de las diagonales es un centro de simetría.

PROPIEDADES DE LOS TRAPECIOS

TEOREMA. La base media de un trapecio es paralela a las bases e igual a su semisuma.

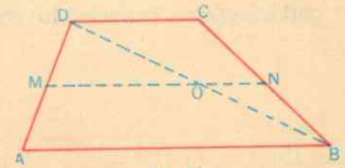


Fig. 169

Hipót.: ABCD trapecio, MN base media
Tesis : MN ∥ AB y DC. $MN = \dfrac{AB + DC}{2}$

Se traza la diagonal DB.

En el triángulo ABD, la recta OM es paralela e igual a la mitad de AB.
En el triángulo BCD, la recta ON es paralela e igual a la mitad de DC.
Por consiguiente ON es paralela a AB por ser DC paralela a AB.

$$OM + ON = MN.$$

Luego: MN ∥ AB y DC.

Además:
$$OM = \frac{AB}{2} \qquad ON = \frac{DC}{2}$$

Sumando ordenadamente, se tiene:

$$OM + ON = \frac{AB}{2} + \frac{DC}{2}$$

$$OM + ON = MN$$

Luego: $MN = \dfrac{AB + DC}{2}$

Los ángulos adyacentes a los lados no paralelos de un trapecio, son suplementarios.

Los ángulos adyacentes a una misma base de un trapecio isósceles, son iguales.

Las diagonales de un trapecio isósceles son iguales.

La mediatriz común a las dos bases de un trapecio isósceles, es un eje de simetría.

CONSTRUCCIONES

1. Construir un paralelogramo conociendo dos lados y el ángulo comprendido (fig. 170).

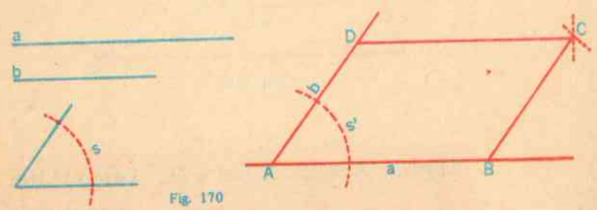


Fig. 170

Respuesta. Se traza una recta cualquiera y en un punto A de la misma se construye un ángulo s´=s. Se toma AB = a y AD = b.

Haciendo centro en B y D y con medidas iguales a AB y AD respectivamente se describen arcos que al cortarse determinan el punto C.

Uniendo el punto C con B y con D se obtiene el paralelogramo pedido ABCD.

2. Construir un paralelogramo conociendo un lado y las dos diagonales (fig. 171).

Fig. 171

Respuesta. Se toma AB= a. Con el lado AB y la mitad de cada diagonal se construye el triángulo AOB. Se prolongan los lados del triángulo por el vértice O y se toma OD =OB y OC =OA.

Uniendo el punto D con A, C con B y D con C se obtiene el paralelogramo pedido ABCD.

3. Construir un paralelogramo conociendo las dos diagonales y el ángulo que forman (fig. 172).

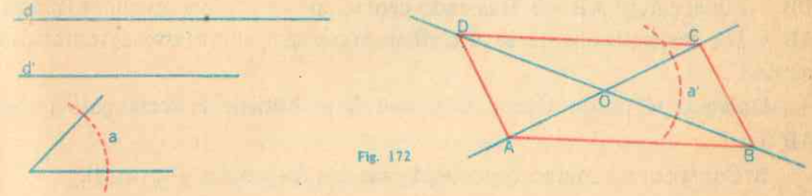


Fig. 172

Respuesta. Se construye un ángulo a´=a y se prolongan sus lados por el vértice O. Se toma la mitad de la diagonal d y haciendo centro en O se determinan los puntos D y B, luego se toma la mitad de la diagonal d´ y haciendo centro en el mismo punto O se determinan los puntos A y C.

Uniendo consecutivamente los extremos, se obtiene el paralelogramo pedido ABCD.

4. Construir un cuadrado conociendo la diagonal (fig. 173).

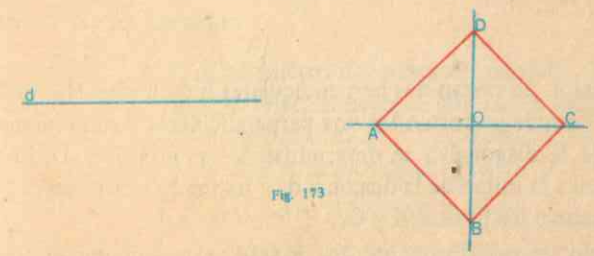


Fig. 173

Respuesta. Se trazan dos perpendiculares indefinidas. Haciendo centro en el punto O donde se cortan las dos perpendiculares y con una medida igual a la mitad de la diagonal se determinan los puntos A, B, C y D, que al unirlos consecutivamente nos dan el cuadrado pedido ABCD.

5. Construir un rectángulo conociendo un lado y la diagonal (fig. 174).

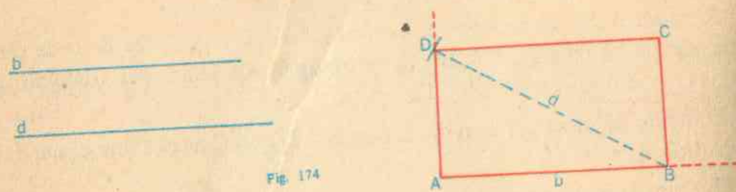


Fig. 174

Respuesta. Se construye el triángulo rectángulo BAD cuya hipotenusa DB = d y el cateto AB = b. Haciendo centro en D y B y çon medidas iguales a AB y DA respectivamente se describen arcos que al cortarse determinan el punto C.

Uniendo el punto C con B y con D se obtiene el rectángulo pedido ABCD.

6. Construir un rombo conociendo sus dos diagonales (fig. 175).

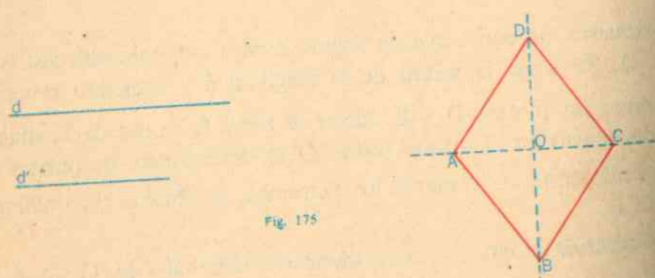


Fig. 175

Respuesta. Se trazan dos perpendiculares indefinidas. Haciendo centro en el punto O donde se cortan las dos perpendiculares y con una medida igual a la mitad de la diagonal d se determinan los puntos B y D, luego con una medida igual a la mitad de la diagonal d´y haciendo centro en el mismo punto O se determinan los puntos A y C.

Uniendo consecutivamente los extremos se obtiene el rombo pedido ABCD.

7. Construir un trapecio isósceles conociendo sus dos bases y la altura (fig. 176).

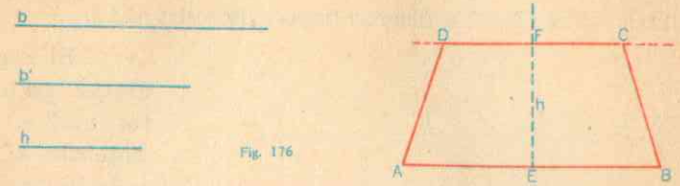


Fig. 176

Respuesta. Se traza AB = b y la mediatriz EF = h. Por el punto F se traza una paralela a AB. Haciendo centro en el punto F y con una medida igual a la mitad de b´se determinan los puntos D y C.

Uniendo D con A y C con B se obtiene el trapecio pedido ABCD.

EJERCICIOS

1. Construir un paralelogramo conociendo un lado y las dos diagonales.
2. Construir un rombo conociendo un lado y una diagonal.
3. Construir un cuadrado conociendo el lado.
4. Construir un trapecio rectángulo conociendo las dos bases y la altura.
5. Construir un trapecio isósceles sabiendo que la base mayor mide 6 cm. y que los lados no paralelos miden 3 cm. cada uno y forman con la base mayor ángulos de 45°.
6. Calcular el lado de un rombo si su perímetro es equivalente al de un triángulo equilátero cuyo lado mide 24 cm.
7. El perímetro de un rectángulo es de 120 cm. Calcular sus dos dimensiones sabiendo que están en la relación de 2 a 3.
8. El perímetro de un paralelogramo es de 320 cm. y uno de los lados es $\frac{3}{5}$ del otro. Calcular los lados.
9. En la figura 176–1 el perímetro del triángulo isósceles ABC es de 65 cm. y la relación de cada uno de los lados iguales con el lado desigual es de 5 a 3, además los puntos B, A y C son puntos medios de ED, EF y FD. Calcular:

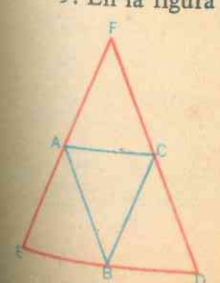


Fig. 176-1

1. El perímetro del triángulo EFD.
2. El perímetro del paralelogramo EACB.
3. El perímetro del rombo AFCB.
4. El perímetro del trapecio EACD.

10. En el problema anterior el ángulo E mide 70 grados. Calcular:

1. Los ángulos del paralelogramo EACB.
2. Los ángulos del trapecio EACD.

11. En la figura 176–2 se tiene un trapecio isósceles ABCD.

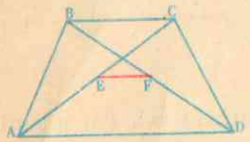


Fig. 176-2

El segmento EF que une los puntos medios de las diagonales AC y BD, mide 10 cm. y la base menor BC mide 20 cm. Calcular:

1. La base media.
2. La base mayor.

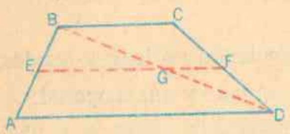


Fig. 176-3

12. En la figura 176–3 se tiene el trapecio ABCD. Calcular la base media EF y la base menor BC, sabiendo que la base mayor AD mide 30 cm. y GF mide 5 cm.

13. En un paralelogramo dos ángulos consecutivos miden x +20 y 3x – 40 respectivamente. Calcular la medida de cada uno de los ángulos.

14. Calcular el valor de cada uno de los ángulos de un cuadrilátero ABCD, sabiendo que el ángulo A es doble del ángulo B, el ángulo B es mitad del ángulo C y el ángulo C es la mitad del ángulo D y el ángulo D es igual a x.

UNIDAD 9

EQUIVALENCIA Y TRANSFORMACION DE FIGURAS.

Figuras Equivalentes. Figuras equivalentes son todas las que tienen igual área (fig. 177).

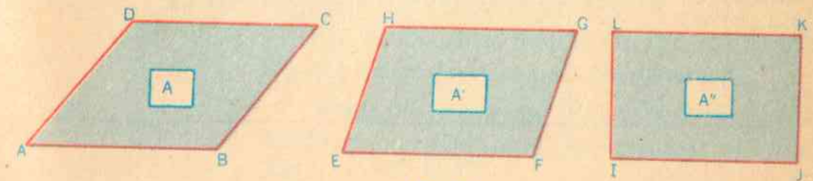


Fig. 177

A representa el área de la superficie ABCD, A´el área de la superficie EFGH y A´´el área de la superficie I JKL.

Si A es igual a A´y A´es igual a A´´, las tres figuras son equivalentes.

Caracteres de la equivalencia. En la equivalencia de figuras se cumplen los mismos caracteres generales de la igualdad.

Carácter idéntico: A es equivalente a A.

Carácter recíproco: Si A es equivalente a A´entonces A´es equivalente a A.

Carácter transitivo: Si A es equivalente a A´y A´es equivalente a A´´ entonces A es equivalente a A´´.

Relaciones de equivalencia. *Si dos triángulos tienen igual base e igual altura, son equivalentes.*

Si dos paralelogramos tienen igual base e igual altura, son equivalentes.

Todo triángulo es equivalente a un paralelogramo que tenga la misma base y la mitad de la altura.

Todo triángulo es equivalente a un paralelogramo que tenga la misma altura y la mitad de la base.

Todo paralelogramo es equivalente a un triángulo que tenga la misma base y el doble de la altura.

Todo paralelogramo es equivalente a un triángulo que tenga la misma altura y el doble de la base.

Todo trapecio es equivalente a un paralelogramo que tenga la misma altura y la base sea igual a la base media del trapecio o a la semisuma de las bases.

TRANSFORMACION DE FIGURAS.

Transformar un triángulo en uno o varios triángulos equivalentes de igual base y altura (fig. 178).

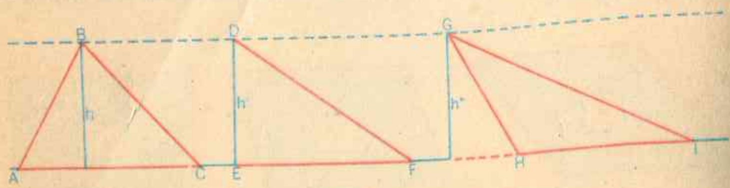


Fig. 178

Los triángulos ABC, DEF y GHI son equivalentes porque tienen la misma base y la misma altura.

AC = EF = HI, por construcción.

h = h´ = h´´, por ser segmentos de paralelas entre paralelas.

Transformar un paralelogramo en otro paralelogramo equivalente de igual base y altura (fig. 179).

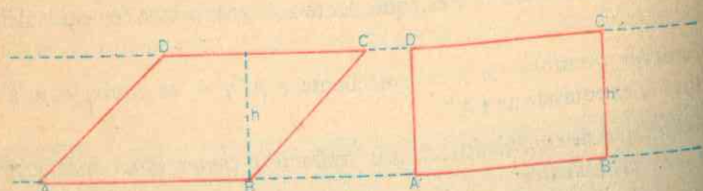


Fig. 179

Los paralelogramos ABCD y A´B´C´D´son equivalentes porque tienen la misma base y la misma altura.

AB = A´B´, por construcción

h = h´, por ser segmentos de paralelas entre paralelas.

Transformar un triángulo en un paralelogramo equivalente que tenga la misma base y la mitad de la altura (fig. 180).

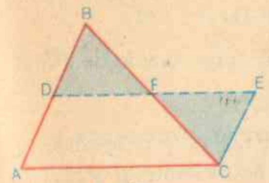


Fig. 180

Se tiene el triángulo ABC (fig. 180).

Por el punto C se traza CE paralela a AB y por D punto medio de AB se traza DE paralela a AC.

Siendo los triángulos CFE y DFB iguales, el paralelogramo ACED será equivalente al triángulo ABC.

Transformar un triángulo en un paralelogramo equivalente que tenga la misma altura y la mitad de la base.

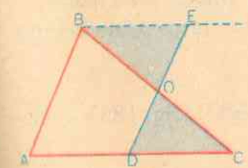


Fig. 181

Se tiene el triángulo ABC (fig. 181).

Por el punto B se traza BE paralela a AC y por D punto medio de AC se traza DE paralela AB.

Siendo los triángulos DOC y BOE iguales, el paralelogramo ADEB será equivalente al triángulo ABC.

Transformar un paralelogramo en un triángulo equivalente que tenga la misma base y el doble de la altura.

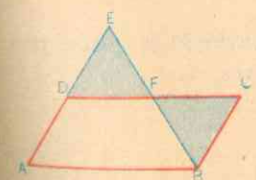


Fig. 182

Se tiene el paralelogramo ABCD (fig. 182).

Se prolonga AD y se toma DE = DA y se une E con B.

Siendo los triángulos BFC y DFE iguales, el triángulo AEB será equivalente al paralelogramo ABCD.

Transformar un paralelogramo en un triángulo equivalente que tenga la misma altura y el doble de la base.

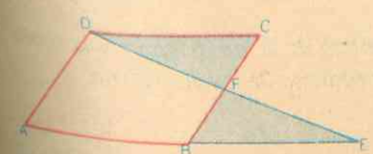


Fig. 183

Se tiene el paralelogramo ABCD (fig. 183).

Se prolonga AB y se toma BE = BA y se une E con D.

Siendo los triángulos BFE y DFC iguales, el triángulo ADE será equivalente al paralelogramo ABCD.

Transformar un trapecio en un paralelogramo equivalente que tenga la misma altura y la base sea igual a la base media.

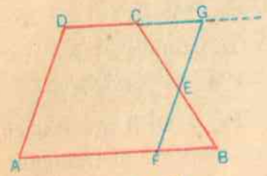


Fig. 184

Se tiene el trapecio ABCD (fig. 184).

Se prolonga DC y por E punto medio de BC se traza FG paralela a AD.

Siendo los triángulos FEB y CEG iguales, el paralelogramo AFGD será equivalente al trapecio ABCD.

RELACIONES ENTRE LAS LINEAS DEL TRIANGULO RECTANGULO.

En todo triángulo rectángulo se consideran seis líneas principales: la hipotenusa, los dos catetos, las dos proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa y la altura.

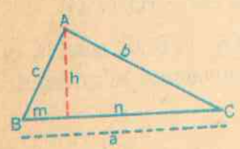


Fig. 185

En el triángulo rectángulo BAC (fig. 185), se tiene:

a hipotenusa, c y b catetos, m y n proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, h altura.

Con estas seis líneas del triángulo rectángulo se pueden establecer, entre otras, las siguientes relaciones:

1. En todo triángulo rectángulo cada cateto al cuadrado es igual al producto de la hipotenusa por la proyección del cateto sobre ella.

$$c^2 = a.m$$

$$b^2 = a.n$$

2. En todo triángulo rectángulo la altura correspondiente a la hipotenusa al cuadrado es igual al productò de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

$$h^2 = m.n$$

3. En todo triángulo rectángulo el producto de la hipotenusa por la altura correspondiente a la hipotenusa es igual al producto de los dos catetos.

$$a.h = c.b$$

4. En todo triángulo rectángulo la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$a^2 = c^2 + b^2$$

Nota: Para una mejor interpretación de este capítulo consúltese lo tratado sobre relaciones métricas entre las líneas del triángulo y proyecciones (pág. 139).

REPRESENTACION GRAFICA DE LAS RELACIONES ANTERIORES

1. En todo triángulo rectángulo el cuadrado construído sobre un cateto es equivalente al rectángulo que tiene por dimensiones la hipotenusa del triángulo y la proyección del cateto sobre ella (fig. 186).

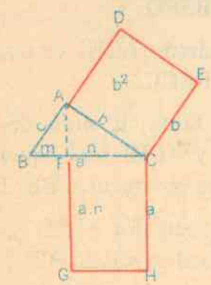


Fig. 186

El cuadrado ACED es equivalente al rectángulo FGHC.

$$b^2 = a.n$$

2. En todo triángulo rectángulo el cuadrado construído sobre la altura correspondiente a la hipotenusa es equivalente al rectángulo que tiene por dimensiones las proyecciones de los catetos sobre ella (fig. 187).

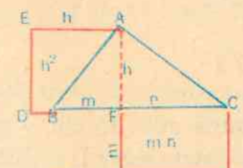


Fig. 187

El cuadrado DFAE es equivalente al rectángulo FGHC.

$$h^2 = m.n$$

En todo triángulo rectángulo el rectángulo que tiene por dimensiones la hipotenusa y la altura correspondiente a la hipotenusa es equivalente al rectángulo que tiene por dimensiones los dos catetos (fig. 188).

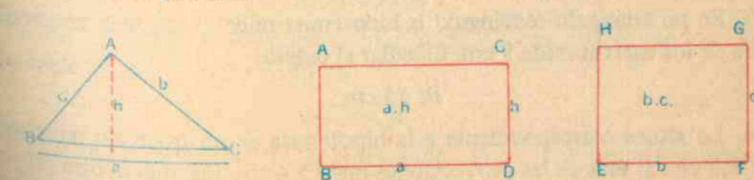


Fig. 188

El rectángulo BDCA es equivalente al rectángulo EFGH.

$$\underline{a.h = c.b}$$

En todo triángulo rectángulo el cuadrado construído sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos (fig. 189).

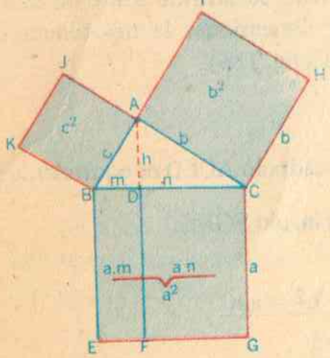


Fig. 189

El cuadrado BAJK es equivalente al rectángulo BEFD.

El cuadrado ACHI es equivalente al rectángulo DFGC.

Por lo tanto, la suma de los cuadrados BAJK y ACHI será equivalente a la suma de los rectángulos BEFD y DFGC.

Los rectángulos BEFD y DFGC son equivalentes al cuadrado BEGC.

Luego: el cuadrado BEGC es equivalente a la suma de los cuadrados BAJK y ACHI.

$$\underline{a^2 = c^2 + b^2}$$

EJERCICIOS

1. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 15 cm. y uno de los catetos mide 12 cm. Calcular la proyección del cateto sobre la hipotenusa.

R. 9.6

2. En un triángulo rectángulo un cateto y su proyección sobre la hipotenusa miden respectivamente 6 y 4.8 cm. Calcular la hipotenusa.

R. 7.5 cm.

3. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 25 cm. y la proyección de uno de los catetos mide 9 cm. Calcular el cateto.

R. 15 cm.

4. La altura correspondiente a la hipotenusa en un triángulo rectángulo mide 7.2 cm. y una de las proyecciones mide 5.4 cm. Calcular la otra proyección. *R. 9.6 cm.*

5. Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo miden respectivamente 8 y 4.5 cm. Calcular la altura.

R. 6. cm.

6. En un triángulo rectángulo los dos catetos miden respectivamente 4.5 y 6 cm. y la altura mide 3.6 cm. Calcular la hipotenusa.

R. 7.5 cm.

7. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 30 cm., la altura correspondiente a la hipotenusa mide 14.4 cm. y uno de los catetos mide 18 cm. Calcular el otro cateto.

R. 24 cm.

8. Calcular la longitud de las hipotenusas de los triángulos rectángulos cuyos catetos miden respectivamente:

1.	3 cm. y 4 cm.	*R. 5 cm.*
2.	6 cm. y 8 cm.	*R. 10 cm.*
3.	9 cm. y 12 cm.	*R. 15 cm.*

9. Calcular la longitud de uno de los catetos de los triángulos rectángulos cuya hipotenusa y el otro cateto miden respectivamente:

1.	15 cm. y 12 cm.	*R. 9 cm.*
2.	20 cm. y 16 cm.	*R. 12 cm.*
3.	25 cm. y 20 cm.	*R. 15 cm.*

10. El lado de un cuadrado mide 18 cm. Calcular su diagonal.

R. 25.45 cm.

11. La diagonal de un cuadrado mide 12 cm. Calcular el lado.

R. 8.48 cm.

12. Las dimensiones de un rectángulo miden 16 y 12 cm. respectivamente. Calcular su diagonal.

R. 20 cm.

13. El lado de un triángulo equilátero mide 12 cm. Calcular su altura.

R. 10.39 cm.

14. En un triángulo isósceles la base mide 12 cm. y uno de los lados iguales mide 10 cm. Calcular su altura.

R. 8 cm.

15. En un trapecio isósceles las bases miden 21 y 9 cm. respectivamente y los lados no paralelos miden 10 cm. cada uno. Calcular las diagonales del trapecio.

R. 17 c

16. Las diagonales de un rombo miden 18 y 24 cm. respectivamente. Calcular su lado.

R. 15 cm.

GEOMETRIA

CUARTO AÑO

PARTE I

UNIDAD 1

FIGURAS SEMEJANTES.

Razones y proporciones

Definiciones. Se llama razón geométrica o relación de dos cantidades al cociente que resulta de dividir la primera entre la segunda.

La razón entre a y b es $\frac{a}{b}$ que se lee *a* es a *b*.

Los dos términos de una razón se llaman: antecedente al primero y consecuente al segundo.

Por lo tanto podemos también definir que, razón o relación de dos cantidades es el cociente que resulta de dividir el antecedente entre el consecuente.

Razón de dos segmentos. Razón de dos segmentos es la relación en que están los números que expresan la longitud de dichos segmentos.

Fig. 1

Tenemos los segmentos *a* y *b*, que miden respectivamente 3 y 5 cm. (fig. 1).

La razón de estos dos segmentos es $\frac{a}{b}$ ó $\frac{3}{5}$ ó 0.6

Proporción. Proporción es la igualdad de dos razones.

Segmentos proporcionales. Dos segmentos son proporcionales a otros dos cuando la razón o relación de los dos primeros es igual a la razón o relación de los otros dos.

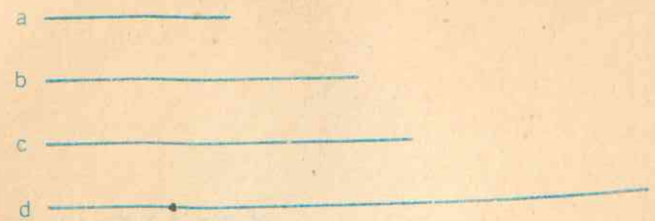


Fig. 2

Tenemos los segmentos a y b que miden respectivamente 3 y 5 cm. y los segmentos c y d que miden 6 y 10 cm. (fig. 2).

La razón de los dos primeros segmentos es: $\frac{a}{b}$ ó $\frac{3}{5}$;

La razón de los dos segundos segmentos es: $\frac{c}{d}$ ó $\frac{6}{10}$ ó $\frac{3}{5}$.

Luego, las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son iguales a $\frac{3}{5}$. Por lo tanto, son iguales entre si y forman la siguiente proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Modo de expresar una proporción. Una proporción se puede expresar de una de las maneras siguientes:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \qquad a : b = c : d; \qquad a : b : : c : d.$$

Cuarta proporcional. Cuando los cuatro términos de una proporción son diferentes, cada uno de ellos es una cuarta proporcional con relación a los otros tres.

Media y tercera proporcional. Cuando los medios o los extremos de una proporción son iguales, cada uno de ellos se llama media proporcional, y los otros dos tercera proporcional.

La media proporcional o media geométrica, entre dos magnitudes, es un segmento cuyo cuadrado equivale al rectángulo que tenga por dimensiones los otros dos segmentos.

Sean los segmentos a y b que miden respectivamente 2 y 4 cm. y los segmentos b y d que miden 4 y 8 cm. (fig. 3).

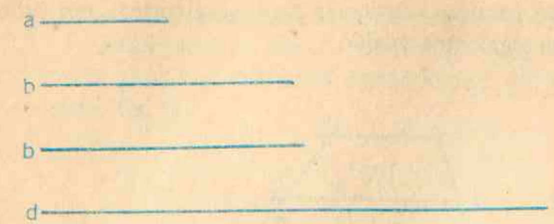


Fig. 3

La razón de los dos primeros segmentos es: $\frac{a}{b}$ ó $\frac{2}{4}$;

La razón de los dos segundos segmentos es: $\frac{b}{d}$ ó $\frac{4}{8}$ ó $\frac{2}{4}$.

Luego, las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{d}$ son iguales a $\frac{2}{4}$. Por lo tanto, son iguales entre si y forman la siguiente proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{d}, \text{ de donde: } b^2 = a.d$$

Propiedades de las proporciones. 1. En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

2. En toda proporción un medio es igual al producto de los extremos dividido entre el otro medio, y un extremo es igual al producto de los dos medios dividido entre el otro extremo.

3. En toda proporción continua, la media proporcional o media geométrica es igual a la raíz cuadrada del producto de los otros dos términos.

4. En toda proporción la suma del antecedente y consecuente de la primera razón es a la suma del antecedente y consecuente de la segunda razón, como el antecedente de la primera es al antecedente de la segunda o como el consecuente de la primera es al consecuente de la segunda.

De la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se tiene: $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

de donde: $\frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d} = \frac{a}{c}$.

5. En toda serie de razones iguales la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, como un antecedente es a su consecuente.

TEOREMA. Si se divide una recta en segmentos iguales, y por los puntos de división se trazan paralelas, cualquier otra recta cortada por estas paralelas queda dividida en segmentos iguales.

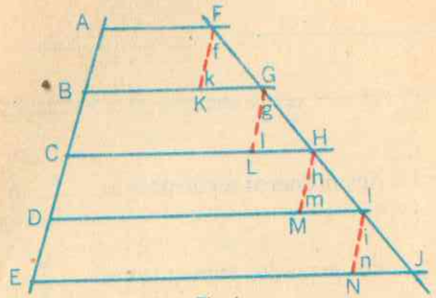


Fig. 4

Hipót.: $AB = BC = CD = DE$

$AF \parallel BG \parallel CH \parallel DI \parallel EJ$

Tesis: $FG = GH = HI = IJ$

DEMOSTRACION

Si trazamos por F, G, H, I, paralelas a la recta AE, tenemos: $FK = AB$; $GL = BC$; $HM = CD$; $IN = DE$, por ser segmentos de paralelas entre paralelas.

$AB = BC = CD = DE$, por hipótesis

$FK = GL = HM = IN$, por ser $AB = BC = CD = DE$.

Los triángulos FKG; GLH; HMI; INJ; son iguales por tener un lado igual adyacente a ángulos respectivamente iguales, a saber:

$FK = GL = HM = IN$, por demostración.

$\angle f = \angle g = \angle h = \angle i$, por correspondientes.

$\angle k = \angle l = \angle m = \angle n$, por tener sus lados respectivamente paralelos.

Luego: $FG = GH = HI = IJ$

Aplicaciones.

Dividir una recta AB en 6 partes iguales.

Respuesta.– 1. (Por medio de un ángulo). Se tiene la recta AB. Desde el extremo A se traza una recta indefinida AM y desde A se toman seis distancias iguales. Se une el punto C con el extremo B, y por los demás puntos de división se trazan paralelas a CB que al cortar la recta AB esta resulta dividida en partes iguales (fig. 5).

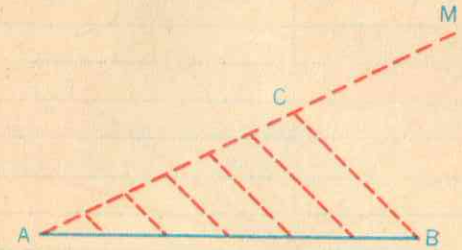


Fig. 5

Respuesta.– 2. (Por medio de un triángulo equilátero). En una recta cualquiera MN se toman 6 distancias iguales y se construye un triángulo equilátero MDN. Desde el punto D con una distancia igual a la recta AB se cortan los lados en C. y E. Recta $CE = AB$. Uniendo el punto D con los puntos de división de la recta MN, la recta CE queda dividida en 6 partes iguales (fig. 6).

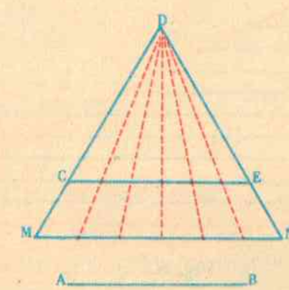


Fig. 6

Dividir una recta AB en 2, 3, 4, 5, 6, 7, partes iguales.

Respuesta.– Se traza una serie de paralelas equidistantes.

Con una abertura de compás igual a la recta AB y haciendo centro en A se describe una semi–circunferencia que corte las paralelas.

AC, representa la recta dividida en 2 partes iguales;

AD, representa la recta dividida en 3 partes iguales;

AE, representa la recta dividida en 4 partes iguales;

AF, representa la recta dividida en 5 partes iguales;
AG, representa la recta dividida en 6 partes iguales;
AH, representa la recta dividida en 7 partes iguales (fig. 7).

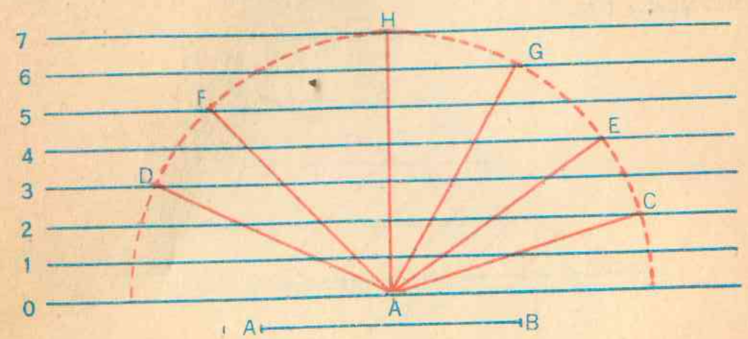


Fig. 7

TEOREMA.– La paralela trazada a un lado de un triángulo divide los otros dos lados en partes proporcionales.

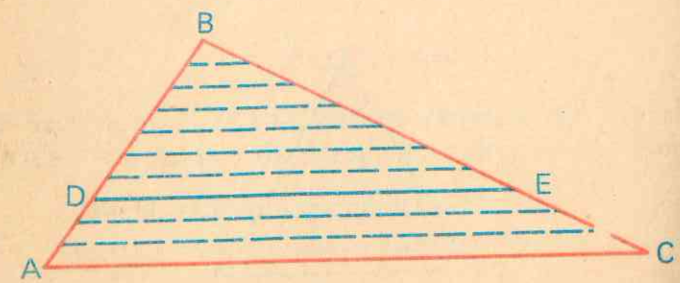


Fig. 8

Hipót.: Δ ABC; DE $\parallel$ AC

Tesis: $\dfrac{BD}{DA} = \dfrac{BE}{EC}$

DEMOSTRACION

Siendo los segmentos BD y DA conmensurables, tomamos una medida común que esté contenida 7 veces en el segmento BD y 3 veces en DA.

Por los puntos de división trazamos paralelas a AC, quedando así el segmento BE dividido en 7 partes iguales y EC en 3 partes iguales. Por lo tanto:

$$\frac{BD}{DA} = \frac{7}{3} \quad y \quad \frac{BE}{EC} = \frac{7}{3}.$$

Luego: $\dfrac{BD}{DA} = \dfrac{BE}{EC}$

Corolario.– Los lados de un triángulo son proporcionales a los segmentos determinados en ellos por la paralela al tercer lado.

Si en la proporción: $\dfrac{BD}{DA} = \dfrac{BE}{EC}$, le sumamos los consecuentes a los antecedentes. Tenemos:

$$\frac{BD + DA}{DA} = \frac{BE + EC}{EC}, \text{ de donde: } \frac{BA}{DA} = \frac{BC}{EC}$$

Si en la proporción: $\dfrac{BD}{DA} = \dfrac{BE}{EC}$, le sumamos los antecedentes a los consecuentes. Tenemos:

$$\frac{BD}{BD + DA} = \frac{BE}{BE + EC}$$

Invirtiendo la proporción nos da: $\dfrac{BD + DA}{BD} \quad \dfrac{BE + EC}{BE}$, de donde:

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE}$$

Recíproco.– La recta que divide en partes proporcionales dos lados de un triángulo, es paralela al tercer lado.

Aplicaciones.

Dividir una recta dada en partes proporcionales a los números 3, 4, y 5.

Respuesta.– Se tiene la recta AB. Desde el extremo A se traza una recta indefinida AM; en esta recta se toman sucesivamente una misma longitud 3, 4 y 5 veces. Se une el punto C con el extremo B y por los puntos D y E se trazan paralelas a CB que al cortar la recta AB ésta resulta dividida en las partes pedidas (fig. 9).

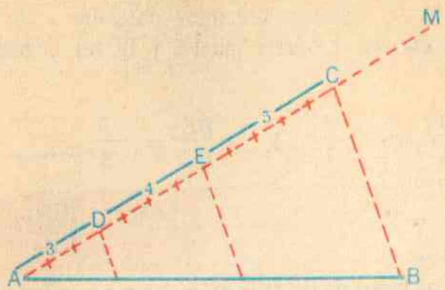
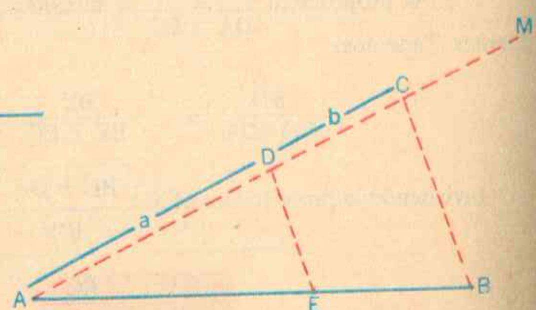


Fig. 9

Dividir una recta dada en partes proporcionales a los segmentos a y b.

Respuesta.– Se tiene la recta AB. Desde el extremo A se traza una recta indefinida AM y tomamos en ella los segmentos a y b. Se une el punto C con el extremo B y por el punto D se traza una paralela a CB que determina los segmentos AE y EB que son proporcionales a a y b (fig. 10).



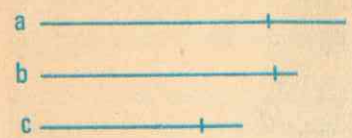
Luego: $\frac{AE}{EB}=\frac{a}{b}$

Fig. 10

Hallar la cuarta proporcional a tres segmentos dados a, b y c.

Respuesta.– Se traza el ángulo ABC y desde el vértice B se llevan sucesivamente, en uno de los lados, los segmentos a y b y en el otro lado el segmento c. Se une el punto D con E y desde A se traza una paralela a DE, quedando así determinado el segmento x, que es la cuarta proporcional entre los segmentos a, b y c (fig. 11).

Nota: El problema anterior tiene varias soluciones según el orden como se tomen los segmentos.



Luego: $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$.

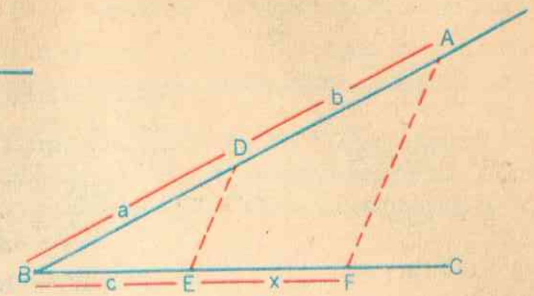


Fig. 11

Hallar la tercera proporcional a los segmentos a, b y b.

Respuesta.– Este problema no es más que un caso particular del anterior en el que c = b.

Se resuelve buscando un segmento que forme con las rectas a, b, b,. la proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

Problemas Gráficos.

1. Dividir una recta de 12 cm. en partes proporcionales a 2, 3, 4.
2. Dividir una recta dada en partes proporcionales a las fracciones.

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4}.$$

3. Tres segmentos miden respectivamente 2, 4, y 6.5 cm., hallar gráficamente una cuarta proporcional a ellos.

Problemas.

1. Una recta paralela a uno de los lados de un triángulo determina en un lado dos segmentos de 36 y 12 cm. ¿Cuánto miden los segmentos determinados en el otro lado si su longitud total es de 60 cm?

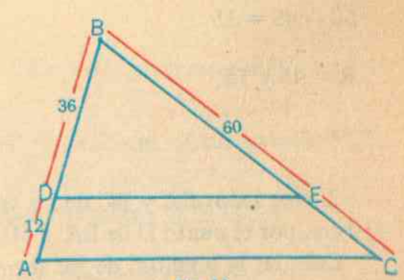


Fig. 12

Solución.– Tenemos el triángulo ABC, y DE paralela al lado AC. (fig. 12). BD = 36; DA = 12; BC = 60. ¿Cuánto miden BE y EC?

Para resolver este problema se puede establecer una de las siguientes proporciones:

Primera: $\frac{36}{12} = \frac{60 - EC}{EC}$, de donde:

$$36EC = 12(60 - EC)$$
$$36EC = 720 - 12EC$$
$$36EC + 12EC = 720$$
$$48EC = 720$$
$$EC = \frac{720}{48}$$
$$EC = 15$$

$60 - 15 = 45.$

R $= 45$ y 15.

Segunda: $\frac{36 + 12}{12} = \frac{60}{EC}$, de donde:

$$EC(36 + 12) = 720$$
$$36\,EC + 12\,EC = 720$$
$$48\,EC = 720$$
$$EC = \frac{720}{48}$$
$$EC = 15$$

$60 - 15 = 45$

R $= 45$ y 15.

Tercera: $\frac{48}{36} = \frac{60}{BE}$, de donde:

$$48\,BE = 36 \times 60$$
$$BE = \frac{2160}{48}$$
$$BE = 45.$$

$60 - 45 = 15$

R $= 45$ y 15.

2. Dos lados BA y BC de un triángulo ABC tienen respectivamente 80 y 110 cm. por el punto D de BA, a 50 cm. de B, se traza una paralela a AC. Calcular la longitud de los segmentos que dicha paralela determina sobre BC.

3. Dos lados BA y BC de un triángulo ABC tienen respectivamente 60.50 y 120.25 cm., por el punto D de BA, a 28.50 cm. de B, se traza una paralela a AC. Calcular la longitud de los segmentos que dicha paralela determina sobre BC.

4. Dos lados BA y BC de un triángulo ABC tienen respectivamente $\frac{4}{5}$ y $\frac{9}{10}$ de m., por un punto D de BA, a $\frac{1}{5}$ de m. de B, se traza una paralela a AC. Calcular la longitud de los segmentos que dicha paralela determina sobre BC.

5. En el triángulo ABC se tiene: BA = 120 cm.; BC = 70 cm. Sobre BA a partir de B, se toman segmentos de 30, 40 y 50 cm. respectivamente, y por los puntos de división se trazan paralelas a AC. Calcular los segmentos determinados por dichas paralelas sobre BC.

6. En el triángulo del problema anterior: BA $= \frac{13}{12}$ de m.; BC $= \frac{19}{4}$ de m. Sobre BA a partir de B, se toman segmentos de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ de m. respectivamente, y por los puntos de división se trazan paralelas a AC. Calcular los segmentos determinados por dichas paralelas en BC.

7. En un triángulo ABC, el lado BA mide 750 cm. Si una paralela al lado AC divide a BC en la relación $\frac{5}{3}$, ¿cuánto miden los segmentos en que resulta dividido BA?

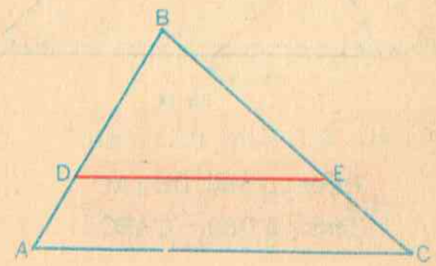


Fig. 13

En el triángulo ABC.

1. BD = 60 cm.; DA = 20 cm.; BC = 100 cm. ¿Cuánto mide EC?

2. En el mismo triángulo:
BA = 135 cm.; BC = 150 cm.; EC = 35 cm. ¿Cuánto mide BD?

3. En el mismo triángulo:
BD = 50.25 cm.; DA = 15.50 cm.; BC = 70.75 cm. ¿Cuánto mide BE?

4. En el mismo triángulo:
BD $= \frac{3}{4}$ de m.; DA $= \frac{1}{8}$ de m.; BC $= \frac{9}{8}$ de m. ¿Cuánto mide EC?

Figuras semejantes.– Se llaman figuras semejantes aquellas que tienen igual forma y diferente tamaño.

Polígonos semejantes.– Dos polígonos son semejantes cuando tienen igual número de lados, sus ángulos ordenadamente iguales y sus lados correspondientes proporcionales.

Los ángulos ordenadamente iguales se llaman ángulos homólogos.
Los lados adyacentes a ángulos homólogos se llaman lados homólogos.
Líneas homólogas son las que unen puntos homólogos.

Razón de semejanza de dos polígonos semejantes, es la misma razón de dos lados homólogos cualesquiera.

TEOREMA.– Toda paralela a un lado de un triángulo determina otro triángulo semejante al primero.

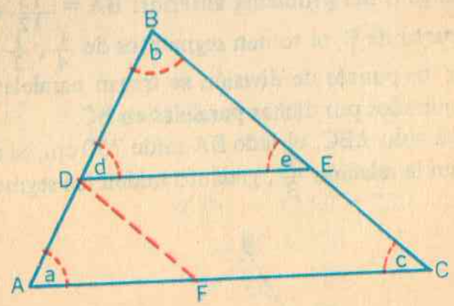


Fig. 14

Hipót.: Δ ABC; DE $\parallel$ AC
Tesis: Δ DBE $\sim$ Δ ABC.

DEMOSTRACION

Trazamos DF paralela a BC.

Los triángulos ABC y DBE tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales.

$\measuredangle$ a = $\measuredangle$ d, por correspondientes.
$\measuredangle$ c = $\measuredangle$ e, por correspondientes.
$\measuredangle$ b, común a ambos triángulos.

Siendo DE paralela a AC y DF paralela a BC. Tenemos:

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} \quad y \quad \frac{BD}{BA} = \frac{CF}{CA}$$

Como estas dos proporciones tienen la razón $\frac{BD}{BA}$, común; tenemos:

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CA}.$$

Sustituyendo en la última razón CF por su igual DE, resulta:

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{CA}.$$

Luego: Δ DBE $\sim$ Δ ABC.

TEOREMA.– Dos paralelas cortadas por varias secantes, que parten de un mismo punto, quedan divididas en partes proporcionales.

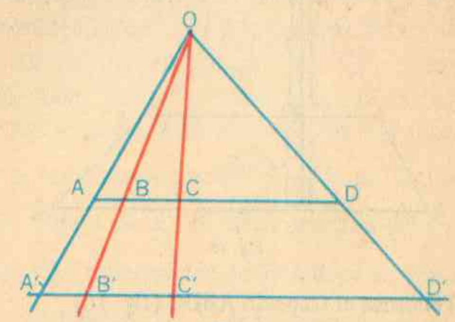


Fig. 15

Hipót. : AD $\parallel$ A´D´; OA´, OB´, OC´, OD´, secantes.

Tesis : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$.

DEMOSTRACION

Los triángulos AOB, BOC, COD, son respectivamente semejantes a los triángulos A´OB´, B´OC´, C´OD´, por ser AD paralela a A´D´. Por lo tanto:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'}; \qquad (1)$$

$$\frac{OB}{OB'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{OC}{OC'}; \qquad (2)$$

$$\frac{OC}{OC'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{OD}{OD'}; \qquad (3)$$

Como estos tres grupos de razones iguales tienen una razón común, de dos en dos, todas las razones son iguales.

Luego: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$.

Problemas.

Las bases de un trapecio miden 40 y 30 cm. respectivamente, y la altura mide 15 cm. ¿Cuál es la altura del triángulo que se obtiene entre la base mayor y la prolongación de los lados no paralelos?

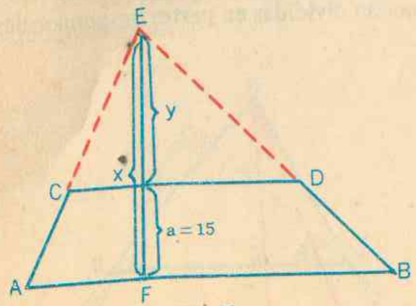


Fig. 16

Solución.– Tenemos el trapecio ABDC (fig. 16).
AB = 40; DC = 30; a = 15. Cuánto mide EF ó x.

Para resolver este problema se puede establecer una de las siguientes proporciones.

Primera: $\frac{40}{30} = \frac{x}{x-15}$ de donde:

$$40(x-15) = 30x$$
$$40x - 600 = 30x$$
$$40x - 30x = 600$$
$$10x = 600$$
$$x = \frac{600}{10}$$
$$x = 60$$

R = 60

Segunda: $\frac{40}{30} = \frac{y+15}{y}$ de donde:

$$40y = 30(y+15)$$
$$40y = 30y + 450$$
$$40y - 30y = 450$$
$$10y = 450$$
$$y = \frac{450}{10}$$
$$y = 45.$$

45 + 15 = 60

R = 60.

2. Los lados de un triángulo miden 35, 38 y 42 cm. respectivamente. En un triángulo semejante, el lado homólogo del primero vale 22 cm. Calcular los otros dos lados.

3. Las bases de un trapecio miden respectivamente 45.25 cm. y 35 cm. y la altura del triángulo obtenido entre la base mayor y la prolongación de los lados no paralelos mide 55.50 cm. ¿Cuál es la altura del trapecio?

4. Las bases de un trapecio miden 60 y 50 cm. respectivamente, y la altura del triángulo comprendido entre la base menor y la prolongación de los lados no paralelos miden 30 cm. ¿Cuál es la altura del trapecio?

5. Las bases de un trapecio miden 75 y 55 cm. respectivamente y la altura del trapecio mide 20 cm. ¿Cuál es la altura del triángulo que resulta entre la base mayor y la prolongación de los lados no paralelos?

6. Las bases de un trapecio miden $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}$ de m. respectivamente y la altura del trapecio mide $\frac{1}{3}$ de m. ¿Cuál es la altura del triángulo que resulta entre la base menor y la prolongación de los lados no paralelos?

TEOREMA.– La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide el lado opuesto en partes proporcionales a los otros dos lados.

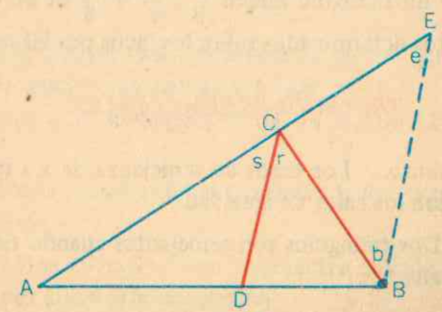


Fig. 17

Hipót.: CD bisectriz del ∡ C

Tesis : $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$.

DEMOSTRACION.

Trazamos BE paralela a CD y prolongamos AC hasta E. Teniendo en cuenta el triángulo BAE, podemos escribir:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CE} \quad (1)$$

Siendo CD paralela a EB, se tiene:

$\sphericalangle e = \sphericalangle s$, por correspondientes.

$\sphericalangle s = \sphericalangle r$, por hipótesis.

$\sphericalangle r = \sphericalangle b$, por alternos internos.

Luego: $\sphericalangle e = \sphericalangle b$; por consiguiente el triángulo BCE es isósceles, y por lo tanto BC = CE.

Sustituyendo en (1), CE por su igual BC. Tenemos:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}.$$

Problemas

1. Los lados de un triángulo miden 15, 18 y 20 cm. respectivamente. Calcular los segmentos determinados sobre los lados por las tres bisectrices.

2. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 36 y 27 cm. respectivamente. Calcular los segmentos determinados en la hipotenusa por la bisectriz del ángulo recto.

3. Los lados de un triángulo miden $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{8}$ y $\frac{6}{8}$ de m. respectivamente. Calcular los segmentos determinados sobre los lados por las tres bisectrices.

TRIANGULOS SEMEJANTES.

Casos de semejanza.– Los casos de semejanza de los triángulos ofrecen completa analogía con los casos de igualdad.

Primer caso.– Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales.

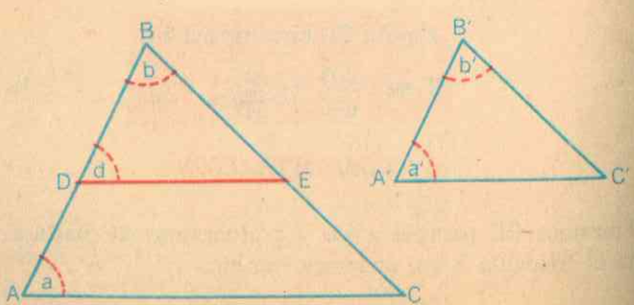


Fig. 18

Hipót.: $\sphericalangle a = \sphericalangle a'$; $\sphericalangle b = \sphericalangle b'$.
Tesis: $\Delta ACB \sim \Delta A'C'B'$.

DEMOSTRACION.

Tomamos en BA un segmento BD = B'A' y trazamos DE paralela a AC. El Triángulo DEB es semejante al triángulo ACB por ser DE paralela a AC. Por lo tanto, basta demostrar que el triángulo DEB es igual al triángulo A'C'B.'

Tenemos:

$\sphericalangle b = \sphericalangle b'$, por hipótesis.
$\sphericalangle a = \sphericalangle a'$, por hipótesis.
$\sphericalangle a = \sphericalangle d$, por correspondientes.
$\sphericalangle d = \sphericalangle a'$, por ser ambos iguales al $\sphericalangle a$.
$\therefore \Delta DEB = \Delta A'C'B'$, por tener un lado igual adyacente a dos ángulos respectivamente iguales.

Luego: $\Delta ACB \sim \Delta A'C'B'$.

Corolarios.- 1. Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo igual.

2. Dos triángulos isósceles son semejantes si tienen iguales el ángulo del vértice, o uno de los ángulos adyacentes a la base.

3. Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres ángulos respectivamente iguales.

4. Dos triángulos son semejantes si tienen sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares.

Segundo caso.- Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual comprendido por lados proporcionales.

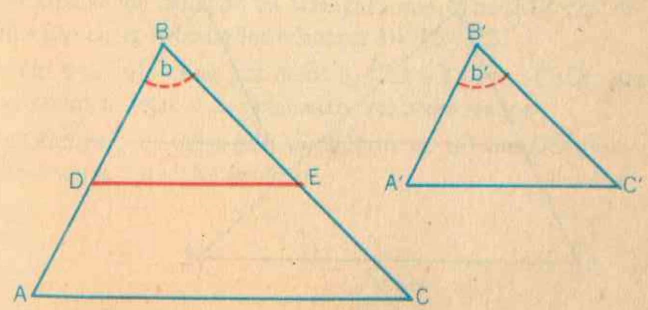


Fig. 19

Hipót.: $\measuredangle b = \measuredangle b'$; $\frac{BA}{B'A'} = \frac{BC}{B'C'}$.

Tesis: $\triangle ACB \sim \triangle A'C'B'$.

DEMOSTRACION.

Tomamos en BA un segmento $BD = B'A'$, y trazamos DE paralela a AC. El triángulo DEB es semejante al triángulo ACB por ser DE paralela a AC. Por lo tanto, basta demostrar que el triángulo DEB es igual al triángulo $A'C'B'$.

$$\frac{BA}{B'A'} = \frac{BC}{B'C'}\text{, por hipótesis.}$$

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE}\text{, por construcción.}$$

Siendo $BD = B'A'$, las dos primeras razones de estas dos proporciones son iguales; por consiguiente, las segundas lo son también, y como tienen los mismos antecedentes, los consecuentes son iguales, o sea:

$$B'C' = BE.$$

Por tanto: $\triangle DEB = \triangle A'C'B'$, por tener un ángulo igual formado por lados respectivamente iguales.

Luego: $\triangle ACB \sim \triangle A'C'B'$.

Corolario. Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen sus catetos proporcionales.

Tercer caso.- Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus tres lados proporcionales.

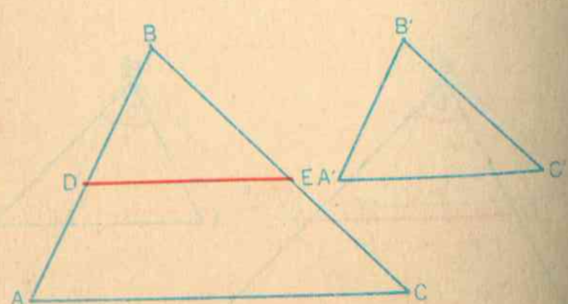


Fig. 20

Hipót.: $\frac{AC}{A'C'} = \frac{CB}{C'B'} = \frac{BA}{B'A'}$

Tesis: $\triangle ACB \sim \triangle A'C'B'$.

DEMOSTRACION.

Tomamos en BA un segmento $BD = B'A'$ y trazamos DE paralela a AC. El triángulo DEB es semejante al triángulo ACB por ser DE paralela a AC. Por lo tanto, basta demostrar que el triángulo DEB es igual al triángulo $A'C'B'$

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{CB}{C'B'} = \frac{BA}{B'A'}\text{, por hipótesis.}$$

$$\frac{AC}{DE} = \frac{CB}{EB} = \frac{BA}{BD}\text{, por construcción.}$$

Siendo $BD = B'A'$, las últimas razones de estas dos series de razones iguales son iguales; por consiguiente las demás lo son también, y como tienen antecedentes iguales los consecuentes son respectivamente iguales.

Por lo tanto: $DE = A'C'$ y $EB = C'B'$

$\therefore \triangle DEB = \triangle A'C'B'$ por tener sus tres lados respectivamente iguales.

Luego: $\triangle ACB \sim \triangle A'C'B'$.

Ejercicios.

1. Construir un triángulo semejante a otro de 8 cm. de base y cuyos ángulos adyacentes son respectivamente de 56^{o} y 74^{o}, sabiendo que la base del triángulo pedido es los $\frac{3}{4}$ de la del triángulo dado.

2. Calcular los lados de un triángulo que tiene 20.8 cm. de perímetro y sus lados son entre sí como los números 14, 16 y 22.

3. Un triángulo tiene por lados 6, 12.5 y 16 cm. ¿Cuáles son los lados de otro triángulo semejante de perímetro tres veces mayor?

4. Construir un triángulo equilátero de 60 mm. de lado y otro cuyo perímetro sea la mitad del anterior.

UNIDAD 2

RELACIONES METRICAS ENTRE LOS LADOS DEL TRIANGULO.

Proyecciones. Proyección de un segmento sobre una recta es la parte de recta comprendida entre los pies de las perpendiculares trazadas desde los extremos del segmento a la recta.

Si el segmento es oblicuo a la recta la proyección es menor.
Si el segmento es paralelo a la recta la proyección es igual.
Si el segmento es perpendicular a la recta la proyección es un punto.

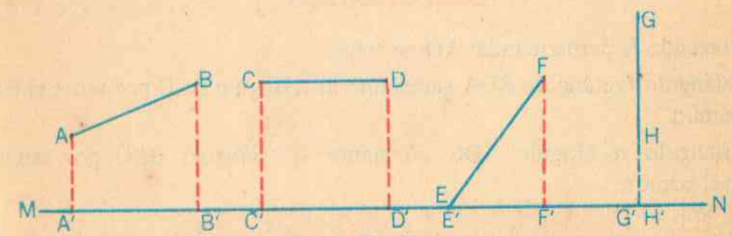


Fig. 21

En la figura 21, A´B´ es la proyección de AB; C´D´ es la proyección de CD; E´F´ es la proyección de EF, y G´H´ es la proyección de GH.

En todo triángulo la perpendicular de un vértice cualquiera al lado opuesto, determina en dicho lado dos segmentos que son las proyecciones de los otros dos lados.

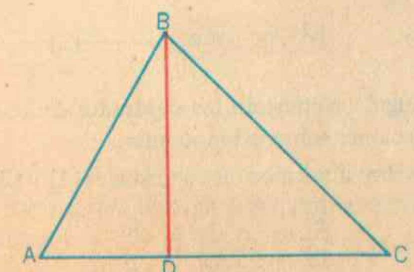


Fig. 22

En el triángulo ABC (fig. 22) la perpendicular BD divide el lado AC en, AD proyección de BA y DC proyección de BC.

TEOREMA. En todo triángulo rectángulo, cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre la hipotenusa.

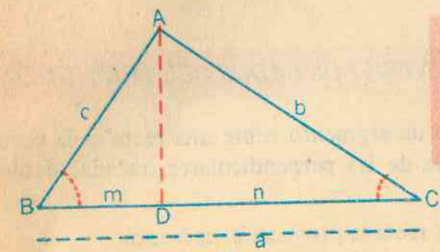


Fig. 23

Hipót.: $\triangle$ BAC rectángulo en A

Tesis: $\frac{a}{c} = \frac{c}{m}$ y $\frac{a}{b} = \frac{b}{n}$.

DEMOSTRACION.

Trazando la perpendicular AD, se tiene:

Triángulo rectángulo BDA semejante al triángulo BAC por tener el ángulo B común.

Triángulo rectángulo ADC semejante al triángulo BAC por tener el ángulo C común.

Luego: $\frac{a}{c} = \frac{c}{m}$ y $\frac{a}{b} = \frac{b}{n}$

Corolarios. 1. En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección del cateto sobre ella.

De las proporciones anteriores, se deduce:

$$c^2 = a.m \qquad (1)$$

$$b^2 = a.n \qquad (2)$$

2. En todo triángulo rectángulo los cuadrados de los catetos son proporcionales a sus proyecciones sobre la hipotenusa.

Dividiendo miembro a miembro las igualdades (1) y (2), tenemos:

$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{a.m}{a.n} = \frac{m}{n}.$$

TEOREMA. En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Sumando miembro a miembro las igualdades (1) y (2), tenemos:

$$a.m = c^2$$
$$a.n = b^2$$

$$a.m + a.n = c^2 + b^2$$

$$a(m + n) = c^2 + b^2$$

$$m + n = a$$

$$a.a = c^2 + b^2$$

$$\text{Luego: } a^2 = c^2 + b^2. \qquad (3)$$

Corolario. En todo triángulo rectángulo cada cateto al cuadrado es igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.

De la igualdad (3), se obtiene:

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

TEOREMA. En todo triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos que determina en ella.

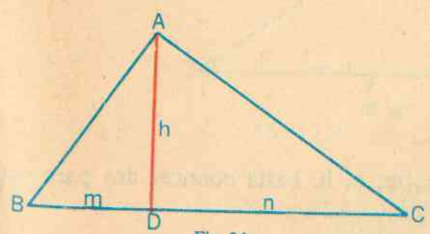


Fig. 24

Hipót.: $\triangle$ BAC, rectángulo en A.

Tesis: $\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$

DEMOSTRACION.

Los triángulos rectángulos BDA y ADC son semejantes por ser ambos semejantes al triángulo BAC.

Luego : $\dfrac{m}{h} = \dfrac{h}{n}$.

Corolarios. 1. En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de los dos segmentos que determina en ella.

De la proporción anterior, se deduce:

$$h^2 = m.n$$

2. En todo triángulo rectángulo, el producto de la hipotenusa por la altura correspondiente es igual al producto de los dos catetos.

La semejanza de los triángulos de la figura 24, nos da la siguiente proporción:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h}, \text{ de donde: } a.h = c.b$$

EJERCICIOS.

En el triángulo rectángulo BAC (fig. 25) designamos por *a* la hipotenusa, por *c* y *b* los catetos, por *m* y *n* las proyecciones de los catetos y por *h* la altura correspondiente a la hipotenusa.

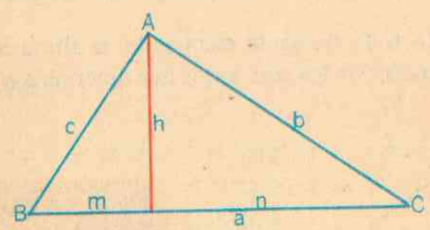


Fig. 25

De los seis segmentos a, b, c, m, n, h, basta conocer dos para poder calcular los otros cuatro.

Se pueden presentar los siguientes casos:

1. Conociendo la hipotenusa y uno de los catetos.
2. Conociendo la hipotenusa y una de las proyecciones.
3. Conociendo la hipotenusa y la altura. (Ecuación de segundo grado)
4. Conociendo los dos catetos.
5. Conociendo un cateto y su proyección.

6. Conociendo un cateto y la proyección del otro cateto (ecuación de segundo grado).
7. Conociendo un cateto y la altura.
8. Conociendo las dos proyecciones.
9. Conociendo una proyección y la altura.

Las relaciones que exponemos a continuación, nos proporcionan la solución de cualquiera de los casos indicados.

$a = m + n$	$c^2 = a.m$	$b^2 = a.n$
$a^2 = c^2 + b^2$.	$c^2 = a^2 - b^2$.	$b^2 = a^2 - c^2$.
$h^2 = m.n$	$h^2 = c^2 - m^2$.	$h^2 = b^2 - n^2$.

$$a.h = c.b$$

Problemas.

1. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 20 cm. y uno de los catetos mide 12 cm. Calcular los cuatro segmentos restantes.

Solución: Datos: $a = 20$ cm.; $c = 12$ cm.

$a.m = c^2$; $20\,m = 12^2$; $m = \dfrac{144}{20}$; $m = 7.2$.

$n = a - m$; $n = 20 - 7.2$; $n = 12.8$.

$b^2 = a.n$; $b^2 = 20 \times 12.8$; $b = \sqrt{256}$; $b = 16$.

$h^2 = m.n$; $h^2 = 7.2 \times 12.8$; $h = \sqrt{92.16}$; $h = 9.6$

R. $m = 7.2$ $n = 12.8$. $b = 16$. $h = 9.6$

2. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 30 cm. y una de las proyecciones mide 10.8 cm. Calcular los cuatro segmentos restantes.

Solución: Datos: $a = 30$ cm; $m = 10.8$ cm.

$n = a - m$; $n = 30 - 10.8$; $n = 19.2$

$c^2 = a.m$; $c^2 = 30 \times 10.8$; $c = \sqrt{324}$; $c = 18.$

$b^2 = a.n$; $b^2 = 30 \times 19.2$; $b = \sqrt{576}$; $b = 24.$

$h^2 = m.n$; $h^2 = 10.8 \times 19.2$; $h = \sqrt{207.36}$; $h = 14.4.$

R. $n = 19.2.$ $c = 18.$ $b = 24.$ $h = 14.4.$

3. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 25 cm. y la altura correspondiente a la hipotenusa mide 12 cm. Calcular los cuatro segmentos restantes.

Solución. Datos: $a = 25$ cm. $h = 12$ cm.

$m.n = h^2$; $m.n = 12^2$; si en esta igualdad reemplazamos n por $a - m$, tenemos: $m(a - m) = 12^2$; $m(25 - m) = 144$; al destruir el paréntesis nos queda: $25m - m^2 - 144 = 0$; ordenando la ecuación y multiplicando por -1, nos da:

$$m^2 - 25m + 144 = 0.$$

$$m = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 576}}{2}; \quad m = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2}$$

$$m = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{2}; \quad m = \frac{25 \pm 7}{2}. \quad \boxed{m_1 = 9.} \quad \boxed{m_2 = 16.}$$

(Las dos raíces satisfacen el problema)

$m = 9$ y $n = 16$

$c^2 = a.m$; $c^2 = 25 \times 9$; $c = \sqrt{25 \times 9}$; $c = 15.$

$b^2 = a.n$; $b^2 = 25 \times 16$; $b = \sqrt{25 \times 16}$; $b = 20.$

R. $m = 9.$ $n = 16.$ $c = 15.$ $b = 20.$

4. En un triángulo rectángulo los catetos miden respectivamente 21 y 28 cm. Calcular los cuatro segmentos restantes.

Solución. Datos: $c = 21$; $b = 28.$

$a^2 = c^2 + b^2$; $a^2 = 21^2 + 28^2$; $a = \sqrt{1225}$; $a = 35.$

$a.m = c^2$; $35m = 441$; $m = \frac{441}{35}$; $m = 12.6$

$n = a - m$; $n = 35 - 12.6$; $n = 22.4$

$h = \frac{c \times b}{a}$; $h = \frac{21 \times 28}{35}$; $h = 16.8.$

R. $a = 35.$ $m = 12.6.$ $n = 22.4.$ $h = 16.8.$

5. En un triángulo rectángulo un cateto mide 65 cm. y su proyección sobre la hipotenusa mide 25 cm. Calcular los cuatro segmentos restantes.

Solución. Datos: $c = 65$; $m = 25.$

$a.m = c^2$; $25a = 65^2$; $a = \frac{4225}{25}$; $a = 169$

$n = a - m$; $n = 169 - 25$; $n = 144$

$b^2 = a.n$; $b^2 = 169 \times 144$; $b = \sqrt{169 \times 144}$; $b = 156.$

$h^2 = m.n$; $h^2 = 25 \times 144$; $h = \sqrt{25 \times 144}$; $h = 60.$

R. $a = 169.$ $n = 144.$ $b = 156.$ $h = 60.$

6. En un triángulo rectángulo un cateto mide 32 cm. y la proyección del otro cateto sobre la hipotenusa mide 14.4 cm. Calcular los cuatro segmentos restantes.

Solución. Datos: $b = 32$; $m = 14.4.$

$a.n = b^2$; $a.n = 32^2$; si en esta igualdad reemplazamos n por $a - m$, tenemos:

$a(a-m) = 32^2$; $a(a-14.4) = 1024$; al destruir el paréntesis, nos da:

$$a^2 - 14.4a - 1024 = 0$$

$a = 7.2 \pm \sqrt{7.2^2 + 1024}$; $a = 7.2 \pm \sqrt{51.84 + 1024}$

$a = 7.2 \pm \sqrt{1075.84}$; $a = 7.2 \pm 32.8$; $a_1 = 40$; $a_2 = -25.6$

(Se toma la raíz positiva)

$$a = 40$$

$n = a - m$; $n = 40 - 14.4$; $n = 25.6$

$c^2 = a.m$; $c^2 = 40 \times 14.4$; $c = \sqrt{576}$; $c = 24.$

$h = \dfrac{c \times b}{a}$; $h = \dfrac{24 \times 32}{40}$; $h = 19{,}2$

R. $a = 40.$ $n = 25.6.$ $c = 24.$ $h = 19.2.$

7. En un triángulo rectángulo un cateto mide 30 cm. y la altura correspondiente a la hipotenusa mide 24 cm. ¿Cuánto miden los cuatro segmentos restantes?

Solución. Datos: $c = 30$; $h = 24.$

$m^2 = c^2 - h^2$; $m^2 = 30^2 - 24^2$; $m = \sqrt{324}$; $m = 18.$

$a.m = c^2$; $18a = 30^2$; $a = \dfrac{900}{18}$; $a = 50.$

$n = a - m$; $n = 50 - 18$; $n = 32.$

$b^2 = a.n$; $b^2 = 50 \times 32$; $b = \sqrt{1600}$; $b = 40.$

R. $m = 18.$ $a = 50.$ $n = 32.$ $b = 40.$

8. En un triángulo rectángulo las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden respectivamente 28.8 y 51.2 cm. Calcular los cuatro segmentos restantes.

Solución. Datos: $m = 28.8$; $n = 51.2$

$a = m + n$; $a = 28.8 + 51.2$; $a = 80.$

$c^2 = a.m$; $c^2 = 80 \times 28.8$; $c = \sqrt{2304}$; $c = 48.$

$b^2 = a.n$; $b^2 = 80 \times 51.2$; $b = \sqrt{4096}$; $b = 64.$

$h = \dfrac{c \times b}{a}$; $h = \dfrac{48 \times 64}{80}$; $h = 38.4$

R. $a = 80.$ $c = 48.$ $b = 64.$ $h = 38.4$

9. En un triángulo rectángulo la proyección de uno de los catetos mide 35.2 cm. y la altura correspondiente a la hipotenusa mide 26.4 cm. Calcular los cuatro segmentos restantes.

Solución Datos: $n = 35.2$; $h = 26.4$

$b^2 = n^2 + h^2$; $b^2 = 35.2^2 + 26.4^2$; $b = \sqrt{1936}$; $b = 44$

$a.n = b^2$; $35.2a = 44^2$; $a = \dfrac{1936}{35.2}$; $a = 55.$

$m = a - n$; $m = 55 - 35.2$; $m = 19.8$

$c^2 = a.m$; $c^2 = 55 \times 19.8$; $c = \sqrt{1089}$; $c = 33.$

R. $b = 44.$ $a = 55.$ $m = 19.8.$ $c = 33.$

Problemas.

En el cuadro que se expone a continuación, figuran los elementos de algunos triángulos rectángulos. Tomando dos cualesquiera de estos elementos se pueden calcular los cuatro restantes.

a	c	b	m	n	h
5	3	4	1.8	3.2	2.4
7.5	4.5	6	2.7	4.8	3.6
12.5	7.5	10	4.5	8	6
15	9	12	5.4	9.6	7.2
25	15	20	9	16	12
30	18	24	10.8	19.2	14.4
$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{6}{5}$
$\frac{15}{4}$	3	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{9}{5}$

Calcular la diagonal del cuadrado, en función del lado.

En el cuadrado ABCD de la figura 26, tenemos: $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ (1)

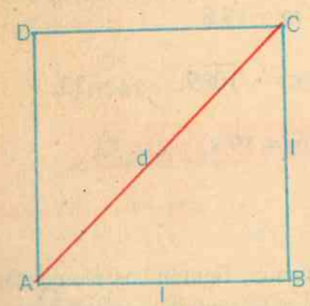


Fig. 26

$AC = d;\quad AB = l;\quad BC = l.$

Sustituyendo en uno por los nuevos valores, nos da:

$$d^2 = l^2 + l^2$$

$$d^2 = 2l^2$$

$$\sqrt{d^2} = \sqrt{2l^2}$$

Luego: $d = l\sqrt{2}$

Calcular la altura del triángulo equilátero, en función del lado.

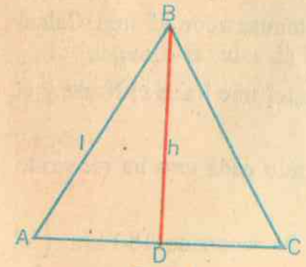


Fig. 27

El triángulo equilátero ABC de la figura 27, nos da:

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 \qquad (1)$$

$$BD = h;\quad AB = l;\quad AD = \frac{l}{2}$$

Sustituyendo en (1) por los nuevos valores, tenemos:

$$h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2;\quad h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}.$$

$$h^2 = \frac{4l^2}{4} - \frac{l^2}{4};\quad h^2 = \frac{3l^2}{4}$$

$$\sqrt{h^2} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}};$$

Luego: $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

Calcular el lado del triángulo equilátero, en función de la altura.

De la fórmula: $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, se deduce:

$$\frac{l\sqrt{3}}{2} = h;\qquad l\sqrt{3} = 2h$$

$l = \frac{2h}{\sqrt{3}}$, racionalizando, tenemos:

$$l = \frac{2h\sqrt{3}}{3}.$$

Ejercicios.

1. Calcular la longitud de la hipotenusa de los triángulos rectángulos, cuyos catetos miden respectivamente:

1.	3 dm.	y	4 dm.
2.	4.5 cm.	y	6 cm.
3.	48 mm.	y	36 mm.
4.	$\frac{8}{5}$ de m.	y	$\frac{6}{5}$ de m.

2. En un triángulo rectángulo la hipotenusa y uno de los catetos miden respectivamente 40 y 24 cm. Calcular el otro cateto.

3. En un triángulo rectángulo la hipotenusa y uno de los catetos miden respectivamente $\frac{15}{4}$ de m. y $\frac{9}{4}$ de m. Calcular el otro cateto.

4. En un triángulo rectángulo isósceles la hipotenusa mide 45 mm. Calcular los catetos.

5. Dos ciclistas parten desde un mismo punto, el uno hacia el Norte y el otro hacia el Este. Calcular:

Primero: ¿A qué distancia se encuentran cuando cada uno ha recorrido 50 km.?

Segundo. ¿Qué distancia los separa si el uno ha recorrido 180 km. y el otro 135 km.?

Tercero. Si la distancia que los separa es de 175 km. ¿Cuánto habrán recorrido si van a la misma velocidad?

6. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 30 cm. ¿Cuál es la longitud de los catetos si son entre sí como 3 es a 4?

7. Los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo son entre sí como 2, 3, 5. ¿Cuál será la longitud de cada cateto si la hipotenusa mide 80 cm.?

8. Los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo son entre sí como 1, 2, 3. ¿Cuál será la longitud de cada cateto si la hipotenusa mide $\frac{15}{4}$ de m?

9. En un triángulo rectángulo, el cuadrado construído sobre un cateto vale 600 metros cuadrados más que el cuadrado construído sobre el otro. ¿Cuál será la longitud de cada cateto, si la hipotenusa mide 40 m.?

10. Los lados de un triángulo rectángulo forman una progresión aritmética cuya razón es 3. Calcular los lados.

11. Calcular las diagonales de los cuadrados, que tienen por lados:

1. 30 cm.
2. 45 cm.
3. 15 cm.
4. $\frac{5}{8}$ de m.

12. Calcular los lados de los cuadrados, que tienen por diagonales:

1. 48 cm.
2. 25.6 m.
3. $\frac{5}{6}$ de m.

13. Calcular las alturas de los triángulos equiláteros, que tienen por lados:

1. 35 mm.
2. 2.5 m.
3. 16 dm.
4. $\frac{7}{9}$ de m.

14. Calcular los lados de los triángulos equiláteros, que tienen por altura:

1. 6 m.
2. 3.5 cm.
3. 25 mm.
4. 3 m.
5. $\frac{3}{4}$ de m.

15. Calcular las alturas de los triángulos equiláteros, que tienen por perímetro:

1. 24 cm.
2. 60 mm.
3. $\frac{3}{5}$ de m.

16. Calcular las alturas de los triángulos isósceles, que tienen por base y lado respectivamente:

1.	base	12 dm.	lado	10 dm.
2.	base	21 cm.	lado	17.5 cm.
3.	base	30 mm.	lado	25 mm.
4.	base	$\frac{16}{5}$ de m.	lado	2 m.

17. Calcular las hipotenusas de los triángulos rectángulos isósceles, que tienen por catetos:

1. 3 m.
2. 2.6 dm.
3. 58 mm.
4. $\frac{3}{4}$ de m.

18. Calcular los catetos de los triángulos rectángulos isósceles, que tienen por hipotenusa:

1. 36 cm.
2. 1 m.
3. $\frac{1}{5}$ de m.

19. Cuáles son las diagonales de los rectángulos, que tienen por dimensiones:

1. 10 m. y 7.5 m.
2. 22 cm. y 16.5 cm.
3. 24 mm. y 18 mm.
4. $\frac{8}{5}$ dm. y $\frac{6}{5}$ dm.

20. Cuáles son los lados de los rombos, cuyas diagonales miden:

1.	D.	30 cm.	y	d	20 cm.
2.	D	1.5 m.	y	d	0.75 m.
3.	D	48 mm.	y	d	22 mm.

21. La diagonal y el lado de un cuadrado suman 18 cm. ¿Cuánto mide el lado?

22. La diferencia entre la diagonal y el lado de un cuadrado es de 48 cm. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

TEOREMA. En todo triángulo, el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

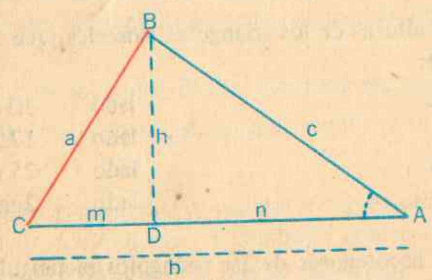


Fig. 28

Hipót. : Δ CBA; a lado opuesto al $\measuredangle$ A.

Tesis: $a^2 = c^2 + b^2 - 2bn$.

DEMOSTRACION.

Trazamos la altura BD = h. El triángulo rectángulo CDB, nos da la igualdad siguiente:

$$a^2 = h^2 + m^2 \qquad (1)$$

En el triángulo rectángulo BDA, tenemos:

$$h^2 = c^2 - n^2.$$

$$m = b - n.$$

$$m^2 = (b - n)^2 = b^2 - 2bn + n^2.$$

Sustituyendo en (1) por los nuevos valores, tenemos:

$$a^2 = c^2 - \cancel{n^2} + b^2 - 2bn + \cancel{n^2}.$$

Luego: $a^2 = c^2 + b^2 - 2bn$.

TEOREMA. En todo triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre la prolongación de éste.

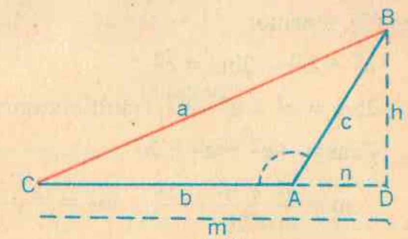


Fig. 29

Hipót.: Δ CBA; a lado opuesto al $\measuredangle$ A.

Tesis: $a^2 = c^2 + b^2 + 2bn$.

DEMOSTRACION.

Prolongamos el lado *b* y trazamos la perpendicular BD = h. El triángulo rectángulo CDB nos da la igualdad siguiente:

$$a^2 = h^2 + m^2. \qquad (1)$$

En el triángulo rectángulo ADB, tenemos:

$$h^2 = c^2 - n^2.$$

$$m = b + n.$$

$$m^2 = (b + n)^2 = b^2 + 2bn + n^2.$$

Sustituyendo en (1) por los nuevos valores, tenemos:

$$a^2 = c^2 - \cancel{n^2} + b^2 + 2bn + \cancel{n^2}.$$

Luego: $a^2 = c^2 + b^2 + 2bn$.

Problema. Calcular las alturas de un triángulo, en función de los lados.

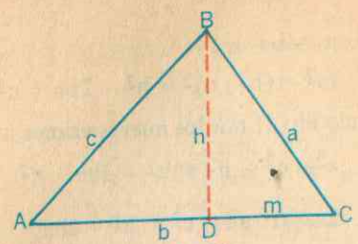


Fig. 30

El triángulo ABC y la altura BD ó h, de la figura 30; nos da:

$$h^2 = a^2 - m^2. \qquad (1)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bm. \ (2)$$

Despejando *m* en (2), tenemos:

$$a^2 + b^2 - 2bm = c^2.$$

$$-2bm = c^2 - a^2 - b^2. \text{ (multiplicamos por } -1)$$

$$2bm = -c^2 + a^2 + b^2$$

$$m = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}; \quad m^2 = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4b^2}$$

Sustituyendo en (1) m^2 por este último valor, tenemos:

$$h^2 = a^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4b^2}.$$ Se reduce a común denominador.

$$h^2 = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4b^2}. \text{ (diferencia de cuadrados)}$$

Como la diferencia de dos cuadrados proviene del producto de la suma por su diferencia, queda:

$$h^2 = \frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)\ (2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{4b^2}$$

$$h^2 = \frac{[(a + b)^2 - c^2]\ [c^2 - (a - b)^2]}{4b^2}$$

$$h^2 = \frac{(a + b + c)(a + b - c)\ (c + a - b)\ (c - a + b)}{4b^2} \qquad (3)$$

Si representamos a + b + c por 2p, resulta:

$$a + b + c = 2p.$$

$$a + b - c = 2p - 2c = 2(p - c)$$

$$c + a - b = 2p - 2b = 2(p - b)$$

$$c - a + b = 2p - 2a = 2(p - a)$$

Sustituyendo en (3), tenemos:

$$h^2 = \frac{2p \times 2(p - a) \times 2(p - b) \times 2(p - c)}{4b^2}$$

$$h^2 = \frac{16p(p - a)(p - b)(p - c)}{4b^2} \quad \text{(simplificamos)}$$

$$h^2 = \frac{4p(p - a)\ (p - b)\ (p - c)}{b^2} \quad \text{(extraemos raíz)}$$

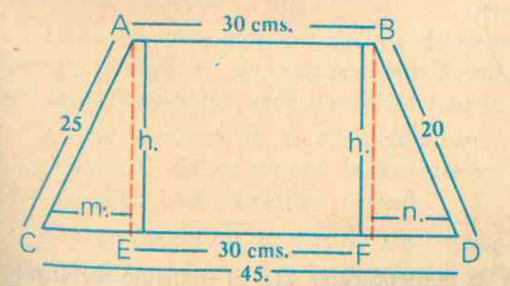
Luego: $h = \frac{2}{b}\sqrt{p(p - a)\ (p - b)(p - c)}$

Ejercicios.

1. Los lados de un triángulo miden 15, 18 y 20 cm. Calcular la altura correspondiente al lado de 20 cm.

2. Los lados de un triángulo miden respectivamente $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}$ y $\frac{7}{12}$ de m. Calcular las tres alturas.

3. Las bases de un trapecio miden 45 y 30 cm. respectivamente y los lados no paralelos miden 20 y 25 cm. Calcular la altura del trapecio.



Respuesta.– Construímos un trapecio cualquiera y suponemos sus dimensiones.
Trazamos las alturas AE y BF; CE = m, FD = n, EF = 30 cm.
En el triángulo rectángulo AEC:
$h^2 = 25^2 - m^2 \qquad (1)$
En el triángulo rectángulo BFD: $h^2 = 20^2 - n^2 \qquad (2)$
$m = 45 - (30 + n),$
$m = 45 - 30 - n,$
$m = 15 - n \qquad (3)$
En la ecuación (1) sustituímos a m^2 por su valor $(15 - n)^2$

$h^2 = 25^2 - (225 - 30n + n^2),\ h^2 = 625 - 225 + 30n - n^2 \qquad (4)$

Resolvemos (4) y (2)

$$\begin{array}{rl} h^2 = 400 + 30n - n^2 & (4) \\ -h^2 = -400 \qquad\quad + n^2 & (2) \\ \hline 0 = 0 + 30n \quad 0 & \end{array}$$

$30n = 0,\ n = 0/30$

n = 0. El segmento n no existe por lo tanto BD = BF = 20 cm.

R.– El trapecio ABDC es un trapecio rectángulo con h = 20 cm.

UNIDAD 3

RELACIONES METRICAS ENTRE CUERDAS, SECANTES Y TANGENTES A UNA CIRCUNFERENCIA.

TEOREMA. Toda cuerda en una circunferencia es media proporcional entre el diámetro que pasa por uno de sus extremos y su proyección sobre el diámetro.

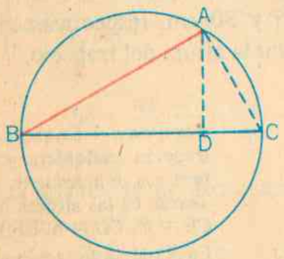


Fig. 31

Hipót.: AB cuerda; BC diámetro

Tesis: $\frac{BC}{BA} = \frac{BA}{BD}$.

DEMOSTRACION

Trazamos la cuerda AC y la perpendicular AD. El triángulo rectángulo BAC, nos da la siguiente proporción:

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BA}{BD}, \text{ de donde: } BA^2 = BC \times BD.$$

TEOREMA. Toda perpendicular trazada desde un punto cualquiera de una circunferencia al diámetro, es media proporcional entre los dos segmentos que determina en el diámetro.

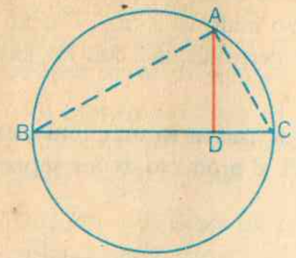


Fig. 32

Hipót.: AD perpendicular a BC.

Tesis: $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}$

DEMOSTRACION.

Trazamos las cuerdas AB y AC. Los triángulos rectángulos ADB y ADC son semejantes, por ser ambos semejantes al triángulo BAC. Luego:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}, \text{ de donde: } AD^2 = BD \times DC$$

Problemas

1. Una cuerda en un círculo que se une al diámetro por uno de sus extremos, mide 48 cm. y su proyección sobre el diámetro mide 38.4 cm. ¿Cuál es el radio del círculo?

2. En un círculo de 60 cm. de diámetro, una cuerda que se une al diámetro por uno de sus extremos mide 36 cm. ¿Cuánto mide la perpendicular trazada al diámetro desde el otro extremo de la cuerda?

3. Una cuerda en un círculo mide 32 cm. y la proyección de otra cuerda que se une a la primera por uno de sus extremos formando ángulo recto, mide 14.4 cm. ¿Cuál es el diámetro del círculo?

4. Una cuerda en un círculo que se une al diámetro por uno de sus extremos mide 22 cm. y la perpendicular bajada desde el otro extremo al diámetro mide 13.2 cm. ¿Cuál es el radio del círculo?

5. La perpendicular bajada desde un punto de la circunferencia al diámetro mide 14.4 cm. y uno de los segmentos determinados en el diámetro mide 19.2 cm. ¿Cuánto miden las cuerdas que unen el extremo de esta perpendicular con los extremos del diámetro?

6. Una cuerda en un círculo que se une al diámetro por uno de sus extremos, mide 8/5 de m. y su proyección sobre el diámetro mide 32/25 de m. ¿Cuál es el radio del círculo?

7. El diámetro de un círculo mide 27.5 cm. y la perpendicular trazada de un punto de la circunferencia al diámetro mide 13.2 cm. ¿Cuánto miden las cuerdas que unen el extremo de esta perpendicular con los extremos del diámetro?

TEOREMA.– Cuando dos cuerdas se cortan en un círculo, el producto de los segmentos de la primera es igual al producto de los segmentos de la segunda.

Hipót.: AB y CD, cuerdas.

Tesis : OA x OB = OC x OD

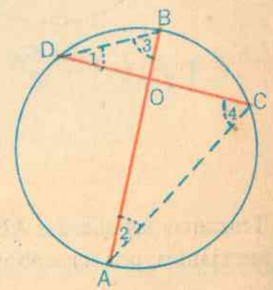


Fig. 33

DEMOSTRACION

Trazamos las cuerdas auxiliares AC y DB.

Los triángulos AOC y BOD, son semejantes por tener dos ángulos respectivamente iguales, a saber:

∡ 1 = ∡ 2, (tienen por medida la mitad del mismo arco BC).

∡ 3 = ∡ 4, (tienen por medida la mitad del mismo arco AD).

Por lo tanto:

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OC}{OB}$$

Luego: OA x OB = OC x OD.

Problemas.

1. Dos cuerdas se cortan en un círculo, la distancia del punto de intersección al centro del círculo es de 8 cm.y el producto de los segmentos de las cuerdas es de 336. ¿Cuál es el radio del círculo?

2. En un círculo de 25 cm. de radio dos cuerdas se cortan, el producto de los segmentos de cada una es de 456. ¿Cuánto mide la distancia del punto de intersección al centro del círculo?

3. Dos cuerdas se cortan en un círculo, el producto de los segmentos de cada cuerda es de 743.75 y la distancia del punto de intersección al centro del círculo es de 12.5 cm. ¿Cuál es el diámetro del círculo?

TEOREMA.– Si desde un punto exterior a una circunferencia, se trazan dos secantes, el producto de la primera por su segmento externo es igual al producto de la segunda por el suyo.

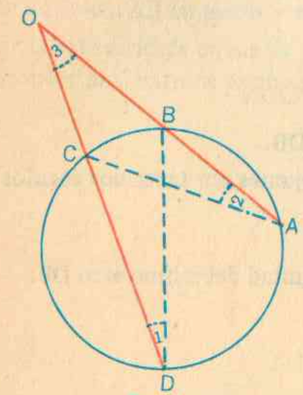


Fig. 34

Hipót.: OA y OD, secantes

Tesis: OA x OB = OD x OC.

DEMOSTRACION.

Trazamos las cuerdas auxiliares AC y BD.

Los triángulos OAC y ODB, son semejantes por tener dos ángulos respectivamente iguales, a saber:

< 1 = < 2, tienen por medida la mitad del mismo arco CB.

< 3, común a ambos triángulos.

Por consiguiente:

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OC}{OB}.$$

Luego: OA x OB = OD x OC.

TEOREMA.– Si desde un punto exterior a una circunferencia se traza una secante y una tangente, la tangente es media proporcional entre la secante y su segmento externo.

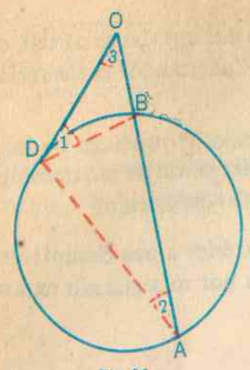


Fig. 35

Hipót.: OA secante; OD tangente.

Tesis: $\overline{OD}^2 = OA \times OB$

DEMOSTRACION

Trazamos las cuerdas auxiliares AD y DB.

Los triángulos OAD y OBD son semejantes por tener dos ángulos respectivamente iguales, a saber:

$< 1 = < 2$, tienen por medida la mitad del mismo arco DB.

< 3, común a ambos triángulos.

Por consiguiente:

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OD}{OB}.$$

Luego: $OD^2 = OA \times OB$.

Problemas.

1. Desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos secantes; los segmentos interior y exterior de la primera miden respectivamente 40 y 15 cm. y el segmento interior de la segunda mide 50 cm. ¿Cuál es el segmento exterior de ésta?

2. Desde un punto exterior a una circunferencia se trazan una tangente y una secante. La tangente mide 15 m. y el segmento interior de la secante mide 18.50 m. ¿Cuál es su segmento exterior?

3. Desde un punto exterior a una circunferencia de 3 cm. de radio se trazan una tangente y una secante que pasa por el centro; calcular las distancias del punto a los extremos del diámetro determinado por la secante, sabiendo que la tangente mide 4 cm.

4. Desde un punto exterior a una circunferencia se trazan una tangente y una secante; la tangente mide 4 cm. y la parte exterior de la secante mide 2 cm; ¿cuál es la longitud de la cuerda determinada por la secante?

5. Desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos secantes; los segmentos interior y exterior de la primera miden respectivamente $3/4$ y $1/8$ de m. y el segmento exterior de la segunda mide $1/9$ de m. ¿Cuál es el segmento interior de esta?

Aplicaciones.

Dividir una recta AB en media y extrema razón.

Una recta está dividida en media y extrema razón, cuando la parte mayor es media proporcional entre la parte menor y la recta entera.

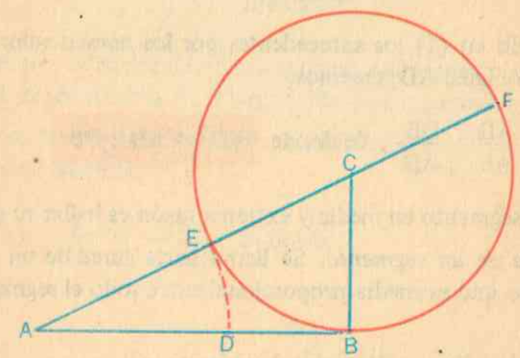


Fig. 36

CONSTRUCCION.

En el punto B del segmento dado AB, levantamos una perpendicular y tomamos $BC = \frac{1}{2}AB$. Desde el punto C como centro y CB como radio, describimos una circunferencia.

Haciendo centro en A, con radio AE describimos el arco ED. El punto D divide la recta AB en media y extrema razón:

$AD^2 = AB \times DB$

DEMOSTRACION.

AB es tangente y AF es secante a la circunferencia C.

Por lo tanto: $\frac{AF}{AB} = \frac{AB}{AE}$.

Restando los consecuentes a sus respectivos antecedentes, tenemos:

$$\frac{AF - AB}{AB} = \frac{AB - AE}{AE} \qquad (1)$$

Siendo $AB = EF$ y $AE = AD$, resulta:

$$AF - AB = AE \text{ ó } AD$$

$$AB - AE = DB.$$

Sustituyendo en (1) los antecedentes por los nuevos valores y el consecuente AE por su igual AD, tenemos:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DB}{AD}, \text{ de donde: } AD^2 = AB \times DB.$$

Dividir un segmento en media y extrema razón es hallar su parte áurea.

Parte áurea de un segmento. Se llama parte áurea de un segmento a la parte del mismo que es media proporcional entre todo el segmento y la parte restante.

Tenemos el segmento *a*

Designando por x la parte áurea, se tiene:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x} \text{ o sea:}$$

$$x^2 = a(a - x)$$

$$x^2 = a^2 - ax$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación, nos da:

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2}$$

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2}$$

$$x = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}. \text{ Tomamos la raíz positiva.}$$

$$x = a\left[\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right].$$

Luego: la parte áurea de una cantidad se obtiene multiplicando dicha cantidad por el factor: $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Ejercicios.

1. El largo y el ancho de un cuadrilátero rectángulo resultan de dividir un segmento en sección áurea. Si el largo mide 16 cm.; ¿cuál es el ancho?

Solución: Reemplazando en la proporción: $\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$, por los valores correspondientes, tenemos:

$$\frac{a}{16} = \frac{16}{a - 16} \text{ de donde:}$$

$$a(a - 16) = 16^2$$

$$a^2 - 16a - 256 = 0$$

Resolviendo la ecuación, nos da:

$$a = 8 \pm \sqrt{8^2 + 256}$$

$$a = 8 \pm \sqrt{64 + 256}$$

$$a = 8 \pm \sqrt{320}. \text{ Tomamos la raíz positiva.}$$

$$a = 8 + 17.888 = 25.888$$

$$\text{Ancho} = 25.888 - 16 = 9.888$$

R. 9.888 cm.

2. Hallar la parte áurea de los segmentos que tienen por longitudes:

1. 12 cm.
2. 4.5 m.
3. 36 dm.
4. 66 mm.
5. 8.4 cm.

3. La parte áurea de un segmento mide 25 cm. ¿Cuánto mide el segmento?

4. La parte áurea de un segmento mide 345 mm. ¿Cuánto mide el segmento?

5. La parte áurea de un segmento mide $\frac{3}{5}$ de m. ¿Cuánto mide el segmento?

6. Si la parte áurea de un segmento a, mide 24 cm. ¿Cuánto mide la otra parte?

7. Si la parte áurea de un segmento b mide 3.6 m. ¿Cuánto mide la otra parte?

8. Si la parte áurea de un segmento c mide $\frac{1}{3}$ de m. ¿Cuánto mide la otra parte?

UNIDAD 4

DIVISION ARMONICA

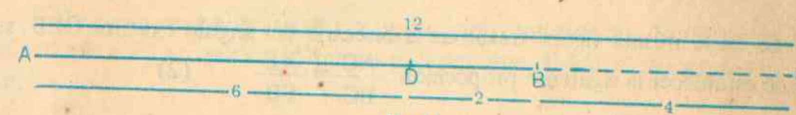


Fig. 37

Dado el segmento AB, si existe el punto D que establezca la relación $\frac{AD}{DB}=\frac{6}{2}$, es decir que lo divida interiormente en una razón dada $\frac{6}{2}$, y otro punto exterior C que establezca la relación $\frac{AC}{BC}=\frac{12}{4}=\frac{6}{2}$ es decir que lo divida exteriormente en la misma razón dada $\frac{6}{2}$, se dice que el segmento AB está dividido armónicamente.

$$\text{Luego: } \frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}.$$

Los puntos A, B, D, C, forman un grupo llamado armónico.

A y B son puntos conjugados armónicos de D y C.

Recíprocamente, los puntos D y C son conjugados armónicos de A y B.

TEOREMA. En todo triángulo la bisectriz de un ángulo interior y la bisectriz del ángulo exterior adyacente dividen el lado opuesto armónicamente, en la razón de los otros dos lados.

Si en la figura 38, trazamos la bisectriz del ángulo interior AEB, se puede establecer la siguiente proporción: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EB}$ (1)

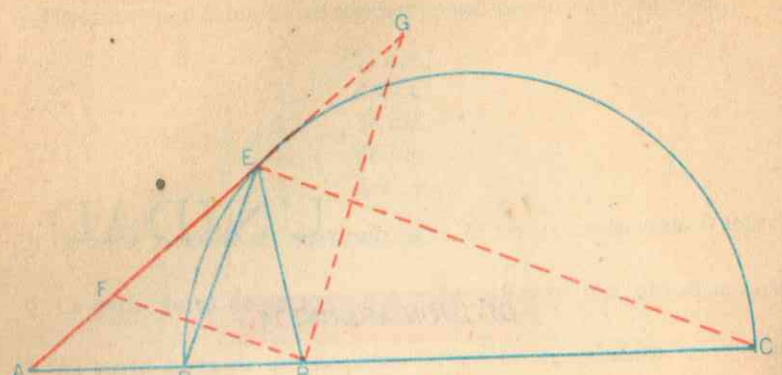


Fig. 38

Si en la misma figura trazamos la bisectriz del ángulo exterior GEB, se puede establecer la siguiente proporción: $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AE}{EB}$ (2)

Como (1) y (2) tienen una razón común, las otras dos son iguales,

$$\boxed{\text{Luego: } \frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}}$$

Observaciones. 1. El triángulo DEC es rectángulo.

2. Si se toma como diámetro el segmento DC, el vértice E está sobre la circunferencia cuyo diámetro es DC. Dicha circunferencia se llama de Apolonio, pues contiene los puntos de división armónica del segmento AB.

3. Cuando el punto D está en el punto medio de AB, el punto C está en el ∞ se trata entonces de un triángulo isósceles.

Problemas.

Dado un segmento AB, dividirlo armónicamente en una razón dada $\dfrac{m}{n}$.

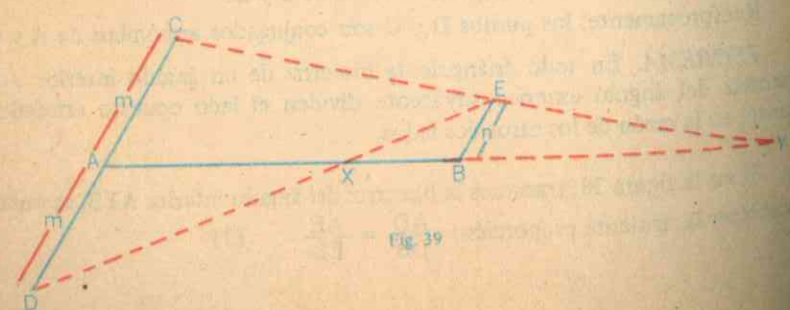


Fig. 39

1. Trazamos CD formando ángulos cualquiera.
2. Trazamos EB paralela a CD.

$$\Delta\, ADX \sim \Delta\, XEB.$$

$$\text{Luego: } \frac{AX}{XB} = \frac{m}{n}.$$

$$\Delta\, AYC \sim \Delta\, BYE.$$

$$\text{Luego: } \frac{AY}{BY} = \frac{m}{n}.$$

$$\text{Por lo tanto: } \frac{AX}{XB} = \frac{AY}{BY} = \frac{m}{n}.$$

2. Dado un segmento de 8 cm. y un punto interior que lo divide en la razón de 5 a 3, encontrar un punto exterior que divida el segmento en la misma razón.

Solución.

$$\frac{5}{3} = \frac{8 + x}{x}, \text{ de donde: } 5x = 3(8 + x)$$

$$5x = 24 + 3x$$

$$5x - 3x = 24$$

$$x = \frac{24}{2}$$

R. $x = 12$.

UNIDAD 5

Inscripción de polígonos regulares y deducción de fórmulas en función de radio.

Calcular el lado del triángulo equilátero inscrito, en función del radio de la circunferencia circunscrita.

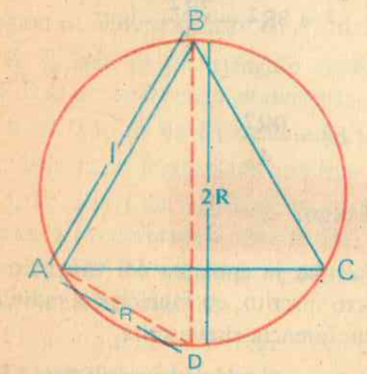


Fig. 40

Se tiene el triángulo equilátero ABC inscrito en la circunferencia O (fig. 40).

Trazamos el diámetro BD y la cuerda AD.

El triángulo rectángulo BAD, nos da:

$$AB^2 = BD^2 - AD^2. \qquad (1)$$

$$AB = l;\ BD = 2R;\ AD = R.$$

Sustituyendo en (1), por los nuevos valores, tenemos:

$$l^2 = (2R)^2 - R^2$$

$$l^2 = 4R^2 - R^2$$

$$l^2 = 3R^2.$$

$$l = \sqrt{3R^2}$$

Luego: $l = R\sqrt{3}$.

Calcular la altura del triángulo equilátero inscrito, en función del radio de la circunferencia circunscrita.

Se tiene el triángulo equilátero ABC inscrito en la circunferencia O (fig. 41).

Trazamos la altura BD ó h.

El triángulo rectángulo BDA, nos da:

$$BD^2 = AB^2 - AD^2 \quad (1)$$

$$BD = h; \quad AB = R\sqrt{3}; \quad AD = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

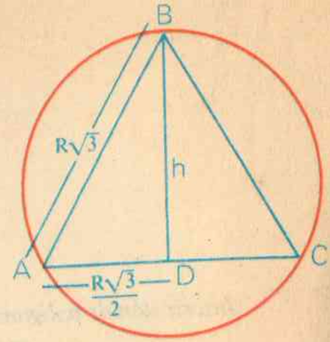


Fig. 41

Sustituyendo en (1), por los nuevos valores, tenemos:

$$h^2 = (R\sqrt{3})^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$h^2 = 3R^2 - \frac{3R^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{12R^2}{4} - \frac{3R^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{9R^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{9R^2}{4}}$$

Luego: $h = \frac{3R}{2}$

Calcular la apotema del triángulo equilátero inscrito, en función del radio de la circunferencia circunscrita.

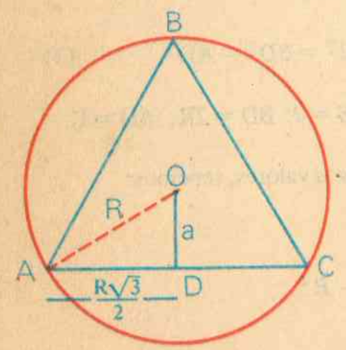


Fig. 42

Se tiene el triángulo equilátero ABC inscrito en la circunferencia O (fig. 42).

Trazamos la apotema OD ó a y el radio OA.

El triángulo rectángulo ODA, nos da:

$$OD^2 = OA^2 - AD^2 \quad (1)$$

$$OD = a; \quad OA = R; \quad AD = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Sustituyendo en (1), por los nuevos valores, tenemos:

$$a^2 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$a^2 = R^2 - \frac{3R^2}{4}$$

$$a^2 = \frac{4R^2}{4} - \frac{3R^2}{4}.$$

$$a^2 = \frac{R^2}{4}.$$

$$a = \sqrt{\frac{R^2}{4}}.$$

Luego: $a = \frac{R}{2}$

Ejercicios

1. El radio de un círculo mide 18 cm. Calcular el lado, la altura y la apotema del triángulo equilátero inscrito en el círculo.
2. El radio de un círculo mide $\frac{2}{7}$ de m. Calcular el lado y la altura del triángulo equilátero inscrito en el círculo.
3. El lado de un triángulo equilátero inscrito mide 2.4 m. Calcular el radio de la circunferencia circunscrita.
4. El lado de un triángulo equilátero inscrito mide $\frac{4}{9}$ de m. Calcular el radio de la circunferencia circunscrita.
5. La altura de un triángulo equilátero inscrito mide 14 cm. Calcular el radio de la circunferencia circunscrita.
6. El lado del triángulo equilátero inscrito mide 24 cm. Calcular la altura y la apotema del triángulo.
7. La altura de un triángulo equilátero inscrito mide $\frac{3}{8}$ de m. Calcular el lado y la apotema del triángulo.

Calcular el lado del cuadrado inscrito, en función del radio de la circunferencia circunscrita.

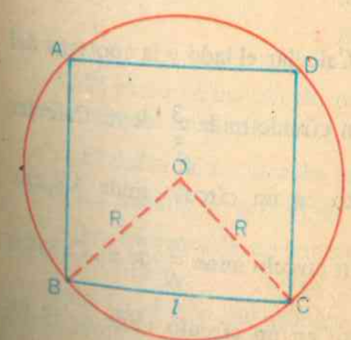


Fig. 43

Se tiene el cuadrado ABCD inscrito en la circunferencia O (fig. 43).

Trazamos los radios OB y OC.

El triángulo rectángulo BOC, nos da:

$$\overline{BC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 \quad (1)$$

$$BC = l; \quad OB = R; \quad OC = R.$$

Sustituyendo en (1) por los nuevos valores, tenemos:

$$l^2 = R^2 + R^2$$

$$l^2 = 2R^2$$

$$l = \sqrt{2R^2} \qquad \text{Luego: } l = R\sqrt{2}.$$

Calcular la apotema del cuadrado inscrito, en función del radio de la circunferencia circunscrita.

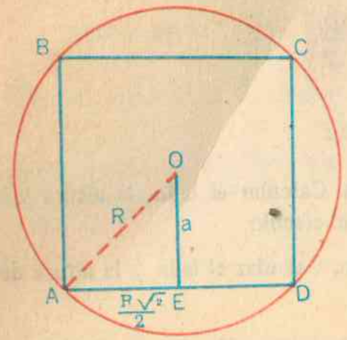


Fig. 44

Se tiene el cuadrado ABCD, inscrito en la circunferencia O (fig. 44).

Trazamos la apotema OE ó a y el radio OA.

El triángulo rectángulo OEA, nos da:

$$\overline{OE}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AE}^2 \qquad (1)$$

$$OE = a; \; OA = R; \; AE = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Sustituyendo en (1), por los nuevos valores, tenemos:

$$a^2 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$a^2 = R^2 - \frac{2R^2}{4}.$$

$$a^2 = \frac{4R^2}{4} - \frac{2R^2}{4}.$$

$$a^2 = \frac{2R^2}{4}.$$

$$a = \sqrt{\frac{2R^2}{4}}. \qquad \text{Luego: } a = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Ejercicios.

1. El radio de un círculo mide 3.6 cm. Calcular el lado y la apotema del cuadrado inscrito en el círculo.

2. El lado de un cuadrado inscrito en un círculo mide $\frac{3}{5}$ de m. Calcular el radio del círculo.

3. La apotema de un cuadrado inscrito en un círculo mide 4.8 cm. Calcular el radio del círculo.

4. El lado de un cuadrado inscrito en un círculo mide $\frac{5}{6}$ de m. Calcular la apotema del cuadrado.

5. La apotema de un cuadrado inscrito en un círculo mide $\frac{5}{7}$ de m. Calcular el lado del cuadrado.

Calcular el lado y la apotema del hexágono regular inscrito, en función del radio de la circunferencia circunscrita.

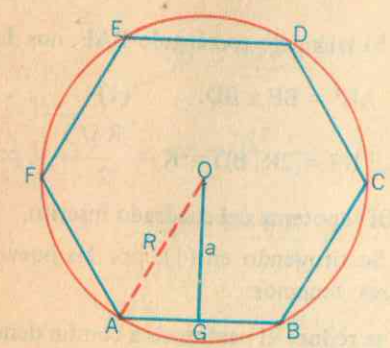


Fig. 45

Se tiene el hexágono regular ABCDEF, inscrito en la circunferencia O (fig. 45).

El lado del hexágono regular inscrito es igual al radio de la circunferencia circunscrita. Luego: $l = R$.

Trazamos la apotema OG ó a y el radio OA.

El triángulo rectángulo OGA, nos da:

$$\overline{OG}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AG}^2 \qquad (1)$$

$$OG = a; \; OA = R; \; AG = \frac{R}{2}$$

Sustituyendo en (1), por los nuevos valores, tenemos:

$$a^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$a^2 = R^2 - \frac{R^2}{4}$$

$$a^2 = \frac{4R^2}{4} - \frac{R^2}{4}$$

$$a^2 = \frac{3R^2}{4}$$

$$a = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} \qquad \text{Luego: } a = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Ejercicios.

1. El radio de un círculo mide 24 cm. Calcular la apotema del hexágono regular inscrito en el círculo.

2. El radio de un círculo mide $\frac{3}{8}$ de m. Calcular la apotema del hexágono regular inscrito en el círculo.

3. La apotema de un hexágono regular inscrito mide $\frac{4}{9}$ de m. Calcular el radio del círculo.

Calcular el lado del octógono regular inscrito, en función del radio de la circunferencia circunscrita.

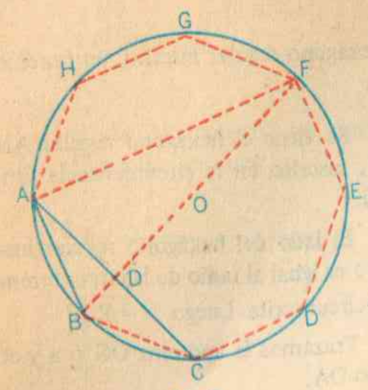


Fig. 46

Se tiene el octógono regular ABCDE FGH, inscrito en la circunferencia O (fig. 46).

Trazamos el diámetro BF y la cuerda AF.

El triángulo rectángulo BAF, nos da:

$AB^2 = BF \times BD.$ (1)

$AB = l$; $BF = 2R$; $BD = R - \frac{R\sqrt{2}}{2}$, por ser OD apotema del cuadrado inscrito.

Sustituyendo en (1), por los nuevos valores, tenemos:

$l^2 = 2R\left(R - \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)$ se reduce el paréntesis a común denominador.

$l^2 = \frac{\cancel{2}R\,(2R - R\sqrt{2}\,)}{\cancel{2}}$ se simplifica y se efectúa el paréntesis.

$l^2 = 2R^2 - R^2\sqrt{2}$ se factoriza.

$l^2 = R^2(2 - \sqrt{2}\,).$

$l = \sqrt{R^2(2 - \sqrt{2}\,)}.$ Luego: $l = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$

Calcular la apotema del octógono regular inscrito, en función del radio de la circunferencia circunscrita.

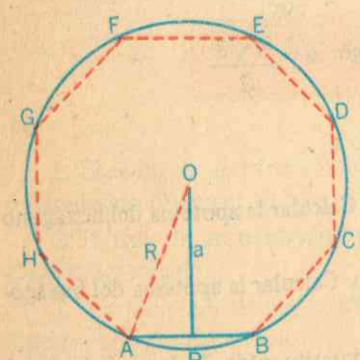


Fig. 47

Se tiene el octógono regular ABCDE FGH, inscrito en la circunferencia O (fig. 47).

Trazamos la apotema OP ó a y el radio OA.

El triángulo rectángulo OPA, nos da:

$OP^2 = OA^2 - AP^2$ (1)

$OP = a$; $OA = R$; $AP = \frac{R\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Sustituyendo en (1), por los nuevos valores, tenemos:

$a^2 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2$

$a^2 = R^2 - \frac{R^2(2-\sqrt{2})}{4}$ se reduce a común denominador.

$a^2 = \frac{4R^2 - R^2(2-\sqrt{2}\,)}{4}$ se efectúa el paréntesis.

$a^2 = \frac{4R^2 - 2R^2 + R^2\sqrt{2}}{4}$ se reducen términos semejantes.

$a^2 = \frac{2R^2 + R^2\sqrt{2}}{4}$ se factoriza.

$a^2 = \frac{R^2(2 + \sqrt{2}\,)}{4}$ se extrae raíz.

$a = \sqrt{\frac{R^2(2+\sqrt{2}\,)}{4}}$ Luego: $a = \frac{R\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Calcular el lado del decágono regular inscrito en función del radio de la circunferencia circunscrita.

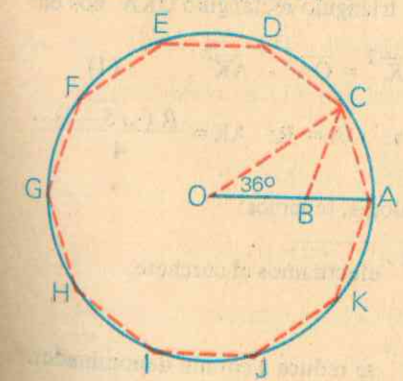


Fig. 48

Se tiene el decágono regular ACDEF GHIJK, inscrito en la circunferencia O (fig. 48).

El lado del decágono regular inscrito es igual a la sección áurea del radio de la circunferencia circunscrita, por lo tanto, en la figura 48, tenemos:

$\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{BA}.$ (1)

$OA = R$; $OB = l$; $BA = R - l.$

Sustituyendo en (1), por los nuevos valores, tenemos:

$\frac{R}{l} = \frac{l}{R-l}$, de donde: $l^2 = R(R - l)$

$l^2 = R^2 - Rl$ igualamos a cero.

$l^2 + Rl - R^2 = 0$ aplicamos la fórmula general.

$$l = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} \qquad l = \frac{-R \pm \sqrt{5R^2}}{2}$$

$$l = \frac{-R \pm R\sqrt{5}}{2}$$ tomamos la raíz positiva y factorizamos.

$$l = \frac{R(-1 + \sqrt{5}\,)}{2}$$

Luego: $l = \dfrac{R(\sqrt{5} - 1)}{2}$

Calcular la apotema del decágono regular inscrito, en función del radio de la circunferencia circunscrita.

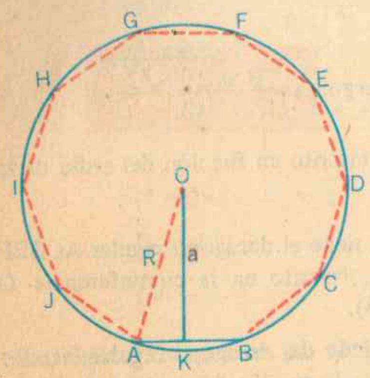


Fig. 49

Se tiene el decágono regular ABCDE FGHIJ, inscrito en la circunferencia O (fig. 49).

Trazamos la apotema OK ó a y el radio OA.

El triángulo rectángulo OKA, nos da:

$$\overline{OK}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AK}^2 . \qquad (1)$$

$$OK = a; \quad OA = R; \quad AK = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{4}$$

Sustituyendo en (1), por los nuevos valores, tenemos:

$$a^2 = R^2 - \left[\frac{R(\sqrt{5} - 1)}{4}\right]^2$$ efectuamos el corchete.

$$a^2 = R^2 - \frac{R^2(\sqrt{5} - 1)^2}{16}$$ se reduce a común denominador.

$$a^2 = \frac{16R^2 - R^2(\sqrt{5} - 1)^2}{16}$$ efectuamos el paréntesis.

$$a^2 = \frac{16R^2 - R^2(5 - 2\sqrt{5} + 1)}{16}$$

$$a^2 = \frac{16R^2 - R^2(6 - 2\sqrt{5})}{16}$$ factorizamos.

$$a^2 = \frac{R^2(16 - 6 + 2\sqrt{5})}{16}$$

$$a^2 = \frac{R^2(10 + 2\sqrt{5})}{16}$$ extraemos raíz.

$$a = \sqrt{\frac{R^2(10 + 2\sqrt{5})}{16}}$$

Luego: $a = \dfrac{R\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$

Calcular el lado del polígono de 2n lados en función del lado del polígono de n lados.

Se tiene el lado AB ó l y el radio OA, de un polígono regular inscrito. Calcular el lado AC ó l' del polígono regular inscrito de doble número de lados.

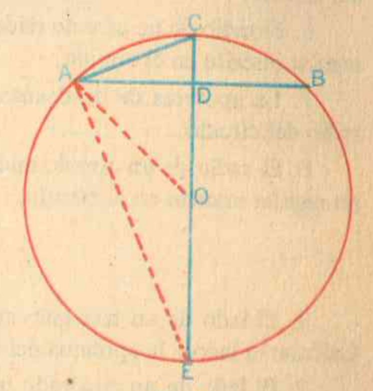


Fig. 50

Tenemos:

$$\overline{AC}^2 = CE \times CD. \qquad (1)$$

$$AC = l'; \quad CE = 2R; \quad CD = R - OD$$

Sustituyendo en (1), por los nuevos valores, tenemos:

$$l'^2 = 2R(R - OD)$$

$$l'^2 = 2R^2 - 2R \times OD$$

$$l' = \sqrt{2R^2 - 2R \times OD}. \qquad (2)$$

El triángulo rectángulo ADO (fig. 50), nos da:

$$\overline{OD}^2 = R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$OD^2 = R^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$\overline{OD}^2 = \frac{4R^2 - l^2}{4}$$

$$OD = \frac{\sqrt{4R^2 - l^2}}{2}$$

Sustituyendo en (2), por este valor y simplificando, tenemos:

$$l' = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l^2}}$$

Si R es igual a 1, resulta: $l' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l^2}}.$

Ejercicios

1. El radio de un círculo mide 15 cm. Calcular el lado del octógono regular inscrito en el círculo.

2. El radio de un círculo mide $\frac{4}{9}$ de m. Calcular la apotema del octógono regular inscrito en el círculo.

3. El lado de un octógono regular inscrito mide 24 cm. Calcular el radio del círculo.

4. La apotema de un octógono regular inscrito mide $\frac{2}{3}$ de m. Calcular el radio del círculo.

5. El lado de un decágono regular inscrito mide 9 dm. Calcular el radio del círculo.

6. El radio de un círculo mide $\frac{1}{3}$ de metro. Calcular el lado del decágono regular inscrito en el círculo.

7. La apotema de un decágono regular inscrito mide 12 cm. Calcular el radio del círculo.

8. El radio de un círculo mide $\frac{2}{3}$ de dm. Calcular la apotema del decágono regular inscrito en el círculo.

Ejercicios

1. El lado de un triángulo equilátero inscrito en un círculo mide 12 cm. Calcular el lado y la apotema del cuadrado inscrito en el mismo círculo.

2. El lado de un cuadrado inscrito en un círculo mide 16 cm. Calcular el lado, la apotema y la altura del triángulo equilátero inscrito en el mismo círculo.

3. La apotema de un hexágono regular inscrito en un círculo mide 18 cm. Calcular el lado y la apotema del octógono regular inscrito en el mismo círculo.

4. La apotema de un cuadrado inscrito en un círculo mide 8 cm. Calcular el lado y la apotema del decágono regular inscrito en el mismo círculo.

5. El lado de un cuadrado inscrito en un círculo mide 16 cm. Calcular el lado del triángulo equilátero circunscrito al círculo.

6. El lado de un triángulo equilátero inscrito en un círculo mide 24 cm. Calcular el lado del cuadrado circunscrito al círculo.

7. La apotema del hexágono regular inscrito en un círculo mide 18 cm. Calcular la altura del triángulo equilátero circunscrito al círculo.

8. La apotema de un cuadrado inscrito en un círculo mide 14 cm. Calcular el lado del octógono regular circunscrito al círculo.

9. La altura de un triángulo equilátero inscrito en un círculo mide 22 cm. Calcular la apotema del hexágono regular circunscrito al círculo.

10. El lado de un triángulo equilátero circunscrito a un círculo mide 18 cm. Calcular el lado del cuadrado inscrito en el mismo círculo.

11. El lado de un cuadrado circunscrito a un círculo mide 12 cm. Calcular el lado y la altura del triángulo equilátero inscrito en el círculo.

12. La apotema de un hexágono regular circunscrito a un círculo mide 9 cm. Calcular el lado del octógono regular inscrito en el círculo.

13. El lado de un hexágono regular circunscrito a un círculo mide 15 cm. Calcular el lado del cuadrado inscrito en el círculo.

TEOREMA.– los perímetros de dos polígonos semejantes son proporcionales a sus lados homólogos y a sus líneas homólogas.

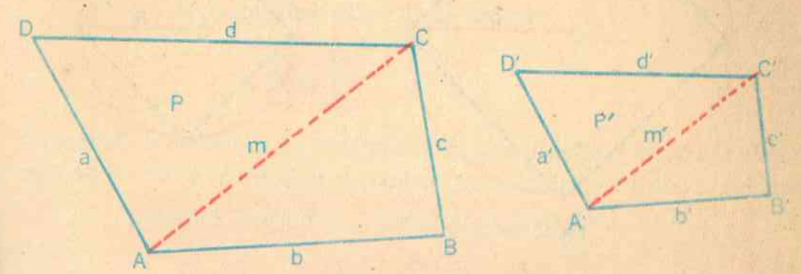


Fig. 51

Hipót.: Polígono ABCD ~ Polígono A´B´C´D´.

Tesis: $\frac{P}{P'} = \frac{b}{b'} = \frac{m}{m'}$.

Siendo semejantes los polígonos P y P´, tenemos:

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{a}{a'}$$

Sumando ordenadamente los antecedentes y los consecuentes, se tiene:

$$\frac{b+c+d+a}{b'+c'+d'+a'} = \frac{P}{P'} = \frac{b}{b'} \qquad (1)$$

Siendo semejantes los triángulos ABC y A´B´C´, tenemos:

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{m}{m'} \qquad (2)$$

Las relaciones (1) y (2), tienen razones comunes

Luego: $\frac{P}{P'} = \frac{b}{b'} = \frac{m}{m'}$

MEDIDA DE LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMA.– Dos circunferencias son proporcionales a sus radios y a sus diámetros.

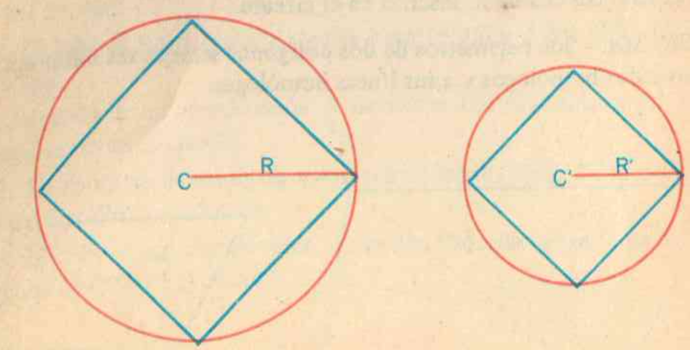


Fig. 52

Hipót.: $\odot C$ y $\odot C'$

Tesis: $\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'} = \frac{D}{D'}$

Inscribimos en estas circunferencias polígonos regulares de igual número de lados. Estos polígonos son semejantes y sus perímetros P y P´ son proporcionales a sus radios R y R´.

$$\text{Luego:}\quad \frac{P}{P'} = \frac{R}{R'} = \frac{2R}{2R'}$$

Si aumentamos indefinidamente el número de lados de los polígonos, el perímetro de cada polígono tiende a la circunferencia.

$$\text{Por lo tanto:}\quad \frac{C}{C'} = \frac{R}{R'} = \frac{D}{D'}$$

Corolario.– 1. La relación entre la circunferencia y el diámetro es constante. Dicha relación se representa con la letra griega π (pi).

Tomando la proporción: $\frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$ .y cambiando los medios, tenemos:

$$\frac{C}{D} = \frac{C'}{D'} = \pi$$

2. *Longitud de la circunferencia.*– La longitud de la circunferencia es igual al diámetro multiplicado por π ó al producto de 2π por el radio.

De la igualdad $\frac{C}{D} = \pi$, se deduce:

$$C = \pi D = 2\pi R.$$

Longitud del diámetro.– La longitud del diámetro es igual a la circunferencia dividida entre π.

De la igualdad $\pi D = C$, se deduce:

$$D = \frac{C}{\pi}$$

Longitud de un arco.– La longitud de un arco resulta de dividir la circunferencia entre 360 y multiplicar el cociente por el número de grados del arco.

Longitud del arco de 1 grado, es igual a $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$

Longitud del arco de n grados igual a $\frac{2\pi R n}{360} = \frac{\pi R n}{180}$.

Cálculo de π.– En una circunferencia de 1 metro de radio, tenemos:

$$\pi = \frac{C}{2R} \quad ó \quad \pi = \frac{C}{2}.$$

Si conseguimos el valor aproximado de esta semi-circunferencia de 1 metro de radio, tenemos el valor aproximado de π.

Como la circunferencia se considera como el límite de un polígono regular de infinito número de lados, podemos hallar el valor aproximado de π, calculando el semiperímetro de ese polígono.

Siendo el lado del hexágono regular inscrito igual al radio y haciendo este igual a l, se obtiene de la fórmula:

$$l' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l^2}}.$$

Los valores sucesivos siguientes para los polígonos de 12, 24, 48, 96, 192, etc. lados.

$$l_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1^2}} = 0.517638$$

$$\frac{1}{2}\,P._{12} = 0.517638 \times 6 = 3.105827$$

$$l_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 0.517638^2}} = 0.261052$$

$$\frac{1}{2}\,P._{24} = 0.261052 \times 12 = 3.132628$$

$$l_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 0.261052^2}} = 0.130806$$

$$\frac{1}{2}\,P._{48} = 0.130806 \times 24 = 3.139345$$

$$l_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 0.130806^2}} = 0.065438$$

$$\frac{1}{2}\,P._{96} = 0.065438 \times 48 = 3.141032$$

$$l_{192} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 0.065438^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si continuamos duplicando el número de lados de los polígonos regulares obtendremos una serie creciente de semiperímetros cuyos valores se van aproximando cada vez más al valor de π.

Para el polígono regular inscrito de 1.536 lados, se obtiene un valor aproximado del semiperímetro igual a 3.141593.

En la práctica suele tomarse: $\pi = 3.1416$.

UNIDAD 6

AREAS DE LAS FIGURAS PLANAS.

Definiciones.– Se llama área de una figura la medida de su superficie.

Con frecuencia se usan indistintamente las palabras área y superficie; sin embargo, no son lo mismo y conviene distinguirlas. Superficie se refiere a la forma y extensión de una figura. Area se refiere al número que representa la medida de la superficie.

La unidad principal de las medidas de superficie es el metro cuadrado.

Figuras equivalentes.– Dos figuras son equivalentes cuando, sin tener la misma forma, tienen igual área.

AREA DEL RECTANGULO.

Dos rectángulos de igual base son proporcionales a sus alturas y dos rectángulos de igual altura son proporcionales a sus bases.

Las áreas de dos rectángulos cualesquiera son proporcionales a los productos de sus bases por sus alturas (fig. 52).

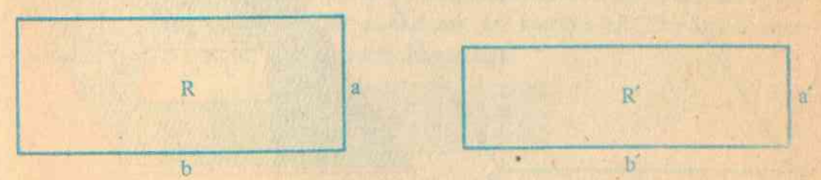


Fig. 52

$$\frac{\text{Rectángulo } R}{\text{Rectángulo } R'} = \frac{b \times a}{b' \times a'}$$

TEOREMA.– El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.

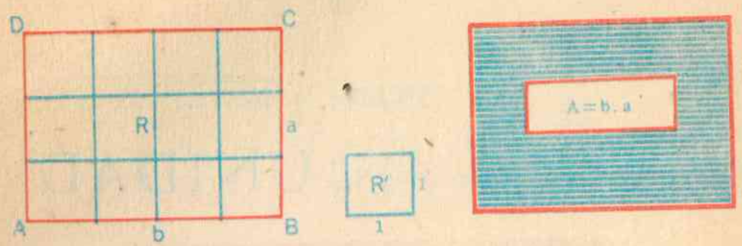


Fig. 53

Se tiene un rectángulo R, que tiene por dimensiones b y a, y otro rectángulo R,´que tiene por dimensiones 1 y 1.

Luego: $\frac{R}{R'} = \frac{b \times a}{1 \times 1}$, de donde se deduce:

$$R = b . a$$

Corolario.– El área de un cuadrado es igual al cuadrado de su lado.

$$\text{Area cuadrado} = l^2$$

Area del paralelogramo.

TEOREMA.– El área de un paralelogramo es igual al producto de su base por su altura.

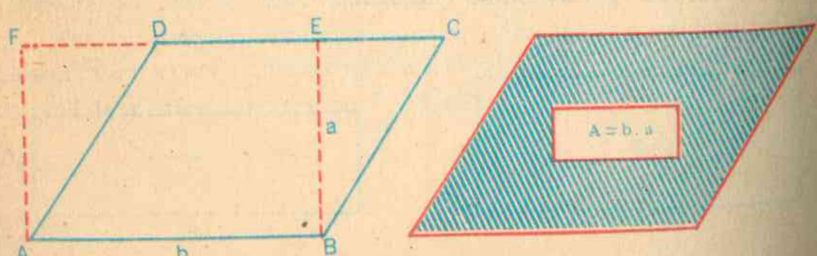


Fig. 54

Se tiene el paralelogramo ABCD y las perpendiculares AF y BE.

Los triángulos rectángulos AFD y BEC son iguales, por tener las hipotenusas AD y BC y los catetos AF y BE respectivamente iguales.

Por lo tanto: el paralelogramo ABCD es equivalente al rectángulo ABEF.

Luego: Área = b. a

Corolarios.– 1. Dos paralelogramos de igual base y altura son equivalentes.

2. Dos paralelogramos de igual base son proporcionales a sus alturas, y dos paralelogramos de igual altura son proporcionales a sus bases.

Area del Rombo

TEOREMA.– El área de un rombo es igual al semiproducto de sus diagonales.

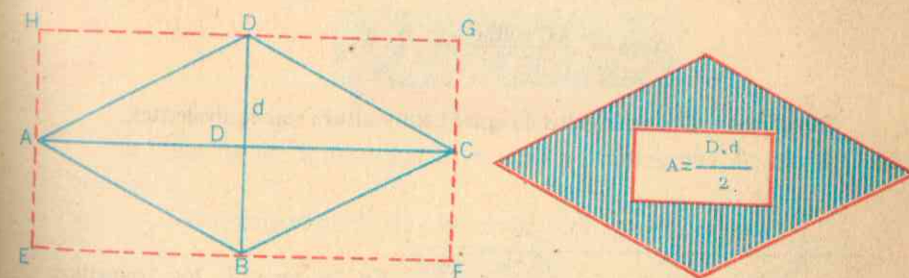


Fig. 55

Se tiene el rombo ABCD y sus diagonales D y d.

Por los vértices del rombo, trazamos perpendiculares a las diagonales y se nos forma el rectángulo EFGH que es el doble del rombo ABCD y sus dimensiones son respectivamente iguales a sus diagonales.

Luego: $\text{Area} = \frac{D \times d}{2}$.

Area del triángulo.

TEOREMA.– El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura.

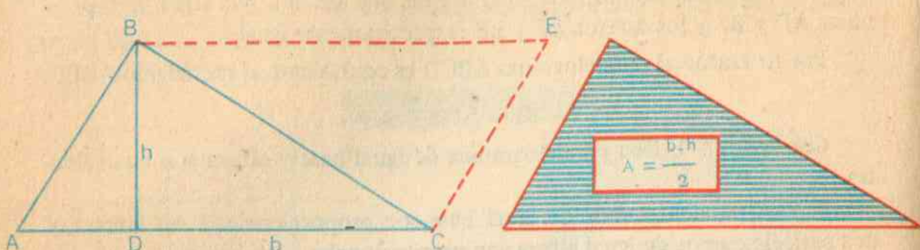


Fig. 56

Se tiene el triángulo ABC y la altura BD ó h.

Si por los vértices B y C trazamos paralelas a los lados opuestos, se obtiene el paralelogramo ABEC que es el doble del triángulo ABC. Luego el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo.

$$\text{Area} = \frac{AC \times BD}{2} = \frac{b\,.\,h}{2}$$

Corolarios. – Dos triángulos de igual base y altura son equivalentes.

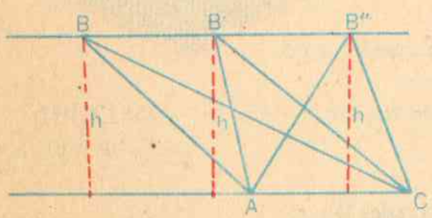


Fig. 57

En la fig. 57, los triángulos ABC, AB′C y AB″C son equivalentes porque tienen la misma base AC y la misma altura h.

2. Dos triángulos de igual base son proporcionales a sus alturas, y dos triángulos de igual altura son proporcionales a sus bases.

Area del Trapecio.

TEOREMA. – El área de un trapecio es igual al producto de su altura por la semisuma de sus bases.

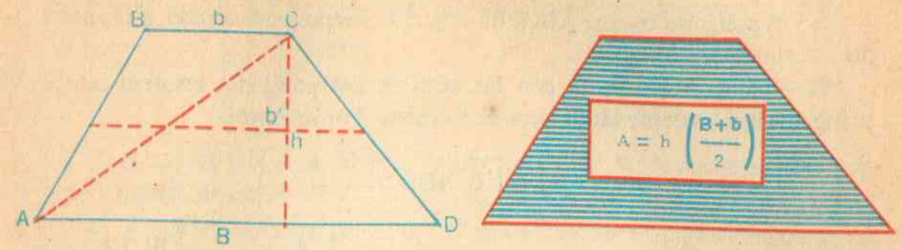


Fig. 58

Se tiene el trapecio ABCD.

La diagonal AC divide el trapecio en dos triángulos cuya altura común h, es la del trapecio y cuyas bases respectivas B y b, son las mismas del trapecio.

Por lo tanto, el área del trapecio es igual a la suma de las áreas de los triángulos, o sea:

$$\text{Area} = \frac{B\,.\,h}{2} + \frac{b\,.\,h}{2} = \frac{h}{2}\,(B + b).$$

$$\text{Luego:}\quad A = h\left(\frac{B + b}{2}\right).$$

La base media de un trapecio es igual a la semisuma de las bases del mismo.

Designando por b′ la base media del trapecio, tenemos:

$$\text{Area} = b'.\,h.$$

Area de un polígono regular.

TEOREMA. – El área de un polígono regular es igual al semiproducto del perímetro por su apotema.

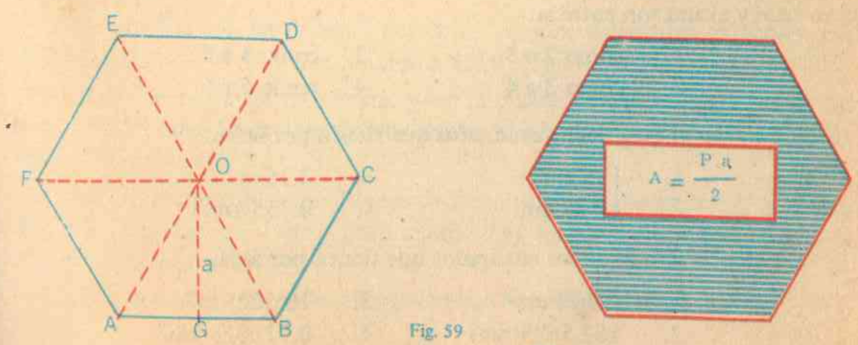


Fig. 59

En el polígono regular ABCDEF (fig. 59), l representa el lado, a la apotema y n el número de lados.

Si unimos el centro O con los vértices del polígono, resultan tantos triángulos iguales como lados tiene el polígono. Por lo tanto:

$$\text{Area del } \triangle \text{ AOB} = \frac{l \cdot a.}{2}$$

$$\text{Area del polígono ABCDEF} = \frac{l \cdot a}{2} \times n = \frac{nl \cdot a}{2}.$$

Siendo $nl = P$, resulta:

$$\boxed{\text{Area} = \frac{P \cdot a}{2}}$$

AREAS

Problemas.

1. Calcular el área de los rectángulos que tienen por base y altura:

1.	24.5 cm.	y	3.5 cm.
2.	1.25 m.	y	3.4 dm.
3.	$\frac{3}{8}$ de m.	y	0.15 m.

2. Calcular la base de los rectángulos que tienen de área y altura:

1.	405 cm^2	y	18 cm.
2.	700.60 dm^2	y	15.5 dm.
3.	55.05 m^2	y	1.5 m.

3. Calcular el área de los rectángulos cuyo perímetro es igual a 160 cm. y cuya base y altura son entre sí:

1.	como 2 a 3	3.	como 4 a 5
2.	como 3 a 4	4.	como 5 a 6

4. Calcular el área de los cuadrados que tienen por lados:

1.	125 cm.	3.	3.25 m.
2.	12.75 dm.	4.	0.755 km.

5. Calcular el lado de los cuadrados que tienen por área:

1.	15625 cm^2	3.	10.5625 m^2
2.	162,5625 dm^2	4.	0.570025 km^2

6. Calcular el área de los paralelogramos que tienen por base y altura:

1.	0.25 Hm.	y	0.35 Dm.
2.	25.2 m.	y	325 cm.
3.	4565 mm.	y	3.25 dm.

7. ¿Cuántas tablas de 3.50 m. de largo por 0.25 m. de ancho se necesitan para entablar un salón de 25 m. de largo por 9 m. de ancho?

8. ¿Cuántas baldosas de 0.20 de lado se necesitan para embaldosar un salón de clase que tiene 8.50 m. de largo por 6 m. de ancho?

9. Calcular el área de una acera de 1.80 m. de ancho que rodea un terreno rectangular de 150 m. de largo por 45 m. de ancho.

10. ¿Qué lado ha de tener una mesa cuadrada para que su superficie sea igual a la de otra mesa rectangular que tiene 4.05 de largo por 1.25 m. de ancho?

11. El área de un rectángulo es de 30 dm^2. ¿Cuáles son sus dimensiones si están en la relación de 4 a 3?

12. ¿Cuánto cuesta la pintada de un zócalo de 0.25 m. de alto en una sala de 8.25 m. de largo por 8 m. de ancho, si el metro cuadrado vale $6.50?

13. ¿Cuál es en hectáreas, la superficie de un terreno rectangular de 825 m. de largo por 675 m. de ancho?

14. Si se alarga 12 m. una cuerda que da la vuelta a un cuadrado, el cuadrado que se puede rodear se aumenta en 135 m^2. ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

15. Si se disminuye en 6 m. el lado de un cuadrado, se obtiene otro de 144 m^2 menos que el primero. ¿Cuál era su lado?

16. La suma de dos cuadrados es de 3050 metros cuadrados, su diferencia, es de 550. ¿Cuál es el lado de cada uno?

17. ¿Cuál es el lado y cuál el área de un cuadrado, si la diagonal y el lado suman 18 cm.?

18. ¿Cuáles son las dimensiones de un campo rectangular, sabiendo que la diagonal mide 80 m. y que vendido a $210 el m^2 ha producido $376.950?

19. Si se prolonga en 15 cm. y en la misma dirección dos lados de un cuadrado, el área del rectángulo que resulta se aumenta en 225 cm^2. ¿Cuál es el área del cuadrado?

20. Un rectángulo tiene 30 cm. de largo y 20 cm. de ancho. Si se disminuye la longitud en 4 cm., ¿con cuánto hay que aumentar el ancho para conservar la misma área?

21. Calcular el área de los triángulos que tienen por base y altura:

1. 36.4 cm. y 18 cm.
2. 2.36 dm. y 3 m.
3. 3/5 de m. y 2/7 de m.

22. Calcular la base de los triángulos que tienen de área y altura:

1. $195\ cm^2$ y 15 cm.
2. $0.34\ m^2$ y 0.20 m.
3. $10.16\ dm^2$ y 1.4 dm.

23. Calcular la base y la altura de un triángulo de $112.50\ dm^2$, si las dimensiones pedidas son iguales.

24. Un triángulo tiene $245\ m^2$ de área. ¿Cuáles son sus dimensiones si están en la relación de 2 a 5?

25. Calcular la base y la altura de un triángulo que tiene $180\ m^2$ de área, si la altura es los $\frac{2}{5}$ de la base.

26. ¿Cuál es la altura de un triángulo de 15 m. de base, si es equivalente a otro que tiene por base y altura 20 y 12 metros respectivamente?

27. Calcular el área de los rombos que tienen por diagonales:

1. 22.5 cm. y 18 cm.
2. 2.40 m. y 8.4 dm.
3. 3/7 de m. y 5/8 de m.

28. Calcular el área de los rombos en los cuales la suma de las diagonales es igual a 48.6 cm., si estas diagonales son entre si:

1. como 2 a 3.
2. como 3 a 4.
3. como 4 a 5.
4. como 5 a 6.

29. El lado de un rombo mide 36 cm. Calcular su área si sus diagonales son entre sí, como 2 a 4.

30. La diagonal menor de un rombo mide 30 dm. y es igual al lado. ¿Cuál es su área?

31. El área de un rombo mide $120\ dm^2$. ¿Cuál es su perímetro si la diagonal menor es igual al lado?

32. Calcular el área de los trapecios que tienen por altura y bases respectivamente:

1. altura 12 cm. bases 48 cm. y 24 cm.

2. 0.48 m. 2.4 dm. y 125 cm.
3. 320 mm. 1 m. y 0.6 dm.

33. El área de un trapecio es de $360\ cm^2$. ¿Cuál es su altura si sus bases miden 50 y 70 cm. respectivamente?

34. Las bases de un trapecio miden respectivamente 40 y 60 cm.; si la altura del triángulo comprendido entre la base menor y la prolongación de los lados no paralelos mide 15 cm. ¿Cuál es el área del trapecio?

35. El área de un trapecio es de $8.40\ m^2$, si la base menor tiene 2 m. y la altura 1.80 m. ¿Cuál es la base mayor?

AREA DEL CIRCULO.

TEOREMA.– El área del círculo es igual al semiproducto de la circunferencia por el radio.

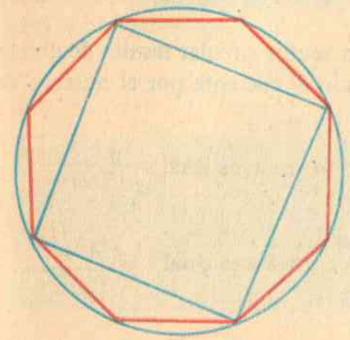


Fig. 60

Como el círculo se puede considerar como un polígono regular de infinito número de lados. En el límite, el perímetro del polígono se confunde con la circunferencia y la apotema con el radio.

Por lo tanto, llamando C a la circunferencia y R al radio, tenemos:

$$\text{Area círculo} = \frac{C \times R}{2} \qquad (1)$$

Corolarios.– 1. El área del círculo es igual al producto de π por el cuadrado del radio.

Sustituyendo en (1), la circunferencia C por su valor $2\pi R$, resulta:

$$\text{Area} = 2\pi R \times \frac{R}{2}.$$

$$\text{Luego: Area círculo} = \pi R^2. \qquad (2)$$

2. El área del círculo es igual a la cuarta parte del producto de π por el cuadrado del diámetro.

Sustituyendo en (2), el radio por su valor $\frac{D}{2}$, resulta:

$$\text{Area} = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2$$

$$\text{Luego: Area círculo} = \frac{\pi D^2}{4}. \qquad (3)$$

3. El área del círculo es igual al producto de $\frac{1}{\pi}$ por el cuadrado de la semicircunferencia.

Sustituyendo en (3), el diámetro por su valor $\frac{C}{\pi}$, resulta:

$$\text{Area} = \frac{\pi}{4} \times \left(\frac{C}{\pi}\right)^2.$$

$$\text{Area} = \frac{\pi}{4} \times \frac{C^2}{\pi^2}$$

$$\text{Area} = \frac{\pi}{\pi^2}\left(\frac{C^2}{4}\right)$$

$$\text{Luego: Area círculo} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{C}{2}\right)^2$$

Area del sector circular.– El área de un sector circular resulta de dividir el área del círculo entre 360 y multiplicando el cociente por el número de grados del sector.

El área de un sector circular de un grado es igual a $\frac{\pi R^2}{360}$

El área de un sector circular de n grados es igual a $\frac{\pi R^2 n}{360}$

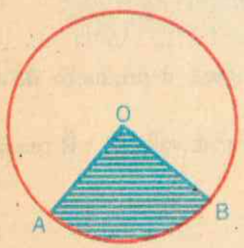


Fig. 61

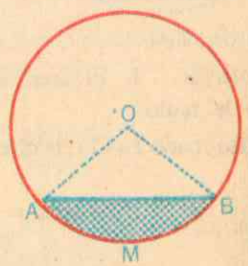
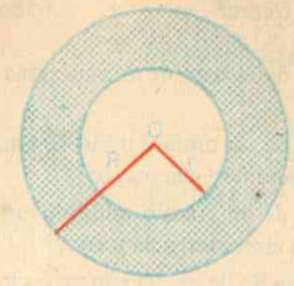


Fig. 62

Area de un segmento circular.– El área de un segmento circular, es igual al área del sector correspondiente menos el área del triángulo sobrante.

En la fig. 62, el área del segmento ABM es igual al área del sector AOBM menos el área del triángulo AOB.

Area de la corona circular.– El área de una corona circular, es igual a la diferencia entre las áreas de los círculos que la limitan.



Si en la fig. 63, restamos del círculo exterior el círculo interior, nos queda la corona circular. Por lo tanto, designando por R y r los radios respectivos, tenemos:

$$\text{Area} = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$\text{Luego: Area corona} = \pi (R^2 - r^2).$$

AREAS

Círculo. Sector. Segmento. Corona.

PROBLEMAS

1. Calcular el área de los círculos que tienen por radios:

1. 45 cm.	3. 0.25 m.
2. 2.25 dm.	4. 35.5 mm.

2. Calcular el área de los círculos que tienen por diámetro:

1. 45 cm.	3. 315 mm.
2. 1.36 m.	4. $\frac{3}{8}$ de m.

3. Calcular el área de los círculos que tienen por circunferencia:

1. 50 cm.	3. 1.75 m.
2. 12.5 dm.	4. $\frac{4}{9}$ de m.

4. Calcular el radio de los círculos que tienen por área:

1. $706.86\ cm^2$ 3. $3.0686\ m^2$
2. $32.16\ dm^2$ 4. $7.658\ mm^2$

5. La circunferencia de la base de una columna es de 3.25 m. Calcular el área de la base.

6. La circunferencia de un círculo mide 40 cm., si se aumenta el área en 180 cm^2. ¿Cuál será la circunferencia mayor?

7. La circunferencia de un círculo mide 80 cm., si se disminuye el área en 260 cm^2. ¿Cuál será la circunferencia menor?

8. Si se prolonga el radio de un círculo en 5 cm., el área queda aumentada en 180 cm^2. Hallar el radio menor.

9. Calcular el área de un sector circular de 60 grados en un círculo de 24 cm. de radio.

10. Calcular el área de un sector circular de 45 grados en un círculo de 36 dm. de circunferencia.

11. El área de un sector circular de 75 grados, es de 36 cm^2. Calcular el radio del círculo.

12. En un círculo de 2.4 m. de radio, se tiene un sector de 1.80 m^2. Calcular los grados del sector.

13. Un sector circular tiene 36 cm^2., y el ángulo central 45 grados. Calcular el diámetro del círculo.

14. Calcular el área de un segmento circular de 120 grados en un círculo de 12 cm. de radio.

15. Calcular el área de un segmento circular de 60 grados, en un círculo de 2,4 dm. de radio.

16. Los radios de dos círculos concéntricos miden respectivamente $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{9}$ de m. Calcular el área de la corona circular limitada por dichos círculos.

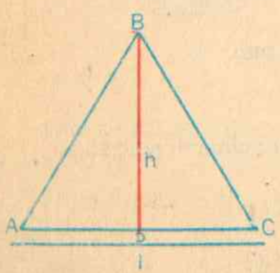


Fig. 64

Area del triángulo equilátero en función del lado.

$$\text{Area del triángulo ABC} = \frac{l \times h}{2}.$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Area del triángulo ABC} = \frac{l}{2} \times \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Luego: Area} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

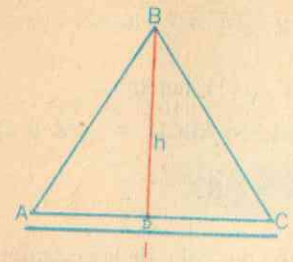


Fig. 65

Area del triángulo equilátero en función de la altura.

$$\text{Area del triángulo ABC} = \frac{l \times h}{2}$$

$$l = \frac{2h\sqrt{3}}{3}$$

Area del triángulo ABC =

$$\frac{2h\sqrt{3}}{3} \times \frac{h}{2} = \frac{2h^2\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Luego: } A = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}$$

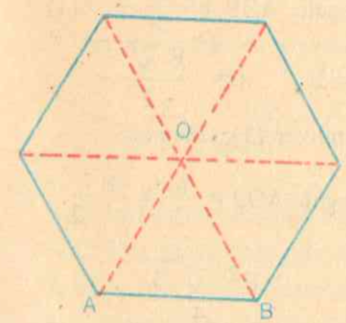


Fig. 66

Area del hexágono regular en función del lado.

El hexágono regular se descompone en 6 triángulos equiláteros iguales.

$$\text{El área del triángulo AOB} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Area del hexágono ABCDEF} = \frac{6\,l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Luego: Area} = \frac{3\,l^2.\sqrt{3}}{2}$$

Area del triángulo equilátero inscrito, en función del radio de la circunferencia circunscrita.

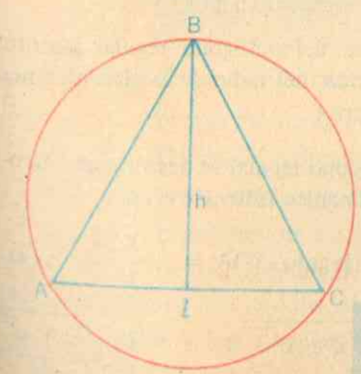


Fig. 67

$$\text{Area triángulo ABC} = \frac{l \times h}{2} \qquad (1)$$

$$l = R\sqrt{3}\,; \qquad h = \frac{3R}{2}$$

Sustituyendo en (1), tenemos:

$$\text{Area triángulo ABC} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \times \frac{3R}{2}$$

$$\text{Luego: Area} = \frac{3\,R^2.\sqrt{3}}{4}$$

Area del cuadrado inscrito, en función del radio de la circunferencia circunscrita.

$$\text{Area del cuadrado ABCD} = l \times l = l^2 \quad (1)$$

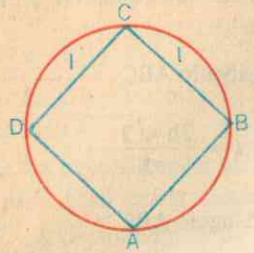


Fig. 68

$$l = R\sqrt{2}$$

Sustituyendo en (1), tenemos:

$$\text{Area del cuadrado ABCD} = (R\sqrt{2})^2$$

Luego: Area = 2 R^2

Area del hexágono regular inscrito en función del radio de la circunferencia circunscrita.

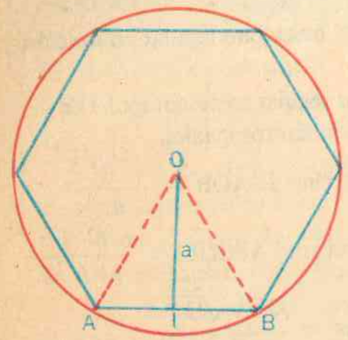


Fig. 69

El hexágono regular se descompone en seis triángulos equiláteros iguales.

$$\text{Area triángulo AOB} = \frac{l \times a}{2} \quad (1)$$

$$l = R; \qquad a = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Sustituyendo en (1), tenemos:

$$\text{Area triángulo AOB} = \frac{R}{2} \times \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Area del hexágono regular} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \times 6$$

Luego: Area = $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

Area del octógono regular inscrito, en función del radio de la circunferencia circunscrita.

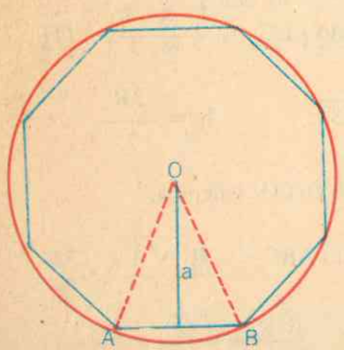


Fig. 70

El octógono regular se descompone en ocho triángulos isósceles iguales.

$$\text{Area triángulo AOB} = \frac{l \times a}{2} \quad (1)$$

$$l = R\sqrt{2-\sqrt{2}}; \qquad a = \frac{R\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Sustituyendo en (1), tenemos:

$$\text{Area triángulo AOB} = \frac{R\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \times \frac{R\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{R^2\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Area del octógono regular} = \frac{R^2\sqrt{2}}{4} \times 8$$

Luego: Area = $2R^2\sqrt{2}$.

AREAS

1. Calcular el área de los triángulos equiláteros que tienen por lado:

   1. 27 cm.
   2. 2.50 dm.
   3. 5/8 de m.
   4. 0.36 m.

2. Calcular el área de los triángulos equiláteros que tienen por altura:

   1. 12 cm.
   2. 1.8 m.
   3. 45.5 mm.
   4. 3/5 de m.

3. El área de un triángulo equilátero es de 280 cm^2. Calcular el lado.
4. El área de un triángulo equilátero es de 360 cm^2. Calcular su altura.
5. El perímetro de un triángulo equilátero es de 7.2 dm. Calcular su área.
6. El radio de un círculo mide 24 cm. Calcular:
   1. El área del cuadrado inscrito.
   2. El área del triángulo equilátero inscrito.
   3. El área del hexágono regular inscrito.
   4. El área del octógono regular inscrito.
7. El radio de un círculo mide 36 dm. Calcular:
   1. El área del cuadrado circunscrito.
   2. El área del triángulo equilátero circunscrito.
   3. El área del hexágono regular circunscrito.
   4. El área del octógono regular circunscrito.
8. El lado de un cuadrado inscrito en un círculo, mide 1.2 m. Calcular el área del triángulo equilátero inscrito en el círculo.
9. El lado de un triángulo equilátero inscrito en un círculo mide 3/7 m. Calcular el área del cuadrado inscrito en el círculo.
10. El lado de un cuadrado inscrito en un círculo mide 0.26 m. Calcular el área del hexágono regular inscrito en el círculo.

11. El lado de un hexágono regular inscrito en un círculo mide 12 dm. Calcular el área del triángulo equilátero inscrito en el círculo.

12. El lado de un triángulo equilátero inscrito en un círculo mide $\frac{5}{9}$ de dm. Calcular el área del octógono regular inscrito en el círculo.

13. La apotema de un cuadrado inscrito en un círculo mide 15 cm. Calcular el área del triángulo equilátero inscrito en el círculo.

14. La altura de un triángulo equilátero inscrito en un círculo mide $\frac{2}{3}$ de m. Calcular el área del cuadrado inscrito en el círculo.

15. La apotema de un hexágono regular inscrito en un círculo mide 24 cm. Calcular:

1. El área del cuadrado inscrito.
2. El área del triángulo equilátero inscrito.
3. El área del octógono regular inscrito.

16. El área de un cuadrado inscrito en un círculo es de 36 dm^2. Calcular el radio del círculo.

17. El área de un triángulo equilátero inscrito en un círculo es de 360 cm^2. Calcular el radio del círculo.

18. El área del hexágono regular inscrito en un círculo es de 7.2 m^2. Calcular el radio del círculo.

19. El área de un octógono regular inscrito en un círculo es de 36 dm^2. Calcular el radio del círculo.

20. Una cuerda en un círculo, que se une por uno de sus extremos al diámetro, mide 9 cm. y su proyección sobre el diámetro mide 5.4 cm. Calcular el área del triángulo equilátero inscrito en el círculo.

21. Una cuerda en un círculo, que se une por uno de sus extremos al diámetro, mide 24 cm. y la perpendicular bajada del otro extremo de la cuerda al diámetro mide 14.4 cm. Calcular el área del hexágono regular inscrito en el círculo.

22. Dos cuerdas en un círculo, que se unen por uno de sus extremos formando ángulo recto, miden respectivamente 10 y 7.5 cm. Calcular el área del octógono regular inscrito en el círculo.

23. Una cuerda en un círculo mide 15 cm. y la proyección, sobre el diámetro, de otra cuerda que se une a la primera, por uno de sus extremos, formando ángulo recto mide 16 cm. Calcular el área del cuadrado inscrito en el círculo.

24. La perpendicular trazada desde un punto de la circunferencia al diámetro mide $\frac{9}{5}$ de m. y uno de los segmentos determinados en el diámetro mide $\frac{12}{5}$ de m. Calcular el área del triángulo equilátero inscrito en el círculo.

25. Dos cuerdas se cortan en un círculo, la distancia del punto de intersección al centro del círculo es de 16 cm., y el producto de los segmentos de cada cuerda es de 969. Calcular el área del hexágono regular inscrito en el círculo.

26. Dos cuerdas se cortan en un círculo, el producto de los segmentos de cada cuerda es de $\frac{35}{100}$ de m. y la distancia del punto de intersección al centro del círculo es de $\frac{1}{10}$ de m. Calcular el área del octógono regular inscrito en el círculo.

27. El lado de un triángulo equilátero inscrito en un círculo, mide 36 cm. Calcular el área del segmento circular comprendido entre el lado del triángulo y el arco subtendido por él.

28. El lado de un hexágono regular inscrito en un círculo mide 18 cm. Calcular el área del segmento circular comprendido entre el lado del hexágono y el arco subtendido.

29. Calcular el área de la corona circular comprendida entre los círculos inscrito y circunscrito, a un cuadrado de 22 cm. de lado.

30. Calcular el área de la corona circular comprendida entre los círculos inscrito y circunscrito a un triángulo equilátero cuyo lado mide $\frac{5}{9}$ de m.

31. Calcular el área de la corona circular comprendida entre los círculos inscrito y circunscrito a un hexágono regular de 24 cm. de lado.

TRANSFORMACION DE FIGURAS

Toda figura, excepto el círculo, puede transformarse en un cuadrado equivalente.

El lado de dicho cuadrado es, siempre, medio proporcional entre las dimensiones cuyo producto representa el área de la figura dada, por lo tanto:

Para el triángulo, el lado del cuadrado, es una media geométrica entre la base y la mitad de la altura.

Para el paralelogramo, es una media geométrica entre la base y la altura.

Para el trapecio, es una media geométrica entre la altura y la semisuma de las bases.

Para un polígono regular, es media geométrica entre la apotema y el semiperímetro.

Para un polígono cualquiera, es media geométrica entre la base y la mitad de la altura del triángulo equivalente.

Problema.– Transformar un rectángulo en un cuadrado equivalente.

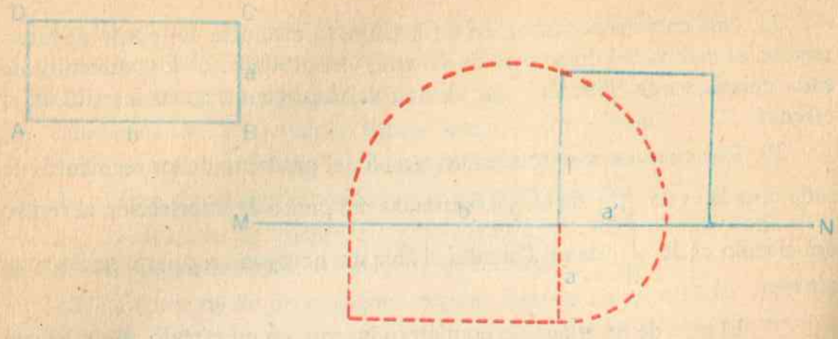


Fig. 71

Se tiene el rectángulo ABCD, cuyas dimensiones son b y a.

Sobre una recta cualquiera, se toma b′ = b y a′= a. Tomando la suma de estas dos dimensiones como diámetro, se describe una semicircunferencia.

La perpendicular l será el lado del cuadrado equivalente al rectángulo, ya que:

$$l^2 = b' \cdot a'$$

Problema.– Transformar un paralelogramo en un cuadrilátero rectángulo equivalente.

Fig. 72

Se tiene el paralelogramo ABCD.

Se prolonga CD y se trazan las perpendiculares AF y BE.

Siendo los triángulos rectángulos AFD y BEC iguales, el rectángulo ABEF será equivalente al paralelogramo ABCD.

Problema.– Transformar un paralelogramo en un triángulo equivalente.

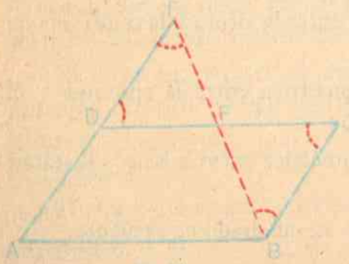


Fig. 73

Se tiene el paralelogramo ABCD.

Prolongamos AD; trazamos DE= AD y unimos E con B.

Siendo los triángulos DEF y FBC iguales, el triángulo AEB será equivalente al paralelogramo ABCD.

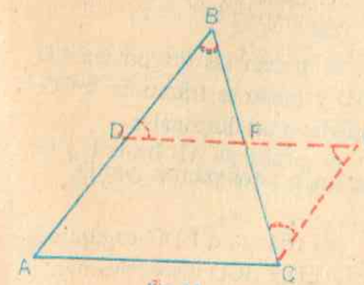


Fig. 74

Problema.– Transformar un triángulo en un paralelogramo equivalente.

Se tiene el triángulo ABC.

Por el punto C trazamos CE paralela a AB, y por D punto medio de AB trazamos la recta DE paralela a AC.

Siendo los triángulos DBF y FCE iguales, el paralelogramo ACED será equivalente al triángulo ABC.

Problema.– Transformar un trapecio en un triángulo.

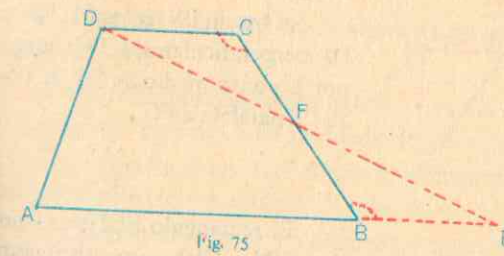


Fig. 75

Se tiene el trapecio ABCD.

Se prolonga la base mayor AB; se toma BE =DC y se traza la recta DE.

El triángulo ADE es equivalente al trapecio ABCD, por ser iguales los triángulos DCF y FBE.

Problema.– Transformar un cuadrilátero en un triángulo.

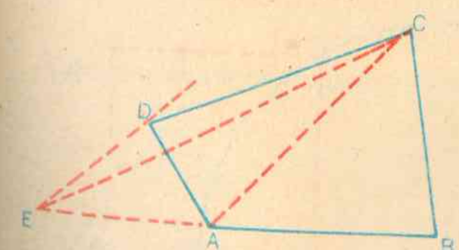


Fig. 76

Se tiene el cuadrilátero ABCD.

Se traza la diagonal AC. Por el punto D se traza ED paralela a la diagonal y se prolonga AB hasta E.

Uniendo el punto E con C tenemos el triángulo ECB equivalente al cuadrilátero ABCD por ser el triángulo ACD equivalente al triángulo ACE.

Transformar un polígono cualquiera en un triángulo equivalente, el triángulo en un cuadrilátero rectángulo equivalente, y el rectángulo en un cuadrado equivalente.

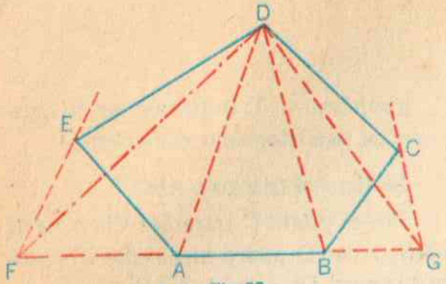


Fig. 77

Se tiene el polígono ABC DE (fig. 77).

Se trazan las diagonales AD y BD y luego se trazan EF y CG paralelas a las diagonales.

Se prolonga AB hasta F y G y se unen estos puntos con D.

El triángulo FDG es equivalente al polígono ABCDE por ser los triángulos AED y BCD respectivamente equivalentes a los triángulos AFD y BGD.

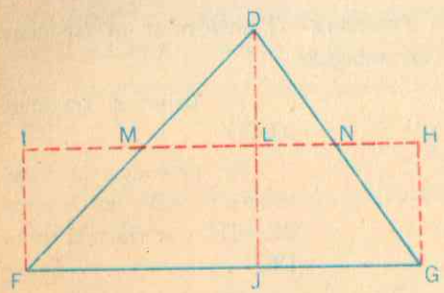


Fig. 78

Se tiene el triángulo FDG de la figura anterior (fig. 78).

Se trazan las rectas FI, GH y DJ perpendiculares a FG; luego por L punto medio de DJ, se traza IH paralela a FG.

El rectángulo FGHI es equivalente al triángulo FDG, por ser los triángulos FIM y GHN respectivamente iguales a los triángulos MLD y NLD.

Se tiene el rectángulo FGHI de la figura anterior (fig. 79).

A continuación del lado HI tomamos HB= HG.

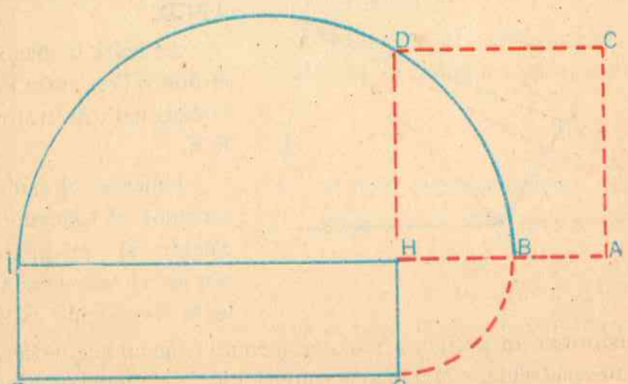


Fig. 79

Tomando la suma de estas dos dimensiones como diámetro, se describe una semicircunferencia.

Trazamos DH perpendicular a IB en el punto H.

El cuadrado HACD es equivalente al rectángulo FGHI, ya que: $DH^2 = FG \times GH$.

Ejercicios.

1. Calcular el lado del cuadrado equivalente:

   1. A un rectángulo que tiene 36 cm. de base y 12 cm. de altura.
   2. A un triángulo equilátero que tiene 24 cm. de lado.
   3. A un rombo cuyas diagonales miden 32 y 12 cm. respectivamente.
   4. A un trapecio que tiene por bases 40 y 25 cm. y por altura 15 cm.

2. Calcular el lado de un hexágono regular equivalente a un cuadrado de 2.4 m. de lado.

3. Un triángulo equilátero que tiene 54 cm. de perímetro es equivalente a un hexágono regular. Calcular el lado del hexágono.

4. Un rectángulo es equivalente a un cuadrado de 36 cm. de lado; ¿cuáles son sus dimensiones si están en la relación de 3 a 5?

5. Calcular el lado de un cuadrado equivalente a un triángulo equilátero de 25 cms. de lado.

6. Calcular el lado de un cuadrado equivalente a un rectángulo cuya diagonal y una de sus dimensiones miden respectivamente 30 y 18 cm.

FORMULAS RELATIVAS A LAS AREAS DE DETERMINADOS TRIANGULOS.

Calcular el área de un triángulo, en función de sus tres lados.

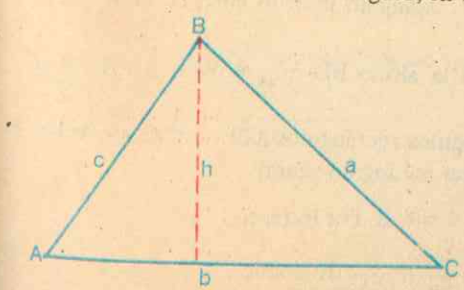


Fig. 80

Se tiene el triángulo ABC.

$$\text{Area } \Delta ABC = \frac{b.h}{2} \quad (1)$$

$$h = \frac{2}{b} \cdot \sqrt{p(p-b)(p-a)(p-c)}$$

Sustituyendo en (1), tenemos:

$$\text{Area } \Delta ABC = \frac{b}{2} \times \frac{2}{b} \sqrt{p(p-b)(p-a)(p-c)}$$

Luego: Area $= \sqrt{p(p-b)(p-a)(p-c)}$

Nota: p, representa el semiperímetro.

Calcular el área de un triángulo, en función de sus tres lados y el radio de la circunferencia inscrita.

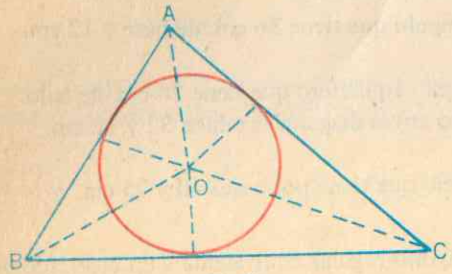


Fig. 81

Se tiene el triángulo BAC circunscrito a la circunferencia O.

Se une el centro O con los vértices del triángulo y se obtienen los triángulos BOC, COA y AOB.

$$\text{Area } \triangle BOC = \frac{a \cdot R}{2}$$

$$\text{Area } \triangle COA = \frac{b \cdot R}{2}$$

$$\text{Area } \triangle AOB = \frac{c \cdot R}{2}$$

$$\text{Area } \triangle BAC = \frac{a.R}{2} + \frac{b.R}{2} + \frac{c.R}{2}$$

$$\text{Area } \triangle BAC = \left(\frac{a+b+c}{2}\right).R$$

Tomando $a + b + c = 2p$, tenemos:

$$\text{Area } \triangle BAC = \frac{2p}{2} \times R. \qquad \boxed{\text{Luego: Area} = p.R}$$

Calcular el área de un triángulo en función de sus tres lados y del radio de la circunferencia circunscrita.

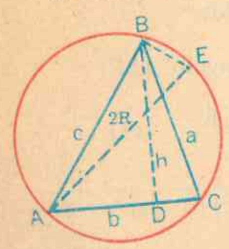


Fig. 82

Se tiene el triángulo inscrito en la circunferencia O.

Trazamos la altura BD ó h, el diámetro AE y la cuerda BE.

Los triángulos rectángulos ABE y BDC son semejantes por tener un ángulo agudo igual, $\measuredangle C = \measuredangle E$. Por lo tanto:

$$\frac{a}{2R} = \frac{h}{c}, \text{ de donde } 2R.h = a.c$$

$$\boxed{\text{Luego: } h = \frac{a \cdot c}{2R}}$$

$\text{Area } \triangle ABC = \frac{b \cdot h}{2}$, sustituyendo h, por su valor, tenemos:

$$\text{Area } \triangle ABC = \frac{b}{2} \times \frac{a \cdot c}{2R} \qquad \boxed{\text{Luego: Area} = \frac{b \cdot a \cdot c}{4R}}$$

Calcular el área de un triángulo, en función de sus tres lados y del radio de la circunferencia exinscrita.

Se tiene el triángulo ABC y el Círculo O, exinscrito en el ángulo A.

$$\triangle ABC = \triangle OAC + \triangle OAB - \triangle OBC$$

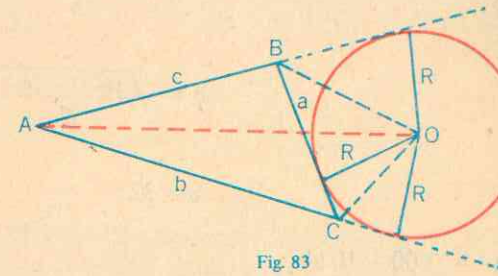


Fig. 83

$$\text{Area } \triangle OAC = \frac{b \cdot R}{2} \qquad \text{Area } \triangle OAB = \frac{c \cdot R}{2}$$

$$\text{Area } \triangle OBC = \frac{a \cdot R}{2} \qquad \text{Area } \triangle ABC = \frac{b.R}{2} + \frac{c.R}{2} - \frac{a.R}{2}$$

$$\text{Area } \triangle ABC = \left(\frac{b+c-a}{2}\right).R$$

Tomando: $b + c + a = 2p$, tenemos:

$$b + c - a = 2p - 2a = 2(p - a)$$

$$\boxed{\text{Luego: Area} = (p - a).R}$$

SOLUCION DE DIFERENTES PROBLEMAS RELACIONADOS CON LAS DISTINTAS UNIDADES.

1. La diagonal de un rectángulo mide 40 cm. Calcular sus dimensiones si están en la relación de 3 a 4.

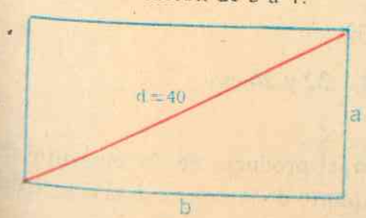


Fig. 84

Solución 1.

$$a^2 + b^2 = 1600$$

$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$, elevando al cuadrado, resulta:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{9}{16}$$, sumando los consecuentes a los antecedentes, tenemos:

$$\frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{9+16}{16}$$, sustituyendo $a^2 + b^2$ por 1600, nos da:

$$\frac{1600}{b^2} = \frac{25}{16}$$, de donde $25\,b^2 = 1600 \times 16$

$$b^2 = \frac{1600 \times 16}{25}$$

$$b = \sqrt{\frac{1600 \times 16}{25}}$$

$$b = 32.$$

$$a^2 = 1600 - 1024$$

$$a = \sqrt{576}$$

$$a = 24.$$

R. 32 y 24 cm.

Solución 2.

Llamando 3 x la altura y 4x la base, tenemos:

$$(3x)^2 + (4x)^2 = 1600.$$

$$9x^2 + 16x^2 = 1600$$

$$25x^2 = 1600$$

$$x = \sqrt{\frac{1600}{25}} = 8.$$

$$a = 8 \times 3 = 24; \quad b = 8 \times 4 = 32.$$

R. 32 y 24 cm.

2. Dos cuerdas se cortan en un círculo, el producto de los segmentos de cada cuerda es de 867.75 y la distancia del punto de intersección al centro del círculo es de 12.5 cm. Calcular el radio del círculo.

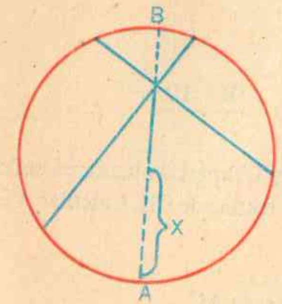


Fig. 85

Solución.

Prolongamos la distancia del punto de intersección al centro del círculo por los dos extremos, y obtenemos el diámetro AB.

Representando por x el radio, se tiene:

$$(x + 12.5)(x - 12.5) = 867.75$$

$$x^2 - 156.25 = 867.75$$

$$x^2 = 867.75 + 156.25$$

$$x = \sqrt{1024} = 32.$$

R. 32

3. Dos cuerdas paralelas miden respectivamente 12 y 16 cm., la distancia entre las cuerdas es de 2 cm. Calcular el radio del círculo.

Solución.

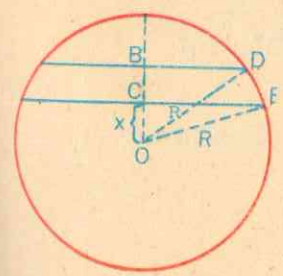


Fig. 86

R. radio del círculo. x, distancia OC.

$$R^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BD}^2 \qquad (1)$$

$$R^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CE}^2 \qquad (2)$$

Reemplazando en (1) y (2), tenemos:

$$R^2 = (x + 2)^2 + 6^2.$$

$$R^2 = x^2 + 8^2.$$

Luego: $(x + 2)^2 + 6^2 = x^2 + 8^2$

$$x^2 + 4x + 4 + 36 = x^2 + 64$$

$$x^2 + 4x - x^2 = 64 - 4 - 36.$$

$$4x = 24.$$

$$x = \frac{24}{4} = 6.$$

Tomando la igualdad: $R^2 = x^2 + 8^2$ y reemplazando x por su valor, tenemos:

$$R^2 = 6^2 + 8^2$$

$$R = \sqrt{100} = 10.$$

R. 10.

4. En el círculo O trazamos los diámetros AB y CD perpendiculares entre si y la cuerda CB; unimos el punto A con el punto medio de CB. Calcular AE, en función del radio.

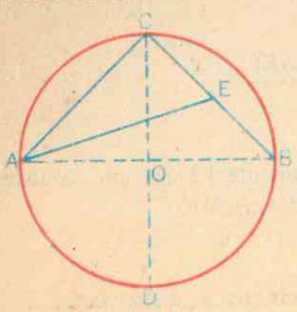


Fig. 87

Solución.

Trazamos la cuerda AC.

El triángulo rectángulo ACE, nos da:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 \qquad (1)$$

$$AC = R\sqrt{2}; \qquad CE = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Reemplazando en (1), tenemos:

$$\overline{AE}^2 = (R\sqrt{2})^2 + \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\overline{AE}^2 = 2R^2 + \frac{2R^2}{4}$$

$$\overline{AE}^2 = \frac{8R^2 + 2R^2}{4}$$

$$\overline{AE}^2 = \frac{10R^2}{4}$$

R. $AE = \dfrac{R\sqrt{10}}{2}$

5. Calcular los dos segmentos de una recta de 2 m. dividida en media y extrema razón.

Designando por a la recta y por x la parte áurea, se tiene:

$\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{a-x}$, reemplazando, nos da:

$\dfrac{2}{x} = \dfrac{x}{2-x}$, de donde: $x^2 = 2(2-x)$

$$x^2 = 4 - 2x$$

$$x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x = -1 \pm \sqrt{1+4}$$

$$x = -1 \pm 2.236$$

$$x_1 = 1.236$$

R. Los segmentos son: 1.236 y 0.764.

6. El lado y la diagonal de un cuadrado suman 24.15 cm. Calcular el área del cuadrado.

l, lado del cuadrado.

$l\sqrt{2}$, diagonal.

$$l + l\sqrt{2} = 24.15$$

$$l(1+\sqrt{2}) = 24.15$$

$$l = \frac{24.15}{1+\sqrt{2}}$$

Racionalizando se tiene:

$$l = \frac{24.15\,(1-\sqrt{2})}{1-2}$$

$$l = \frac{24.15\,(-0.4142)}{-1}$$

$$l = 10.$$

Area $= l^2 = 10^2 = 100.$

R. 100 cm^2.

7. El lado de un triángulo equilátero inscrito en un círculo mide $\frac{8}{9}$ de m. Calcular la longitud del arco subtendido por el lado del octógono regular inscrito en el mismo círculo.

Solución.

$$R\sqrt{3} = \frac{8}{9}. \qquad R = \frac{8\sqrt{3}}{27}$$

$$n = \frac{360}{8} = 45^{o}$$

$$\text{Arco} = \frac{\pi\, R . n}{180}$$

$$\text{Arco} = \frac{3.1416 \times \frac{8\sqrt{3}}{27} \times 45}{180} = \text{o}.39$$

R. o.39 m.

8. El lado de un hexágono regular circunscrito a un círculo mide $\frac{13}{16}$ de m. Calcular la longitud del arco subtendido por el lado del hexágono regular inscrito en el círculo.

Solución.

$$l = R. \qquad R = \frac{13}{16}$$

$$\text{Apotema} = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{13}{16} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \frac{13\sqrt{3}}{32}$$

$$n = \frac{360}{6} = 60^{o}$$

$$\text{Arco} = \frac{\pi m}{180} \qquad \text{Arco} = \frac{3.1416 \times \frac{13\sqrt{3}}{32} \times 60}{180} = \text{o}.73$$

R. o.73 m.

9. ¿Cuáles son las dimensiones de un campo rectangular, sabiendo que la diagonal mide 200 m. y que vendido a \$ 210.oo el m^2, ha producido \$ 3.760.050.oo?

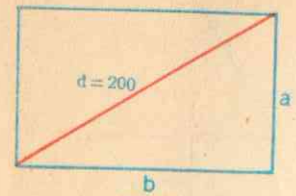


Fig. 88

Solución.

Area del campo: 3.760.050: 210 = 17.905.
Llamando b y a las dimensiones, tenemos:

$$b^2 + a^2 = 40.000 \qquad (1)$$

$$a.b = 17.905 \qquad (2)$$

Si en la igualdad (1), añadimos y quitamos sucesivamente el duplo de la igualdad (2), resulta:

$$b^2 + a^2 + 2ab = 40.000 + 35.810$$

$$(b + a)^2 = 75.810$$

$$b + a = \sqrt{75.810} = 275.34$$

$$b^2 + a^2 - 2ab = 40.000 - 35.810$$

$$(b - a)^2 = 4.190$$

$$b - a = \sqrt{4.190} = 64.73$$

$$b + a = 275.34 \qquad b = \frac{340.07}{2} = 170.03$$

$$\begin{array}{l} b - a = 64.73 \\ \hline 2b = 340.07 \end{array} \qquad a = 275.34 - b;\ a = 275.34 - 170{,}o3 = 105.30$$

R. b = 170.03. a = 105.30

10. El área de un triángulo es de 360 cm^2. ¿Cuáles son sus dimensiones si están en la relación de 3 a 5?

Solución.

Designando las dimensiones por 3x y 5x tenemos:

$$\frac{(5x)\ (3x)}{2} = 360$$

$$15x^2 = 720$$

$$x^2 = \frac{720}{15} = 48$$

$$x = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4 \times 1.732 = 6.928$$

$$b = 6.928 \times 5 = 34.64$$

$$a = 6.928 \times 3 = 20.78$$

R. $b = 34{,}64$ y $a = 20{,}78$

11. El lado de un cuadrado mide 48 cm. Calcular el lado de un triángulo equilátero de igual área.

Solución.

l, lado del triángulo equilátero.

$\frac{l\sqrt{3}}{2}$, altura del triángulo equilátero

$$\frac{l}{2} \times \frac{l\sqrt{3}}{2} = 48^2.$$

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 2.304$$

$$l = \sqrt{\frac{2.304 \times 4}{\sqrt{3}}} = 72.94$$

R. 72.94 cm.

12. Calcular el perímetr[o] de un rombo cuya área es de 180 cm.^{2}, sabiendo que la diagonal meno[r e]s igual al lado.

Solución.

El área del rombo dado es equivalente al área de dos triángulos equiláteros iguales.

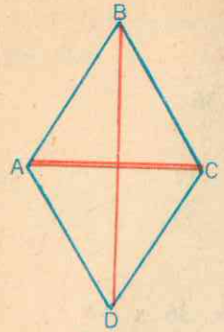


Fig. 89

Luego:

$$\frac{2l^2\sqrt{3}}{4} = 180$$

$$l^2\sqrt{3} = 180 \times 2$$

$$l^2 = \frac{360\sqrt{3}}{3} = 120\sqrt{3}$$

$$l = \sqrt{120\sqrt{3}} = 14.41$$

Perímetro: $14.41 \times 4 = 57.64$

R. 57.64 cm.

13. Las bases y la altura de un trapecio son entre si como 3, 5 y 7. Calcular las bases si el área del trapecio es de 1600 cm^2.

Solución.

Base menor $= 3x$; base mayor $= 5x$; altura $= 7x$.

$$\left(\frac{5x + 3x}{2}\right) 7x = 1600$$

$$\frac{(8x)\ (7x)}{2} = 1600$$

$$28\ x^2 = 1600$$

$$x = \sqrt{\frac{1600}{28}} = 7.55$$

base mayor : $7.55 \times 5 = 37.75$

base menor : $7.55 \times 3 = 22.65$

R. 37.75 y 22.65

14. La circunferencia de un círculo mide 1[?] cm. si se aumenta el área en 36 cm^2 ¿Cuánto mide la circunferencia mayor?

Solución.

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{C}{2}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{18}{2}\right)^2 + 36$$

$$\frac{C^2}{4\pi} = \frac{324}{4\pi} + 36$$

$$C^2 = 324 + 36 \text{ x } 4\pi$$

$$C = \sqrt{324 + 144\pi} = 27.85$$

R. 27.85 cm.

15. Si se prolonga el radio de un círculo en 4 cm. el área queda aumentada en 80 cm^2. Calcular el lado del cuadrado inscrito en el círculo primitivo.

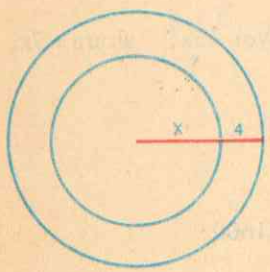


Fig. 90

Solución.

$R = x + 4; \quad r = x.$

$$\pi\left[(x+4)^2 - x^2\right] = 80$$

$$\pi\,(x^2 + 8x + 16 - x^2) = 80$$

$$\pi\,(8x + 16) = 80$$

$$8\pi x + 16\pi = 80$$

$$8\pi x = 80 - 16\pi$$

$$x = \frac{80 - 16\pi}{8\pi} = 1.18$$

lado del cuadrado igual a $R\sqrt{2}.$

$$\text{lado} = 1.18 \text{ x } 1.4142 = 1.67$$

R. 1.67 cm.

16. El lado de un cuadrado es de 25 cm. Calcular el lado de un cuadrado de doble área.

Solución.

$$\frac{25^2}{l^2} = \frac{l}{2}, \text{ de donde: } l^2 = 25^2 \text{ x } 2$$

$$l = \sqrt{25^2 \text{ x } 2}$$

$$l = 25 \text{ x } 1.4142 = 35.35$$

R. 35.35 cm.

17. Las dimensiones de un rectángulo miden 80 y 30 cm. respectivamente. Calcular la base y la altura de un rectángulo semejante de área cuatro veces mayor.

Solución.

$$\frac{80^2}{b^2} = \frac{30^2}{a^2} = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{80^2}{b^2} = \frac{1}{4}, \text{ de donde: } b^2 = 80^2 \text{ x } 4$$

$$b = \sqrt{80^2 \text{ x } 4} = 80 \text{ x } 2 = 160$$

$$\frac{30^2}{a^2} = \frac{1}{4}, \text{ de donde: } a^2 = 30^2 \text{ x } 4$$

$$a = \sqrt{30^2 \text{ x } 4} = 30 \text{ x } 2 = 60$$

R. b = 160. a = 60.

18. Calcular el radio de un círculo cuya área es cinco veces mayor a la de otro círculo que tiene 16 cm. de radio.

Solución.

$$\frac{5}{1} = \frac{\pi \text{ x } R^2}{\pi \text{ x } 16^2} = \frac{R^2}{16^2}$$

$$R^2 = 16^2 \times 5$$

$$R = \sqrt{16^2 \times 5} = 16 \times 2.236$$

$$R. = 35.776 \text{ cm.}$$

19. El lado de un polígono regular es de 24 cm. Calcular la longitud del lado homólogo de otro polígono semejante que tiene la mitad del área.

Solución.

$$\frac{A}{A'} = \frac{2}{l} = \frac{24^2}{l^2}$$

$$2\,l^2 = 24^2$$

$$l^2 = \frac{24^2}{2}$$

$$l = \frac{24}{\sqrt{2}} = \frac{24\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$$

$$l = 16.97$$

R. 16.97 cm.

20. Calcular, en función del radio de la circunferencia circunscrita, el área del segmento circular comprendido entre el lado del triángulo equilátero inscrito y el arco subtendido por él.

Solución.

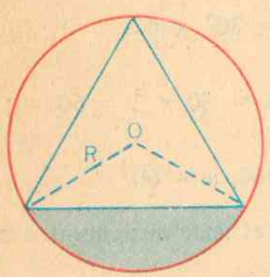


Fig. 91

$$A.\ sect. = \frac{\pi R^2 \times 120}{360}$$

$$A.\ sect. = \frac{\pi R^2}{3}$$

$$A.\Delta = \frac{R\sqrt{3} \times \frac{R}{2}}{2}$$

$$A.\Delta = \frac{R^2\sqrt{3}.}{4}$$

$$A.\ seg. = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A.\ seg. = \frac{4\pi R^2 - 3R^2\sqrt{3}}{12}$$

Luego: $A.\ seg.\ \frac{R^2}{12}\,(4\pi - 3\sqrt{3})$

21. Calcular, en función del radio de la circunferencia circunscrita, el área del segmento circular comprendido entre el lado del cuadrado inscrito y el arco subtendido por él.

Solución.

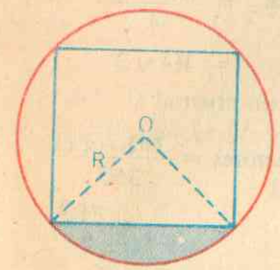


Fig. 92

$$A.\ sect. = \frac{\pi R^2 \times 90}{360}$$

$$A.\ sect. = \frac{\pi R^2}{4}$$

$$A.\Delta = \frac{R\sqrt{2} \times \frac{R\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$A.\Delta = \frac{2R^2}{4}$$

$$A.\ seg. = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{2R^2}{4}$$

Luego: $A.\ seg.\ \frac{R^2}{4}\,(\pi - 2)$

22. Calcular, en función del radio de la circunferencia circunscrita, el área del segmento circular comprendido entre el lado del hexágono regular inscrito y el arco subtendido por él.

Solución.

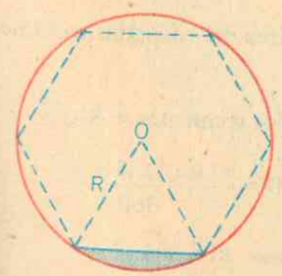


Fig. 93

$$A.\ sect. = \frac{\pi R^2 \times 60}{360}$$

$$A.\ sect. = \frac{\pi R^2}{6}$$

$$A.\Delta = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A.\ seg. = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A.\ seg. = \frac{2\pi R^2 - 3R^2\sqrt{3}}{12}$$

Luego: $A.\ seg. = \frac{R^2}{12}\,(2\pi - 3\sqrt{3})$

23. Calcular, en función del radio común, el área del espacio comprendido entre 3 circunferencias iguales y tangentes entre si.

Solución.

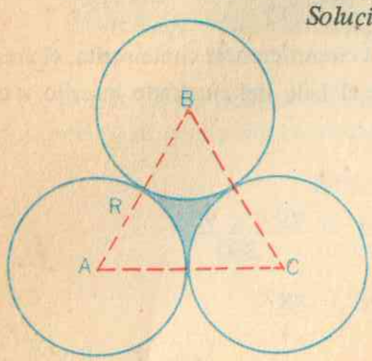


Fig. 94

El área pedida es igual al área del triángulo equilátero ABC menos los 3 sectores.
Lado del triángulo = 2R

$$\text{A. } \frac{(2R)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4R^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}$$

$$\text{A. de los 3 sectores} = \frac{3\pi R^2 \times 60}{360} = \frac{\pi R^2}{2}$$

Luego:
$$\text{Area} = R^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{2}$$

$$\text{Area} = \frac{2R^2\sqrt{3} - \pi R^2}{2}$$

$$\text{Area} = \frac{R^2}{2}(2\sqrt{3} - \pi)$$

24. En la figura 95, calcular en función del radio.
Primero: El área del triángulo curvilíneo ABC.
Segundo: El área de la parte menos sombreada.

Solución.

El área del triángulo curvilíneo es igual al área del triángulo rectilíneo más el área de los tres segmentos iguales.

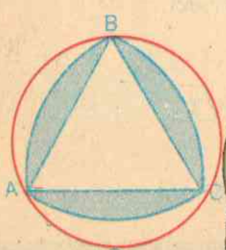


Fig. 95

Radio de los segmentos = $R\sqrt{3}$.

$$\text{A. sector ABCD} = \frac{\pi(R\sqrt{3})^2 \times 60}{360} = \frac{\pi(R\sqrt{3})^2}{6}$$

$$\text{A. seg. ACD} = \frac{\pi(R\sqrt{3})^2}{6} - \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{4}$$

Luego:
$$\text{Area de los tres segmentos: } \frac{3R^2}{4}(2\pi - 3\sqrt{3})$$

$$\text{Area del triángulo curvilíneo: } \frac{3R^2}{4}(2\pi - 3\sqrt{3}) + \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Area} = \frac{6\pi R^2 - 9R^2\sqrt{3} + 3R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Area} = \frac{6\pi R^2 - 6R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{R. Area} = \frac{3R^2}{2}(\pi - \sqrt{3})$$

El área de la parte menos sombreada es igual al área del círculo menos el área del triángulo curvilíneo.

Luego:
$$\text{Area} = \pi R^2 - \frac{3R^2}{2}(\pi - \sqrt{3})$$

$$\text{Area} = \frac{2\pi R^2 - 3\pi R^2 + 3R^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{R. Area } \frac{R^2}{2}(3\sqrt{3} - \pi)$$

25. Desde los vértices B y D del cuadrado ABCD y con un radio igual al lado se describen dos arcos. Calcular, en función del lado del cuadrado, el área de la parte sombreada.

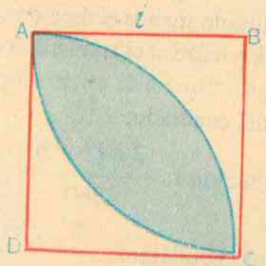


Fig. 96

Solución.

El área es igual a los dos sectores ABC y ADC menos el área del cuadrado ABCD.

$$\text{Area de los sectores: } \frac{2\pi l^2 \times 90}{360} = \frac{\pi l^2}{2}$$

$$\text{Area del cuadrado} = l^2$$

Luego:
$$\text{Area} = \frac{\pi l^2}{2} - l^2.$$

$$\text{R. Area} = l^2\left(\frac{\pi}{2} - l\right)$$

26. En el cuadrado ABCD se inscribe un círculo y desde los vértices del cuadrado se describen arcos con el mismo radio. Calcular el área de la figura que se forma, en función del lado del cuadrado.

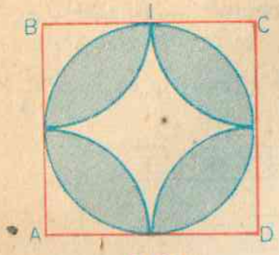


Fig. 97

Solución.

El área de la figura es igual al área del círculo más el área de los cuatro sectores, menos el área del cuadrado.

A. del círculo: $\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{\pi l^2}{4}$

A. de los cuatro sectores: $\frac{4\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2 \times 90}{360} = \frac{\pi l^2}{4}$

A. del cuadrado: l^2

Luego:

$$\text{Area} = \frac{\pi l^2}{4} + \frac{\pi l^2}{4} - l^2$$

$$\text{Area} = \frac{2\pi l^2}{4} - \frac{4 l^2}{4}$$

$$\text{R. Area} = \frac{l^2}{2}(\pi - 2)$$

27. Desde los vértices del cuadrado ABCD y con un radio igual al lado se describen arcos. Calcular el área de la figura sombreada, en función del lado del cuadrado.

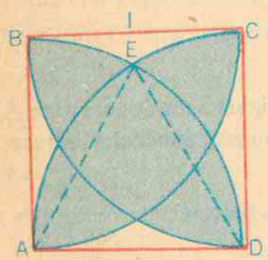


Fig. 98

Solución.

El área de la figura BCE es igual al área del cuadrado menos el área de los sectores BAE y EDC y el triángulo equilátero AED.

Area del cuadrado: l^2

Area de los dos sectores: $\frac{2\pi l^2 \times 30}{360} = \frac{\pi l^2}{6}$

Area del triángulo equilátero: $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

$$\text{Area BCE} = l^2 - \left(\frac{\pi l^2}{6} + \frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\text{Area BCE} = l^2 - \frac{\pi l^2}{6} - \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Area BCE} = \frac{12 l^2 - 2\pi l^2 - 3 l^2\sqrt{3}}{12}$$

$$\text{Luego: Area} = l^2 - 4\left(\frac{12 l^2 - 2\pi l^2 - 3 l^2\sqrt{3}}{12}\right)$$

$$\text{Luego: Area} = \frac{3 l^2 - 12 l^2 + 2\pi l^2 + 3 l^2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Area} = \frac{2\pi l^2 + 3 l^2\sqrt{3} - 9 l^2}{3}$$

$$\text{R. Area } \frac{l^2}{3}\left(2\pi + 3\sqrt{3} - 9\right)$$

28. Se divide una circunferencia en 6 partes iguales. Desde los puntos de división con el radio del círculo se describen arcos. Calcular, en función del radio, el área de la figura que resulta.

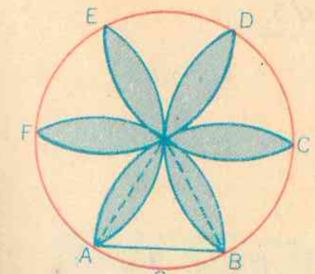


Fig. 99

Solución.

La figura se compone de 12 segmentos iguales al segmento ABG.

A. segmento ABG $= \frac{\pi R^2 \times 60}{360} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

A. segmento ABG $= \frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$

Area de la figura ABCDEF:

$$12 \times \frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$$

$$\text{Luego: Area} = R^2(2\pi - 3\sqrt{3})$$

29. Calcular en función del lado del triángulo equilátero, el área de la figura que resulta al describir arcos que pasan por el centro y por los vértices.

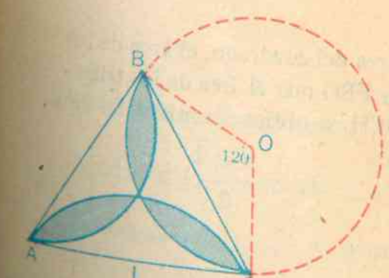


Fig. 100

Solución.

El área de la figura es igual a la de los tres segmentos que tienen por cuerdas los lados del triángulo, menos el área del triángulo ABC.

$R\sqrt{3} = l$; $R = \frac{l\sqrt{3}}{3}$

Area de los tres sectores:

$$\frac{3\pi\left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times 120}{360} = \frac{\pi l^2}{3}$$

Area de los tres triángulos sobrantes: $\dfrac{3\left(\dfrac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$

Area de los tres segmentos $= \dfrac{\pi l^2}{3} - \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4\pi l^2 - 3l^2\sqrt{3}}{12}$

Area del triángulo equilátero ABC: $\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$

Luego:

$$\text{Area} = \frac{4\pi l^2 - 3l^2\sqrt{3}}{12} - \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Area} = \frac{4\pi l^2 - 3l^2\sqrt{3} - 3l^2\sqrt{3}}{12}$$

$$\text{Area} = \frac{4\pi l^2 - 6l^2\sqrt{3}}{12}$$

$$\text{Area} = \frac{2l^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$$

$$\text{R. Area} = \frac{l^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{6}$$

30. Desde los vértices del cuadrado ABCD con un radio igual al de la circunferencia circunscrita se describen arcos que se unen por sus extremos. Calcular, en función del lado del cuadrado el área de la cruz que resulta.

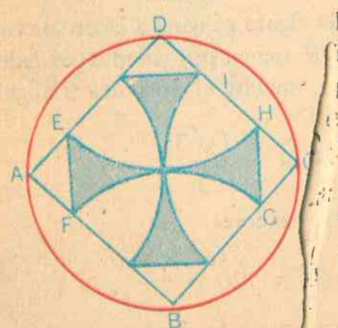


Fig. 101

Solución.

Restando del área del cuadrado, el área de los sectores EDH y FBG más el área de los triángulos FAE y GCH, se obtiene la mitad del área.

$R\sqrt{2} = l; \qquad R = \dfrac{l\sqrt{2}}{2}$

Area del cuadrado $= l^2$

Area de los dos sectores:

$$\frac{2\pi\left(\dfrac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2 \text{x } 90}{360} = \frac{\pi l^2}{4}$$

Los dos triángulos forman un cuadrado que tiene por lado: $l - \dfrac{l\sqrt{2}}{2}$

Luego:

Area de los dos triángulos: $\left(l - \dfrac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2 = l^2 + \dfrac{l^2}{2} - l^2\sqrt{2}$

Area de los sectores y de los triángulos: $\dfrac{\pi l^2}{4} + l^2 + \dfrac{l^2}{2} - l^2\sqrt{2}$

$$\text{Area} = \frac{\pi l^2 + 4l^2 + 2l^2 - 4l^2\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Area} = \frac{\pi l^2 + 6l^2 - 4l^2\sqrt{2}}{4}$$

Luego:

$$\text{Area} = 2\left[l^2 - \left(\frac{\pi l^2 + 6l^2 - 4l^2\sqrt{2}}{4}\right)\right]$$

$$\text{Area} = 2\left[\frac{4l^2 - \pi l^2 - 6l^2 + 4l^2\sqrt{2}}{4}\right]$$

$$\text{Area} = \frac{4l^2\sqrt{2} - \pi l^2 - 2l^2}{2}$$

$$\text{R. Area} = \frac{l^2}{2}(4\sqrt{2} - \pi - 2)$$

FORMULAS

En el triángulo rectángulo.

Siendo: a la hipotenusa b y c los catetos, h la altura, m y n los segmentos determinados en la hipotenusa.

$b^2 = a.m$

$c^2 = a.n$

$h^2 = m.n$

$a^2 = b^2 + c^2$

$b^2 = a^2 - c^2$

$c^2 = a^2 - b^2$

$a.h = b.c$

Recta dividida en media y extrema razón. $\dfrac{a}{2}(\pm\sqrt{5} - 1)$

Longitud de la circunferencia. $2\pi R$ ó πD.

Longitud de un arco de n grados. $\dfrac{\pi R . n}{180}$

Polígonos regulares:

Angulo interior. $\dfrac{2r(n-2)}{n}$ ó $\dfrac{180(n-2)}{n}$

Angulo central. $\dfrac{4r}{n}$ ó $\dfrac{360}{n}$

Angulo exterior. $\dfrac{4r}{n}$ ó $\dfrac{360}{n}$

Número de diagonales. $\dfrac{n(n-3)}{2}$

Polígonos inscritos:

Lado del triángulo equilátero inscrito. $R\sqrt{3}$

Altura del triángulo equilátero inscrito. $\dfrac{3R}{2}$

Apotema del triángulo equilátero inscrito. $\dfrac{R}{2}$

Lado del cuadrado inscrito. $R\sqrt{2}$

Apotema del cuadrado inscrito. $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

Lado del pentágono regular inscrito. $\dfrac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$

Apotema del pentágono regular inscrito. $\dfrac{R\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}$

Lado del hexágono regular inscrito. R.

Apotema del hexágono regular inscrito. $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Lado del octógono regular inscrito. $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Apotema del octógono regular inscrito. $\dfrac{R\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Lado del decágono regular inscrito. $\dfrac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$

Apotema del decágono regular inscrito. $\dfrac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

Lado del dodecágono regular. $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Apotema del dodecágono regular. $\dfrac{R\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

Polígono de 2n lados. $l' = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2-l^2}}$

Para R = 1 $l' = \sqrt{2-\sqrt{4-l^2}}$

AREAS.

Rectángulo. $b \cdot a$

Cuadrado. l^2

Paralelogramo. $b \cdot a$

Rombo. $\dfrac{D \cdot d}{2}$

Trapecio. $\left(\dfrac{B+b}{2}\right) h$ ó $b' . h$

Triángulo. $\dfrac{b . h}{2}$

Triángulo equilátero en función del lado. $\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$

Triángulo equilátero en función de la altura. $\dfrac{h^2\sqrt{3}}{3}$

Triángulo, conociendo sus tres lados.	$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
Triángulo conociendo sus tres lados y el radio de la circunferencia circunscrita.	$\frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$
Triángulo, conociendo sus tres lados y el radio de la circunferencia inscrita.	$p \cdot R$
Polígono regular.	$p \cdot a$
Círculo.	$\frac{C \cdot R}{2}$; πR^2; $\frac{\pi D^2}{4}$; $\frac{1}{\pi}\left(\frac{C}{2}\right)^2$
Sector circular.	$\frac{\text{Arco x R.}}{2}$
Sector circular de n grados.	$\frac{\pi R^2 \cdot n}{360}$
Segmento circular.	Sector correspondiente menos el triángulo sobrante.
Corona circular.	$\pi(R^2 - r^2)$

Area de los polígonos inscritos.

Area del triángulo equilátero.	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$
Area del cuadrado.	$2R^2$
Area del pentágono.	$\frac{5R^2\sqrt{10+2\sqrt{2}}}{8}$
Area del hexágono.	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$
Area del octógono.	$2R^2\sqrt{2}$
Area del decágono.	$\frac{5R^2\sqrt{10-2\sqrt{2}}}{4}$
Area del dodecágono.	$3R^2$

Valores más comunes.

$\sqrt{2} = 1.4142$	$\pi = 3.1416$
$\sqrt{3} = 1.732$	$\frac{1}{\pi} = 0.3183$
$\sqrt{5} = 2.2361$	$\frac{\pi}{3} = 1.0472$
$\sqrt{6} = 2.4494$	$\frac{\pi}{180} = 0.0174$
$\sqrt{2-\sqrt{2}} = 0.765$	$\frac{\pi}{360} = 0.0087$
$\sqrt{2+\sqrt{2}} = 1.847$	

GEOMETRIA

CUARTO AÑO

PARTE II

UNIDAD 1

GEOMETRIA DEL ESPACIO

RECTAS Y PLANOS

Generalidades.

La geometría del espacio, o de tres dimensiones, estudia las propiedades le las figuras cuyos elementos no están situados en un mismo plano.

Las figuras geométricas se consideran constituídas por puntos.

El punto no tiene dimensiones y, por lo tanto, no tiene realidad física: es abstracto.

El conjunto de todos los puntos constituye el espacio.

Espacio es el lugar donde están contenidas todas las figuras geométricas.

Plano es toda superficie indefinida que contiene enteramente cualquier recta que pasa por dos de sus puntos.

El plano es ilimitado, pero para facilitar las demostraciones, lo limitamos y lo representamos generalmente por un paralelogramo (fig. 1).

Fig. 1

Determinación del plano. Un plano está determinado:

1. Por una recta y un punto exterior a ella (fig. 2).

2. Por tres puntos no situados en una misma recta (fig. 3).

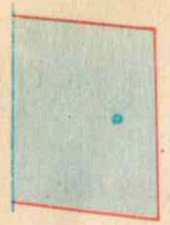


Fig. 2

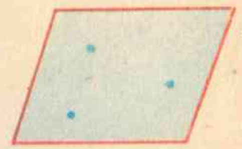


Fig. 3

3. Por dos rectas que se cortan (fig. 4).
4. Por dos rectas paralelas (fig. 5).

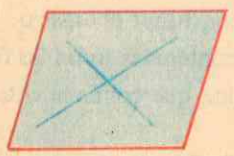


Fig. 4

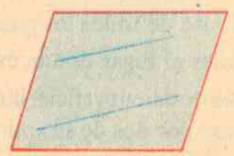


Fig. 5

UNIDAD 2

GENERACION DEL PLANO

Un plano puede ser generado:

1. Por una recta que se mueve sobre dos rectas concurrentes o paralelas.

2. Por una recta que gira alrededor de una recta fija y perpendicularmente a la misma.

3. Por una recta que resbala sobre otra recta fija permaneciendo paralela a si misma.

Propiedades del plano. 1. El plano tiene la propiedad de dividir el espacio en dos regiones situadas a una y otra parte del plano, llamadas semi-espacios.

2. En un plano se pueden trazar infinidad de rectas y por una recta pueden pasar infinidad de planos.

Posiciones relativas de dos rectas. Dos rectas en el espacio pueden ocupar estas posiciones relativas (fig. 6).

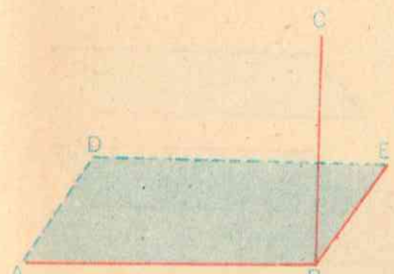


Fig. 6

1. Concurrentes cuando se cortan y están en el mismo plano; *AB* y *BC*.

2. Paralelas cuando no se cortan y están en el mismo plano; *AB* y *DE*.

3. Cruzadas cuando no tienen punto común ni están en el mismo plano; *BC* y *DE*.

Angulo de dos rectas que se cruzan: El ángulo de dos rectas que se cruzan, es el que resulta formado por dos rectas paralelas a las primeras trazadas desde un punto cualquiera del espacio.

Posiciones relativas de una recta y un plano: Una recta y un plano pueden ocupar las siguientes posiciones relativas:

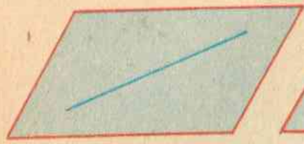


Fig. 7

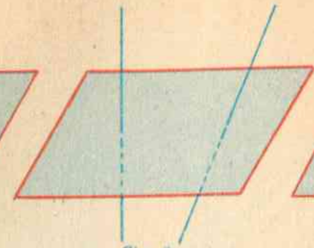


Fig. 8

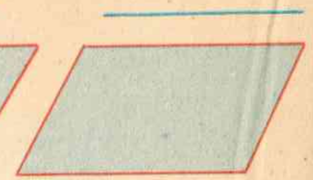


Fig. 9

1. Estar contenida en el plano. En este caso el plano pasa por la recta. (fig. 7).

2. Atravesar el plano al cual le es secante. La recta puede ser perpendicular u oblicua al plano (fig. 8).

La intersección de una secante con un plano se llama pie de la secante.

3. No tener ningún punto común con el plano. En este caso la recta y el plano son paralelos (fig. 9).

Posiciones relativas de dos planos. Dos planos en el espacio pueden ser:

1. Secantes cuando tienen una recta común (fig. 10).
2. Paralelos cuando no tienen ningún punto común (fig. 11).

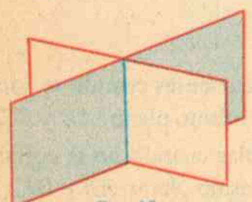


Fig. 10

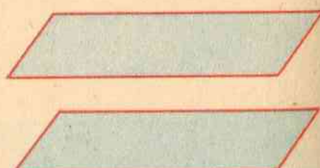


Fig. 11

UNIDAD 3

RECTAS Y PLANOS PERPENDICULARES

TEOREMA. Si una recta es perpendicular a otras dos que pasan por su pie en un plano, será perpendicular a cualquier otra recta que pase por su pie y por consiguiente perpendicular al plano.

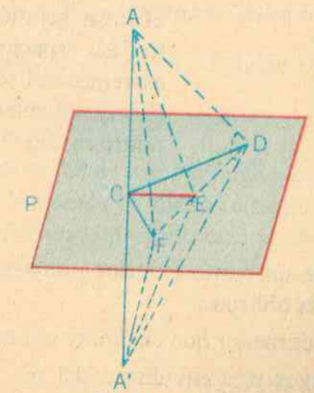


Fig. 12

Hipót.: $AC \perp CD$ y CF.

Tesis: *$AC \perp CE$ y al plano P.*

Si AC es perpendicular a CD y CF, demostramos que lo es también a la recta CE.

Se prolonga AC y se toma $CA' = CA$. Se traza DF que corte a CD, CE, CF y se unen los puntos A y A´ con D, E y F.

Las rectas AD y A´D, son iguales por ser CD mediatriz de AA´.

Las rectas AF y A´F, son iguales por ser CF mediatriz de AA´.

Luego, los triángulos ADF y A´DF son iguales por tener sus lados respectivamente iguales, y por lo tanto: $\widehat{ADF} = \widehat{A'DF}$.

Los triángulos ADE y A´DE son iguales por tener un ángulo igual comprendido entre lados respectivamente iguales. Por consiguiente: AE = A´E.

Si el punto E equidista de A y A´, la recta CE será perpendicular a AA´.

Luego: $AC \perp CE$ y por consiguiente al plano P.

Corolarios. 1. Por un punto de una recta se puede trazar un plano perpendicular a la recta y solo uno.

2. Una recta perpendicular a un plano es perpendicular a toda recta de dicho plano.

APLICACIONES

¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que equidistan de los extremos de un segmento dado AB?

El lugar geométrico de todos los puntos del espacio que equidistan de los extremos del segmento AB, es el plano *P* perpendicular al segmento *AB* en su punto medio *O* (fig. 13).

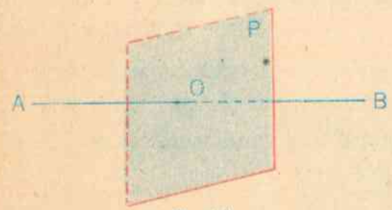


Fig. 13

TEOREMA. Si desde un punto exterior a un plano se trazan a este plano una perpendicular y varias oblicuas:

1. La perpendicular es menor que cualquier oblicua.

2. Dos oblicuas cuyos pies equidistan del pie de la perpendicular son iguales.

3. De dos oblicuas desiguales, la mayor es la que se aparta más del pie de la perpendicular (Ver fig. 14).

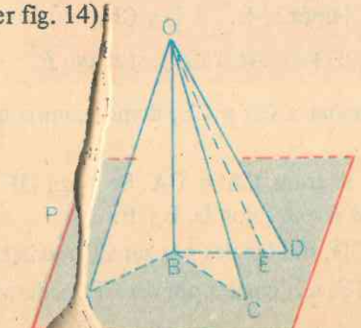


Fig. 14

Hipót.: $OB \perp P$; OA, OC, OD, oblicuas
BA = BC; BA < BD.

Tesis: $OB < OA$; $OA = OC$; $OA < OD$.

1. Si OB es perpendicular al plano P, lo será también a la recta BA y, por lo tanto, el triángulo OBA es rectángulo.

Luego: $OB < OA$.

2. Siendo BA = BC, los triángulos rectángulos OBA y OBC son iguales por tener los dos catetos iguales.

Luego: $OA = OC$.

3. Se tienen las oblicuas OD y OA en las cuales BD > BA. Tomamos: BE = BC = BA y trazamos OE = OA. En la figura plana OBD, OD es mayor que OE.

Luego: $OD > OA$.

TEOREMA. Si desde el pie de una perpendicular a un plano, se traza una perpendicular a una recta situada en dicho plano, la recta que une el pie de esta segunda perpendicular con un punto cualquiera de la primera, será perpendicular a la recta del plano.

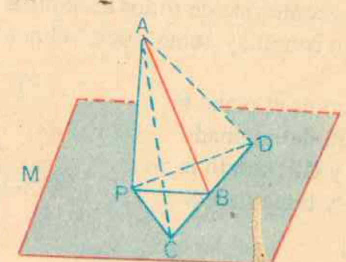


Fig. 15

Hipót.: $AP \perp M$; $PB \perp CD$.

Tesis: $AB \perp CD$.

Tomamos: BC = BD, y trazamos PC, PD, AC y AD. Las rectas PD y PC son iguales por ser PB mediatriz de CD.

Los triángulos rectángulos APC y APD son iguales por tener un ángulo igual entre lados respectivamente iguales y por consiguiente: AC = AD.

El triángulo CAD es isósceles y, por lo tanto, AB es perpendicular a la recta CD en el punto B.

Nota: Este teorema se conoce con el nombre de teorema de las tres perpendiculares.

APLICACIONES

1. ¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de tres puntos fijos dados A, B, C?

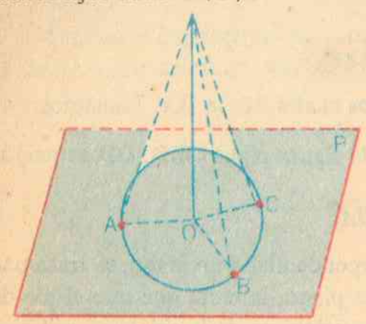


Fig. 16

Los tres puntos A, B, C determinan un plano. En ese plano y por esos tres puntos pasa una circunferencia y una sola.

La perpendicular levantada al plano por el centro de esa circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los tres puntos dados *A, B, C.*

2. ¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de dos semirrectas que tienen en común, y como origen, el punto O?

El lugar geométrico es el plano P′ perpendicular al plano P, determinado por las semirrectas OA y OB; siendo la intersección de P y P′ la bisectriz OS del ángulo AOB.

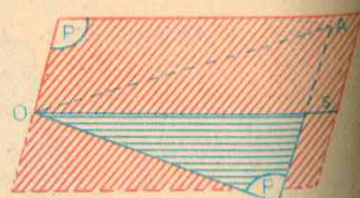


Fig. 17

3. Si por el centro de u círculo, se traza una perpendicular de 6 cm. al plano de dicho círculo, y la istancia de su extremo a la circunferencia es de 7.5 cm.; ¿cuál es el área del rculo?

4. Por el centro de un rculo de 7.5 cm. de radio se traza una perpendicular al plano de dicho círculo. ¿Cuánto mide esta perpendicular, si la distancia de su extremo a la circun rencia es de 12.5 cm.?

5. Por el centro de un círculo de 10.5 cm. de radio, se traza una perpendicular de 14 cm. al plano de dicho círculo. Calcular la distancia del extremo de la perpendicular a la circunferencia.

UNIDAD 4

RECTA Y PLANOS PARALELOS

TEOREMA. Toda recta paralela a una recta de un plano es paralela a dicho plano.

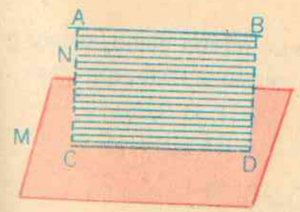


Fig. 18

Hipót.: AB ∥ CD del plano M.

Tesis: AB ∥ M.

Las paralelas AB y CD determinan el plano N.

Por estar AB y CD en un mismo plano, la recta AB para encontrar al plano M tendría que encontrar a su paralela CD, lo que es imposible.

Luego: AB ∥ M.

Corolarios. 1. Por un punto situado fuera de un plano se puede trazar una infinidad de rectas paralelas al plano.

2. Todo plano paralelo a otro plano es paralelo a todas las rectas de este plano, y viceversa.

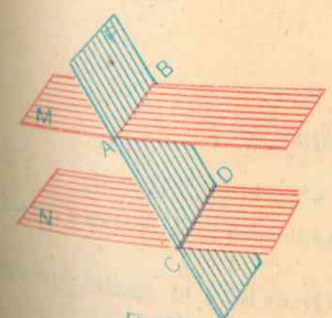


Fig. 19

TEOREMA. Las intersecciones de dos planos paralelos, cortados por un tercer plano, son paralelas.

Hipót.: M ∥ N; AB y CD sus intersecciones con P.

Tesis: AB ∥ CD.

Las intersecciones AB y CD están en el plano P, y también pertenecen a los planos paralelos M y N.

Luego: $AB \parallel CD$.

TEOREMA. Dos rectas perpendiculares a un plano son paralelas.

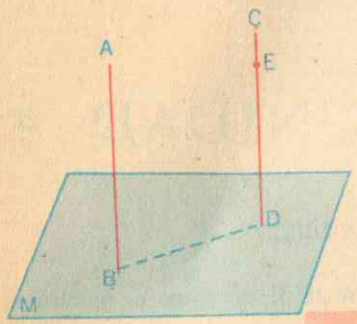


Fig. 20

Hipót.: $AB \perp M$; $CD \perp M$.

Tesis: $AB \parallel CD$.

Si por el punto E trazamos una paralela a AB, dicha paralela es perpendicular al plano M. Pero como desde un punto solo se puede trazar una perpendicular a un plano, esta paralela se confunde con CD.

Luego: $AB \parallel CD$.

TEOREMA. Si dos ángulos, no situados en un mismo plano, tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido, son iguales o suplementarios, y sus planos son paralelos.

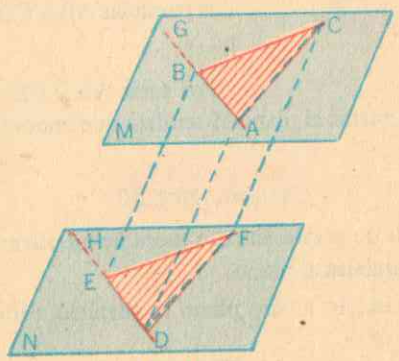


Fig. 21

Hipót.: $BC \parallel EF$; $BA \parallel ED$.

Tesis: $\measuredangle ABC = \measuredangle DEF$; $M \parallel N$

Tomamos BC = EF, BA = ED y trazamos AC, DF, BE, AD y CF.

BADE es un paralelogramo por tener los lados BA y ED iguales y paralelos. Por lo tanto AD es igual y paralela a BE.

BCFE es un paralelogramo por tener los lados BC y EF iguales y paralelos. Por lo tanto CF es igual y paralelo a BE.

AD es igual y paralelo a CF, por ser ambos iguales y paralelos a BE; por consiguiente: ACFD es un paralelogramo y AC = DF.

Los triángulos BCA y EDF son iguales, por tener sus tres lados respectivamente iguales.

Luego: $\measuredangle ABC = \measuredangle DEF$.

Los ángulos CBG y FEH son iguales, por ser suplementos de ángulos iguales.

Luego: $\measuredangle ABC + \measuredangle FEH = 180°$

El plano M está determinado por las rectas BA y BC que son respectivamente paralelas a las rectas ED y EF y por consiguiente al plano M.

Luego: $M \parallel N$.

APLICACIONES

1. ¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de dos rectas paralelas AB y CD?

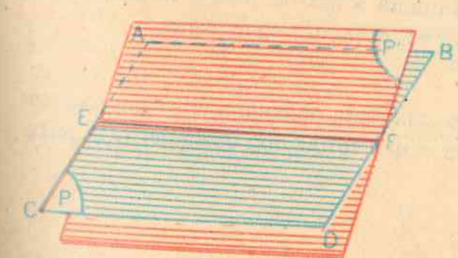


Fig. 22

El lugar geométrico es el plano P´ perpendicular al plano P determinado por las paralelas AB y CD; siendo la intersección de P y P´ EF paralela a AB y CD.

EF es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de AB y CD en el plano P.

2. ¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que están a igual distancia de un plano P?

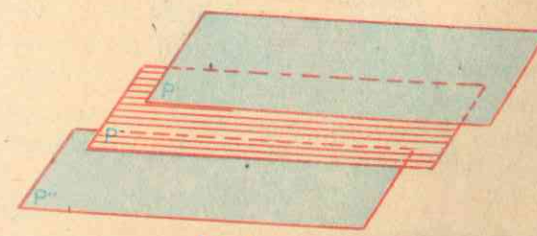


Fig. 23

El lugar geométrico son los planos P´ y P´´ paralelos a P y situados, uno por encima P´ y otro por debajo P´´.

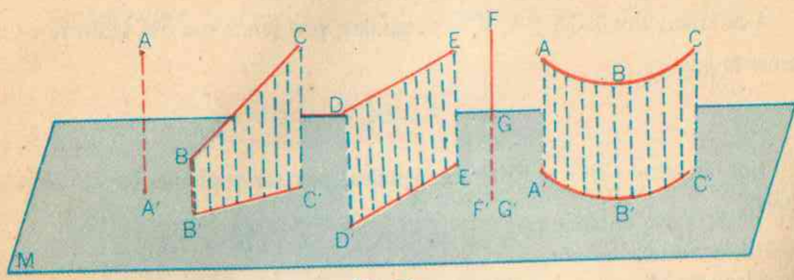


Fig. 24

Proyección ortogonal de un punto sobre un plano, es el pie de la perpendicular trazada desde dicho punto al plano. A´ proyección de A en el plano M (fig. 24).

La proyección de una recta sobre un plano es otra recta cuando esta es oblicua o paralela o un punto si la recta es perpendicular al plano.

B´C´proyección de BC; D´E´proyección DE; F´G´proyección FG.

La proyección de una figura cualquiera sobre un plano, es otra figura formada por las proyecciones de los diferentes puntos en el plano.

A´B´C´proyección de ABC.

TEOREMA. El ángulo que forma una recta oblicua, a un plano con su proyección en el plano, es menor que el que forma con cualquier otra recta que pase por su pie en el plano.

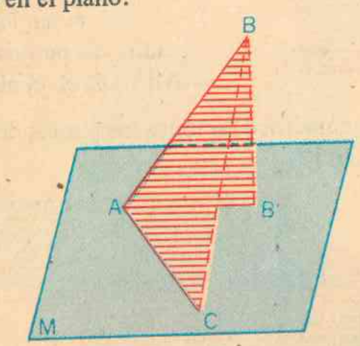


Fig. 25

Hipót.: AB´proyección de AB.
AC recta cualquiera
Tesis: $\widehat{BAB'} < \widehat{BAC}$

Tomamos AC =AB´y trazamos BC.

BC es oblicua al plano M y por consiguiente mayor que BB´.

Los triángulos ABB´ y ABC tienen dos lados respectivamente iguales y los terceros desiguales.

El ángulo opuesto al lado menor será menor que el ángulo opuesto al lado mayor.

Luego: $\widehat{BAB'} < \widehat{BAC}$

Corolario. Angulo de una recta y un plano, es el ángulo agudo que forma dicha recta con su proyección en el plano.

PROBLEMAS

1. Dadas dos rectas AB y CD, trazar por CD un plano paralelo a AB.

Se toma un punto O sobre CD.

AB y el punto exterior O determinan el plano P en el cual se toma la recta EF que pase por O y paralela a AB.

EF y CD son dos rectas que se cortan en O y determinan el plano P´.

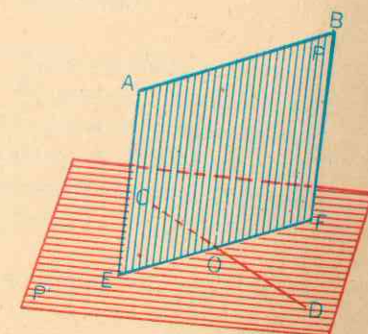


Fig. 26

La recta EF es común a P y P´ y además paralela a AB (por construcción).

Luego: El plano P´ que contiene a EF será paralelo a AB.

2. Una oblicua a un plano de 32 cm. de largo, forma con su proyección en el plano, un ángulo de 60 grados. ¿Cuánto mide su proyección?

3. Una oblicua a un plano de 24 cm. de largo, forma con su proyección en el plano, un ángulo de 45 grados. ¿Cuál es la distancia del otro extremo de la recta al plano?

4. Una oblicua a un plano, forma con su proyección en el plano, un ángulo de 30 grados. Calcular la oblicua sabiendo que su proyección mide 16 cm.

UNIDAD 5

ANGULOS DIEDROS.

Definiciones y Propiedades.

Toda recta trazada en un plano lo divide en dos semiplanos.

Angulo diedro. Se llama ángulo diedro, o simplemente diedro, a la figura formada por dos semiplanos que tienen una recta común. Los semiplanos son las caras del diedro y la recta de intersección se llama arista.

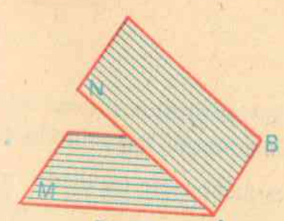


Fig. 27

El ángulo diedro se nombra con las letras de su arista o con las letras de sus caras y aristas, colocando las letras de los extremos de la arista entre las letras que designan sus caras. Diedro AB o MABN (fig. 27).

La magnitud de un diedro no depende de la extensión de sus caras, sino de la mayor o menor separación entre ellas.

Angulo plano correspondiente a un diedro. Angulo plano correspondiente a un diedro, es el ángulo rectilíneo formado por dos perpendiculares levantadas en un punto cualquiera de la arista y situadas una en cada cara. Angulo rectilíneo CDE (fig. 28).

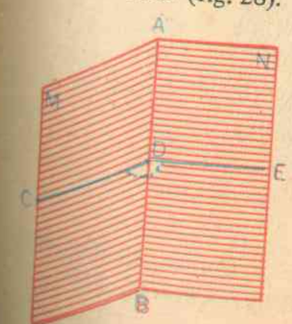


Fig. 28

La igualdad o desigualdad de dos diedros, depende de sus ángulos rectilíneos.

Si dos ángulos rectilíneos son iguales, los diedros son iguales y si son desiguales, los diedros son desiguales.

Dos diedros son proporcionales a sus ángulos planos, por lo tanto, todo ángulo diedro tiene por medida la de su ángulo plano.

Un diedro es recto, obtuso o agudo según que su ángulo plano sea recto, obtuso o agudo.

Diedros adyacentes. Diedros adyacentes son dos diedros que tienen una misma arista y una cara común comprendida entre las otras dos. Los diedros MABQ y QABN (fig. 29).

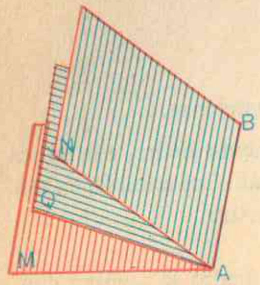


Fig. 29

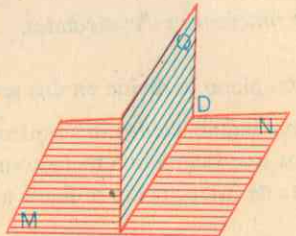


Fig. 30

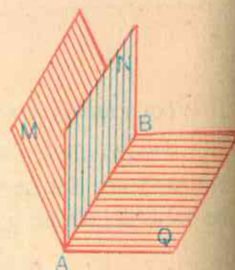


Fig. 31

Diedro recto. Diedro recto es cada uno de los diedros adyacentes iguales formados por dos planos que se cortan. Los diedros MCDQ y QCDN (fig. 30).

Diedro agudo. Diedro agudo es el que es menor que un diedro recto. El diedro MABN (fig. 31).

Diedro obtuso. Diedro obtuso es el que es mayor que un diedro recto. El diedro MABQ (fig. 31).

Diedros complementarios. Diedros complementarios son dos diedros cuya suma es igual a un diedro recto. Los diedros PABN y NABM (fig. 32).

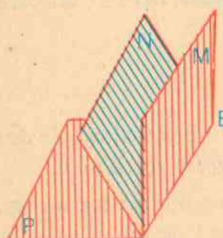


Fig. 32

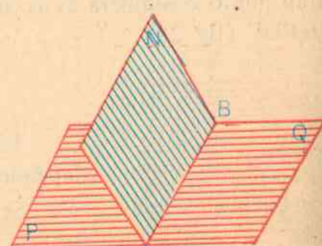


Fig. 33

Diedros suplementarios. Diedros suplementarios son dos diedros cuya suma es igual a dos diedros rectos. Los diedros PABN y NABQ (fig. 33).

Planos perpendiculares. Planos perpendiculares son los que al cortarse forman ángulos diedros rectos.

Planos oblicuos. Planos oblicuos son los que al cortarse forman ángulos diedros agudos u obtusos.

Diedros opuestos por la arista. Diedros opuestos por la arista son los diedros que tienen la arista común y las caras del uno son la prolongación de las caras del otro. Los diedros NABM y PABQ; MABQ y NABP (fig. 34).

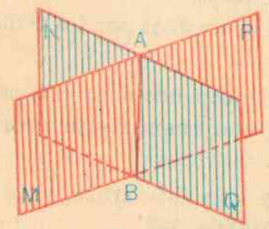


Fig. 34

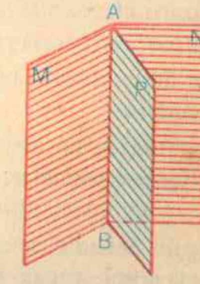


Fig. 35

Plano bisector de un diedro. Plano bisector de un diedro es el plano que lo divide en dos diedros iguales. El plano bisector P (fig. 35).

PROPIEDADES:

1. Los diedros adyacentes formados por dos planos son suplementarios.
2. Los diedros opuestos por la arista son iguales.
3. Los planos bisectores de dos diedros adyacentes suplementarios son perpendiculares.
4. Los planos bisectores de dos diedros opuestos por la arista coinciden.
5. Los puntos del plano bisector equidistan de las caras del diedro.
6. Si una recta es perpendicular a un plano, todo plano que pase por ella es perpendicular al primero.
7. Si dos planos son perpendiculares entre sí, cualquier recta trazada en uno de ellos y perpendicularmente a la intersección de los dos planos, es perpendicular al otro.
8. La intersección de dos planos perpendiculares a un tercero, es también perpendicular al plano.

ANGULOS POLIEDROS

Definiciones.– Se llama ángulo poliedro la figura formada por varios ángulos planos que concurren a un mismo punto (fig. 36).

El punto común se llama vértice.

Los ángulos planos que forman el poliedro, se llaman caras del poliedro y las intersecciones de las caras se denominan aristas.

Diedros de un ángulo poliedro, son los formados por los planos de dos caras consecutivas.

La magnitud de un ángulo poliedro no depende de la extensión de los planos que forman sus caras, sino de la mayor o menor abertura comprendida entre ellos.

Un ángulo poliedro se nombra con la letra del vértice, seguida de una letra por cada arista. Angulo poliedro SABCD (fig. 36).

Un ángulo poliedro se llama convexo o cóncavo, según que la sección determinada por un plano que corta todas las aristas sea un polígono convexo o cóncavo.

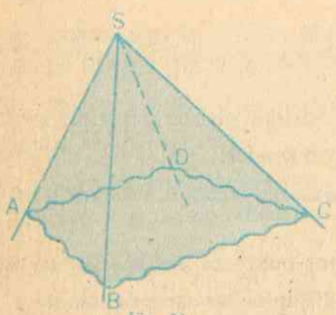


Fig. 36

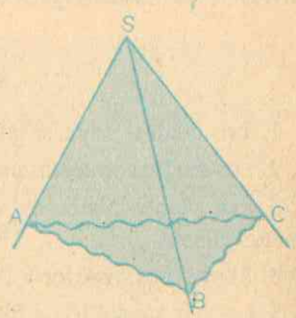


Fig. 37

Angulo triedro.– Angulo triedro, es el ángulo poliedro formado por tres ángulos planos. El triedro SABC (fig. 37).

Los ángulos triedros pueden ser rectángulos, birrectángulos o trirrectángulos, según que tengan uno, dos o tres diedros rectos.

TEOREMA.– En todo triedro una cara cualquiera es menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia.

Hipót.: Triedro SBAC; ∡ BSC cara mayor

Tesis: ∡ *BSC* < ∡ *ASC* + ∡ *BSA*
∡ *ASC* > ∡ *BSC* – ∡ *BSA*
∡ *BSA* > ∡ *BSC* – ∡ *ASC*

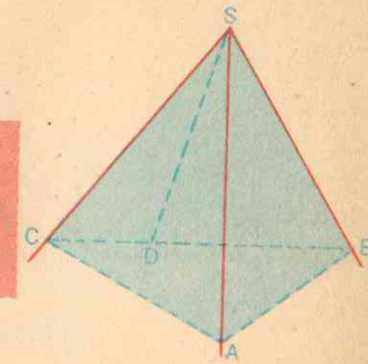


Fig. 38

Siendo evidente la primera parte de este teorema con respecto a las caras menor y mediana, basta demostrar que la cara mayor es menor que la suma de las otras dos.

Trazamos una recta CB que corte a SC y SB, y SD que forme un ángulo BSD igual al ángulo BSA. Tomamos SA = SD y trazamos el plano ABC.

Los triángulos BSA y BSD son iguales por tener un ángulo igual comprendido entre lados respectivamente iguales, luego BD = BA.

En el triángulo ABC, tenemos:

$$BC < BA + AC$$

$$BD + DC < BA + AC$$

DC < AC, por ser BD = BA, y por consiguiente: $\measuredangle\ \widehat{DSC} < \widehat{ASC}$.

Añadiendo a ambos miembros de esta última desigualdad los ángulos iguales BSD y BSA respectivamente, tendremos:

$$DSC + BSD < ASC + BSA$$

Luego: BSC < ASC + BSA

La última desigualdad puede escribirse: ASC + BSA > BSC de donde resulta:

ASC > *BSC* – *BSA* y *BSA* > *BSC* – *ASC*.

Para la cara mayor esta propiedad es evidente.

TEOREMA.– En todo ángulo poliedro convexo, la suma de sus caras es menor que cuatro ángulos rectos.

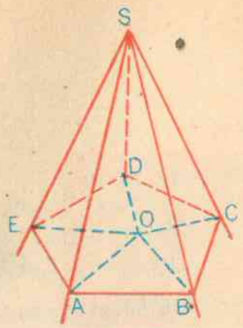


Fig: 39

Hipót.: S, ángulo poliedro convexo

Tesis: $\sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC + \sphericalangle CSD + \ldots\ldots < 4$ *rectos*

Se traza el plano ABCDE que corte todas las aristas del poliedro, y se unen los vértices de este polígono con un punto cualquiera O.

Estas dos series de triángulos cuyo vértice común es O para la primera y S para la segunda, constan del mismo número de triángulos, y en ambas la suma de todos los ángulos es igual.

Según el teorema anterior, tenemos:

$$BAE < BAS + EAS; \quad CBA < CBS + ABS, \ldots etc.$$

Por lo tanto, la suma de los ángulos en la base es menor en la primera serie que en la segunda.

Por consiguiente, la suma de los ángulos en O, que vale 4 rectos es mayor que la de los ángulos en S.

Luego: $\sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC + \sphericalangle CSD \ldots\ldots < 4$ *rectos.*

APLICACIONES

1. La flecha de un campanario forma un ángulo poliedro regular de seis caras cuya suma es de 75 grados. ¿ Cuántos grados tiene cada uno de los ángulos de la base de las caras laterales?

2. El ángulo de la base de un poliedro regular de ocho caras mide 80 grados. ¿Cuántos grados tiene el ángulo poliedro?

UNIDAD 6

POLIEDROS EN GENERAL

Definiciones.– Se llama poliedro un cuerpo o sólido geométrico, limitado por superficies planas.

Las superficies que limitan el sólido se llaman caras del poliedro.

Los lados de las caras se llaman aristas y las intersecciones de las aristas se llaman vértices.

Angulo diedro de un sólido es el diedro formado por dos caras concurrentes en una arista.

Angulo poliedro de un sólido es el formado por las caras que concurren a un mismo vértice.

Diagonal de un poliedro es toda recta que une dos vértices situados en distinta cara.

Un poliedro es convexo cuando la prolongación de cualquiera de sus caras deja todo el poliedro a un mismo lado de ella.

Poliedros regulares.– Un poliedro es regular si sus caras son polígonos regulares y sus ángulos poliedros son iguales.

Existen, únicamente, cinco poliedros regulares que están limitados por triángulos equiláteros o cuadrados o pentágonos regulares.

Con el triángulo equilátero se pueden obtener los siguientes poliedros regulares:

El tetraedro regular, que está limitado por cuatro triángulos equiláteros, unidos de tres en tres. En este sólido cada uno de los cuatro ángulos poliedros miden 180 grados.

El octaedro regular, que está limitado por ocho triángulos equiláteros, unidos de cuatro en cuatro. En este sólido cada uno de los seis ángulos poliedros miden 240 grados.

El icosaedro regular, que está limitado por veinte triángulos equiláteros, unidos de cinco en cinco. En este sólido cada uno de los doce ángulos poliedros miden 300 grados.

Con esta figura no se puede obtener más poliedros puesto que la unión de seis triángulos equiláteros, forma un plano.

Con el cuadrado se puede obtener solamente un poliedro regular.

El hexaedro, que está limitado por seis cuadrados unidos de tres en tres. En este sólido cada uno de los ocho ángulos poliedros mide 270 grados.

Con esta figura no se puede obtener más poliedros, puesto que la unión de cuatro cuadrados forma un plano.

Con el pentágono regular se puede obtener solamente un poliedro regular.

El dodecaedro regular, que está limitado por doce pentágonos unidos de tres en tres. En este sólido cada uno de los veinte ángulos poliedros mide 324 grados.

Con polígonos regulares de mayor número de lados, no se puede formar ningún ángulo poliedro.

Teniendo en cuenta lo anterior, los poliedros regulares son:

El tetraedro, que tiene 4 caras, 6 aristas y 4 vértices (fig. 40).

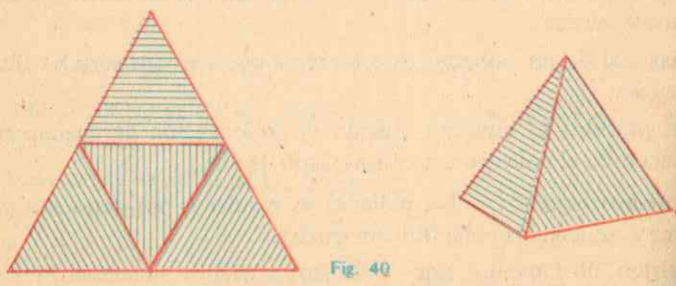


Fig. 40

El hexaedro, que tiene 6 caras, 12 aristas y 8 vértices (Fig. 41).

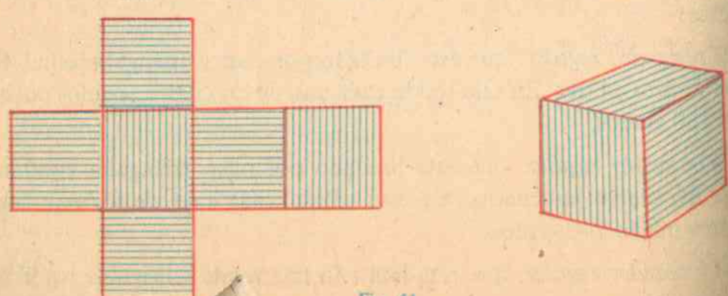


Fig. 41

El octaedro, que tiene 8 caras, 12 aristas y 6 vértices (fig 42).

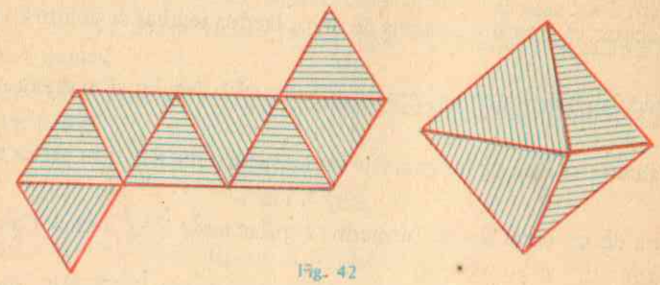


Fig. 42

El dodecaedro, que tiene 12 caras, 30 aristas y 20 vértices (fig. 43).

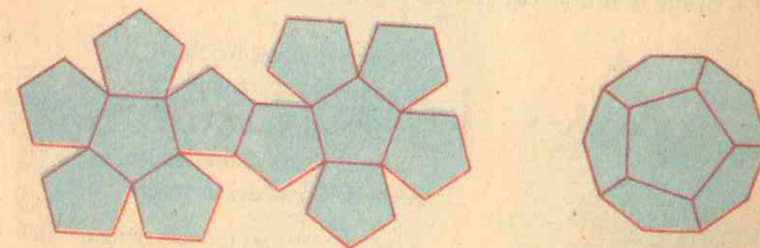


Fig. 43

El icosaedro, que tiene 20 caras, 30 aristas y doce vértices (fig. 44).

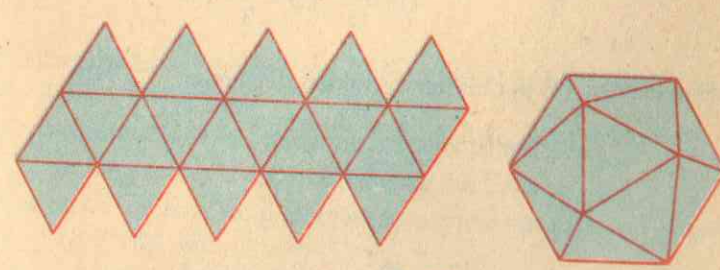


Fig. 44

EJERCICIOS

1. Calcular el área de una cara de un tetraedro regular si su arista mide 6 cm.

2. Calcular el área de las caras de un tetraedro regular si su arista mide 8 cm.

3. Calcular el área de una cara de un octaedro regular si su arista mide 12 cm.

4. Calcular el área de las caras de un octaedro regular si su arista mide 16 cm.

5. Calcular el área de una cara de un icosaedro regular si su arista mide 24 cm.

6. Calcular el área de las caras de un icosaedro regular si su arista mide 32 cm.

7. Una de las caras de un tetraedro regular mide $8\sqrt{3}$ cm^2. Calcular su arista.

8. Todas las caras de un octaedro regular miden $32\sqrt{3}$ cm^2 Calcular su arista.

9. Calcular la altura del tetraedro regular, en función de su arista.

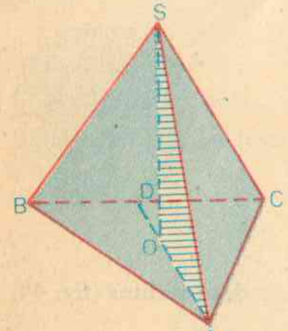


Fig. 45

Se tiene el tetraedro SBAC.

El triángulo rectángulo SOA, nos da:

$$\overline{OS}^2 = \overline{AS}^2 - \overline{OA}^2. \qquad (1)$$

OS = h, altura del tetraedro.

AS = a, arista del tetraedro.

$AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, altura del triángulo de la base en función de la arista.

$$OA = \frac{2}{3}\ AD = \frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Sustituyendo en (1) por los nuevos valores, tenemos:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2.$$

$$h^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9}$$

$$h^2 = \frac{9a^2 - 3a^2}{9}$$

$$h^2 = \frac{6a^2}{9}$$

$$h = \sqrt{\frac{6a^2}{9}}$$

$$\text{Luego: } h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

10. La altura de un tetraedro regular mide 24 cm. Calcular la arista.

11. La arista de un tetraedro regular mide 15 cm. Calcular la altura.

12. La altura de un tetraedro regular mide 12 cm. Calcular el área de una de las caras laterales.

13. La apotema de la base de un tetraedro regular mide 6 cm. Calcular la altura del tetraedro.

PRISMA

Definiciones.– Se llama prisma el poliedro que tiene dos caras iguales y paralelas y las otras caras son paralelogramos (fig. 46).

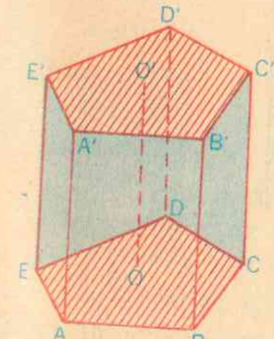


Fig. 46

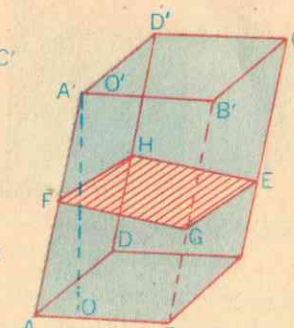


Fig. 47

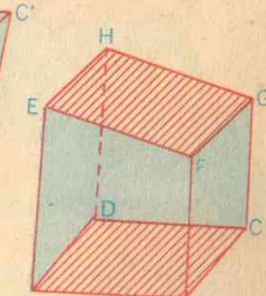


Fig. 48

Las caras iguales y paralelas son las bases del prisma y las otras son las caras laterales.

Las aristas laterales de un prisma son iguales y paralelas.

Altura de un prisma es la distancia entre las dos bases.

Prisma recto.– Prisma recto es aquel cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases (fig. 46).

Prisma oblicuo.– Prisma oblicuo es aquel cuyas aristas laterales son oblicuas a las bases (fig. 47).

En un prisma recto las aristas laterales son iguales a la altura, y en un prisma oblicuo las aristas laterales son mayores a la altura.

Los prismas se llaman triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc., según que sus bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc.

Prisma regular.– Prisma regular, es el prisma recto cuyas bases son polígonos regulares.

Sección recta de un prisma.– La sección recta de un prisma está determinada por un plano perpendicular a las aristas laterales. La sección recta FGEH (fig. 47).

Tronco de prisma.– Tronco de prisma es la parte de prisma comprendido entre una base y un plano oblicuo que corte todas las aristas laterales. El tronco de prisma ABCDEFGH (fig. 48).

PARALELEPIPEDOS

Definiciones.– Paralelepípedo es todo prisma cuyas caras son paralelogramos. El paralelepípedo ABCDEFGH (fig. 49).

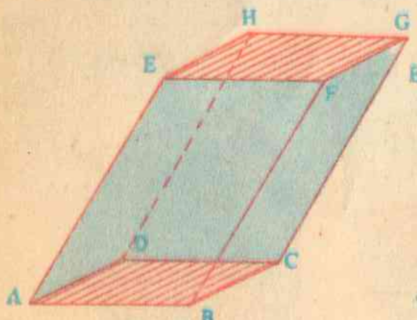


Fig. 49

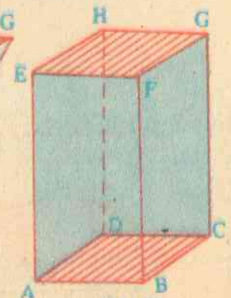


Fig. 50

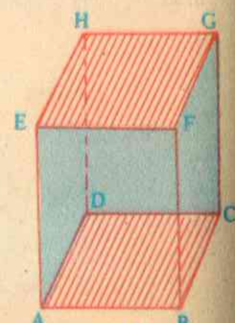


Fig. 51

Paralelepípedo recto.– Paralelepípedo recto es aquel cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases y, por lo tanto, sus caras laterales son rectángulos. El paralelepípedo recto ABCDEFGH (fig. 50).

Paralelepípedo rectángulo– Paralelepípedo rectángulo es el paralelepípedo recto cuyas bases son rectángulos, por lo tanto, sus seis caras son rectángulos. El paralelepípedo rectángulo ABCDEFGH (fig. 51).

Propiedades de los paralelepípedos.– 1. Las caras opuestas de un paralelepípedo son iguales y paralelas.

2. En todo paralelepípedo se pueden tomar por bases dos caras opuestas cualesquiera.

3. Las diagonales de un paralelepípedo se cortan en su punto medio.

4. El punto común a las cuatro diagonales de un paralelepípedo es el centro del poliedro.

APLICACIONES

1. Calcular la diagonal del paralelepípedo rectángulo, en función de sus tres dimensiones.

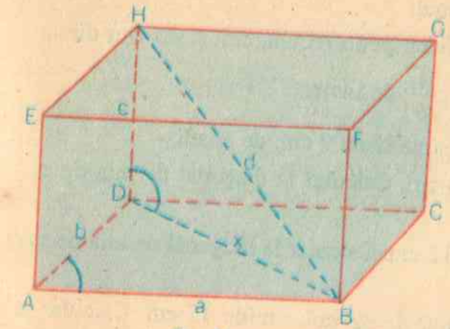


Fig. 52

Se tiene el paralelepípedo AG.

d, diagonal del paralelepípedo.

x, diagonal de la base ABCD.

El triángulo rectángulo DAB, nos da:

$$x^2 = a^2 + b^2 \qquad (1)$$

El triángulo rectángulo HDB, nos da:

$$d^2 = x^2 + c^2$$

Sustituyendo en esta última igualdad x^2 por su valor en (1), tenemos:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Luego: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Hexaedro regular o cubo.– El hexaedro regular o cubo es un paralelepípedo rectángulo limitado por seis cuadrados.

2. Calcular la diagonal del cubo, en función de su arista.

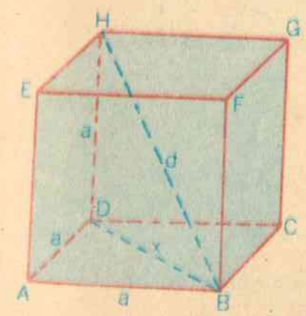


Fig. 53

Se tiene el cubo AG.

d, diagonal del cubo.

x, diagonal de la cara ABCD.

El triángulo rectángulo DAB, nos da:

$$x^2 = a^2 + a^2 \qquad (1)$$

El triángulo rectángulo HDB, nos da:

$$d^2 = x^2 + a^2$$

Sustituyendo en esta última igualdad x^2 por su valor en (1), tenemos:

$$d^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

Luego: $d = a\sqrt{3}$

3. Las dimensiones de un paralelepípedo rectángulo miden 24, 16 y 8 cm. respectivamente. Calcular su diagonal.

4. Calcular la diagonal de un paralelepípedo rectángulo, si sus tres dimensiones miden respectivamente $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ de metro.

5. Calcular la diagonal de un cubo que tiene 9 cm. de arista.

6. La arista de un cubo mide 24 cm. Calcular la diagonal de una de sus caras.

7. La diagonal de un cubo mide 12 cm. Calcular la diagonal de una de sus caras.

8. La diagonal de una de las caras de un cubo mide 15 cm. Calcular la diagonal del cubo.

UNIDAD 7

AREA DEL PRISMA

El área de un prisma puede ser lateral o total.

El área lateral comprende el área de todas las caras laterales.

El área total comprende el área lateral más el área de las dos bases.

Area lateral del prisma.– El área lateral de un prisma es igual al producto del perímetro de la sección recta por la arista lateral.

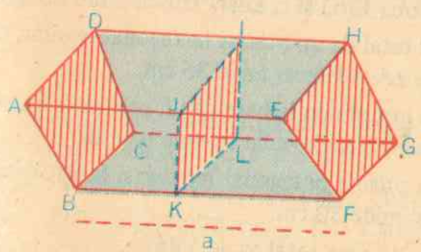


Fig. 54

Se tiene el prisma BH.

Las aristas laterales BF, CG, AE y DH, son perpendiculares a la sección recta y por consiguiente a las rectas KJ, JI, IL y LK.

Las caras laterales son paralelogramos que tienen por bases las aristas del prisma, y por alturas los lados de la sección recta, Luego:

$$AL = a \times KJ + a \times JI + a \times IL + a \times LK$$

$$AL = a\,(KJ + JI + IL + LK)$$

Sustituyendo KJ + JI + IL + LK por P, tenemos:

$$\boxed{AL = P.a}$$

Llamando B el área de una de las bases, tenemos:

$$\boxed{AT = P.a + 2B}$$

El área lateral de un prisma recto es igual al producto del perímetro de la base por la altura.

PROBLEMAS

1. Calcular el área lateral y el área total de un prisma triangular regular, si la apotema de la base mide 9 cm. y la arista lateral mide 36 cm.

2. La altura de la base de un prisma triangular regular mide 12 cm. Calcular su área lateral, sabiendo que su arista es tres veces el lado de la base.

3. El radio de una circunferencia circunscrita a la base de un prisma triangular regular mide 6 cm. y la arista lateral mide 24 cm. Calcular su área total.

4. El radio de una circunferencia inscrita en la base de un prisma triangular regular mide 9 cm. y la arista lateral mide 40 cm. Calcular su área lateral.

5. Calcular el área lateral y el área total de un prisma cuadrangular regular, si la apotema de la base mide 12 cm. y la arista lateral mide 48 cm.

6. El radio de una circunferencia circunscrita a la base de un prisma cuadrangular regular mide 15 cm. y la arista del prisma mide 45 cm. Calcular su área lateral.

7. El radio de una circunferencia inscrita en la base de un prisma cuadrangular regular mide 9 cm. Calcular su área total si la arista lateral mide 36 cm.

8. Calcular el área lateral y el área total de un prisma hexagonal regular, si la apotema de la base mide 12 cm. y la arista lateral mide 36 cm.

9. El radio de una circunferencia inscrita en la base de un prisma hexagonal regular mide 6 cm. y la arista mide 60 cm. Calcular su area lateral.

10. Calcular el área lateral de un prisma octagonal regular si la apotema de la base mide 3 cm. y la arista lateral mide 30 cm.

11. Calcular la arista de un cubo si su área total es de 5 dm^2.

12. Calcular la arista de un prisma triangular regular, si su altura es igual al lado de la base y el área total es de 10 dm^2.

13. El área total de un paralelepípedo rectángulo es de 376 cm^2. ¿Cuáles son sus dimensiones si están en la relación de 3, 4 y 5?

VOLUMEN DEL PRISMA.

Definiciones.– Se llama volumen de un cuerpo a la medida del espacio que ocupa dicho cuerpo.

Unidad de volumen.– Para medir el volumen de un poliedro, se toma como unidad de volumen, un cubo de arista igual a la unidad de longitud.

La unidad más usada para medir los volúmenes es el metro cúbico, que es un cubo de 1 m. de arista.

Para medir volúmenes más pequeños que el metro cúbico, se emplean:

El decímetro cúbico, el centímetro cúbico y el milímetro cúbico.

Dos poliedros son iguales cuando pueden coincidir.

Dos poliedros que tienen igual volumen, sin tener la misma forma, se llaman equivalentes.

Volumen de un paralelepípedo rectángulo.– El volumen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de sus tres dimensiones.

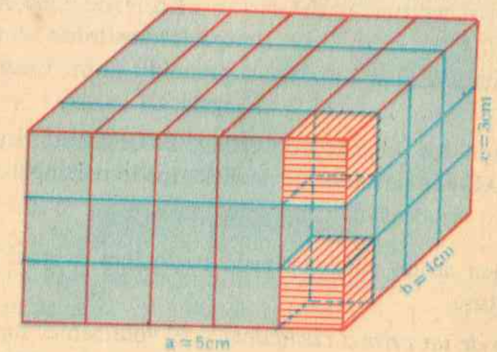


Fig. 55

Se tiene el paralelepípedo P, cuyas dimensiones son conmensurables y miden respectivamente 5, 4 y 3 cm.

Por medio de planos que pasen por los puntos de división, el paralelepípedo puede descomponerse en tres capas que contiene cada una 5 x 4 cubos unidad. Por lo tanto, el paralelepípedo contendrá en total:

$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ cm}^3$ que es el volumen del cuerpo.

Llamando a, b, c las dimensiones del paralelepípedo, se tiene:

$$Volumen = a.b.c.$$

El volumen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de su base por su altura.

El producto de a.b nos expresa el área de la base y c la altura.

Designando por B la base y por a la altura, se tiene:

$$Volumen = B.a.$$

Volumen del cubo.– El volumen de un cubo es igual al cubo de su arista.

En efecto, el cubo es un paralelepípedo cuyas tres dimensiones son iguales, luego:

$$Volumen = a.a.a =$$

Volumen de un paralelepípedo recto. – El volumen de un paralelepípedo recto es igual al producto de su base por su altura.

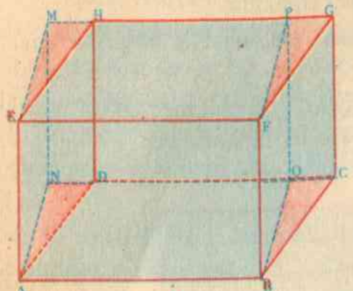


Fig. 56

Se tiene el paralelepípedo recto AG, cuya base es el paralelogramo ABCD.

Trazamos los planos AM y BP perpendicularmente a las caras paralelas AF y DG.

Los triángulos ADN y BCQ son iguales por tener un ángulo igual comprendido entre lados respectivamente iguales.

Por lo tanto, los prismas ADNEHM y BCQFGP son iguales y el paralelepípedo recto AG es equivalente al paralelepípedo rectángulo AP.

Luego: Volumen = B.a.

El volumen de un paralelepípedo cualquiera es igual al producto de su base por su altura.

Volumen de un prisma cualquiera. – El volumen de un prisma cualquiera es igual al producto de la sección recta por una de sus aristas laterales.

Todo prisma oblicuo es equivalente a otro prisma recto que tiene por base la sección recta del prisma oblicuo y por altura la arista lateral.

En el prisma oblicuo DABCHEFG (fig. 57), se traza la sección recta LIJK y se prolongan las aristas laterales.

Se toma LM = HD y por el punto M se traza la sección recta MNOP paralela a LIJK.

Los troncos de prisma MNOPDABC y LIJKHEFG son iguales, por tener sus bases y sus aristas respectivamente iguales.

Por lo tanto, el prisma oblicuo DG es equivalente al prisma recto MK.

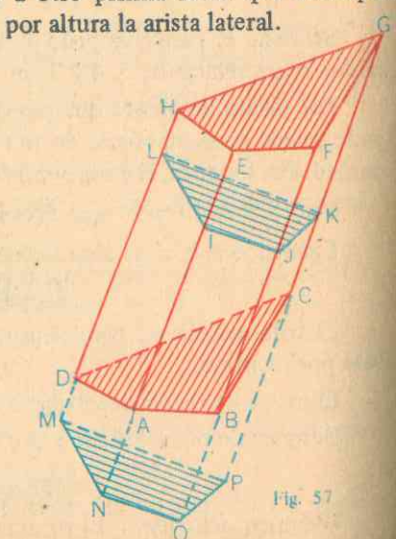


Fig. 57

Luego: El producto de la sección recta por la arista lateral, es igual al producto de la base por su altura.

Corolarios. – Dos prismas de bases equivalentes y de igual altura son equivalentes.

Dos prismas de bases equivalentes son proporcionales a sus alturas y dos prismas de igual altura son proporcionales a sus bases.

El volumen de un prisma cualquiera es igual al producto de su base por su altura.

PROBLEMAS

1. El lado de la base de un prisma triangular regular mide 18 cm. y la altura mide 24 cm. Calcular su volumen.

2. La altura de un prisma triangular regular mide 36 dm. y la apotema de la base mide 6 dm. Calcular su volumen.

3. Calcular el volumen de un prisma triangular regular si la altura de la base es de 6 cm. y la altura del prisma es tres veces el lado de la base.

4. El volumen de un prisma triangular regular es de $1.575\sqrt{3}\ cm^3$. Calcular su altura si la apotema de la base mide 6 cm.

5. ¿Qué capacidad en litros tiene un tanque que tiene forma de prisma cuadrangular regular, si la apotema de la base mide 1.5 m. y la arista lateral mide 3.5 m?

6. La diagonal de la base de un prisma cuadrangular regular mide 12 dm. y la arista lateral mide 40 dm. ¿Cuál es su volumen en centímetros cúbicos?

7. El volumen de un paralelepípedo rectángulo es de $810\ cm^3$. Calcular sus tres dimensiones si están en la relación de 2, 3 y 5.

8. Calcular el volumen, el área lateral, el área total y la diagonal de un cubo cuya arista mide 24 cm.

9. ¿Cuánto pesa dentro del agua un cuerpo de 300 kg. de forma cúbica si su arista mide 60 cm?

10. La diagonal de un cubo mide 15 cm. Calcular su volumen.

11. La diagonal de una de las caras de un cubo mide 8 cm. Calcular el volumen del cubo.

12. El área total de un cubo mide $270\ dm^2$. Calcular su volumen.

13. El volumen de un cubo es $125\ m^3$. Calcular:

a) El área total.

b) La diagonal del cubo.

c) La diagonal de una de sus caras.

14. Calcular el volumen de un prisma hexagonal regular si la apotema de la base mide 9 cm. y la altura del prisma es de 48 cm.

15. Calcular el área total de un cubo que contiene 512 litros de capacidad.

UNIDAD 8

PIRAMIDE

Definiciones. Pirámide es el poliedro que tiene por base un polígono cualquiera y por caras laterales triángulos que concurren a un mismo punto (fig.58).

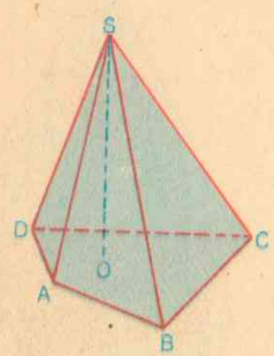


Fig. 58

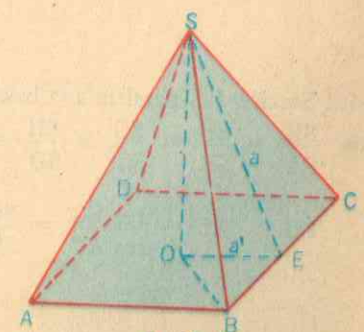


Fig. 59

El punto donde concurren todos los triángulos se llama vértice o cúspide de la pirámide.

Altura de una pirámide es la perpendicular trazada del vértice a la base.

Aristas laterales de una pirámide son los lados que limitan las caras laterales que concurren a un mismo punto.

Una pirámide puede ser triangular, cuadrangular, pentagonal, hexagonal, etc., según que su base sea un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, un hexágono, etc.

Una pirámide se nombra por medio de la letra del vértice seguida de una letra por cada arista.

Pirámide regular. Pirámide regular es la que tiene por base un polígono regular y el pie de la altura coincide con el centro de la base (fig. 59).

En una pirámide regular las aristas laterales son iguales y, por consiguiente, las caras laterales son triángulos isósceles iguales.

Apotema de una pirámide regular es cada una de las alturas de las caras laterales.

TEOREMA: Si se corta una pirámide por un plano paralelo a la base:

1. Las aristas laterales, la altura y toda recta trazada del vértice a la base, quedan divididas en partes proporcionales.

2. La sección es un polígono semejante a la base.

3. Las áreas de ambos polígonos son proporcionales a los cuadrados de sus distancias al vértice.

Hipót.: Sección EG paralela a la base AC

Tesis: $$\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SB} = \frac{SG}{SC} = \frac{SH}{SD} = \frac{SO}{SP}$$

$$EG \sim AC; \quad \frac{\text{Area } EG}{\text{Area } AC} = \frac{SO^2}{SP^2}$$

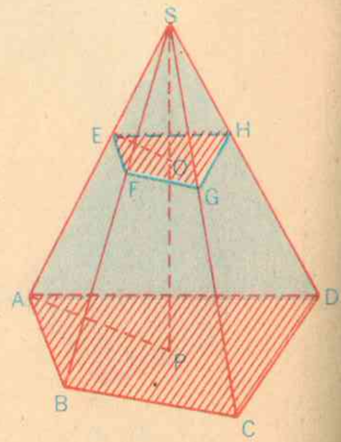


Fig. 60

1. Siendo EF || AB; FG || BC; GH || CD; HE || DA; EO || AP; los pares de triángulos SEF y SAB; SFG y SBC . . .etc., que tienen estas paralelas por bases, son semejantes y como estos triángulos tienen lados comunes de dos en dos se deduce:

$$\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SB} = \frac{SG}{SC} = \frac{SH}{SD} = \frac{SO}{SP}$$

2. Siendo semejantes los triángulos anteriores, tenemos:

$$\frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{GH}{CD} = \frac{HE}{DA}$$

En los polígonos EG y AC la razón de los lados es la misma y los ángulos son respectivamente iguales, por tener sus lados paralelos.

Luego: $EG \sim AC$

De la semejanza de los triángulos, resulta:

$$\frac{EF}{AB} = \frac{SE}{SA} = \frac{SO}{SP} \quad \text{o} \quad \frac{EF^2}{AB^2} = \frac{SE^2}{SA^2} = \frac{SO^2}{SP^2}$$

Siendo las áreas de dos polígonos semejantes, proporcionales a los cuadrados de la razón de semejanza, tenemos:

$$\frac{\text{Area } EG}{\text{Area } AC} = \frac{SO^2}{SP^2}$$

Tronco de pirámide. Tronco de pirámide es la parte de pirámide comprendida entre la base y una sección que corte todas las aristas laterales (fig. 61).

La parte de pirámide que sobra se llama pirámide deficiente.

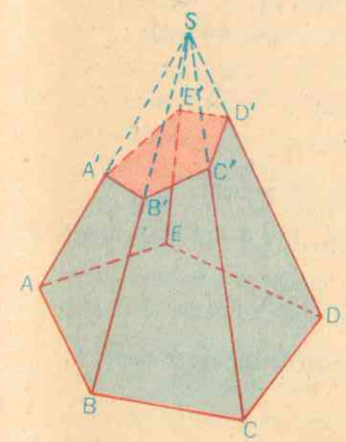


Fig. 61

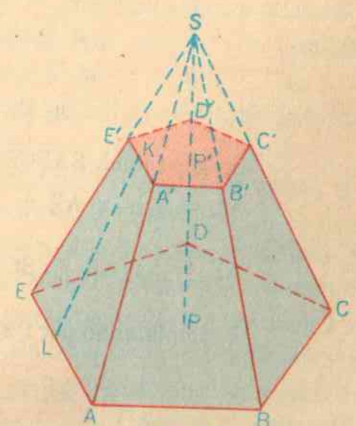


Fig. 62

Tronco de pirámide regular. Tronco de pirámide regular es la parte de pirámide comprendida entre la base y una sección paralela a ella (fig. 62).

Las caras laterales de un tronco de pirámide regular son trapecios isósceles iguales.

Altura de un tronco de pirámide regular es la distancia entre las dos bases. La altura PP′ (fig. 62).

Apotema de un tronco de pirámide regular es cada una de las alturas de los trapecios de las caras laterales. La apotema KL (fig. 62).

AREA DE LA PIRAMIDE.

El área de una pirámide puede ser lateral o total.

El área lateral comprende el área de todos los triángulos que son las caras laterales.

El área total comprende el área lateral más el área de la base.

Area lateral de una pirámide regular. El área lateral de una pirámide regular es igual al semiproducto del perímetro de la base por la apotema de la pirámide.

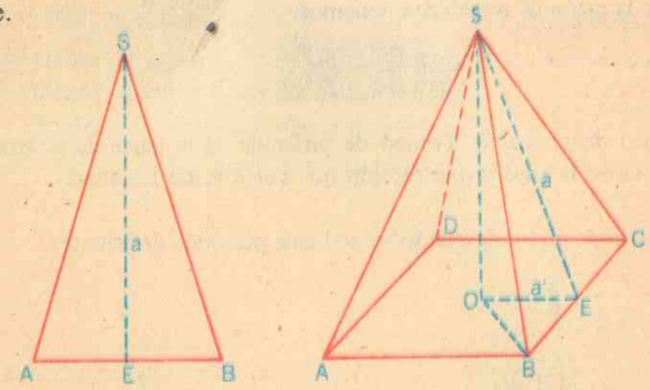


Fig. 63

En la pirámide SABCD de la fig. 63, se tiene:

$$AL = \frac{1}{2} a \times AB + \frac{1}{2} a \times BC + \frac{1}{2} a \times CD + \frac{1}{2} a \times DA.$$

$$AL = \frac{1}{2} a (AB + BC + CD + DA)$$

Reemplazando por P el perímetro de la base se tiene:

$$AL = \frac{P.a}{2}$$

Area total de una pirámide regular. El área total es igual al área lateral más el área de la base.

Llamando B el área de la base, se tiene:

$$AT = \frac{P.a}{2} + B.$$

El área de un polígono regular es igual al semiproducto del perímetro por la apotema. Llamando a´ la apotema de la base, tenemos:

$$B = \frac{P . a'}{2} \qquad \text{Luego: } AT = \frac{P.a}{2} + \frac{P.a'}{2} = \frac{P}{2}(a + a')$$

En una pirámide regular se pueden formar los siguientes triángulos rectángulos:

1. La altura de la pirámide, las aristas laterales y las rectas que unen los vértices de la base con el pie de la altura, forman triángulos rectángulos. El triángulo rectángulo SOB (fig. 63).

2. La altura de la pirámide, las apotemas de la base y las apotemas de la pirámide, forman triángulos rectángulos. El triángulo rectángulo SOE (fig. 63).

3. Las apotemas de la pirámide, las aristas laterales y las mitades de los lados de la base, forman triángulos rectángulos. El triángulo rectángulo SEB (fig. 63).

PROBLEMAS

1. La apotema de la base de una pirámide regular mide 18 cm. y la altura de la pirámide mide 24 cm. Calcular la apotema de la pirámide.

2. La altura de una pirámide mide 28 cm. y la recta que une el pie de la altura con el extremo de la arista mide 21 cm. Calcular la arista lateral.

3. La arista lateral de una pirámide mide 45 cm. y la apotema de la pirámide mide 36 cm. Calcular el lado de la base.

4. La apotema de una pirámide mide 60 cm. y la apotema de la base mide 36 cm. Calcular la altura de la pirámide.

5. El área total de una pirámide triangular regular es de 6 dm^2 y el lado de la base mide 12 cm. Calcular la altura de la pirámide.

6. La apotema de la base de una pirámide triangular regular mide 6 cm. y la altura de la pirámide mide 24 cm. Calcular el área lateral de la pirámide.

7. La altura de la base de una pirámide triangular regular mide 9 cm. y la apotema de la pirámide mide 18 cm. Calcular el área total de la pirámide.

8. La apotema de la base de una pirámide cuadrangular regular mide 12 cm. y la altura de la pirámide mide 16 cm. Calcular el área total de la pirámide.

9. Expresar en función de la arista el área lateral del tetraedro regular.

10. Expresar en función de la arista el área total del tetraedro regular.

11. La gran pirámide de Egipto tiene por base un cuadrado de 232 m. de lado, y sus caras laterales son triángulos equiláteros. Calcular:

a) La altura de la pirámide.
b) La apotema de la pirámide.
c) La apotema de la base.

d) El área lateral

e) El área total.

12. Una pirámide cuadrangular regular de 8 dm. de lado y 12 dm. de altura. Calcular la arista lateral.

13. Si una pirámide tiene por base un triángulo de 12 cm. de lado y una altura de 24 cm. ¿Cuál es la longitud de los segmentos determinados en las aristas laterales por una sección paralela a la base y a una distancia de 6 cm. del vértice?

14. Calcular la diagonal del octaedro regular, en función de la arista.

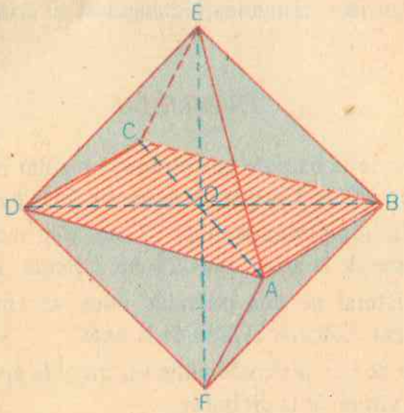


Fig. 64

El octaedro consta de dos pirámides regulares que tienen por base común el cuadrado ABCD y por altura las semidiagonales EO y OF (fig. 64).

El triángulo EOA es un triángulo rectángulo isósceles, por lo tanto, se tiene:

$$EO^2 + OA^2 = EA^2 \qquad (1)$$

EO = x, mitad de la diagonal EF.

OA = x, mitad de la diagonal AC.

AE = a, arista del octaedro.

Sustituyendo en (1), por los nuevos valores, tenemos:

$$x^2 + x^2 = a^2$$

$$2x^2 = a^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{2} \qquad x = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Luego: $EF = a\sqrt{2}.$

15. La diagonal de un octaedro regular mide 24 cm. Calcular su área.

16. Calcular la diagonal de un octaedro regular que tiene por área 31.176 cm^2.

AREA DEL TRONCO DE PIRAMIDE

El área de un tronco de pirámide, puede ser lateral o total.

El área lateral comprende el área de todas las caras laterales.

El área total comprende el área lateral más el área de las dos bases.

Area lateral del tronco de pirámide regular. El área lateral de un tronco de pirámide regular es igual a la semisuma de los perímetros de las bases por la apotema del tronco.

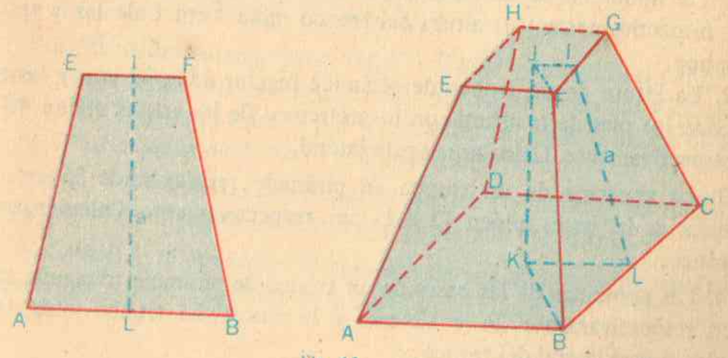


Fig. 65

En el tronco ABCDEFGH de la fig. 65, se tiene:

$$AL = \frac{1}{2}a\,(AB + EF) + \frac{1}{2}a\,(BC + FG) + \frac{1}{2}a\,(CD + GH) + \frac{1}{2}a\,(DA + HE)$$

$$AL = \frac{1}{2}a\,(AB + EF + BC + FG + CD + GH + DA + HE)$$

Reemplazando por P y P′ los perímetros de las bases, se tiene:

$$AL = \left(\frac{P + P'}{2}\right)a.$$

Area total de un tronco de pirámide regular. El área total de un tronco de pirámide es igual al área lateral más el área de las dos bases.

Llamando B el área de la base mayor y B′ el área de la base menor, se tiene:

$$AT = \left(\frac{P + P'}{2}\right)a + B + B'.$$

En un tronco de pirámide regular se pueden formar los siguientes trapecios rectángulos:

1. La altura del tronco, las aristas laterales y las rectas que unen los vértices de las bases con los pies de la altura, forman trapecios rectángulos. El trapecio rectángulo KBFJ (fig. 65).

2. La altura del tronco, las apotemas de las bases y las apotemas del tronco, forman trapecios rectángulos. El trapecio rectángulo KLIJ (fig. 65).

3. Las apotemas del tronco, las aristas laterales y las mitades de los lados de las bases, forman trapecios rectángulos. El trapecio rectángulo BLIF (fig. 65).

PROBLEMAS

1. Las apotemas de las bases de un tronco de pirámide regular miden 6 y 3 cm. respectivamente y la altura del tronco mide 4 cm. Calcular la apotema del tronco.

2. La altura de un tronco de pirámide regular mide 32 cm. y las rectas que unen los pies de la altura con los extremos de las aristas miden 48 y 24 cm. respectivamente. Calcular la arista lateral.

3. La apotema de un tronco de pirámide regular mide 35 cm. y las apotemas de las bases miden 42 y 21 cm. respectivamente. Calcular la altura del tronco.

4. Las apotemas de las bases de un tronco de pirámide triangular regular miden respectivamente 24 y 12 cm. y la altura del tronco mide 16 cm. Calcular el área lateral del tronco.

5. Las apotemas de las bases de un tronco de pirámide cuadrangular regular miden 36 y 18 cm. respectivamente y la altura del tronco mide 24 cm. Calcular el área total del tronco.

6. La altura de una pirámide hexagonal regular mide 12 cm. y el lado de la base mide 6 cm. Si se cortan todas las aristas por un plano paralelo a la base a 4 cm. del vértice, ¿cuál es el área lateral del tronco que resulta?

VOLUMEN DE LA PIRAMIDE

Descomposición de un prisma triangular en tres pirámides o tetraedros equivalentes (fig. 66).

Se tiene el prisma triangular ABCDEF.

Si trazamos los planos AEC y AEF, el prisma queda descompuesto en los tetraedros EABC; ADEF y EACF.

Los tetraedros EABC y ADEF, son equivalentes por tener bases y alturas iguales.

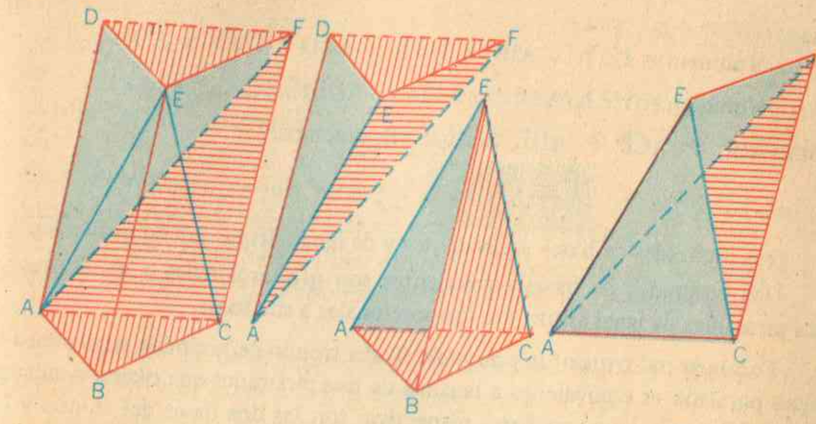


Fig. 66

Considerando los tetraedros ADEF y EACF y tomando el punto E como vértice, estos tetraedros son equivalentes por tener como bases los triángulos ADF y AFC, que son iguales por ser mitades del paralelogramo ACFD y la misma altura o sea la distancia de E al plano ACFD.

Luego: los tres tetraedros son equivalentes y por consiguiente el volumen de una pirámide triangular es el tercio del volumen del prisma.

Volumen de la Pirámide. El volumen de una pirámide cualquiera es igual al tercio del producto del área de la base por su altura.

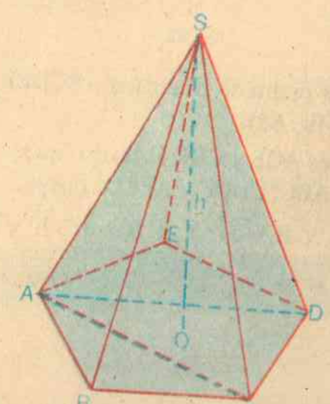


Fig. 67

Si en la pirámide SABCDE (fig. 67), trazamos por la arista SA los planos ASC y ASD, se forman tres pirámides triangulares que tienen la misma altura.

Por lo tanto, el volumen total de la pirámide es igual a la suma de los volúmenes de las pirámides triangulares.

Luego:

$$\text{Volumen} = 1/3\, h \times ABC + 1/3\, h \times ACD + 1/3\, h \times ADE.$$

$$\text{Volumen} = 1/3\, h\,(ABC + ACD + ADE)$$

Como ABC + ACD + ADE, es igual a B, tenemos:

$$V = \frac{B \cdot h}{3}.$$

Dos pirámides de bases equivalentes y de igual altura, son equivalentes.

Dos pirámides de bases equivalentes son proporcionales a sus alturas y dos pirámides de igual altura son proporcionales a sus bases.

Volumen del tronco de pirámide. Todo tronco de pirámide triangular de bases paralelas es equivalente a la suma de tres pirámides que tienen la misma altura del tronco y cuyas bases respectivas son las dos bases del tronco y la media geométrica entre ellas.

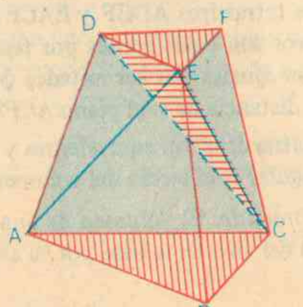


Fig. 68

Se tiene el tronco de pirámide triangular ABCDEF, cuyas bases paralelas son B y B′ y su altura h (fig. 68).

Si trazamos los planos ACE y CDE el tronco queda descompuesto en tres pirámides triangulares: EABC, CEDF y AECD. Luego:

$$\text{Volumen} = 1/3\, h \times B + 1/3\, h \times B' + 1/3\, h \sqrt{BB'}$$

$$V = \frac{h}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)$$

PROBLEMAS.

1. La apotema de una pirámide triangular regular mide 45 cm. y la apotema de la base mide 27 cm. Calcular su volumen.

2. Calcular el volumen de una pirámide triangular regular si el lado de la base mide 12 cm y la arista lateral mide 24 cm.

3. La Gran Pirámide de Egipto tiene por base un cuadrado de 232 m. de

lado y sus aristas laterales son iguales a los lados de las bases. Calcular su volumen.

4. Una pirámide regular tiene por caras laterales tres triángulos rectángulos isósceles; la hipotenusa de cada triángulo mide 18 cm. Calcular su volumen.

5. El volumen de una pirámide triangular regular es de 55.424 cm^3. Calcular el lado de la base si la altura de la pirámide es de 8 cm.

6. El lado de la base de una pirámide cuadrangular regular es de 6 dm. Calcular su volumen si la apotema de la pirámide es tres veces el lado de la base.

7. La apotema de la base de una pirámide hexagonal regular mide 15 cm. Calcular su volumen si la altura de la pirámide es de 45 cm.

8. Calcular el volumen de un tetraedro cuya arista mide 12 cm.

9. Expresar en m^3, dm^3 y cm^3, el volumen de un octaedro regular que tiene 48 mm. de arista.

10. La altura de la base de una pirámide triangular regular mide 12 cm. y la apotema de la pirámide mide 24 cm. Expresar el volumen de la pirámide en dm^3

11. Expresar en función de la arista, el volumen del tetraedro regular.

12. Expresar en función de la arista, el volumen del octaedro regular.

13. Las apotemas de las bases de un tronco de pirámide triangular regular miden 8 y 4 cm. respectivamente. Calcular su volumen si la altura del tronco es de 12 cm.

14. Calcular el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular regular si los lados de las bases miden respectivamente 16 y 8 cm. y la apotema del tronco 24 cm.

15. Un tronco de pirámide tiene 1 dm^3 de volumen. Calcular su altura si sus bases son cuadrados que tienen 18 y 12 cm. de lado.

UNIDAD 9

SUPERFICIE CILINDRICA CIRCULAR.

Definiciones.– Se llama superficie cilíndrica la engendrada por una recta que se desplaza en el espacio, permaneciendo siempre paralela a una recta fija, y apoyándose en una curva también fija.

La recta que gira se llama generatriz y la curva fija se llama directriz.

Cilindro circular.– Cilindro circular es el sólido geométrico limitado por una superficie cilíndrica y dos planos paralelos que cortan todas las generatrices. Estos dos planos paralelos se llaman bases.

El cilindro circular puede ser recto u oblicuo según que la línea generatriz sea perpendicular u oblicua a las bases. El cilindro ABCD y el cilindro EFGH (figs. 69 y 70).

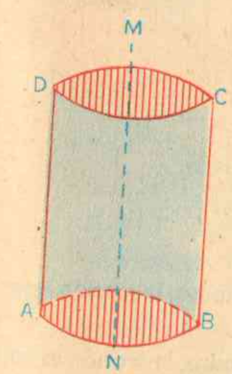


Fig. 69

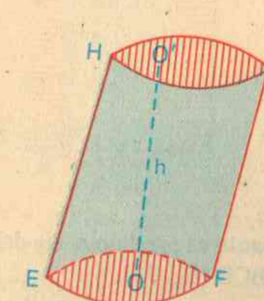


Fig. 70

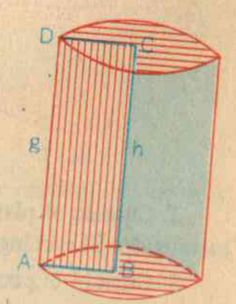


Fig. 71

Cilindro de revolución.– Cilindro de revolución o cilindro circular recto es el que está engendrado por la revolución completa de un rectángulo alrededor de uno de sus lados (fig. 71).

El lado sobre el cual gira el rectángulo se llama eje o altura del cilindro, el lado opuesto que engendra la superficie cilíndrica, se llama generatriz y los otros dos lados son los que describen los círculos que son las bases del cilindro.

En la figura 71, se tiene:

Lado BC, eje o altura del cilindro.

Lado AD, generatriz del cilindro.

AB y DC, radios de las bases del cilindro.

El cilindro puede considerarse como el límite de un prisma regular inscrito, cuyo número de caras laterales aumenta indefinidamente.

Tronco de cilindro, es la parte de cilindro comprendida entre una base y una sección oblicua a ella.

PLANOS SECANTES Y TANGENTES A UNA SUPERFICIE CILINDRICA.

Planos secantes.– Cuando un cilindro es cortado por un plano, se obtienen unas secciones denominadas secciones cilíndricas.

Las principales son:

1. Cuando el plano secante es perpendicular al eje del cilindro la sección es un círculo. El círculo AB (fig. 72).

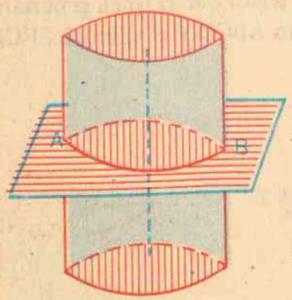


Fig. 72

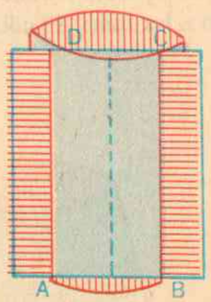


Fig. 73

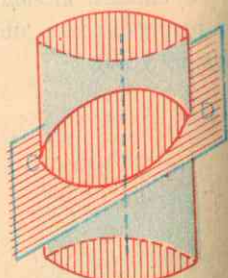


Fig. 74

2. Cuando el plano secante es paralelo al eje del cilindro, la sección es un rectángulo. El rectángulo ABCD (fig. 73).

3. Cuando el plano secante es oblicuo al eje del cilindro, la sección es una elipse. La elipse CD (fig. 74).

Plano tangente.– Se llama plano tangente a un cilindro, todo plano exterior que solo contiene una de las generatrices de cilindro. El plano M (fig. 75).

Todas las tangentes que puedan trazarse al cilindro por dicha generatriz, están contenidas en el plano tangente.

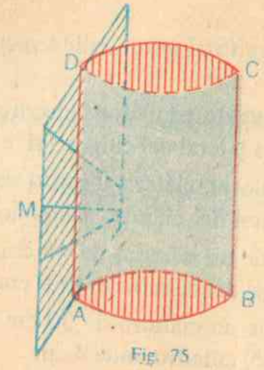


Fig. 75

AREA DEL CILINDRO.

El área de un cilindro puede ser lateral o total.

El área lateral comprende el área de la superficie cilíndrica que lo limita.

El área total comprende el área lateral más el área de las dos bases.

El área lateral de un cilindro de revolución (fig. 71) es igual a la circunferencia de la base por la generatriz.

Designando por *AL* el área lateral y por *g* la generatriz, se tiene:

$$AL = 2\ \pi\ R.g$$

Designando el área total por *AT*, tenemos:

$$AT\ \ 2\pi R.g + 2B$$

$$B = \pi\ R^2$$

$$AT = 2\pi R.g + 2\ \pi R^2$$

Luego:

$$AT = 2\ \pi R\ (g + R).$$

Volumen del cilindro.– El volumen de un cilindro circular, sea oblicuo o recto, es igual a la base por la altura (figs. 70 y 71).

Llamando *V* el volumen y *h* a la altura, tenemos:

$$V = \pi R^2.\ h.$$

PROBLEMAS

1. Calcular el área lateral de un cilindro sabiendo que el radio de la base y la generatriz miden respectivamente 12 y 36 cm.

2. El radio de la base de un cilindro mide 8 cm. Calcular el área total si su altura es tres veces la circunferencia de la base.

3. Expresar en m^2 el área total de un cilindro cuyo radio y altura miden respectivamente 6 y 18 cm.

4. La apotema de un triángulo equilátero inscrito en la base de un cilindro mide 6 cm. Calcular el área lateral del cilindro si la altura mide 30 cm.

5. El lado de un triángulo equilátero inscrito en la base de un cilindro mide 9 cm. Calcular el volumen del cilindro sabiendo que la altura es 36 cm.

6. Calcular el área total de un cilindro de 40 cm. de altura si la apotema del cuadrado inscrito en la base del cilindro mide 8 cm.

7. Calcular el volumen de un cilindro de 30 cm. de altura si el lado del cuadrado inscrito en la base del cilindro mide 4 cm.

8. La apotema de un hexágono regular inscrito en la base de un cilindro mide 6 cm. y la altura del cilindro mide 24 cm. Calcular:

a) El área lateral.
b) El área total.
c) El volumen.

9. Calcular el área total de un cilindro inscrito en un cubo de 12 cm. de arista.

10. Calcular el área lateral de un cilindro inscrito en un prisma triangular regular si el lado de la base y la altura del prisma miden 9 y 24 cm. respectivamente.

11. El lado de la base de un prisma cuadrangular regular es de 8 cm. y la altura mide 32 cm. Calcular el área total de los cilindros inscrito y circunscrito al prisma.

12. Cuántos metros cúbicos de agua contiene un pozo cilíndrico de 6 m. de profundidad y 2.5 m. de diámetro, si su contenido solo llega a los 2/5.

13. ¿Cuál es el espesor de un disco de plata de 4 cm. de diámetro si su peso es de 40 gramos? (densidad de la plata 10.5).

14. Calcular el peso de 250 m. de alambre de hierro de 3 mm. de diámetro (densidad del hierro 7.8).

15. Un recipiente cilíndrico de 1.8 m. de altura tiene una capacidad de 180 litros. Calcular el radio de la base.

16. Calcular el área total de un cilindro cuya generatriz es igual al lado del cuadrado inscrito en la base del cilindro y mide 25 cm.

17. Un recipiente circular lleno de aceite (densidad del aceite 0.9) tiene 50 cm. de altura y 10 cm. de radio. Calcular su peso total si el recipiente tiene un espesor de 5 mm. y la densidad del material del recipiente es de 4.5.

18. El área lateral de un cilindro es de 376.8 $cm.^2$ Calcular la generatriz si el radio de la base mide 10 cm.

19. El área lateral de un cilindro es de 1884 cm^2 y la generatriz mide 30 cm. Calcular el radio.

20. El área lateral de un cilindro es de 370 $dm.^2$ y la generatriz es tres veces el radio. Calcular el radio.

UNIDAD 10

SUPERFICIE CONICA Y CONO

Definiciones.– Se llama superficie cónica, la engendrada por una recta que se desplaza en el espacio pasando siempre por un punto fijo, llamado vértice y apoyándose en una curva también fija.

La recta que se mueve se llama generatriz y la curva fija se llama directriz.

La superficie cónica se compone de dos partes, hojas o mantos, opuestos por el vértice (fig. 76).

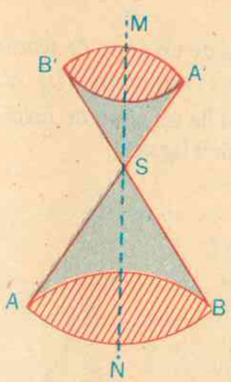


Fig. 76

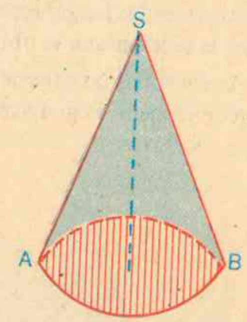


Fig. 77

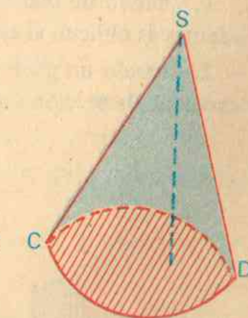


Fig. 78

Cono circular.– Cono circular es el sólido geométrico limitado por uno de los mantos de una superficie cónica y por un plano que corta todas las generatrices, llamado base.

El cono circular puede ser recto u oblicuo, según que su eje sea perpendicular u oblicuo a la base. El cono SAB y el cono SCD (figs. 77 y 78).

Cono de revolución.– Cono de revolución es el que está engendrado por

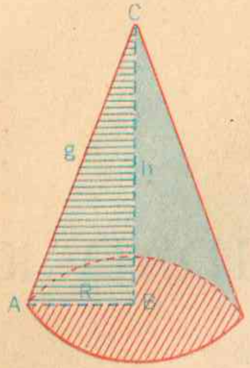


Fig. 79

la revolución completa de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos (fig. 79).

El cateto sobre el cual gira el triángulo se llama eje o altura del cono, la hipotenusa que es la que engendra la superficie cónica se llama generatriz y el otro cateto describe el círculo que le sirve de base al cono.

En la figura 79, se tiene:

Lado BC, eje o altura del cono.
Lado AC, generatriz del cono.
Lado AB, radio de la base del cono.

El cono puede considerarse como el límite de una pirámide regular inscrita, cuyo número de caras laterales aumenta indefinidamente.

SECCIONES CONICAS.

Elipse – Parábola – Hipérbola.

Definiciones.– Cuando un cono de revolución es cortado por un plano se obtiene una sección denominada sección cónica o simplemente cónica.

Ocurren tres casos:

1. Cuando un plano corta todas las generatrices de un cono de revolución y además es oblicuo al eje, la sección que se obtiene es una *elipse* (fig. 80).

2. Cuando un plano corta todas las generatrices de un cono de revolución menos una, la sección que se obtiene es una *parábola* (fig. 81).

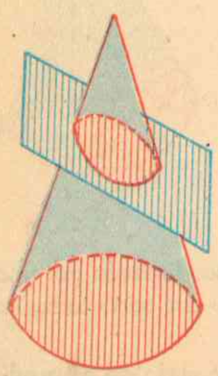


Fig. 80

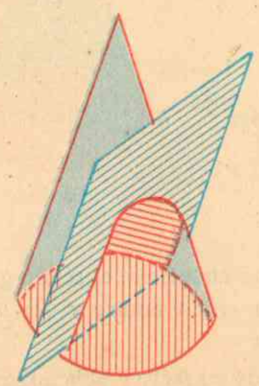


Fig. 81

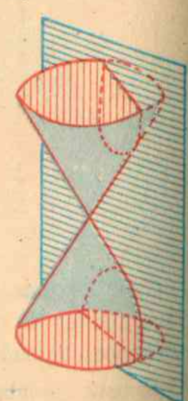


Fig. 82

3. Cuando un plano corta los dos mantos de una superficie cónica, la sección que resulta es una *hipérbola* (fig. 82).

TRONCO DE CONO DE REVOLUCION.

Definiciones.– Tronco de cono de revolución, de bases paralelas, es la parte de cono comprendida entre la base y una sección paralela a ella.

El tronco de cono de revolución se considera engendrado por la rotación completa de un trapecio rectángulo que gira alrededor del lado perpendicular a las bases (fig. 83).

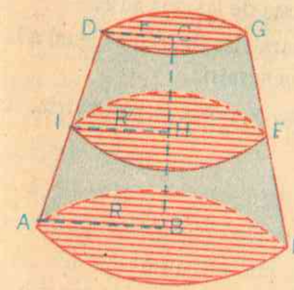


Fig. 83

El lado sobre el cual gira el trapecio se llama eje o altura del tronco, el lado opuesto que engendra la superficie cónica del tronco, es la generatriz y los lados paralelos que son las bases del trapecio, engendran los círculos que son las bases del tronco.

En la figura 83, se tiene:

Lado BC, eje o altura del tronco.
Lado AD, generatriz del tronco.
Lados AB y DC, radios de las bases del tronco.

AREA DEL CONO.

El área del cono puede ser lateral o total.

El área lateral comprende el área de la superficie cónica que lo limita.

El área total comprende el área lateral más el área de la base.

El área lateral de un cono de revolución (fig. 79) es igual al semiproducto de la circunferencia de la base por la generatriz.

Designando por AL el área lateral y por g la generatriz, se tiene:

$$AL = \frac{2\,\pi R.\,g}{2} = \pi R.g$$

Designando por AT el área total, tenemos:

$$AT = \pi R.g + B$$

$$B = \pi R^2$$

$$AT = \pi R.g + \pi R^2$$

Luego:

$$AT = \pi R\,(g + R)$$

Volumen del cono.– El volumen de un cono circular, sea oblicuo o recto, es igual al tercio de la base por la altura.

Llamando V al volumen y h a la altura, tenemos:

$$V=\frac{\pi R^2 . h}{3}$$

AREA DEL TRONCO DE CONO.

El área del tronco de cono puede ser lateral o total.

El área lateral comprende el área de la superficie cónica.

El área total comprende el área lateral más el área de las dos bases.

El área lateral de un tronco de cono de bases paralelas fig. 83, es igual a la semisuma de las circunferencias de las bases por la generatriz.

Designando por R y r, los radios de las bases y por g la generatriz, se tiene:

$$AL = \left(\frac{2\pi R + 2\pi r}{2}\right) g.$$

$$AL = \frac{2\pi (R + r)}{2} g.$$

$$\textit{Luego: } AL = \pi (R + r) g.$$

El área total es igual al área lateral más el área de las dos bases, o sea:

$$AT = \pi (R + r) g + B + B'$$

$$B = \pi R^2 \text{ y } B' = \pi r^2$$

$$\textit{Luego: } AT = \pi (R + r) g + \pi R^2 + \pi r^2$$

Representando por R´el radio de la circunferencia media, se tiene:

$$AL = 2\pi R' g;$$

$$AT = 2\pi R' g + \pi R^2 + \pi r^2$$

$$AT = \pi (R^2 + r^2 + 2R' g)$$

Volumen de un tronco de cono de revolución de bases paralelas.– El volumen de un tronco de cono, de bases paralelas, es igual a la suma de tres conos de igual altura que el tronco y cuyas bases respectivas, son las bases del tronco y la media geométrica entre ellas. Luego:

$$V = 1/3\, h(\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi R^2 . \pi r^2})$$

$$V = 1/3\, h(\pi R^2 + \pi r^2 + \pi R . r)$$

$$\textit{Luego: } V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + R . r).$$

PROBLEMAS.

1. El radio de la base de un cono mide 21 cm. y la altura del cono mide 28 cm. Calcular el área lateral.

2. Calcular el área total de un cono si el radio de la base mide 36 cm. y la altura 48 cm.

3. Calcular el volumen de un cono si el radio de la base mide 45 cm. y la generatriz 75 cm.

4. El lado del triángulo equilátero inscrito en la base de un cono mide 12 cm. y la generatriz del cono mide 36 cm. Calcular el área lateral del cono.

5. La apotema del triángulo equilátero inscrito en la base de un cono mide 3 cm. y la altura es tres veces el radio de la base. Calcular el volumen del cono.

6. El lado de un triángulo equilátero mide 8 cm. Calcular el área total y el volumen del cono generado por dicho triángulo, si gira alrededor de la altura.

7. La apotema de un cuadrado inscrito en la base de un cono mide 6 cm. Calcular el volumen del cono si la generatriz mide 18 cm.

8. Un cono tiene 30 cm.^{3} de volumen. Calcular el área de la base, sabiendo que la altura del cono es dos veces el radio de la base.

9. La hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles mide 3 dm. Calcular el área total y el volumen del cono generado por dicho triángulo, si gira alrededor de uno de sus catetos.

10. Calcular el área de la superficie de una tienda de forma cilíndrica rematada por un cono, sabiendo que tanto la generatriz del cilindro como la generatriz del cono y el diámetro común miden 2.5 m. c/u.

11. Calcular el área lateral del cono inscrito en una pirámide triangular regular, si el lado de la base y la altura de la pirámide miden respectivamente 9 y 18 cm.

12. Se quiere construir un embudo de 12 cm. de diámetro y 18 cm. de generatriz. ¿Cuánto costará el material para construirlo si se paga a $ 0.80 el dm.^{2} ?

13. Calcular el área total de un cono si la circunferencia de la base mide 68.8 cm. y la altura del cono mide 50 cm.

14. Un embudo que tiene 3 litros de capacidad tiene un diámetro de 36 cm. ¿Cuál es su altura?

15. Calcular el volumen de un cono inscrito en una pirámide hexagonal regular, si las apotemas de la base y de la pirámide miden respectivamente 9 y 15 cm.

16. La altura y la generatriz de un cono miden respectivamente 32 y 40 cm. Calcular:

a) El área lateral del cono.
b) El área total del cono.
c) El volumen del cono.

17. Los radios de las bases de un tronco de cono miden respectivamente 24 y 12 cm. y la altura del tronco mide 16 cm. Calcular el área lateral.

18. Las circunferencias de las bases de un tronco de cono miden 62.8 y 31.4 cm. respectivamente. Calcular el volumen del tronco sabiendo que la altura es de 20 cm.

19. Los radios de las bases de un tronco de cono miden 36 y 18 cm. respectivamente. Calcular el volumen sabiendo que la generatriz mide 30 cm.

20. Una chimenea tiene exteriormente forma de tronco de cono, siendo la parte hueca un cilindro; la altura es de 30 m., el diámetro interior mide 1 m., el diámetro exterior en la base mide 2.5 m. y en la parte superior, el diámetro exterior mide 2m. Calcular el volumen.

21. Si 1 m^2 de cartón pesa 2.5 kg. Cuál será el peso de un cono que tiene 24 cm. de radio y 32 cm. de altura.

22. Calcular el radio de la base de un cono si la generatriz mide 18 cm. y la superficie lateral desarrollada forma un ángulo de 45 grados.

UNIDAD 11

SUPERFICIE ESFERICA. ESFERA.

Definiciones. Se llama superficie esférica a la superficie que está engendrada por la revolución completa de una semicircunferencia alrededor de su diámetro (fig. 84).

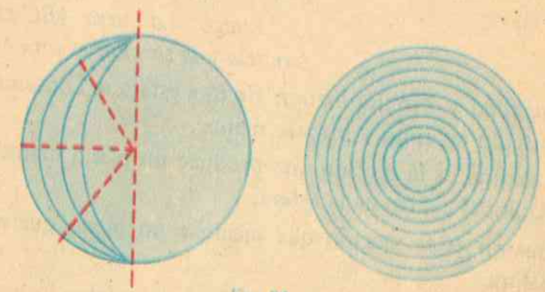


Fig. 84

Todos los puntos de la semicircunferencia que engendra la superficie esférica equidistan del centro, por consiguiente se puede definir que:

La superficie esférica es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que equidistan de un punto fijo llamado centro.

Esfera. Esfera es el sólido geométrico engendrado por un semicírculo que gira alrededor de su diámetro (fig. 84). La esfera está limitada por una superficie esférica.

El centro y el radio de la semicircunferencia o del semicírculo generador son el centro y el radio de la superficie esférica o de la esfera.

Radio. Radio de una superficie esférica o de una esfera, es toda recta que une el centro con un punto cualquiera de la superficie esférica.

Diámetro. Diámetro de una superficie esférica o de una esfera, es toda recta que pasa por el centro y une dos puntos de la superficie esférica.

Plano diametral. Plano diametral de una esfera es todo plano que pasa por el centro de la esfera y la divide en dos partes iguales llamadas hemisferios.

Sección plana de una superficie esférica. La sección de una superficie esférica por un plano es una circunferencia.

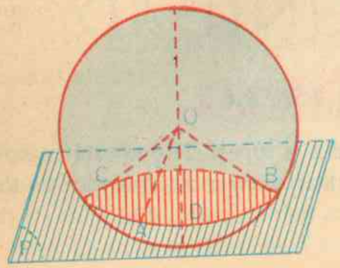


Fig. 85

Se tiene el plano P que corta la superficie esférica E de centro O y determina la curva ABC (fig. 85).

Si unimos el centro O de la esfera con los puntos ABC y trazamos la recta OD perpendicular al plano P, tenemos:

OA = OB = OC, por ser radios de una misma esfera, por lo tanto, son oblicuas que se apartan igualmente del pie de la perpendicular OD.

Luego: La curva ABC es una circunferencia y la sección es un círculo.

Círculo máximo y Círculo menor. En una esfera se consideran dos clases de círculos: círculo máximo y círculo menor.

Círculo máximo es la sección que produce un plano diametral, o sea un plano que pasa por el centro de la esfera.

Círculo menor es la sección que produce un plano que no pasa por el centro de la esfera.

Todos los círculos máximos de una esfera son iguales.

Por dos puntos de una esfera se puede trazar un círculo máximo exceptuando cuando esos puntos son los extremos del diámetro, que en ese caso se pueden trazar una infinidad de círculos máximos.

Por tres puntos de una esfera se puede trazar un círculo menor.

Para describir circunferencias en una superficie esférica se emplea un compás llamado compás esférico (fig. 86).

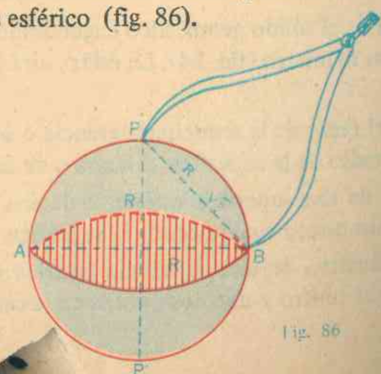


Fig. 86

El radio de un círculo máximo es igual a $R\sqrt{2}$. Esta longitud es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos son radios de la esfera (fig. 86).

APLICACIONES

1. ¿Cuál es el lugar geométrico de las tangentes en un punto dado de una esfera?

El lugar geométrico de las tangentes en un punto dado de una esfera, es el plano tangente a la esfera en dicho punto (fig. 87).

2. ¿Cuál es el lugar geométrico de las tangentes a una esfera, trazadas paralelamente a una dirección dada?

El lugar geométrico de las tangentes a una esfera trazadas paralelamente a una dirección dada, es la superficie cilíndrica que tiene como directriz la circunferencia del círculo máximo (fig. 88).

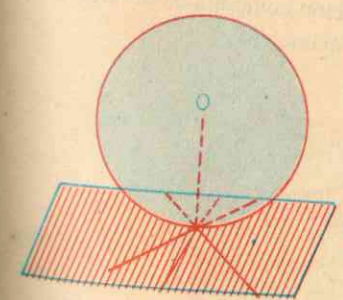


Fig. 87

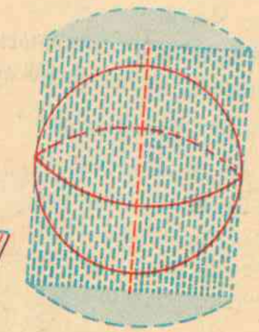


Fig. 88

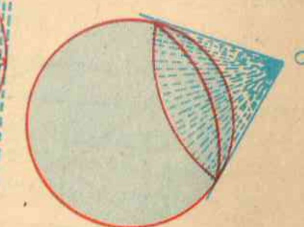


Fig. 89

3. ¿Cuál es el lugar geométrico de las tangentes a una esfera trazadas desde un punto exterior a ella?

El lugar geométrico de las tangentes a una esfera trazadas desde un punto exterior a ella, es una superficie cónica de revolución cuyo vértice está en el punto dado y cuya directriz es la circunferencia de un círculo menor (fig. 89).

4. Calcular el radio del círculo que determina un plano en una esfera de 12 cm. de diámetro, si la corta a 4 cm. del centro.

5. Calcular la arista de un cubo inscrito en una esfera de 15 cm. de radio.

6. Una esfera tiene 24 cm. de diámetro. Calcular el área del círculo determinado por un plano que pasa a 8 cm. del centro.

7. Una esfera tiene 12 cm. de radio. ¿A qué distancia del centro ha de pasar un plano para que la sección tenga 6 cm. de radio?

8. Se tiene una esfera de 16 cm. de radio; a dos, cuatro y seis centímetros del centro se describen círculos. Calcular sus áreas.

9. Una esfera tiene un radio de 18 cm., si desde un punto cualquiera de la esfera trazamos un círculo con un radio de 6 cm.; ¿cuál es el área de dicho círculo?

FIGURAS EN LA SUPERFICIE ESFERICA Y EN LA ESFERA.

Definiciones. Se llama *zona esférica* la parte de la superficie esférica comprendida entre dos planos paralelos. La zona ABCD (fig. 90).

Bases de una zona son las circunferencias que la limitan.

Altura de una zona es la distancia entre las dos bases.

Casquete esférico, es la parte de la superficie esférica comprendida entre un plano que corta la esfera y un plano tangente y paralelo al primero. El casquete esférico también se llama zona esférica de una base. El casquete EFG (fig. 90).

La zona esférica está engendrada por la rotación completa de un arco de círculo máximo que gira alrededor de uno de sus diámetros.

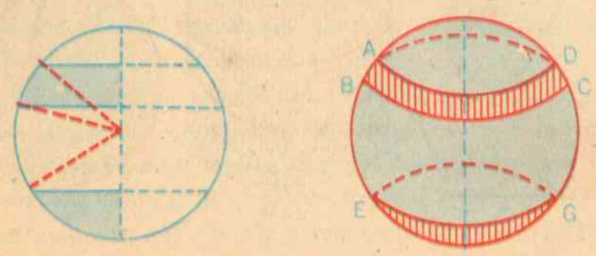


Fig. 90

La porción de esfera limitada por el casquete esférico y el plano que corta la esfera, se llama segmento esférico de una base.

La porción de esfera limitada por la zona esférica y los dos planos que cortan la esfera, se llama segmento esférico de dos bases.

Huso esférico. Huso esférico es la parte de la superficie esférica limitada por dos semicircunferencias de círculo máximo. El huso ABCD (fig.91).

El huso esférico está engendrado por la rotación de una semicircunferencia de círculo máximo alrededor de su diámetro.

Angulo de un huso, es el ángulo esférico formado por las dos semicircunferencias que lo limitan. El ángulo BAD (fig.91).

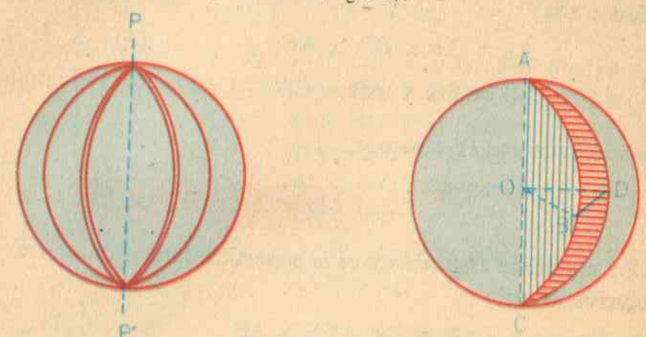


Fig. 91

La porción de esfera limitada por el huso esférico y los dos semicírculos, se llama cuña esférica.

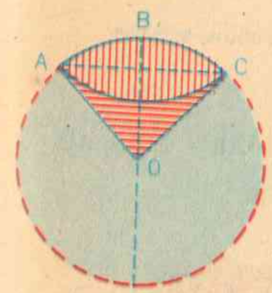


Fig. 92

Sector esférico. Se llama sector esférico el cuerpo engendrado por un sector circular que gira alrededor de un diámetro situado en su plano.

El sector OABC (fig. 92).

Revolución de un segmento. El área engendrada por la revolución de un segmento alrededor de un eje situado en el mismo plano, es igual al producto de su proyección sobre el eje por la circunferencia que tiene por radio la perpendicular trazada a la recta generatriz desde su punto medio hasta el eje.

Se consideran tres casos:

1. La recta es paralela al eje.
2. La recta no encuentra el eje ni le es paralela.
3. La recta encuentra el eje.

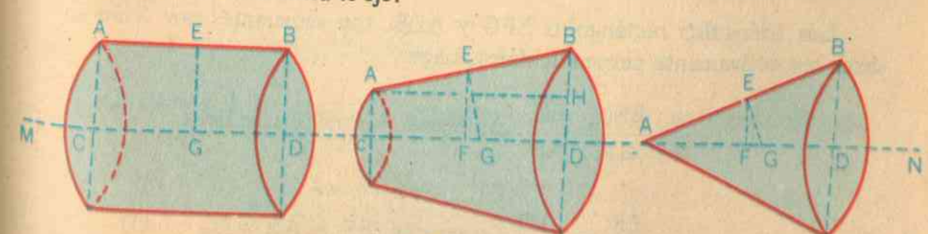


Fig. 93

1. La superficie engendrada es la superficie lateral de un cilindro de revolución, o sea:

$$AL = 2\pi \times BD \times AB \qquad (1)$$

$$BD = EG \text{ y } AB = CD$$

Sustituyendo en (1), tenemos:

$$AL = 2\pi \times EG \times CD$$

2. La superficie engendrada es la superficie lateral de un tronco de cono de revolución, o sea:

$$AL = 2\pi \times EF \times AB \qquad (1)$$

Los triángulos rectángulos EFG y AHB, son semejantes por tener sus lados respectivamente perpendiculares, luego:

$$\frac{EF}{AH} = \frac{EG}{AB}, \text{ cambiando los medios, se tiene:}$$

$$\frac{EF}{EG} = \frac{AH}{AB}, \text{ o sea que: } EF \times AB = EG \times AH$$

$$AH = CD.$$

Sustituyendo en (1), se tiene:

$$AL = 2\pi \times EG \times CD$$

3. La superficie engendrada es la superficie lateral de un cono de revolución, o sea:

$$AL = \pi \times BD \times AB$$

Como BD es igual a 2EF, se tiene:

$$AL = 2\pi \times EF \times AB \qquad (1)$$

Los triángulos rectángulos EFG y ADB, son semejantes por tener sus lados respectivamente perpendiculares, luego:

$$\frac{EF}{AD} = \frac{EG}{AB}, \text{ cambiando los medios, se tiene:}$$

$$\frac{EF}{EG} = \frac{AD}{AB}, \text{ o sea que: } EF \times AB = EG \times AD.$$

Sustituyendo en (1), tenemos:

$$AL = 2\pi \times EG \times AD$$

Revolución de una línea poligonal regular. El área engendrada por la revolución de una línea poligonal regular alrededor de uno de sus diámetros, que no la atraviese, es igual al producto de la proyección de la línea sobre el diámetro por la circunferencia que tiene por radio la apotema.

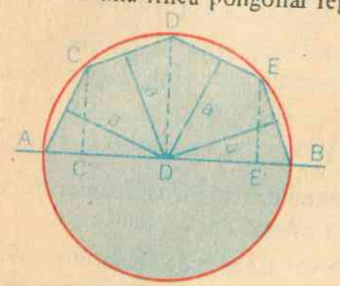


Fig. 94

Se tiene la línea poligonal regular ACDEB (fig. 94).

Si designamos por a la apotema, el área engendrada por dicha línea, es:

$$Area = 2\pi a \times AC' + 2\pi a \times C'D' + 2\pi a \times D'E' + 2\pi a \times E'B.$$

$$Area = 2\pi a\,(AC' + C'D' + D'E' + E'B)$$

$AC' + C'D' + D'E' + E'B'$, es igual a AB que es la proyección de la línea poligonal. Luego:

$$Area = AB \times 2\pi a$$

AREA DE LA ESFERA.

El área de la esfera es igual al producto de una circunferencia máxima por el diámetro.

Siendo engendrada la superficie esférica por una semicircunferencia que gira alrededor del diámetro y suponiendo que el número de lados de la línea poligonal regular, del problema anterior, aumente indefinidamente, en el límite esta línea se confundirá con la semicircunferencia, la apotema con el radio y la superficie engendrada por la línea poligonal con la superficie esférica. Luego:

$$Area = 2\pi R . d \qquad (1)$$

Corolarios. 1. El área de una esfera es igual a cuatro círculos máximos.

Reemplazando en (1), d por 2R, tenemos:

$$Area = 2\pi R . \ 2R$$

Luego:

$$Area = 4\pi R^2 \qquad (2)$$

2. El área de una esfera es igual al producto del número π por el cuadrado del diámetro.

Reemplazando en (2), R^2 por $(\frac{D}{2})^2$, tenemos:

$$Area = 4\,\pi(\frac{D}{2})^2 = 4\,\pi.\ \frac{D^2}{4}.$$

Luego:

$$Area = \pi\, D^2$$

3. El área de una esfera es igual al área lateral del cilindro circunscrito por ser la altura del cilindro igual al diámetro de la esfera.

Area de un casquete o de una zona esférica. El área de un casquete o de una zona esférica, es igual al producto de una circunferencia máxima de la esfera a que pertenecen, por la altura del casquete o de la zona.

Tanto el casquete como la zona esférica, se consideran como el límite del área engendrada por una línea poligonal regular inscrita en el arco generador al crecer indefinidamente el número de lados.

Si designamos por R el radio de la esfera y por h la altura del casquete o de la zona, tenemos:

$$Area\ casquete = 2\,\pi\,R.h$$

$$Area\ zona = 2\,\pi\,R.h$$

Area de un huso esférico. El área de un huso esférico se obtiene dividiendo el área de la esfera a que pertenece entre 360 y multiplicando el cociente por el número de grados del huso. Luego:

$$Area\ de\ un\ huso\ de\ un\ grado = \frac{4\,\pi\,R^2}{360} = \frac{\pi\,R^2}{90}$$

$$Area\ de\ un\ huso\ de\ n\ grados = \frac{4\pi R^2}{360}\ x\ n = \frac{\pi R^2\,n}{90}$$

PROBLEMAS

1. Calcular el área de una esfera si su radio mide 12 cm.

2. La circunferencia de un círculo máximo de una esfera mide 36 cm. Calcular el área de la esfera.

3. Calcular el área de la sección que produce un plano diametral en una esfera de 8 cm. de radio.

4. El área de una esfera es de 1256 cm^2 Calcular su radio.

5. El diámetro de una esfera mide 12 cm., a 3 cm. del centro se traza un plano que corta la esfera. Calcular:

a) El área de la sección.

b) La longitud de la circunferencia.

6. Calcular la superficie interior y exterior de una esfera hueca, si el espesor es de 3 cm. y el diámetro exterior mide 36 cm.

7. Calcular la abertura de compás que se necesita para trazar un círculo máximo en una esfera que tiene 12 cm. de diámetro.

8. Calcular la arista de un cubo inscrito en una esfera de 8 cm. de radio.

9. Dos esferas se cortan. Calcular el área del círculo de la intersección si la distancia de los centros y los radios de las dos esferas miden respectivamente 15, 12 y 9 cm.

10. La distancia de los centros de dos esferas que se cortan mide 40 cm. y el radio de la esfera menor mide 24 cm. Calcular el área de la esfera mayor.

11. Calcular el área de un casquete esférico de 12 cm. de altura en una esfera de 36 cm. de radio.

12. Calcular la altura de un casquete esférico si su área es de 753.6 cm^2 y el radio de la esfera mide 20 cm.

13. Calcular el área de una zona esférica de 8 cm. de altura en una esfera 24 cm. de radio.

14. Calcular la altura de una zona esférica si su área es de 502.4 cm^2 y el radio de la esfera mide 10 cm.

15. El diámetro de una esfera mide 18 cm. a 3 y 6 cm. se trazan planos paralelos. Calcular el área de las secciones.

16. Calcular el área de un huso esférico de 36 grados en una esfera de 24 cm. de diámetro.

17. El área de un huso esférico de 45 grados es de 157 cm^2. Calcular el área de la esfera correspondiente.

18. Calcular el costo de la pintada de un globo esférico de 1.5 m. de radio, si el metro cuadrado de pintura vale $10.50.

19. Calcular el ángulo de un huso esférico que tiene por superficie 628 cm^2 y el radio de la esfera mide 20 cm.

20. El radio terrestre aproximadamente mide 6366 km. Calcular el área de la zona tórrida si su altura es de 5100 km.

21. Dos cuerdas se cortan en un círculo máximo de una esfera, la distancia del punto de intersección al centro es de 8 cm. y el producto de los segmentos de cada cuerda es de 192. Calcular el área de la esfera.

22. Una cuerda en un círculo máximo que se une por uno de sus extremos al diámetro, mide 12 cm. y su proyección sobre el diámetro mide 7.2 cm. Calcular el radio de la esfera.

Revolución de un sector poligonal regular.– El volumen que engendra un sector poligonal regular que gira alrededor de un diámetro, exterior al mismo, es igual al tercio del producto de la superficie que engendra la línea poligonal regular por la apotema.

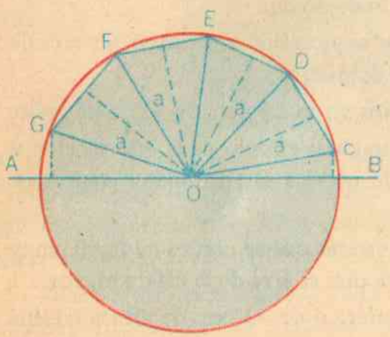


Fig. 95

Se tiene el sector poligonal regular OCDEFG, que gira alrededor del diámetro AB (fig. 95).

El volumen total es igual a la suma de los volúmenes engendrados por los triángulos COD, DOE, EOF y FOG.

Designando por a la apotema del sector y por s, s_1, s_2, s_3, las áreas de las superficies que engendran los triángulos COD, DOE, EOF y FOG el volumen engendrado por dicho sector, es:

$$\text{Volumen} = 1/3\ a \times s + 1/3\ a \times s_1 + 1/3\ a \times s_2 + 1/3\ a \times s_3$$

$$\text{Volumen} \quad 1/3\ a(s + s_1 + s_2 + s_3)$$

$s + s_1 + s_2 + s_3 = S$. Luego:

$$\text{Volumen} = 1/3\ S \times a.$$

UNIDAD 12

VOLUMEN DE LA ESFERA.

El volumen de una esfera es igual al producto de la superficie esférica por un tercio del radio.

Siendo engendrado el volumen esférico por un semicírculo que gira alrededor del diámetro y suponiendo que el número de lados del sector poligonal regular, del problema anterior, aumente indefinidamente, en el límite, este sector se confundirá con el semicírculo, la apotema con el radio, la superficie S con la superficie esférica y el volumen engendrado por el sector poligonal con el volumen de la esfera. Luego:

$$\text{Volumen} = 4\ \pi R^2 \times 1/3\ R$$

$$\textit{Volumen} = \frac{4\pi R^3}{3} \quad (1)$$

Corolario.– El volumen de una esfera es igual a $\frac{1}{6}$ el producto del número π por el diámetro al cubo.

Reemplazando en (1), R^3 por $(\frac{D}{2})^3$, tenemos:

$$\text{Volumen} = \frac{4\pi}{3} \times (\frac{D}{2})^3 = \frac{4\pi}{3} \times \frac{D^3}{8}$$

Luego:

$$\textit{Volumen} = 1/6\ \pi D^3$$

Volumen de un sector esférico.– El volumen de un sector esférico es igual al producto del área del casquete o de la zona correspondiente, por un tercio del radio.

Como el sector circular se considera como el límite del sector poligonal regular inscrito cuyo número de lados se aumenta indefinidamente, el volumen engendrado por el sector circular será el límite del volumen engendrado por el sector poligonal.

Designando por h la altura del casquete o de la zona correspondiente, se tiene:

$$\text{Volumen} = 2\pi Rh \times 1/3R$$

Luego:

$$\textit{Volumen} = \frac{2\pi R^2 h}{3}$$

Volumen de una cuña esférica.– El volumen de una cuña esférica es igual al producto del área del huso correspondiente por un tercio del radio. Por lo tanto:

$$\text{Volumen} = \frac{\pi R^2 n}{90} \times 1/3\,R$$

Luego:

$$\textit{Volumen} = \frac{\pi R^3 n}{270}$$

PROBLEMAS.

1. Calcular el volumen de una esfera cuyo radio mide 8 cm.

2. El diámetro de una esfera mide 24 cm. Calcular su volumen.

3. Calcular el volumen de una esfera inscrita en un cubo de 6 cm. de arista.

4. Calcular el radio de la base de un cono de 12 cm. de altura si su volumen es igual al de una esfera de 8 cm. de radio.

5. Calcular la capacidad de una caldera cilíndrica rematada por dos hemisferios, sabiendo que el diámetro común y la generatriz del cilindro mide cada uno 2.5 m.

6. Calcular el radio de una esfera de hierro que pesa 30 kg. (densidad del hierro 7.8).

7. Calcular el volumen de una esfera circunscrita a un octaedro de 12 cm. de arista.

8. Calcular el volumen de una esfera circunscrita a un cubo de 12 cm. de arista.

9. El área de una esfera es de 352.16 cm^2. Calcular el volumen de la esfera.

10. Calcular el radio de una esfera cuyo volumen es el doble de otra esfera de 8 cm. de diámetro.

11. Calcular el volumen de una boya formada por un hemisferio y un cono, sabiendo que el diámetro común y la generatriz del cono miden 120 cm.

12. La circunferencia exterior máxima de una esfera hueca tiene 36 cm. y su espesor es de 2 cm. Calcular su capacidad y el volumen del espesor.

13. Expresar la arista de un cubo inscrito en una esfera, en función del radio de la esfera.

14. El diámetro de una esfera mide 30 cm. Calcular el diámetro de la base de un cono de volumen equivalente de 10 cm. de altura.

15. Calcular el volumen de una cuña esférica de 60 grados en una esfera de 12 cm. de radio.

16. En dos esferas secantes la distancia de los centros es de 60 cm. y el radio de la esfera mayor es de 48 cm. Calcular el volumen de la esfera menor.

17. Una esfera hueca de cobre tiene 40 cm. de diámetro. Calcular su peso sabiendo que su espesor es de 3 cm. (densidad del cobre 8.9).

SOLUCION DE PROBLEMAS RELACIONADOS CON LAS DISTINTAS UNIDADES.

Problema 3. Página 238

Solución.

Entre la perpendicular, la distancia del extremo a la circunferencia y el radio del círculo, se forma un triángulo rectángulo.

Representando por R el radio se tiene:

$$R^2 = 7.5^2 - 6^2$$

$$R^2 = 20.25$$

$$\text{A. círculo} = \pi R^2$$

$$\text{A. círculo} = 3.14 \times 20.25$$

Respuesta: 63,5850 cm^2

Problema 7. Página 256

Solución

Las caras del tetraedro regular son triángulos equiláteros y las aristas son sus lados.

El área del triángulo equilátero, en función del lado es: $\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$

Luego:

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3}\,.$$

$$l^2\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$$

$$l^2 = \frac{32\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 32$$

$$l = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4 \times 1.4142 = 5.6568$$

Respuesta: 5.6568 cm.

Problema 8. Página 260

Solución.

La arista de un cubo en función de la diagonal de una de sus caras es:

$$a = \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

La diagonal del cubo, en función de la arista es: $d = a\sqrt{3}$

Luego:

$$d = \frac{15\sqrt{2}\ \sqrt{3}}{2}$$

$$d = \frac{15\sqrt{6}}{2} = \frac{15 \times 2.45}{2}$$

Respuesta: 18.375 cm.

Problema 2. Página 262

Solución.

El lado del triángulo equilátero, en función de la altura es: $l = \frac{2h\sqrt{3}}{3}$

Luego:

$$l = \frac{2 \times 12\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$$

$$\text{Perímetro} = 8\sqrt{3} \times 3$$

$$\text{Arista} = 8\sqrt{3} \times 3.$$

$$AL = (24\sqrt{3})^2 = 24 \times 24 \times 3$$

Respuesta: 1728 cm².

Problema 4. Página 265

Solución.

El lado de un triángulo equilátero, en función de la apotema es:

$$l = 2a\sqrt{3}.$$

$$B.h = 1575\sqrt{3}$$

$$\frac{(12\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \times h = 1575\sqrt{3}.$$

$$\frac{144 \times 3\sqrt{3}}{4} \times h = 1575\sqrt{3}$$

$$108\sqrt{3} \times h = 1575\sqrt{3}$$

$$h = \frac{1575\sqrt{3}}{108\sqrt{3}}$$

Respuesta: 14.58 cm.

Problema 8. Página 271

Solución.

Entre la altura de la pirámide, la apotema de la base y la apotema de la pirámide se forma un triángulo rectángulo. Luego:

$$a^2 = 16^2 + 12^2 = 400$$

$$a = \sqrt{400} = 20.$$

$$AT = \frac{P}{2}(a + a')$$

El lado del cuadrado en función de la apotema es: $l = 2a$

$$l = 24$$

$$\text{Perímetro} = 24 \times 4 = 96$$

$$AT = \frac{96}{2}(20 + 12)$$

Respuesta: 1536 cm.

Problema 1. Página 274

Solución.

Entre la altura del tronco, las apotemas de las bases y la apotema del tronco, se forma un trapecio rectángulo.

Si trazamos del extremo de la apotema de la base menor una perpendicular a la apotema de la base mayor se forma el triángulo rectángulo que tiene por catetos la altura del tronco y la diferencia de las apotemas de las bases y por hipotenusa la apotema del tronco.

Luego:

$$a^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$$a = \sqrt{25} = 5$$

Respuesta: 5 cm.

Problema 5. Página 277

Solución.

$$V.\ \text{pirámide} = \frac{B.h}{3}$$

$$\frac{B.h}{3} = 55.424 \qquad B.h = 166{,}272$$

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} \times 8 = 166{,}272$$

$$l^2 = \frac{166{,}272}{2\sqrt{3}} = 48$$

$$l = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4 \times 1.732$$

Respuesta: 6.928 cm.

Problema 5. Página 282

Solución.

El radio de un círculo, en función del lado del triángulo equilátero inscrito es:

$$R = \frac{l\sqrt{3}}{3} \qquad R = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$$

$$V.\ \text{cilindro} = \pi R^2 h$$

$$\text{Volumen} = 3.14\,(3\sqrt{3})^2 \times 36$$

Respuesta: 5052.08 cm^3

Problema 14. Página 290

Solución.

Los 3 litros de capacidad corresponden a 3 dm^3 de volumen. Luego:

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

$$\frac{3.14 \times 1.8^2 . h}{3} = 3$$

$$h = \frac{9}{10.17} = 0.88$$

Respuesta: 0.88 dm.

Problema 4. Página 293

Solución.

El radio del círculo determina en el diámetro de la esfera dos segmentos de 10 y 2 cm. y es medio proporcional entre ellos. Luego:

$$R^2 = 10 \times 2 = 20$$

$$R = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2 \times 2.236$$

Respuesta: 4.472 cm.

Problema 6. Página 299

Solución.

Los radios de las dos superficies son 18 y 15 cm. respectivamente.

A. superficie esférica $= 4\pi R^2$

Luego: A. superficie exterior $= 4 \times 3.14 \times 18^2$

A. superficie interior $= 4 \times 3.14 \times 15^2$

Respuesta:

4069.44 cm^2

2826.00 cm^2

Problema 14. Página 303

Solución.

$$V.\ \text{de la esfera} = \frac{\pi D^3}{6}$$

$$\text{Volumen} = \frac{3.14 \times 30^3}{6}$$

$$\text{Volumen} = \frac{3.14 \times 27000}{6} = 14130\ cm^3$$

$$\text{Volumen del cono} = \frac{\pi R^2 . h}{3}$$

$$\frac{3.14 \times R^2 \times 10}{3} = 14130$$

$$R^2 = \frac{1413 \times 3}{31.4} \qquad 1350$$

$$R = \sqrt{1350} = 36{,}75$$

diámetro = 36,75 x 2 *Respuesta: [illegible]*

FORMULAS

Altura del tetraedro regular en función de su arista	$\frac{a\sqrt{6}}{3}$
Paralelepípedos.	
Diagonal del paralelepípedo rectángulo	$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
Diagonal del cubo	$a\sqrt{3}$
Area lateral del prisma	$P.a$
Area total del prisma	$P.a + 2B$
Volumen de un paralelepípedo rectángulo	$a.b.c.$
Volumen del cubo	a^3
Volumen de un paralelepípedo recto	$B.a$
Volumen de un prisma cualquiera	$B.a$
Area de una pirámide regular (lateral)	$\frac{P.a}{2}$
Area total de una pirámide regular	$\frac{P.a}{2}+B$ $\frac{P}{2}(a+a')$
Diagonal del octaedro regular en función de la arista.	$a\sqrt{2}$
Area lateral del tronco de pirámide regular	$\frac{(P+P')}{2}a$
Volumen de la pirámide	$\frac{B.h}{3}$
Volumen del tronco de pirámide	$\frac{h}{3}(B+B'+\sqrt{BB'})$

Area lateral del cilindro	$2\pi R.g$
Area total del cilindro	$2\pi R(g+R)$
Volumen del cilindro	$\pi R^2.h$
Area lateral del cono	$\pi R.g$
Area total del cono	$\pi R(g+R)$
Volumen del cono	$\frac{\pi R^2.h}{3}$
Area lateral del tronco de cono	$\pi(R+r)g$ $2\pi R'g$
Area total de un tronco de cono	$\pi(R+r)g+\pi R^2+\pi r^2$ $\pi(R+r+2R'g)$
Volumen de un tronco de cono	$\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+R.r)$
Area de la esfera	$2\pi R.d$ $4\pi R^2$ πD^2
Area de un casquete esférico	$2\pi R.h$
Area de una zona esférica	$2\pi R.h$
Area de un huso esférico	$\frac{\pi R^2 n}{90}$
Volumen de la esfera	$\frac{4\pi R^3}{3}$ $\frac{\pi D^3}{6}$

Volumen de un sector esférico $\dfrac{2\pi R^2\ h}{3}$

Volumen de una cuña esférica $\dfrac{\pi R^3\ n}{270}$

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS

PAGINA 15

2. 18 cm.
3. 8 cm.
4. 150 mm.
5. 60 mm.
6. 12,25 mm.
7. 8; 10; 11 y 12 cm.
8. 3; 2,66 y 2,5 cm.
9. 6; 9; 7,5 y 10,8 cm.
10. 1o. 0,655 m.
    2o. 1,175 m.

PAGINA 16

11. 1o. 45,55 dm.
    2o. 8,8375 dm.
12. 1o. 0,225 m.
    2o. 5,9125 m.
13. 1o. 2,950 cm.
    2o. 8,776 cm.
14. 38,54 m.
15. 17 cm.
16. 281,25 cm.
17. 0.779 m.

PAGINA 30

1. 36º 15′ 54″
2. 17º 7′ 55″
3. 6º 17′ 33″
4. 67º 30′
5. 135º
6. 112º 30′ y 67º 30′
7. 30º y 50º
8. 35º 45′; 144º 15′; 144º 15′
9. 60º y 30º

PAGINA 31

10. 150º y 30º
11. 1o. 14º 35′
    2o. 74º 32′
    3o. 87º 34′ 45″
    4o. 24º 57′ 57″
12. 1o. 45º
    2o. 84º 35′
    3o. 59º 29′ 30″
    4o. 67º 24′ 35″

13. $22^\circ\ 30'$
14. 108° y 72°
15. 51° y 39°
16. $19^\circ\ 5'\ 27''\ \frac{3}{11}$
17. $16^\circ\ 55'\ 23''\ \frac{1}{13}$
18. 72°
19. $22^\circ\ 30'$
20. $22^\circ\ 30'$

PAGINA 44

10. Agudos 36° Obtusos 144°
11. Agudos 30° Obtusos 150°
12. Agudos 32° Obtusos 148°

PAGINA 45

13. Agudos 55° Obtusos 125°

14.
$\measuredangle\ 1 = 45^\circ$
$\measuredangle\ 2 = 135^\circ$
$\measuredangle\ 3 = 45^\circ$
$\measuredangle\ 4 = 135^\circ$
$\measuredangle\ 5 = 45^\circ$
$\measuredangle\ 6 = 105^\circ$
$\measuredangle\ 7 = 30^\circ$
$\measuredangle\ 8 = 45^\circ$
$\measuredangle\ 9 = 105^\circ$
$\measuredangle\ 10 = 30^\circ$
$\measuredangle\ 11 = 150^\circ$
$\measuredangle\ 12 = 30^\circ$
$\measuredangle\ 13 = 150^\circ$
$\measuredangle\ 14 = 30^\circ$

15.
$\measuredangle\ 1 = 25^\circ$
$\measuredangle\ 2 = 155^\circ$
$\measuredangle\ 3 = 25^\circ$
$\measuredangle\ 4 = 155^\circ$
$\measuredangle\ 5 = 25^\circ$
$\measuredangle\ 6 = 110^\circ$
$\measuredangle\ 7 = 45^\circ$
$\measuredangle\ 8 = 25^\circ$
$\measuredangle\ 9 = 110^\circ$
$\measuredangle\ 10 = 45^\circ$
$\measuredangle\ 11 = 135^\circ$
$\measuredangle\ 12 = 45^\circ$
$\measuredangle\ 13 = 135^\circ$
$\measuredangle\ 14 = 45^\circ$

16.
$\measuredangle\ 1 = 49^\circ\ 5'\ 27''$
$\measuredangle\ 2 = 130^\circ\ 54'\ 32''$
$\measuredangle\ 3 = 49^\circ\ 5'\ 27''$
$\measuredangle\ 4 = 130^\circ\ 54'\ 32''$
$\measuredangle\ 5 = 49^\circ\ 5'\ 27''$
$\measuredangle\ 6 = 98^\circ\ 10'\ 54''$
$\measuredangle\ 7 = 32^\circ\ 43'\ 38''$
$\measuredangle\ 8 = 49^\circ\ 5'\ 27''$

$\measuredangle\ 9 = 98^\circ\ 10'\ 54''$
$\measuredangle\ 10 = 32^\circ\ 43'\ 38''$
$\measuredangle\ 11 = 147^\circ\ 16'\ 21''$
$\measuredangle\ 12 = 32^\circ\ 43'\ 38''$
$\measuredangle\ 13 = 147^\circ\ 16'\ 21''$
$\measuredangle\ 14 = 32^\circ\ 43'\ 38''$

PAGINA 49

1. 18° ; 54° y 108°
2. 40° ; 60° y 80°
3. 72° ; 120° y 168°
4. 30° ; 60° y 90°

PAGINA 50

5. 45° y 135°
6. Rectángulo
7. Rectángulo
8. Acutángulo

PAGINA 61

1. 12 ; 18 y 24 cm.
2. 33,6 ; 33,6 y 16,8 cm.
3. 53,14; 53,14 y 17,72 cm.
4. 115° ; 120° y 125°
5. 18° ; 54° y 108°

PAGINA 62

6. $16^\circ\ 21'\ 49''\ \frac{1}{11}$; $81^\circ\ 49'\ 5''\ \frac{5}{11}$; $81^\circ\ 49'\ 5''\ \frac{5}{11}$
7. 30° y 150°
8. 36° ; 60° y 84°
9. $83^\circ\ 4'\ 36''\ \frac{12}{13}$; $83^\circ\ 4'\ 36''\ \frac{12}{13}$; $13^\circ\ 50'\ 46''\ \frac{2}{13}$
10. $104^\circ\ 7'$; $144^\circ\ 32'$; $139^\circ\ 35'$; $75^\circ\ 53'$
11. $11^\circ\ 15'$; $33^\circ\ 45'$; 135°
12. $98^\circ\ 10'\ 54''\ \frac{6}{11}$; $98^\circ\ 10'\ 54''\ \frac{6}{11}$; $163^\circ\ 38'\ 10''\ \frac{10}{11}$
13. $154^\circ\ 17'\ 8''\ \frac{4}{7}$; $102^\circ\ 51'\ 25''\ \frac{5}{7}$; $102^\circ\ 51'\ 25''\ \frac{5}{7}$

14. 123° 45′; 123° 45′ y 112° 30′
15. 97° 46′ 40″; 131° 6′ 40″ y 131° 6′ 40″
16. 130° ; 130° y 100°
17. 110° ; 120° y 130°
18. 115° 30′; 119° y 125° 30′
19. 135° ; 112° 30′ y 112° 30′
20. 95° ; 110° y 155°

PAGINA 107

6. 18 cm.
7. 36 y 24 cm.
8. 100 y 60 cm.
9. 1o. 130 cm.
   2o. 80 cm.
   3o. 100 cm.
   4o. 95 cm.

PAGINA 108

10. 1o. 70° ; 70° ; 110° y 110°
    2o. 70° ; 70° ; 110° y 110°
11. 1o. 30 cm.
    2o. 40 cm.
12. 20 y 10 cm.
13. 70°; 70°; 110° y 110°
14. 80°; 40°; 80° y 160°

PAGINA 128

2. 68,75 y 41,25 cm.
3. 56,64 y 63,61 cm.

PAGINA 129

4. $\frac{9}{40}$ y $\frac{27}{40}$ de m.
5. 17,50 ; 23,34 y 29,16 cm.
6. $\frac{57}{52}$; $\frac{19}{13}$ y $\frac{57}{26}$ de m.
7. 468,75 y 281,25 cm.
1. 25 cm.
2. 103,50 cm.
3. 54,07 cm.
4. $\frac{9}{56}$ de m.

PAGINA 133

2. 22 ; 23,88 y 26,40 cm.
3. 12,57 cm
4. 6 cm.
5. 75 cm.
6. $\frac{2}{3}$ de m.

PAGINA 134

1. 9,10 y 10,90 cm.; 7,71 y 10,29 cm ; 7,11 y 7,89 cm.
2. 19,29 y 25,71 cm.
3. $\frac{15}{28}$ y $\frac{3}{14}$ de m.; $\frac{3}{22}$ y $\frac{5}{44}$ de m.; $\frac{5}{32}$ y $\frac{15}{32}$ de m.

PAGINA 137

2. 5,6 ; 6,4 y 8,8 cm.
3. 18 ; 37,5 y 48 cm.

PAGINA 148

En el cuadro que se expone en esta página figuran los elementos de algunos triángulos rectángulos. Tomando dos cualquiera de estos elementos, se pueden calcular los cuatro restantes.

En dicho cuadro *a* representa la hipotenusa; *c* y *b*, los catetos; *m* y *n*, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa y *h* la altura.

En cada fila horizontal hay 9 problemas con sus correspondientes respuestas.

Por ejemplo: Si en la primera fila se toma:

a = 5 y c = 3. Las respuestas son: 4; 1,8; 3,2 y 2,4.
a = 5 y m = 1,8. Las respuestas son: 3; 4; 3,2; y 2,4.
a = 5 y h = 2,4. Las respuestas son: 3; 4; 1,8 y 3,2.
c = 3 y b = 4. Las respuestas son: 5; 1,8; 3,2 y 2,4.
c = 3 y m = 1,8. Las respuestas son: 5; 4; 3,2 y 2,4.
c = 3 y n = 3,2. Las respuestas son: 5; 4; 1,8 y 2,4.
c = 3 y h = 2,4. Las respuestas son: 5; 4; 1,8 y 3,2.
m = 1,8 y n = 3,2. Las respuestas son: 5; 3; 4 y 2,4.
n = 3,2 y h = 2,4. Las respuestas son: 5; 3; 4 y 1,8.

Nota: Este cuadro contiene un total de 72 problemas.

PAGINA 149

1. 1o. 5 cm.
   2o. 7,5 cm.
   3o. 60 cm.
   4o. 2 m.

PAGINA 150

2. 32 cm.
3. 3 m.
4. 31,81 y 31,81 mm.
5. 70,71 Km.; 225 Km.; 123,74 Km.
6. 18 y 24 cm.
7. 50,59 y 61,96 cm.
8. 2,165 y 3,062 m.
9. 22,360 y 33,166 m.
10. 9; 12 y 15
11. 1o. 42,426 cm. 3o. 21,213 cm.
2o. 63,639 cm. 4o. 0,883 m.
12. 1o. 33,93 cm.
2o. 18,10 m. 3o. 0,589 m.

PAGINA 151

13. 1o. 30,31 mm. 3o. 13,85 dm.
2o. 2,165 m. 4o. 0,673 m.

14. 1o. 6,928 m.
2o. 4,04 cm. 4o. 3,464 m.
3o. 28,86 mm. 5o. 0,866 m.

15. 1o. 6,928 cm.
2o. 17,32 mm. 3o. 0,173 m.

16. 1o. 8 dm. 3o. 20 mm.
2o. 14 cm. 4o. $\frac{6}{5}$ de m.

17. 1o. 4,24 m. 3o. 82,02 mm.
2o. 3,67 dm. 4o. 1,06 m.

18. 1o. 25,45 cm.
2o. 0,7071 m. 3o. 0,1414 m.

PAGINA 152

19. 1o. 12,50 m. 3o. 30 mm.
2o. 25,61 cm. 4o. 2 m.

20. 1o. 18,02 cm.
2o. 0,83 m. 3o. 26,40 mm.
21. 7,45 cm. 22. 115,88 cm.

PAGINA 155

1. 12,97 cm. 2. 0,488 ; 0,569 y 0,61 de m.

PAGINA 157

1. 30 cm. 4. 13,75 cm.
2. 28,8 cm. 5. 24 y 18 cm.
3. 40 cm. 6. 1 m.

PAGINA 158

7. 22 y 16,5 cm. 1. 20 cm.

PAGINA 159

2. 13 cm. 3. 60 cm.

PAGINA 160

1. 13,07 cm. 2. 8,37 m.
3. 2 y 8 cm.

PAGINA 161

4. 6 cm. 5. $\frac{503}{576}$ de m.

PAGINA 164

2. 1o. 7,416 cm.
2o. 2,831 m. 4o. 40,788 mm.
3o. 22,248 dm. 5o. 5,191 cm.

3.	40,45 cm.	6.	14,83 cm.
4.	558,22 mm.	7.	2,22 m.
5.	0,97 m.	8.	0,20 m.

PAGINA 171

1.	31,176 ; 27 y 9 cm.		
2.	0,49 y 0,42 m.	5.	9,33 cm.
3.	1,38 m.	6.	20,78 y 6,928 cm.
4.	0,25 m.	7.	0,433 y 0,125 m.

PAGINA 172

1.	5,091 y 2,54 cm.		
2.	0,425 m.	4.	0,416 m.
3.	6,768 cm.	5.	1,42 m.

PAGINA 173

1.	20,76 cm.		
2.	0,32 m.	3.	0,51 m.

PAGINA 178

1.	11,475 cm.	5.	14,56 dm.
2.	0,41 m.	6.	0,206 m.
3.	31,37 cm.	7.	12,63 cm.
4.	0,72 m.	8.	0,63 dm.

1.	9,80 y 4,90 cm.	5.	39,20 cm.
2.	19,60 ; 16,97 y 5,65 cm.	6.	27,41 cm.
3.	15,90 y 19,19 cm.	7.	62,35 cm.
4.	6,99 y 10,74 cm.	8.	16,40 cm.

PAGINA 179

9.	14,66 cm.		
10.	7,35 cm.	12.	6,88 cm.
11.	10,39 y 9 cm.	13.	18,37 cm.

PAGINA 188

1.	1o.	85,75 cm^2		
	2o.	42,50 dm^2	3o.	0,0565 m^2
2.	1o.	22,50 cm.		
	2o.	45,20 dm.	3o.	36,70 m.
3.	1o.	1536 cm^2	3o.	1577,0880 cm^2
	2o.	1564,9968 cm^2	4o.	1585,5860 cm^2
4.	1o.	15,625 cm^2	3o.	10,5625 m^2
	2o.	162,5625 dm^2	4o.	0,570025 Km^2
5.	1o.	125 cm.	3o.	3,25 m.
	2o.	12,75 dm.	4o.	0,755 Km.

PAGINA 189

6.	1o.	0,875 Dm^2		
	2o.	81,90 m^2	3o.	148,3625 dm^2

7.	257,14 t.	14.	96 m.
8	1275 b.	15.	15 m.
9.	714,96 m^2	16.	42,42 y 35,35 m.
10.	2,25 m.	17.	7,45 cm. y 55,5025 cm^2
11.	6,32 y 4,75 dm.	18.	76,47 y 23,47 m.
12.	$ 52,81	19.	225 m^2
13.	55,6875 hects.	20.	3,07 cm.

21.	1o.	327,60 cm^2
	2o.	35,40 dm^2
	3o.	0,0857 m^2

PAGINA 190

22.	1o.	26 cm.		
	2o.	3,40 m.	3o.	14,51 dm.
23.		15 dm.	25.	30 y 12 m.
24.		35 y 14 m.	26.	16 m.
27.	1o.	202,50 cm^2		
	2o.	1,0080 m^2	3o.	0,1339 m^2

28. 1o $283,4352\ cm^2$ 3o. $291,60\ cm^2$
2o. $288,9816\ cm^2$ 4o. $291,7215\ cm^2$

29. $1036,84\ cm^2$
30. $779,40\ dm^2$ 31. 47,04 dm.

32. 1o. $432\ cm^2$
2o. $0,3576\ m^2$
3o. $0,1696\ m^2$

PAGINA 191

33. 6 cm.
34. $375\ cm^2$ 35. 7,32 m.

PAGINA 193

1. 1o. $6358,50\ cm^2$ 3o. $0,1962\ m^2$
2o. $15,90\ dm^2$ 4o. $3957,1850\ mm^2$

2. 1o. $1589,62\ cm^2$ 3o. $77891,62\ mm^2$
2o. $1,4519\ m^2$ 4o $0,1103\ m^2$

3. 1o. $198,9375\ cm^2$ 3o. $0,2437\ m^2$
2o. $12,4336\ dm^2$ 4o. $0,0157\ m^2$

4. 1o. 15 cm. 3o. 0,98 m.
2o. 3,20 dm. 4o. 1,56 mm.

PAGINA 194

5. $0,8353\ m^2$ 11. 7,41 cm.
6. 62 cm. 12. 36^o
7. 55,98 cm. 13. 19,14 cm.
8. 3,23 cm. 14. $88,36\ cm^2$
9. $301,44\ cm^2$ 15. $0,52\ dm^2$
10. $12,89\ dm^2$ 16. $0,9753\ m^2$

PAGINA 197

1. 1o. $315,65\ cm^2$ 3o. $0,1691\ m^2$
2o. $2,7062\ dm^2$ 4o. $0,0561\ m^2$

2. 1o. $83,1360\ cm^2$ 3o. 1195,22 mm.
2o. $1,8705\ m^2$ 4o. $0,2078\ m^2$

3. 25,42 cm.
4. 24,97 cm. 5. $2,4940\ dm^2$

6. 1o. $1152\ cm^2$ 3o. $1496,4480\ cm^2$
2o. $748,2240\ cm^2$ 4o. $1629,1584\ cm^2$

7. 1o. $5184\ dm^2$ 3o. $4489,3440\ dm^2$
2o. $6734,0160\ dm^2$ 4o. $4301,9964\ dm^2$

8. $0,9352\ m^2$
9. $0,1224\ m^2$ 10. $0,0878\ m^2$

PAGINA 198

11. $187,0560\ dm^2$ 13. $584,55\ cm^2$
12. $0,29\ dm^2$ 14. $0,3950\ m^2$

15. 1o. $1536\ cm^2$
2o. $997,63\ cm^2$ 3o. $2175,21\ cm^2$

16. 4,24 dm.
17. 16,64 cm. 21. $584,55\ cm^2$
18. 1,66 m. 22. $110,48\ cm^2$
19. 3,50 dm. 23. $312,50\ cm^2$
20. $73,06\ cm^2$ 24. $4,56\ m^2$

PAGINA 199

25. $3182,55\ cm^2$
26. $1,0182\ m^2$ 29. $379,94\ cm^2$
27. $265,10\ cm^2$ 30. $0,24\ m^2$
28. $29,27\ cm^2$ 31. $452,16\ cm^2$

PAGINA 203

1. 1o. 20,78 cm. 3o. 13,85 cm.
2o. 15,79 cm. 4o. 22,07 cm.

2. 1,48 m.
3. 7,35 cm
4. 46,45 y 27,87 cm. 5. 16,45 cm.
6. 20,78 cm.

PAGINA 238

3. 63,58 cm^2
4. 10 cm.

PAGINA 239

5. 17,50 cm.

PAGINA 255

1. 15,5880 cm^2
2. 110,8480 cm^2

PAGINA 256

3. 62,3520 cm^2
4. 886,7840 cm^2
5. 249,4080 cm^2
6. 8867,84 cm^2
7. 5,65 cm.
8. 4 cm.

PAGINA 257

10. 29,40 cm.
11. 12,25 cm.
12. 93,5280 cm^2
13. 16,97 cm.

PAGINA 260

3. 29,93 cm.
4. $\frac{7}{12}$ de m.
5. 15,58 cm.
6. 33,94 cm.
7. 9,80 cm.
8. 18,37 cm.

PAGINA 262

1. 3367 y 4208,75 cm^2
2. 1728 cm^2
3. 841,75 cm^2
4. 3741,12 cm^2
5. 4608 y 5760 cm^2
6. 3818,34 cm^2
7. 3240 cm^2
8. 2992,89 y 3990,52 cm^2
9. 2494,08 cm^2
10. 596,42 cm^2
11. 0,91 dm.
12. 1,60 dm.
13. 6 ; 8 y 10 cm.

PAGINA 265

1. 3367,008 cm^3
2. 6734,016 dm^3
3. 432 cm^3
4. 14,58 cm.
5. 31.500 *l*
6. 2880.000 cm^3
7. 6 ; 9 y 15 cm.
8. 13824 cm^3; 2304 cm^2; 3456 cm^2 ; 41,56 cm.
9. 84 Kg.
10. 649,500 cm^3
11. 181,017 cm^3
12. 301,860 cm^3
13. 1o. 150 cm^2
 2o. 8,66 cm.
 3o. 7,07 cm.
14. 13.468,32 cm^3 ; 15. 384 dm^2

PAGINA 271

1. 30 cm.
2. 35 cm.
3. 54 cm.
4. 48 cm.
5. 29,79 cm.
6. 770,98 cm^2
7. 327,3480 cm^2
8. 1536 cm^2
9. $\frac{3 a^2 \sqrt{3}}{4}$
10. $a^2 \sqrt{3}$
11. 164,05 m.; 200,93 m.; 116 m.; 93.231,52 m^2; 147.055,52 m^2

PAGINA 272

12. 13,26 dm.
13. 6,25 y 18,75 cm.

PAGINA 273

15. 997,6320 cm^2
16. 134,09 cm.

PAGINA 274

1. 5 cm.
2. 40 cm.
3. 28 cm.
4. 3741,12 cm^3
5. 12960 cm^2
6. 209,04 cm^2

PAGINA 276

1. 45.454,608 cm^3
2. 478,032 cm^3
3. 2.943.275,733 m^3

PAGINA 277

4. 343,715 cm^3
5. 6,92 cm.
6. 212,880 dm^3
7. 11.691 cm^3
8. 203,644 cm^3
9. 0,000052´133068 m^3; 0,052´133068 dm^3; 52,133068 cm^3
10. 0,655665 dm^3
11. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
12. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
13. 2327,808 cm^3
14. 3533,226 cm^3
15. 0,43 dm.

PAGINA 281

1. 2712,96 cm^2
2. 7974,09 cm^2

PAGINA 282

3. 0,090432 m^2
4. 2260,80 cm^2
5. 3052,080 cm^3
6. 3645,57 cm^2
7. 753,600 cm^3
8. a) 1044,18 cm^2
   b) 1345,62 cm^2
   c) 3617,280 cm^3
9. 678,24 cm^2
10. 391,57 cm^2
11. 904,32 y 1337,32 cm^2
12. 11,775 m^3
13. 0,30 cm.
14. 13,776 Kg.
15. 1,78 dm.
16. 4737,22 cm^2

PAGINA 283

17. 20660,867 g.
18. 6 cm.
19. 10 cm.
20. 4,43 dm.

PAGINA 289

1. 2307,90 cm^2
2. 10851,84 cm^2
3. 127.170 cm^3
4. 783,14 cm^2
5. 678,240 cm^3
6. 150,72 y 116,020 cm^3
7. 1195,963 cm^3
8. 18,54 cm^2
9. 34,08 dm^2 y 9,945 dm^3
10. 29,44 m^2
11. 148,30 cm^2
12. $ 2,70

PAGINA 290

13. 2136,21 cm^2
14. 8,84 cm.
15. 1017,360 cm^3
16. a) 3.014,40 cm^2
    b) 4823,04 cm^2
    c) 19.292,16 cm^3
17. 2260,80 cm^2
18. 3663,333 cm^3
19. 56972,160 cm^3
20. 96,084 cm^3
21. 1,206 Kg.
22. 2,25 cm.

PAGINA 293

4. 4,47 cm.
5.
6. 251,20 cm^2

PAGINA 294

7. 10,39 cm.
8. 791,28 cm^2 ; 753,60 cm^2 y 690,80 cm^2
9. 109,90 cm^2

PAGINA 298

1. 1808,64 cm^2
2. 412,73 cm^2
3. 200,96 cm^2

PAGINA 299

4. 10 cm.
5. a) 84,78 cm^2
   b) 32,62 cm.
6. 2826,00 cm^2 y 4069,44 cm^2
7. 8,48 cm.
8.
9. 162,77 cm^2
10. 12.861,44 cm^2

11.	2712,96 cm^2	17.	1256,00 cm^2
12.	6 cm.	18.	$ 296,73
13.	1205,76 cm^2	19.	45^o
14.	8 cm.	20.	203.890.248,000 Km^2
15.	226,08 cm^2 y 141,30 cm^2		
16.	180,86 cm^2	21.	3215,36 cm^2

PAGINA 300

22. 10 cm.

PAGINA 302

1.	2143,573 cm^3		
2.	7234,560 cm^3	7.	2.557,778 cm^3
3.	113,040 cm^3	8.	4.698,846 cm^3
4.	13,06 cm.	9.	620,975 cm^3
5.	20,442 m^3	10.	5,05 cm.
6.	0,972cm.	11.	843.730,560 cm^3

PAGINA 303

12.	217,204 cm^3 y 567,903 cm^3	15.	1205,760 cm^3
		16.	195.333,120 cm^3
		17.	115025,736 g.

BIBLIOGRAFIA.

GEOMETRIA — Aurelio Baldor

CURSO DE GEOMETRIA — Felipe de J. Landaverde

GEOMETRIA RACIONAL — Rey Pastor y Puig Adam

ALGEBRA Y GEOMETRIA — R. Rodríguez Vidal

TRIGONOMETRIA Y ALGEBRA — R. Rodríguez Vidal

ALGEBRA MODERNA Y TRIGONOMETRIA — Elbridge P. Vance

GEOMETRIA SUPERIOR — G. M. Bruño

GEOMETRIA ANALITICA — Charles H. Lehmann

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE ARITMETICA — Manuel García Ardura

CURSO DE GEOMETRIA — Reunión de Profesores.

GEOMETRIA MODERNA — Edwin E. Moise, Floyd L. Downs.

CONTENIDO TERCER AÑO
DE ENSEÑANZA MEDIA

INTRODUCCION.

Pág.

Cuerpo. Superficie. Línea. Punto. Definiciones. 7

UNIDAD 1.

LINEA.

Clases de líneas. Semirrecta. Segmento rectilíneo. Propiedades de las rectas. Segmentos ordenados y segmentos orientados. Congruencia segmentaria. Operaciones. Ejercicios. 11

UNIDAD 2.

ANGULOS.

Definiciones. Generación de los ángulos. Clasificación de los ángulos según su sentido. Magnitud. Medida. Clasificación. Congruencia. Propiedades. Teoremas. Operaciones. Construcciones. Ejercicios. 17

UNIDAD 3.

PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO.

Posiciones de un punto y una recta. Posiciones de dos rectas. Rectas perpendiculares. Teoremas. Construcciones. Rectas paralelas. Postulados. Teoremas. Construcciones. Ejercicios. 33

UNIDAD 4.

TRIANGULOS.

Definiciones. Teoremas. Ejercicios. Congruencia. Propiedades. Congruencia triángulos rectángulos. Teoremas. Clasificación. Lugar geométrico. Líneas y puntos notables. Construcciones. Ejercicios. 47

Pág.

UNIDAD 5.

CIRCUNFERENCIA. CIRCULO.

Definiciones. Propiedades. Posiciones relativas de un punto y una circunferencia. Posiciones de una recta y una circunferencia. Construcciones. Teoremas. Igualdad y desigualdad de arcos. Teorema. 63

UNIDAD 6.

ANGULOS RELACIONADOS CON LA CIRCUNFERENCIA.

Generalidades. Teoremas. Arco capaz. Ejercicios. Teoremas. Construcciones 71

UNIDAD 7.

POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS.

Relaciones entre los radios y las distancias de los centros. Construcciones. Problemas. 81

UNIDAD 8.

POLIGONOS.

Definiciones. Generalidades. Clases de polígonos. Congruencias. Teoremas. Valor de los distintos elementos de los primeros diez polígonos regulares. Problemas. CUADRILATEROS. Definiciones. Generalidades. Propiedades de los paralelogramos. Teoremas. Propiedades de los trapecios. Construcciones. Ejercicios. 89

UNIDAD 9.

EQUIVALENCIA Y TRANSFORMACION DE FIGURAS.

Generalidades. Construcciones. Relaciones entre las líneas del triángulo rectángulo. Representación gráfica. Ejercicios. 109

CONTENIDO CUARTO AÑO DE ENSEÑANZA MEDIA

PARTE I

UNIDAD 1.

Pág.

SEGMENTOS PROPORCIONALES.

Teorema. Demostraciones. Aplicaciones. 119

UNIDAD 2.

RELACIONES METRICAS ENTRE LOS LADOS DEL TRIANGULO.

Proyecciones. Teoremas. Demostraciones. Aplicaciones. 139

UNIDAD 3.

RELACIONES METRICAS ENTRE SEGMENTOS DE SECANTES Y TANGENTES A UNA CIRCUNFERENCIA.

Teoremas. Demostraciones. Aplicaciones. División de un segmento en media y extrema razón (división áurea). 156

UNIDAD 4.

DIVISION ARMONICA DE UN SEGMENTO.

Definiciones. Demostraciones. Aplicaciones. 165

UNIDAD 5.

INSCRIPCION DE POLIGONOS REGULARES Y DEDUCCION DE FORMULAS EN FUNCION DE RADIO

Deducciones. Aplicaciones. Teoremas. Medida de la circunferencia. . . 169

UNIDAD 6.

AREAS DE LAS FIGURAS PLANAS.

Figuras equivalentes. Teoremas. Demostraciones. Aplicaciones. 183

Pág.
TRANSFORMACION DE FIGURAS. 199

FORMULAS RELATIVAS A LAS AREAS DE DETERMINADOS TRIANGULOS 203

SOLUCION DE DIFERENTES PROBLEMAS RELACIONADOS CON LAS DISTINTAS UNIDADES 205

FORMULAS 223

CONTENIDO CUARTO AÑO
DE ENSEÑANZA MEDIA.
PARTE II

UNIDAD 1. Pág.

RECTAS Y PLANOS (Generalidades)

Espacio–Superficie. Línea. Punto. Cuerpo Físico. Propiedades de la recta y el plano. Determinación del plano. Construcciones. 231

UNIDAD 2.

GENERACION DEL PLANO

Propiedades del plano. Posiciones relativas de dos planos. Angulo de dos rectas que se cruzan. Posiciones relativas de una recta y un plano. Posiciones relativas de dos planos 233

UNIDAD 3.

RECTAS Y PLANOS PERPENDICULARES.

Generalidades. Teoremas. Demostraciones. Construcciones. Aplicaciones. 235

UNIDAD 4.

RECTAS Y PLANOS PARALELOS.

Teoremas. Demostraciones. Construcciones. Aplicaciones. Proyecciones. Problemas. 241

UNIDAD 5.

ANGULOS DIEDROS.

Definiciones y propiedades. Angulo Poliedro. Definiciones. Angulo Triedro. Teoremas. Demostraciones. Aplicaciones. 247

UNIDAD 6.

POLIEDROS EN GENERAL.

Definiciones. Poliedros regulares. Prisma. Paralelepípedos. Teoremas. Demostraciones. Aplicaciones. 253

UNIDAD 7.

PRISMA.

Area lateral y total del prisma. Volumen del prisma. Volumen de un paralelepípedo. Volumen del cubo. Volumen de un prisma cualquiera. Problemas. 261

UNIDAD 8. Pág.

PIRAMIDE.

Clasificación. Teorema. Demostraciones. Tronco de pirámide. Area de la pirámide. Problemas. Area del tronco de pirámide. Problemas. Descomposición de un prisma triangular. Volumen de la pirámide. Volumen del tronco. Problemas. 267

UNIDAD 9.

SUPERFICIE CILINDRICA CIRCULAR.

Definiciones. Cilindro circular. Cilindro de revolución. Planos tangentes y secantes. Area lateral y total del cilindro. Problemas. Volumen del cilindro. Problemas. 279

UNIDAD 10.

SUPERFICIE CONICA Y CONO.

Generalidades. Secciones cónicas. Tronco de cono de revolución. Area del cono. Volumen del cono. Area de un tronco de cono. Volumen de un tronco de cono. Problemas. 285

UNIDAD 11.

SUPERFICIE ESFERICA ESFERA.

Generalidades. Sección plana de una superficie esférica. Círculo máximo y círculo menor. Aplicaciones. Figuras en la superficie esférica y en la esfera. Casquete. Zona. Huso. Segmento. Sector. Cuña. Areas. Aplicaciones. Problemas. 291

UNIDAD 12.

VOLUMEN DE LA ESFERA.

Revolución de un sector poligonal regular. Volumen del sector. Volumen de la cuña. Aplicaciones. Problemas. 301

SOLUCION DE PROBLEMAS RELACIONADOS CON LAS DISTINTAS UNIDADES 303

FORMULAS 308

Esta 7a. Edición de Geometría 3o. y 4o. se imprimió en los talleres gráficos de la Editorial Bedout S. A. Medellín, República de Colombia.

Editorial Bedout S. A.