Universidad del Atlántico	CÓDIGO: FOR-DO-109
	VERSIÓN: 0
	FECHA: 03/06/2020

AUTORIZACIÓN DE LOS AUTORES PARA LA CONSULTA, LA REPRODUCCIÓN PARCIAL O TOTAL, Y PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DEL TEXTO COMPLETO

Puerto Colombia, **19 de agosto de 2020**

Señores
DEPARTAMENTO DE BIBLIOTECAS
Universidad del Atlántico

Asunto: Autorización Trabajo de Grado

Cordial saludo,

Yo, **CESAR ALBERTO BRITO ARDILA**, identificado(a) con **C.C. No. 1.082.952.480** de **SANTA MARTA**, autor(a) del trabajo de grado titulado **MEDIDA DE HAUSDORFF: TEORIA Y APLICACIONES** presentado y aprobado en el año **2020** como requisito para optar al título Profesional de **MATEMATICO**; autorizo al Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico para que, con fines académicos, la producción académica, literaria, intelectual de la Universidad del Atlántico sea divulgada a nivel nacional e internacional a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios del Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico pueden consultar el contenido de este trabajo de grado en la página Web institucional, en el Repositorio Digital y en las redes de información del país y del exterior, con las cuales tenga convenio la Universidad del Atlántico.
- Permitir consulta, reproducción y citación a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato CD-ROM o digital desde Internet, Intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer.

Esto de conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

Atentamente,

Firma Cesar Brito
CESAR ALBERTO BRITO ARDILA
C.C. No. 1.082.952.480 de **SANTA MARTA**

Universidad del Atlántico	CÓDIGO: FOR-DO-110
	VERSIÓN: 01
	FECHA: 02/DIC/2020

DECLARACIÓN DE AUSENCIA DE PLAGIO EN TRABAJO ACADÉMICO PARA GRADO

Este documento debe ser diligenciado de manera clara y completa, sin tachaduras o enmendaduras y las firmas consignadas deben corresponder al (los) autor (es) identificado en el mismo.

Puerto Colombia, **19 de agosto de 2020**

Una vez obtenido el visto bueno del director del trabajo y los evaluadores, presento al **Departamento de Bibliotecas** el resultado académico de mi formación profesional o posgradual. Asimismo, declaro y entiendo lo siguiente:

- El trabajo académico es original y se realizó sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, en consecuencia, la obra es de mi exclusiva autoría y detento la titularidad sobre la misma.
- Asumo total responsabilidad por el contenido del trabajo académico.
- Eximo a la Universidad del Atlántico, quien actúa como un tercero de buena fe, contra cualquier daño o perjuicio originado en la reclamación de los derechos de este documento, por parte de terceros.
- Las fuentes citadas han sido debidamente referenciadas en el mismo.
- El (los) autor (es) declara (n) que conoce (n) lo consignado en el trabajo académico debido a que contribuyeron en su elaboración y aprobaron esta versión adjunta.

Título del trabajo académico:	**MEDIDA DE HAUSDORFF: TEORIA Y APLICACIONES**
Programa académico:	**MATEMÁTICAS**

Firma de Autor 1:	Cesar Brito						
Nombres y Apellidos:	**CESAR ALBERTO BRITO ARDILA**						
Documento de Identificación:	**CC**	**X**	**CE**		**PA**		**Número:** **1.082.952.480**
Nacionalidad:					**Lugar de residencia:**		
Dirección de residencia:							
Teléfono:					**Celular:**		

Universidad del Atlántico	CÓDIGO: FOR-DO-111
	VERSIÓN: 0
	FECHA: 03/06/2020

FORMULARIO DESCRIPTIVO DEL TRABAJO DE GRADO

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO DE GRADO	**MEDIDA DE HAUSDORFF: TEORIA Y APLICACIONES**
AUTOR(A) (ES)	**CESAR ALBERTO BRITO ARDILA**
DIRECTOR (A)	**JOHN BEIRO MORENO BARRIOS**
CO-DIRECTOR (A)	**CARLOS ARAUJO MARTÍNEZ**
JURADOS	**TOVIAS CASTRO POLO BORIS LORA CASTRO**
TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TITULO DE	**MATEMATICO**
PROGRAMA	**MATEMATICAS**
PREGRADO / POSTGRADO	**PREGRADO**
FACULTAD	**CIENCIAS BASICAS**
SEDE INSTITUCIONAL	**NORTE**
AÑO DE PRESENTACIÓN DEL TRABAJO DE GRADO	**2020**
NÚMERO DE PÁGINAS	**70**
TIPO DE ILUSTRACIONES	**No Aplica**
MATERIAL ANEXO (Vídeo, audio, multimedia o producción electrónica)	**No Aplica**
PREMIO O RECONOMIENTO	**No Aplica**

Universidad del Atlántico
Facultad de Ciencias Básicas
Programa de Matemáticas

Medida de Hausdorff : Teoría y Aplicaciones.

Trabajo de grado presentado como requisito para optar el título de Matemático

Autor: Cesar Alberto Brito Ardila

Director: Ph.D Jhon Beiro Moreno Barrios

Barranquilla, Atlántico
Febrero de 2020

Aprobación

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad del Atlántico como integrantes del jurado examinador del trabajo de grado titulado **"Medida de Hausdorff : Teoría y Aplicaciones"**, presentado por el estudiante **Cesar Alberto Brito Ardila**, titular de la Cédula de Ciudadanía **1.082.952.480**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Universidad para optar al título de Matemático.

Director

Jurado

Jurado

Índice general

Agradecimientos

Quiero agradecer primeramente a Dios porque en él encontré refugio cuando no me iba bien, fortaleza cuando pensaba en abandonar, y convicción para seguir adelante en este, a veces difícil, pero maravilloso camino que ha sido mi carrera. Quiero agradeceer en gran manera a mi familia, porque pese a lo que otros pudieran decir, pese al enorme esfuerzo que suponía enviarme a estudiar a otra ciudad, y pese a mis propios altibajos, de ellos no recibí sino ánimos y apoyo. Quiero agradecer a todos mis docentes porque de todos aprendí algo. En particular quiero agradecer a los profesores Jhon Beiro Moreno (hoy mi director de tesis) y al profesor Carlos Araujo, siempre me gustó la matemática pero con ellos aprendí a amar lo que hago. También quiero agradecer en gran manera a el profesor Boris Lora y al profesor Tovias Castro, con ellos aprendí muchísima matemática, pero también me enseñaron mucho sobre calidad humana, grandes personas. Quiero agradecer en gran manera a todos mis compañeros de programa, ellos hicieron este camino más agradable. En particular quiero agradecer a Jersson, a Jesús y a Juan, grandes compañeros, grandes amigos, estudiar con ellos siempre me hizo querer superarme. Por último, quiero agradecer a mis estudianes, pese a que llegaron a mi vida cuando ya estaba culminando esta etapa se han convertido en mi más grande motivación para seguir mejorando.

Introducción

La Medida de Hausdorff fue introducida en 1969 por Herbert Federer en [2], esta se presentó como un ejemplo de la construcción de Caratheodory que proporcionaba medidas a partir de métodos de estimación arbitrarios sobre un conjunto dado. Eligiendo un conjunto y un método de aproximación apropiados se obtenían medidas con propiedades geométricas básicas importantes. En este trabajo también se introdujeron los conceptos de Jacobiano y de manera seguida los conceptos de Área y Coárea los cuales permitirían medir las imágenes de abiertos en $\mathbb{R}^n$ mediante funciones continuas, así como sus conjuntos de nivel. A finales de los 80 y principios de los 90 K. Falconer y F.Morgan proporcionaron buenas introducciones a la Medida de Hausdorff en [4] y [5] respectivamente haciendo el tema más popular y accesible. Más tarde, en 1992 Lawrence C. Evans y Ronald F. Gariepy publicaron [1], aquí se profundizó en la Medida de Hausdorff y se redefinieron algunos conceptos elementales de la Teoría de la medida con el fin de trabajar siempre sobre espacios medibles, principalmente en $\mathbb{R}^n$. Finalmente en 1997 el mismo Lawrence C. Evans nos permitiría apreciar en [6] aplicaciones para la fórmula de Coárea sobre campos escalares.

En el presente trabajo exploramos varias de las propiedades fundamentales y de mayor relevancia de la Medida de Hausdorff haciendo un especial énfasis en la desiudualdad isodiamétrica y en la posterior demostración de la Medida de Lebesque como restricción de la Medida de Hausdorff, para esto último nos basamos en gran manera en la demostración hecha en 1979 por R. Hardt en [3]. Luego veremos las propiedades de funciones Lipschitz respecto a la medida de Hausdorff y ayudarnos de éstas para estudiar las fórmulas de Área y Coárea, y ver algunas aplicaciones.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Medidas y funciones medibles

Aún cuando más adelante se trabajará casi exclusivamente en $\mathbb{R}^n$, lo mejor es comenzar de manera abstracta.

Consideremos X un conjunto, y 2^X la colección de subconjuntos de X .

Definición 1.1. Una función $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ es considerada una *medida* sobre X si,

(i) $\mu(\emptyset) = 0$, y

(ii) $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ siempre que $A \subset \cup_{k=1}^{\infty} A_k$.

Observación 1.2. La mayoría de los textos llaman a dicha función μ una medida exterior, reservando el nombre de medida para μ restringida a la colección de subconjuntos de X μ-medibles (este concepto se ve acontinuación).

Definición 1.3. Un conjunto $A \subset X$ se dice *μ-medible* si para cada conjunto $B \subset X$,

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B - A).$$

Definición 1.4. Un conjunto $A \subset X$ se dice *σ-finito con respecto a* μ si podemos escribir $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, donde B_k es $\mu-$medible y $\mu(B_k) < \infty$ para $k = 1, 2, ...$

Definición 1.5. Una colección de subconjuntos $\mathcal{A} \subset 2^X$ se dice una $\sigma-$*álgebra* siempre que

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.

(ii) $A \in \mathcal{A}$ implica que $X - A \in \mathcal{A}$.

(iii) $A_k \in \mathcal{A}$ $(k = 1, 2, ...)$ implica que $\cup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Definición 1.6.
La $\sigma-$álgebra generada por la familia de abiertos de $\mathbb{R}^n$ es conocida como $\sigma-$*álgebra de Borel.* Sus elementos son llamados *Borelianos.*

Definición 1.7.

(i) Una medida μ sobre X es *regular* si para cada conjunto $A \subset X$ existe un conjunto B μ-medible tal que $A \subset B$ y $\mu(A) = \mu(B)$.

(ii) Una medida μ sobre $\mathbb{R}^n$ se dice de *Borel* si cada Boreliano es μ-medible.

(iii) Una medida μ sobre $\mathbb{R}^n$ se dice *Borel regular* si μ es de Borel y para cada $A \subset \mathbb{R}^n$ existe un Boreliano B tal que $A \subset B$ y $\mu(A) = \mu(B)$.

(iv) Una medida μ sobre $\mathbb{R}^n$ se dice *de Radon* si μ es Borel regular y $\mu(K) < \infty$ para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.8. Criterio de Caratheodory. *Sea μ una medida sobre $\mathbb{R}^n$. Si $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ para $A, B \in \mathbb{R}^n$ cualesquiera con dist$(A, B) > 0$, entonces μ es una medida de Borel.*

Demostración. Ver [1] pag. 9.

$\square$

Teorema 1.9. Aproximación por conjuntos abiertos y compactos. *Consideremos μ una medida de Radon sobre $\mathbb{R}^n$. Luego*

(i) Para cada conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mu(A) = \text{ínf}\{\mu(U) \mid A \subset U, \ U \text{ abierto}\},$$

(ii) Para cada conjunto $\mu-$medible $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A, \ K \text{ compacto}\}.$$

Demostración. Ver [1] pag. 8.

□

Ahora extendemos el concepto de medida de conjuntos a funciones. Consideremos X un conjunto, Y un espacio topológico, y μ una medida sobre X.

Definición 1.10. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se dice $\mu-$*medible* si para cada número real α el conjunto

$$\{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$$

es medible.

El siguiente lema muestra que podemos modificar el conjunto de la definición anterior.

Lema 1.11. *Los siguientes enunciados son equivalentes para una función $f : X \to \mathbb{R}$:*

(i) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $A_\alpha = \{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$ es medible.

(ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $B_\alpha = \{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$ es medible.

(iii) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $C_\alpha = \{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\}$ es medible.

(iv) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $D_\alpha = \{x \in X \mid f(x) < \alpha\}$ es medible.

Demostración. Como A_α y B_α son complementos el uno del otro, el enunciado (i) es equivalente al enunciado (ii). Análogamente, los enunciados (iii) y (iv) son equivalentes. Si (i) se cumple, luego $A_{\alpha-\frac{1}{n}}$ es medible para cada n, y como

$$C_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}},$$

se sigue que C_α es medible. Por tanto (i) implica (iii). Y como

$$A_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+\frac{1}{n}},$$

se sigue que (iii) implica (i).

$\square$

Teorema 1.12. *Consideremos una función $f : X \to \mathbb{R}$, entonces f es medible si y solo si para cada conjunto abierto U contenido en $\mathbb{R}$ tenemos que $f^{-1}(U)$ es medible.*

Demostración. ver [7] pag. 14

$\square$

Definición 1.13. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se dice *σ-finita con respecto a μ* si f es μ-medible y $\{x \mid f(x) \neq 0\}$ es σ-finito con respecto a μ.

Teorema 1.14. *Consideremos $f : X \to [0,\infty]$ $\mu-$medible. Luego existen conjuntos $\mu-$medibles $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ en X tales que*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{A_k}.$$

Demostración.

Definamos de manera inductiva los siguientes conjuntos

$$A_1 = \{x \in X \mid f(x) \geq 1\}$$

$$A_2 = \left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{2} + \chi_{A_1}\right\}$$

$$A_3 = \left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\chi_{A_2} + \chi_{A_1}\right\}$$

$$\vdots$$

$$A_k = \left\{ x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j} \right\}$$
$$\vdots$$

luego

$$f \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}.$$

Si $f(x) = \infty$, luego $x \in A_k$ para todo k, y se cumple el teorema. Por otro lado, si $0 < f(x) < \infty$, entonces para una infinidad de números n, tenemos que $x \notin A_n$. Luego para todos estos números n tenemos que

$$0 \leq f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \chi_{A_k} \leq \frac{1}{n} .$$

y haciendo $n \to \infty$ llegamos a lo que queríamos.

$\square$

1.2. Integrales

Ahora extenderemos los conceptos del cálculo a la teoría de la medida. En esta sección presentaremos la teoría de la integración; la teoría de la diferenciación es algo más compleja y la dejaremos para más adelante en la sección 1.5.

Notación 1.15.

$$f^+ = \text{máx}(f, 0), \;\; f^- = \text{máx}(-f, 0), \;\; f = f^+ - f^-.$$

Consideremos μ una medida sobre el conjunto X.

Definición 1.16. Una función $g : X \to [-\infty, \infty]$ es llamada una *función simple* si el conjunto $g(X)$ es enumerable.

Observación 1.17. *Consideremos* $g : X \to [-\infty, \infty]$ *una función simple y* $\{a_1, ..., a_n\}$ *los valores que toma* g*, entonces* g *es medible si y solo si los conjuntos* $g^{-1}(a_i)$ *son medibles para todo* $i = 1, ..., n$*.*

Definición 1.18. Si g es una función no negativa, simple y $\mu-$medible, entonces definimos

$$\int g \ d\mu \equiv \sum_{0 \leq y \leq \infty} y\mu(g^{-1}\{y\})$$

Definición 1.19. Si g es una función simple, $\mu-$medible y tenemos que $\int g^+ \ d\mu < \infty$ o $\int g^- \ d\mu < \infty$, decimos que g es una *función simple* $\mu-$*integrable* y

$$\int g \ d\mu \equiv \int g^+ \ d\mu - \int g^- \ d\mu$$

Observación 1.20. *Nuestro uso del término "integrable"difiere de la mayoría de los textos. Para nosotros, una función es "integrable"siempre que esta tenga una integral, inclusive si la integral es* $+\infty$ *o* $-\infty$*.*

Notación 1.21. Diremos que una proposicición se cumple μ-*casi siempre* sobre X si existe un subconjunto $N \subset X$ con $\mu(N) = 0$ tal que la proposicición se cumple para el complemento de N.

Definición 1.22. Consideremos $f : X \to [-\infty, \infty]$. Definimos la *integral superior*

$$\int^* f \ d\mu \equiv \text{ínf} \left\{ \int g \ d\mu \mid g \ \textit{simple} \ \mu - \textit{integrable con} \ g \geq f \ \mu \ \textit{c.s.} \right\}$$

Y la *integral inferior*

$$\int_* f \ d\mu \equiv \sup \left\{ \int g \ d\mu \mid g \ \textit{simple} \ \mu - \textit{integrable con} \ g \leq f \ \mu \ \textit{c.s.} \right\}$$

Definición 1.23. Una función $\mu-$medible $f : X \to [-\infty, \infty]$ es llamada μ-*integrable* si $\int^* f \ d\mu = \int_* f \ d\mu$, en cuyo caso escribimos

$$\int f \ d\mu = \int^* f \ d\mu = \int_* f \ d\mu.$$

Definición 1.24.

(i) Una función $f : X \to [-\infty, \infty]$ se dice $\mu-$*sumable* si f es $\mu-$integrable y

$$\int |f| \; d\mu < \infty.$$

(ii) Decimos que una función $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ es *localmente* $\mu-$*sumable* si $f|_K$ es $\mu-$sumable para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$.

Definición 1.25. Decimos que ν es una *medida asignada* sobre $\mathbb{R}^n$ si existe una medida de Radon μ sobre $\mathbb{R}^n$ y una función localmente $\mu-$sumable $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ tal que

$$\nu(K) = \int_K f \; d\mu$$

Para todos los conjuntos compactos $K \subset \mathbb{R}^n$.

El siguiente teorema es bastante conocido y nos será de gran utilidad en más de una demostración

Teorema 1.26. Lema de Fatou.

Consideremos $f_k : X \to [0, \infty]$ $\mu-$*medible* ($k = 1, ...$). *Luego*

$$\int \liminf_{k\to\infty} \; f_k \; d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k \; d\mu.$$

1.3. Medida producto, Teorema de Fubini, Medida de Lebesgue

Ahora definiremos el concepto de medida sobre el producto cruz de dos conjuntos, y definiremos la medida de Lebesgue.

Definición 1.27. Consideremos μ una medida sobre X y v una medida sobre Y. Definimos la medida $\mu \times v : 2^{X\times Y} \to [0, \infty]$ para cada conjunto $S \subset X \times Y$ como

$$(\mu \times v)(S) \equiv \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) v(B_i) \right\},$$

Donde el ínfimo es tomado sobre todas las colecciones de conjuntos $\mu-medibles$ $A_i \subset X$ y $v-medibles$ $B_i \subset Y$ $(i=1,...)$ tales que

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \times B_i).$$

La medida $\mu \times v$ es llamada la *medida producto* de μ y v.

Teorema 1.28. Teorema de Fubini.

Sean μ una medida sobre X y v una medida sobre Y.

(i) Luego $\mu \times v$ es una medida regular sobre $X \times Y$, incluso si μ y v no son regulares.

(ii) Si $A \subset X$ es $\mu-medible$ y $B \subset Y$ es $v-medible$, entonces $A \times B$ es $(\mu \times v)-medible$ y $(\mu \times v)(A \times B) = \mu(A)v(B)$.

(iii) Si $S \subset X \times Y$ es $\sigma-$finito con respecto a $\mu \times v$ luego $S_y \equiv \{x \mid (x,y) \in S\}$ es $\mu-medible$ para v c.s. y, $S_x \equiv \{y \mid (x,y) \in S\}$ es $v-medible$ para μ c.s. x, $\mu(S_y)$ es $v-integrable$ y $v(S_x)$ es $\mu-integrable$. Más aún

$$(\mu \times v)(S) = \int_Y \mu(S_y)dv(y) = \int_X v(S_x)d\mu(x).$$

(iv) Si f es $(\mu \times v)-integrable$ y f es $\sigma-finita$ respecto a $\mu \times v$, luego la aplicación

$$y \to \int_X f(x,y)d\mu(x) \text{ es } v-integrable,$$

la aplicación

$$x \to \int_Y f(x,y)dv(y) \text{ es } \mu-integrable,$$

y

$$\int_{X \times Y} fd(\mu \times v) = \int_Y \left[\int_X f(x,y)d\mu(x)\right] dv(y)$$
$$= \int_X \left[\int_Y f(x,y)dv(y)\right] d\mu(x).$$

Demostración. Ver [1] pag. 23.

$\square$

Definición 1.29. La *medida Uno-dimensional de Lebesque* $\mathcal{L}$ sobre $\mathbb{R}$ está definida por

$$\mathcal{L}(A) \equiv \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} diam\ C_i \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i,\ C_i \subset \mathbb{R}\right\}$$

Para todo $A \subset \mathbb{R}$.

Definición 1.30. Inductivamente definimos la *medida n-dimensional de Lebesque* $\mathcal{L}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$ por

$$\mathcal{L}^n \equiv \mathcal{L}^{n-1} \times \mathcal{L} = \mathcal{L} \times ... \times \mathcal{L}\ (n - veces)$$

Equivalentemente $\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{n-k} \times \mathcal{L}^k$ para cada $k \in \{1, ..., n-1\}$

1.4. Teorema de Cobertura de Vitali

En esta sección presentamos el teorema de cobertura de Vitali, el cual es muy útil para estudiar $\mathcal{L}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$.

Notación 1.31. *Si B es una bola cerrada en $\mathbb{R}^n$, escribimos $\hat{B}$ para denotar la bola concéntrica con 5 veces el radio de B.*

Definición 1.32.

(i) Una colección $\mathcal{F}$ de bolas cerradas en $\mathbb{R}^n$ se dice una *cobertura* de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ si

$$A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B.$$

(ii) $\mathcal{F}$ se dice una *cobertura fina* de A si, además,

$$\text{ínf}\{diam\ B \mid x \in B, B \in \mathcal{F}\} = 0$$

para cada $x \in A$.

Teorema 1.33. Teorema de Cobertura de Vitali ([1]). *Consideremos $\mathcal{F}$ cualquier colección no degenerada (radio mayor que cero) de bolas cerradas en $\mathbb{R}^n$ con*

$$\sup\{diam\ B \mid B \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Luego existe una familia enumerable $\mathcal{G}$ de bolas disyuntas en $\mathcal{F}$ tal que

$$\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B\in\mathcal{G}} \hat{B}.$$

Demostración. Ver [1] pag. 27.

$\square$

Corolario 1.34. *Consideremos $\mathcal{F}$ una cobertura fina de A dada por bolas cerradas y*

$$\sup\{diam\ B \mid B \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Luego existe una familia enumerable $\mathcal{G}$ de bolas disyuntas en $\mathcal{F}$ tales que para cada conjunto finito $\{B_1, ..., B_m\} \subset \mathcal{F}$, tenemos que

$$A - \bigcup_{k=1}^{m} B_k \subset \bigcup_{B\in\mathcal{G}-\{B_1,...,B_m\}} \hat{B}$$

1.5. Diferenciación de medidas de Radon

Ahora sí trataremos la diferenciación, pero a diferencia de la integral acá nos restringiremos a las medidas de Radon.

Consideremos μ y v medidas de Radon sobre $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.35. Para cada punto $x \in \mathbb{R}^n$, definimos,

$$\overline{D}_\mu v(x) \equiv \begin{cases} \limsup_{r\to 0} \frac{v(B(x,r))}{\mu(B(x,r))}, & si\ \mu(B(x,r)) > 0,\ para\ todo\ r > 0; \\ +\infty, & si\ existe\ r > 0\ tal\ que\ \mu(B(x,r)) = 0 \end{cases}$$

$$\underline{D}_\mu v(x) \equiv \begin{cases} \liminf_{r\to 0} \frac{v(B(x,r))}{\mu(B(x,r))}, & si\ \mu(B(x,r)) > 0,\ para\ todo\ r > 0; \\ +\infty, & si\ existe\ r > 0\ tal\ que\ \mu(B(x,r)) = 0 \end{cases}$$

Definición 1.36. Si $\overline{D}_\mu v(x) = \underline{D}_\mu v(x) < \infty$, decimos que v es *diferenciable* con respecto a μ en x y escribimos

$$D_\mu v(x) = \overline{D}_\mu v(x) = \underline{D}_\mu v(x).$$

$D_\mu v$ es la *derivada* de v con respecto a μ. También llamamos a $D_\mu v$ la densidad de v con respecto a μ.

Teorema 1.37. Sean μ y v medidas de Radon sobre $\mathbb{R}^n$. Luego $D_\mu v$ existe y es finita μ *c.s.* Más aún, $D_\mu v$ es $\mu - medible$.

Demostración. Ver [1] pag. 38.

□

Ahora presentaremos la relación entre derivada e integral mediante un teorema, pero para ello necesitaremos primero de la siguiente definición,

Definición 1.38. La medida v se dice *absolutamente continua* respecto a μ, escrito

$$v \ll \mu,$$

Siempre que $\mu(A) = 0$ implica que $v(A) = 0$ para todo $A \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.39. Teorema de diferenciación de medidas de Radon.

Sean μ *y* v *medidas de Radon sobre* $\mathbb{R}^n$, *con* $v \ll \mu$. *Luego*

$$v(A) = \int_A D_\mu v \; d\mu$$

Para todos los conjuntos $\mu -$ *medibles* $A \subset \mathbb{R}^n$.

Demostración. Ver [1] pag. 40.

□

1.6. Funciones Lipschitz, Teorema de Rademacher

En esta sección estudiaremos algunas propiedades de las funciones Lipschitz que nos serán de gran utilidad, además veremos el teorema de Rademacher que afirma que una función Lipschitz es diferenciable $\mathcal{L}^n$ *c.s.*

Definición 1.40. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dice *diferenciable* en un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si existe una función lineal

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

tal que

$$\lim_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x) - L(x-y)|}{|x-y|} = 0.$$

Notación 1.41. Si tal función lineal L existe, es única, y escribimos

$$Df(x)$$

en lugar de L. Llamamos a $Df(x)$ la derivada de f en x.

Definición 1.42.

(i) Consideremos $A \subset \mathbb{R}^n$. Una función $f : A \to \mathbb{R}^m$ se dice *Lipschitz* siempre que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \qquad (*)$$

Para alguna constante C y cualesquiera $x, y \in A$. La constante C más pequeña para la que $(*)$ se cumple es denotada

$$Lip(f) \equiv \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \mid x, y \in A,\ x \neq y \right\}.$$

(ii) Una función $f : A \to \mathbb{R}^m$ se dice *localmente Lipschitz* si para cada compacto $K \subset A$, existe una constante C_k tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C_k|x - y|$$

Para cualesquiera $x, y \in K$.

Teorema 1.43. Extensión de funciones Lipschitz.

Tomemos $A \subset \mathbb{R}^n$, y consideremos $f : A \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz. Existe una función Lipschitz $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

(i) $\bar{f} = f$ *sobre* A.

(ii) $Lip(\bar{f}) \leq \sqrt{m} Lip(f)$.

Demostración. Ver [1] pag. 80.

□

Teorema 1.44. Teorema de Rademacher

Consideremos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función localmente Lipschitz. Luego f es diferenciable $\mathcal{L}^n$ c.s.

Demostración. Ver [1] pag. 81.

□

Corolario 1.45.

(i) Consideremos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *localmente Lipschitz, y*

$$Z \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}.$$

Luego $Df(x) = 0$ *para* $\mathcal{L}^n$ *c.s.* $x \in Z$.

(ii) Consideremos $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *localmente Lipschitz, y*

$$Y \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(f(x)) = x\}.$$

Luego

$$Dg(f(x))Df(x) = I \quad \textit{para} \quad \mathcal{L}^n \text{ c.s. } x \in Y.$$

Demostración. Ver [1] pag. 91.

□

1.7. Funciones lineales y Jacobianos

Definición 1.46.

(i) Una función lineal $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dice *ortogonal* si $(Ox) \cdot (Oy) = x \cdot y$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Una función lineal $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice *simétrica* si $x \cdot S(y) = S(x) \cdot y$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Una función lineal $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice *diagonal* si existen $d_1, ..., d_n \in \mathbb{R}$ tales que $D(x) = (d_1x_1, ..., d_nx_n)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(iv) Consideremos $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal. La *adjunta* de A es la función lineal $A^* : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definida por $x \cdot (A^*y) = (Ax) \cdot y$ para cualesquiera $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$.

Teorema 1.47. Descomposición polar.

Consideremos $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una función lineal.*

(i) Si $n \leq m$, existen una función simétrica $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y una función ortogonal $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tales que

$$L = O \circ S.$$

(ii) Si $n \geq m$, existen una función simétrica $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ y una función ortogonal $O : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tales que

$$L = S \circ O^*.$$

Demostración. Ver [1] pag. 87.

□

Definición 1.48. Consideremos $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal.

(i) Si $n \leq m$, escribimos $L = O \circ S$ como mencionamos, y definimos el *Jacobiano* de L como

$$[L] = |det\ S|.$$

(ii) Si $n \geq m$, escribimos $L = S \circ O^*$ como mencionamos, y definimos el *Jacobiano* de L como

$$[L] = |det\ S|.$$

Definición 1.49.

(i) Si $n \leq m$, definimos

$$\Lambda(m, n) = \{\lambda : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., m\} \mid \lambda \ es\ creciente\}.$$

(ii) Para cada $\lambda \in \Lambda(m, n)$, definimos $P_\lambda : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ por

$$P(x_1, ..., x_m) \equiv (x_{\lambda(1)}, ..., x_{\lambda(n)}).$$

Teorema 1.50. Fórmula Binet-Cauchy

Consideremos $n \leq m$ *y* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *lineal. Luego*

$$[L]^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)} (det\ (P_\lambda \circ L))^2.$$

Demostración. Ver [1] pag. 89.

$\square$

Observación 1.51. *Luego para calcular* $[L]^2$, *calculamos las sumas de los cuadrados de los determinantes de cada* $(n \times n) -$ *submatriz de la* $(m \times n) -$ *matriz representación de* L *(con respecto a las bases usuales de* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbb{R}^m$*).*

Ahora consideremos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz. Por el Teorema de Rademacher, f es diferenciable $\mathcal{L}^n$ *c.s.*, luego $Df(x)$ existe y puede ser considerada como una función lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ para $\mathcal{L}^n$ *c.s.* $x \in \mathbb{R}^n$.

Notación 1.52. *Para* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, ..., f_m)$, *escribimos la matriz gradiente*

$$Df = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f^m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Definición 1.53. El *Jacobiano* de f se define

$$Jf(x) = [Df(x)].$$

Capítulo 2

Medida de Hausdorff

2.1. Conceptos

Aquí introduciremos ciertas medidas "de menor dimensión" sobre $\mathbb{R}^n$, con estas mediremos ciertos conjuntos "muy pequeños" de $\mathbb{R}^n$. Estas son las medidas de Hausdorff $\mathcal{H}^s$, definidas en términos de los diámetros de coberturas "eficientes". La idea es que A es un "subconjunto $s-$dimensional"de $\mathbb{R}^n$ si $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$.

Definición 2.1.

(i) Consideremos $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < \infty$, $0 < \delta \leq \infty$. Definimos

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \equiv \text{ínf}\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{diam\ C_j}{2} \right)^s \ |A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ diam\ C_j \leq \delta \right\},$$

Donde

$$\alpha(s) \equiv \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}\ .$$

Aquí $\Gamma(s) \equiv \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\ dx$, $(0 < s < \infty)$, es la función gamma usual.

(ii) Para los A y s anteriormente definidos, definimos

$$\mathcal{H}^s(A) \equiv \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Llamamos a $\mathcal{H}^s$ la *Medida de Hausdorff s-dimensional* sobre $\mathbb{R}^n$.

Observación 2.2. Nótese que

$$\mathcal{L}^n(B(x,r)) = \alpha(n)r^n$$

Para toda bola $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$.

Ahora definiremos la dimensión de un conjunto respecto a la medida de Hausdorff.

Definición 2.3. La *dimensión de Hausdorff* de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ está está definida así

$$\mathcal{H}_{dim}(A) \equiv \text{ínf}\{0 \leq s < \infty \mid \mathcal{H}^s(A) = 0\}$$

2.2. Resultados

Veamos que efectivamente la medida de Hausdorff es una medida, más aún veamos que es una medida Borel regular.

Teorema 2.4. ([1]).

$\mathcal{H}^s$ es una medida Borel regular $(0 \leq s < \infty)$.

Demostración.

1. Veamos que $\mathcal{H}^s_\delta$ es una medida,

   Primero veamos que $\mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) = 0$. Tomemos $0 < \epsilon < \delta$, y tomemos la bola $B\left(0\ ;\left(\dfrac{\epsilon}{\alpha(s)}\right)^{1/s}\right)$. Luego,

   $$\mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) \leq \mathcal{H}^s_\delta\left(B\left(0\ ;\left(\frac{\epsilon}{\alpha(s)}\right)^{1/s}\right)\right) = \alpha(s)\left[\left(\frac{\epsilon}{\alpha(s)}\right)^{1/s}\right]^s$$

   Es decir, $\mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) \leq \epsilon$, luego $\mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) = 0$.

   Ahora tomemos $\{A_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ y consideremos $A_k \subset \cup_{j=1}^\infty C_j^k$, con $diam\ C_j^k \leq \delta$; luego $\{C_j^k\}_{k,j=1}^\infty$ es una cobertura para $\cup_{k=1}^\infty A_k$. Luego,

   $$\mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \alpha(s)\left(\frac{diam\ C_j^k}{2}\right)^s.$$

Sacando ínfimo del lado derecho,

$$\mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A_k).$$

2. Ahora veamos que $\mathcal{H}^s$ es una medida. En efecto,

$$\mathcal{H}^s(\emptyset) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) = \sup\{0\} = 0$$

Ahora, sea $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$. Luego,

$$\mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_k), \quad \forall \delta > 0$$

Lo anterior por definición de supremo. Luego, haciendo $\delta \to 0$ llegamos a que

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_k).$$

3. Veamos que $\mathcal{H}^s$ es una medida de Borel.

Tomemos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ con $dist(A,B) > 0$. Tomemos $0 < \delta < 1/4dist(A,B)$. Consideremos $A \cup B \subset \cup_{k=1}^{\infty} C_k$ con $diam\ C_k \leq \delta$. Definamos $\mathcal{A} \equiv \{C_j \mid C_j \cap A \neq \emptyset\}$, y $\mathcal{B} \equiv \{C_j \mid C_j \cap B \neq \emptyset\}$. Luego $A \subset \bigcup_{C_j \in \mathcal{A}} C_j$ y $B \subset \bigcup_{C_j \in \mathcal{B}} C_j$, además, $C_i \cap C_j = \emptyset$ si $C_i \in \mathcal{A}$ y $C_j \in \mathcal{B}$. Luego

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{diam\ C_j}{2}\right)^s \geq \sum_{C_j \in \mathcal{A}} \alpha(s)\left(\frac{diam\ C_j}{2}\right)^s + \sum_{C_j \in \mathcal{B}} \alpha(s)\left(\frac{diam\ C_j}{2}\right)^s \geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B).$$

Sacando ínfimo del lado izquierdo tenemos que, $\mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B)$. Haciendo $\delta \to 0$, obtenemos $\mathcal{H}^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}^S(A) + \mathcal{H}^S(B)$. En consecuencia,

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$$

Para todo $A, B \in \mathbb{R}^n$ con $dist(A,B) > 0$. Luego por el Criterio de Caratheodory (teorema 1.8), tenemos que $\mathcal{H}^s$ es una medida de Borel.

4. Veamos que $\mathcal{H}^s$ es Borel regular.

   Nótese que $diam\ \overline{C} = diam\ C$ para todo C; luego,

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{diam\ C_j}{2} \right)^s \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ diam\ C_j \leq \delta,\ C_j\ cerrado \right\}$$

   Tomemos $A \subset \mathbb{R}^n$ de modo que $\mathcal{H}^s(A) < \infty$; luego $\mathcal{H}^s_\delta(A) < \infty$ para todo $\delta > 0$. Ahora para cada natural $k \geq 1$ tomemos una colección de conjuntos cerrados $\{C_j^k\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $diam\ C_j^k \leq 1/k,\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j^k$, y

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{diam\ C_j^k}{2} \right)^s \leq \mathcal{H}^s_{1/k}(A) + \frac{1}{k}\ .$$

   Ahora definamos $A_k \equiv \cup_{j=1}^{\infty} C_j^k,\ B \equiv \cap_{k=1}^{\infty} A_k$; B es de Borel. También $A \subset A_k$, y $A \subset B$. Más aún,

$$\mathcal{H}^s_{1/k}(B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{diam\ C_j^k}{2} \right)^s \leq \mathcal{H}^s_{1/k}(A) + \frac{1}{k}\ .$$

   Haciendo $k \to \infty$, llegamos a que $\mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(A)$. Pero $A \subset B$. Por lo tanto $\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(B)$.

$\square$

Acontinuación demostraremos algunas de las propiedades más elementales de la medida de Hausdorff.

Teorema 2.5. Propiedades elementales de la medida de Hausdorff ([1]).

(i) $\mathcal{H}^0$ *es la medida contadora.*

(ii) $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$ *sobre* $\mathbb{R}^1$.

(iii) $\mathcal{H}^s \equiv 0$ *sobre* $\mathbb{R}^n$ *para todo* $s > n$.

(iv) $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$ *para todo* $\lambda > 0,\ A \subset \mathbb{R}^n$.

(v) $\mathcal{H}^s(T(A)) = \mathcal{H}^s(A)$ *para toda isometría* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ A \subset \mathbb{R}^n$.

Demostración.

1. Obsérvese que, $\alpha(0) = \dfrac{1}{\Gamma(1)} = \left(\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} dx \right)^{-1} = 1$, además $\left(\dfrac{diam\ C_j}{2} \right)^0 = 1$ para todo conjunto no degenerado C_j, luego $\mathcal{H}^0_\delta(\{a\}) = 1$ para todo $\delta > 0$ y por tanto $\mathcal{H}^0(\{a\}) = 1$ para todo $a \in \mathbb{R}^n$. Luego para un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ tomando $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño tenemos que

$$\mathcal{H}^0_\delta(A) = \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^{n} 1 \right\} = n$$

   y haciendo $\delta \to 0$ llegamos a que $\mathcal{H}^0(A) = n$. Así queda demostrado (i).

2. Consideremos $A \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$. Tenemos que,

$$\alpha(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(3/2)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}$$

   Es decir, $\alpha(1) = 2$. Ahora tenemos que,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(A) &= \text{ínf} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} diam\ C_j \mid A \in \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \right\} \\ &\leq \text{ínf} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} diam\ C_j \mid A \in \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, diam\ C_j \leq \delta \right\} \\ &= \mathcal{H}^1_\delta(A). \end{aligned}$$

   Por otro lado, definamos $I_k \equiv [k\delta, (k+1)\delta], k \in \mathbb{Z}$. Luego $diam\ (C_j \cap I_k) \leq \delta$ y,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} diam\ (C_j \cap I_k) \leq diam\ C_j.$$

   Por tanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^1(A) &= \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} diam\ C_j \mid A \in \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right\}\\
&\geq \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} diam\ (C_j \cap I_k) \mid A \in \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right\}\\
&\geq \mathcal{H}^1_\delta(A).
\end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{L}^1 = \mathcal{H}^1_\delta$ para todo $\delta > 0$, y por tanto $\mathcal{L}^1 = \mathcal{H}^1$ sobre $\mathbb{R}$.

3. Tomemos un entero $m \geq 1$. El cubo unitario Q en $\mathbb{R}^n$ puede ser descompuesto en m^n cubos con longitud de lado $1/m$ y diámetro $n^{1/2}/m$. Luego,

$$\mathcal{H}^s_{\sqrt{n}/m}(Q) \leq \sum_{i=1}^{m^n} \alpha(s)(n^{1/2}/m)^s = \alpha(s) n^{s/2} m^{n-s},$$

Donde el último término tiende a cero cuando $m \to \infty$, si $s > n$. Luego $\mathcal{H}^s(Q) = 0$, por tanto $\mathcal{H}^s \equiv 0$.

4. Tomemos un conjunto cualquiera $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\lambda > 0$. Luego para todo $\delta > 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\lambda^s \mathcal{H}^s_\delta(A) &= \lambda^s\, \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{diam\ C_j}{2}\right)^s \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ diam\ C_j \leq \delta\right\}\\
&= \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{\lambda\ diam\ C_j}{2}\right)^s \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ diam\ C_j \leq \delta\right\}\\
&= \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{diam\ \lambda C_j}{2}\right)^s \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ diam\ C_j \leq \delta\right\}\\
&= \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{diam\ \lambda C_j}{2}\right)^s \mid \lambda A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \lambda C_j,\ diam\ \lambda C_j \leq \lambda\delta\right\}
\end{aligned}$$

Es decir, $\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s_\delta(A)$. Luego, haciendo $\delta \to 0$ tenemos que

$$\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A).$$

5. Tomemos $A \in \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$ cualesquiera. Entonces

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\alpha(s)\left(\frac{diam\ C_j}{2}\right)^s \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ diam\ C_j \leq \delta\right\}$$

$$= \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\alpha(s)\left(\frac{diam\ T(C_j)}{2}\right)^s \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ diam\ C_j \leq \delta\right\}$$

$$= \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\alpha(s)\left(\frac{diam\ T(C_j)}{2}\right)^s \mid T(A) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} T(C_j),\ diam\ T(C_j) \leq \delta\right\}$$

$$= \mathcal{H}^s_\delta(T(A))$$

Luego haciendo $\delta \to 0$ llegamos a lo que queríamos.

$\square$

Lema 2.6. ([1]).

Consideremos $A \subset \mathbb{R}^n$ *y* $\mathcal{H}^s_\delta(A) = 0$ *para algún* $0 < \delta < \infty$. *Luego* $\mathcal{H}^s(A) = 0$.

Demostración. Consideremos $s > 0$. Dado $\epsilon > 0$ existe una sucesión de conjuntos $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ con $diam\ C_j < \delta$ tal que $A \subset \cup_{j=1}^{\infty} C_j$, y

$$\sum_{j=1}^{\infty}\alpha(s)\left(\frac{diam\ C_j}{2}\right)^s \leq \epsilon.$$

En particular para cada j,

$$diam\ C_j \leq 2\left(\frac{\epsilon}{\alpha(s)}\right)^{1/s} \equiv \delta(\epsilon).$$

Luego

$$\mathcal{H}^s_{\delta(\epsilon)}(A) \leq \epsilon.$$

Y como $\delta(\epsilon) \to 0$ siempre que $\epsilon \to 0$, llegamos a que

$$\mathcal{H}^s(A) = 0.$$

□

Lema 2.7. ([1]).

Consideremos $A \subset \mathbb{R}^n$ *y* $0 \leq s < t < \infty$.

(i) Si $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, *luego* $\mathcal{H}^t(A) = 0$.

(ii) Si $\mathcal{H}^t(A) > 0$, *luego* $\mathcal{H}^s(A) = \infty$.

Demostración. Consideremos $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ y $\delta > 0$. Luego existen conjuntos $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que $diam\ C_j < \delta$, $A \subset \cup_{j=1}^{\infty} C_j$, y

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{diam\ C_j}{2} \right)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) + 1 \leq \mathcal{H}^s(A) + 1$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^t_\delta(A) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(t) \left(\frac{diam\ C_j}{2} \right)^t \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(t) \frac{\alpha(s)}{\alpha(s)} \left(\frac{diam\ C_j}{2} \right)^{s+(t-s)} \\
&= \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} 2^{s-t} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{diam\ C_j}{2} \right)^s (diam\ C_j)^{t-s} \\
&\leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} 2^{s-t} \delta^{t-s} (\mathcal{H}^s(A) + 1).
\end{aligned}$$

Luego haciendo $\delta \to 0$ concluimos que $\mathcal{H}^t(A) = 0$, esto prueba el enunciado (i). El enunciado (ii) se sigue de (i).

□

Capítulo 3

Desigualdad Isodiamétrica; $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$

Nuestra meta en este capítulo es probar que $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ *sobre* $\mathbb{R}^n$. Esto no es trivial: $\mathcal{L}^n$ está definida como el producto de n pliegues de la medida Uno-dimensional de Lebesque $\mathcal{L}^1$, de donde $\mathcal{L}^n(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i) \mid Q_i \textit{ cubos},\ A \subset \cup_{i=1}^{\infty} Q_i\right\}$. Por otro lado, $\mathcal{H}^n(A)$ es calculado en términos de coverturas arbitrarias de diámetro pequeño.

3.1. Resultados

Lema 3.1. ([1]).

Consideremos $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ $\mathcal{L}^n -$ *medible. Luego la región bajo el gráfico de* f,

$$A \equiv \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R},\ 0 \leq y \leq f(x)\},$$

es $\mathcal{L}^{n+1} -$ *medible.*

Demostración. Definamos $B \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \infty\}$ y $C \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq f(x) < \infty\}$. En adición definamos

$$C_{jk} \equiv \left\{x \in C \mid \frac{j}{k} \leq f(x) < \frac{j+1}{k}\right\} \qquad (j = 0, ...; k = 1, ...)$$

Luego $C \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} C_{jk}$. Finalmente definimos

$$D_k \equiv \bigcup_{j=0}^{\infty} \left(C_{jk} \times \left[0, \frac{j}{k}\right]\right) \cup (B \times [0, \infty]),$$

$$E_k \equiv \bigcup_{j=0}^{\infty} \left(C_{jk} \times \left[0, \frac{j+1}{k} \right] \right) \cup (B \times [0, \infty])$$

luego D_k y E_k son $\mathcal{L}^{n+1} - medibles$ y $D_k \subset A \subset E_k$. Escribamos $D \equiv \cup_{k=1}^{\infty} D_k$ y $E \equiv \cap_{k=1}^{\infty} E_k$. Luego también $D \subset A \subset E$, con D y E ambos $\mathcal{L}^{n+1} - medibles$. Ahora

$$\mathcal{L}^{n+1}((E - D) \cap B(0,R)) \leq \mathcal{L}^{n+1}((E_k - D_k) \cap B(0,R)) \leq \frac{1}{k} \mathcal{L}^n(B(0,R))$$

Y el último término se hace cero siempre que $k \to \infty$. Así $\mathcal{L}^{n+1}((E-D) \cap B(0,R)) = 0$, y se sigue que $\mathcal{L}^{n+1}(E - D) = 0$. Por lo tanto $\mathcal{L}^{n+1}(A - D) = 0$, y en consecuencia A es $\mathcal{L}^{n+1} - medible$.

$\square$

Notación 3.2. *Tomemos* $a, b \in \mathbb{R}^n$ *con* $|a| = 1$. *Definimos*

$L_b^a \equiv \{b + ta \mid t \in \mathbb{R}\}$ *la recta que pasa por* b *en dirección de* a,

$P_a \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot a = 0\}$, *el plano que pasa por el origen perpendicular a* a.

Definición 3.3. Tomemos $a \in \mathbb{R}^n$ con $|a| = 1$, y consideremos $A \subset \mathbb{R}^n$. Definimos la *Simetrización de Steiner* de A con respecto al plano P_a como el conjunto

$$S_a(A) \equiv \bigcup_{b \in P_a,\ A \cap L_b^a \neq \emptyset} \left\{ b + ta \mid |t| \leq \frac{1}{2} \mathcal{H}^1(A \cap L_b^a) \right\}.$$

Lema 3.4. Propiedades de la simetrización de Steiner ([1]).

(i) diam $S_a(A) \leq$ *diam* (A).

(ii) Si A *es* $\mathcal{L}^n - medible$, *luego también lo es* $S_a(A)$; *y* $\mathcal{L}^n(S_a(A)) = \mathcal{L}^n(A)$.

Demostración.

1. Tenemos que (i) es trivial para $diam\ A = \infty$. Por lo tanto consideremos $diam\ A < \infty$. También podemos considerar A cerrado. Fijemos $\epsilon > 0$ y tomemos $x, y \in S_a(A)$ tales que

$$diam\ S_a(A) \leq |x - y| + \epsilon.$$

Escribamos $b \equiv x - (x \cdot a)a$ y $c \equiv y - (y \cdot a)a$; luego $b, c \in P_a$. Definamos

$$\begin{aligned} r &\equiv \text{ínf}\{t \mid b + ta \in A\}, \\ s &\equiv \sup\{t \mid b + ta \in A\}, \\ u &\equiv \text{ínf}\{t \mid c + ta \in A\}, \\ v &\equiv \sup\{t \mid c + ta \in A\} \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad consideraremos $v - r > s - u$. Luego

$$\begin{aligned} v - r &\geq \frac{1}{2}(v - r) + \frac{1}{2}(s - u) \\ &= \frac{1}{2}(s - r) + \frac{1}{2}(v - u) \\ &\geq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_b^a) + \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_c^a). \end{aligned}$$

Ahora, $|x \cdot a| \leq 1/2\ \mathcal{H}^1(A \cap L_b^a)$, $|y \cdot a| \leq 1/2\ \mathcal{H}^1(A \cap L_c^a)$, y en consecuencia

$$v - r \geq |x \cdot a| + |y \cdot a| \geq |x \cdot a| - |y \cdot a|.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} (diam\ S_a(A) - \epsilon)^2 &\leq |x - y|^2 \\ &= |b + (x \cdot a)a - c - (y \cdot a)a|^2 \\ &= |(b - c) + ((x \cdot a)a - (y \cdot a)a)|^2 \\ &= |b - c|^2 + |x \cdot a - y \cdot a|^2 \\ &\leq |b - c|^2 + (v - r)^2 \\ &= |(b + ra) - (c + va)|^2 \\ &\leq (diam\ A)^2 \end{aligned}$$

Esto último ya que A es cerrado y por ende $b + ra,\ c + va \in A$. Luego $diam\ S_a(A) - \epsilon \leq diam\ A$. Así podemos concluir (i).

2. Como $\mathcal{L}^n$ es invariante por rotación podemos considerar $a = e_n = (0, ..., 0, 1)$. Luego $P_a = P_n = \mathbb{R}^{n-1}$. Como $\mathcal{L}^1 = \mathcal{H}^1$ sobre $\mathbb{R}^1$, el inciso (iii) del Teorema de Fubini (1.28) tenemos que la función $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^1$ definida por $f(b) = \mathcal{H}^1(A \cap L_b^a)$ es $\mathcal{L}^{n-1} - integrable$ y $\mathcal{L}^n(A) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(b)db$. Luego podemos representar $S_a(A)$ de la siguiente manera

$$S_a(A) \equiv \left\{(b, y) \mid \frac{-f(b)}{2} \leq y \leq \frac{f(b)}{2}\right\} - \{(b, 0) \mid L_b^a \cap A = \emptyset\}$$

que es $\mathcal{L}^n - medible$ por el lema 3.1, y

$$\mathcal{L}^n(S_a(A)) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(b)\ db = \mathcal{L}^n(A).$$

$\square$

Teorema 3.5. Desigualdad Isodiametrica ([1,3]).

Para todos los conjuntos $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \alpha(n) \left(\frac{diam\ A}{2}\right)^n$$

Demostración. Si $diam\ A = \infty$ esto es trivial; luego consideremos $diam\ A < \infty$. Sea $\{e_1, ..., e_n\}$ la base estándar para $\mathbb{R}^n$. Definamos $A_1 \equiv S_{e_1}(A),\ A_2 \equiv S_{e_2}(A_1), ..., A_n \equiv S_{e_n}(A_{n-1})$. Denotemos $A^* = A_n$.

1. Primeros probaremos que A^* es simétrico con respecto al origen.

   Por definición A_1 es simétrico respecto a P_{e_1}. Tomemos $1 \leq k < n$ y supongamos que A_k es simétrico respecto a $P_{e_1}, ..., P_{e_k}$. Por definición $A_{k+1} \equiv S_{e_{k+1}}(A_k)$ es simétrico respecto a $P_{e_{k+1}}$. Tomemos $1 \leq j \leq k$ y consideremos $S_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la reflexión respecto a P_{e_j}. Tomemos $b \in P_{e_{k+1}}$. Como $S_j(A_k) = A_k$,

   $$\mathcal{H}^1(A_k \cap L_b^{e_{k+1}}) = \mathcal{H}^1(A_k \cap L_{S_j(b)}^{e_{k+1}});$$

   En consecuencia

   $$\{t \mid b + te_{k+1} \in A_{k+1}\} = \{t \mid S_j(b) + te_{k+1} \in A_{k+1}\}.$$

   Luego $S_j(A_{k+1}) = A_{k+1}$; Esto es, A_{k+1} es simétrico respecto a P_{e_j}. Luego $A^* = A_n$ es simétrico respecto a $P_{e_1}, ..., P_{e_n}$ y por tanto es simétrico respecto a el origen.

2. Ahora probaremos que $\mathcal{L}^n(A^*) \leq \alpha(n)\left(\dfrac{diam\ A^*}{2}\right)^n$.

   Tomemos $x \in A^*$. Luego $-x \in A^*$ por lo que mostramos en 1., luego $diam\ A^* > 2|x|$. Por tanto $A^* \subset B(0, diam\ A^*/2)$ y en consecuencia

$$\mathcal{L}^n(A^*) \leq \mathcal{L}^n\left(B\left(0, \frac{diam\ A^*}{2}\right)\right) = \alpha(n)\left(\frac{diam\ A^*}{2}\right)^n.$$

3. Finalmente veamos que $\mathcal{L}^n(A) \leq \alpha(n)\left(\dfrac{diam\ A}{2}\right)^n$.

   Sabemos que $\overline{A}$ es $\mathcal{L}^n - medible$, y por el lema 3.4 esto implica que

$$\mathcal{L}^n((\overline{A})^*) = \mathcal{L}^n(\overline{A}) \quad , \quad diam\ (\overline{A})^* \leq diam\ \overline{A}.$$

   Luego

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(\overline{A}) &= \mathcal{L}^n((\overline{A})^*) \\
&\leq \alpha(n)\left(\frac{diam\ (\overline{A})^*}{2}\right)^n \qquad \textit{por lo dicho en } 2. \\
&\leq \alpha(n)\left(\frac{diam\ \overline{A}}{2}\right)^n \\
&= \alpha(n)\left(\frac{diam\ A}{2}\right)^n.
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.6. ([1,3]).

$\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ *sobre* $\mathbb{R}^n$.

Demostración.

1. Primero probaremos que $\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{H}^n(A)$ para todo $A \subset \mathbb{R}^n$.

   Fijemos $\delta > 0$. Tomemos conjuntos $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} C_j$ y $diam\ C_j \leq \delta$. Luego por la Desigualdad Isodiamétrica

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(C_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(n) \left(\frac{diam\ C_j}{2} \right)^n .$$

Tomando en ínfimo llegamos a que $\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{H}^n_\delta(A)$, y por tanto $\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{H}^n(A)$.

2. Ahora, de la definición de $\mathcal{L}^n$ como $\mathcal{L}^1 \times ... \times \mathcal{L}^1$ vemos que para cada $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$,

$$\mathcal{L}^n(A) = \text{ínf} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i) \mid Q_i\ cubos,\ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i,\ diam\ Q_i \leq \delta \right\}.$$

De aquí en adelante solo consideraremos cubos paralelos a los ejes coordenados en $\mathbb{R}^n$.

3. Ahora probaremos que $\mathcal{H}^n$ es absolutamente continua con respecto a $\mathcal{L}^n$.

Definamos $C_n \equiv \alpha(n)(\sqrt{n}/2)^n$. Luego para cada cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$,

$$\alpha(n) \left(\frac{diam\ Q}{2} \right)^n = C_n \mathcal{L}^n(Q).$$

Luego

$$\mathcal{H}^n_\delta(A) \leq \text{ínf} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(n) \left(\frac{diam\ Q_i}{2} \right)^n \mid Q_i\ cubos,\ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i,\ diam\ Q_i \leq \delta \right\}$$
$$= C_n \mathcal{L}^n(A).$$

Luego haciendo $\delta \to 0$ llegamos a que

$$\mathcal{H}_n(A) \leq C_n \mathcal{L}^n(A).$$

4. Solo nos falta probar que $\mathcal{H}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(A)$ para cada $A \in \mathbb{R}^n$.
Dados $\delta > 0$, $\epsilon > 0$. Podemos seleccionar cubos $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$ tales que $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} Q_i$, $diam\ Q_i < \delta$, y

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i) \leq \mathcal{L}^n(A) + \epsilon$$

Por el corolario 1.33, tenemos que para cada i existen bolas cerradas disyuntas $\{B^i_k\}_{k=1}^{\infty}$ contenidas en Q^o_i (interior de Q_i) tales que

$$diam\ B_k^i \leq \delta,\ \mathcal{L}^n\left(Q_i - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\right) = \mathcal{L}^n\left(Q_i^o - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\right) = 0.$$

Y por lo probado en 3, $\mathcal{H}^n(Q_i - \cup_{k=1}^{\infty} B_k^i) = 0$. Por tanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\delta^n(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}_\delta^n(Q_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}_\delta^n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\right) &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{H}_\delta^n(B_k^i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha(n)\left(\frac{diam\ B_k^i}{2}\right)^n = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{L}^n(B_k^i) = \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{L}^n(Q_i) \leq \mathcal{L}^n(A) + \epsilon
\end{aligned}$$

y haciendo $\delta \to 0$ y $\epsilon \to 0$, llegamos a lo que se quería.

$\square$

Capítulo 4

Medida de Hausdorff y funciones Lipschitz

En esta sección veremos algunas propiedades de funciones Lipschitz relacionadas con la medida de Hausdorff. Haremos uso de estas propiedades más adelante.

4.1. Conceptos

Definición 4.1.

(i) Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dice *Lipschitz* si existe una constante C tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(ii) La constante más pequeña C tal que (i) se cumple para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ es denotada

$$Lip(f) \equiv \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \mid x, y \in \mathbb{R}^n,\ x \neq y\right\}.$$

Definición 4.2. Para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, escribimos

$$G(f; A) \equiv \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m};$$

$G(f; A)$ es el *gráfico* de f sobre A.

4.2. Resultados

Teorema 4.3. ([1]).

Consideremos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *Lipschitz,* $A \subset \mathbb{R}^n$, *y* $0 \leq s < \infty$. *Luego*

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq (Lip(f))^s \mathcal{H}^s(A).$$

Demostración. Tomemos $\delta > 0$ y seleccionemos una sucesión de conjuntos $\{C_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ tales que $diam\ C_i \leq \delta$, $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} C_i$. Luego $f(A) \subset \cup_{i=1}^{\infty} f(C_i)$, y $diam\ f(C_i) \leq Lip(f) diam\ C_i \leq Lip(f)\delta$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s_{Lip(f)\delta}(f(A)) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{diam\ f(C_i)}{2} \right)^s \\ &\leq (Lip(f))^s \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{diam\ C_i}{2} \right)^s. \end{aligned}$$

Tomando el ínfimo en el último término,

$$\mathcal{H}^s_{Lip(f)\delta}(f(A)) \leq (Lip(f))^s \mathcal{H}^s_{\delta}(A).$$

Haciendo $\delta \to 0$ finalizamos la demostración.

□

Corolario 4.4. *Supongamos* $n > k$. *Sea* $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *la proyección usual,* $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < \infty$. *Luego*

$$\mathcal{H}^s(P(A)) \leq \mathcal{H}^s(A).$$

Demostración. Basta con aplicar el teorema para $Lip(P) = 1$. □

Teorema 4.5. ([1]).

Consideremos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{L}^n(A) > 0$. *Luego*

(i) $\mathcal{H}_{dim}(G(f; A)) \geq n$. *(Definición 2.3)*

(ii) Si f *es Lipschitz,* $\mathcal{H}_{dim}(G(f; A)) = n$.

Demostración.

(i) Consideremos $P : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ la proyección usual. Luego, por el corolario 4.4, tenemos que $\mathcal{H}^n(G(f;A)) \geq \mathcal{H}^n(A) = \mathcal{L}^n(A) > 0$. Por tanto $\mathcal{H}_{dim}(G(f;A)) \geq n$.

(ii) Denotemos por Q un cubo cualquiera en $\mathbb{R}^n$ con longitud de lado 1. Subdividamos Q en k^n subcubos con longitud de lado $1/k$. Llamemos a estos cubos $Q_1, ..., Q_{k^n}$. Nótese que $diam\ Q_i = \sqrt{n}/k$. Definamos

$$a_j^i \equiv \min_{x \in Q_j} f^i(x) \quad y \quad b_j^i \equiv \max_{x \in Q_j} f^i(x), \quad (i = 1, ..., m\ ;\ j = 1, ..., k^n)$$

Como f es Lipschitz,

$$|b_j^i - a_j^i| \leq Lip(f) diam\ Q_j = Lip(f) \frac{\sqrt{n}}{k}.$$

Ahora, definamos $C_j \equiv Q_j \times \Pi_{i=1}^m (a_j^i, b_j^i)$. Luego,

$$\{(x, f(x)) \mid x \in Q_j \cap A\} \subset C_j$$

Y $diam\ C_j \leq C/k$, donde $C \equiv \sqrt{n(1 + m\ lip(f)^2)}$. Ahora, como $G(f; A \cap Q) \subset \cup_{j=1}^{k^n} C_j$, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^n_{C/k}(G(f; A \cap Q)) &\leq \sum_{j=1}^{k^n} \alpha(n) \left(\frac{diam\ C_j}{2} \right)^n \\ &\leq k^n \alpha(n) \left(\frac{C}{2k} \right)^n = \alpha(n) \left(\frac{C}{2} \right)^n.\end{aligned}$$

Luego haciendo $k \to \infty$, encontramos que $\mathcal{H}^n(G(f; A \cap Q)) < \infty$, por tanto $\mathcal{H}_{dim}(G(f; A \cap Q)) \leq n$ (ver lema 2.7). Esto es válido para cada cubo Q en $\mathbb{R}^n$ de lados de longitud 1, y en consecuencia $\mathcal{H}_{dim}(G(f;A)) \leq n$. Y por lo demostrado en el inciso anterior llegamos a lo que queríamos.

$\square$

Capítulo 5

Fórmulas de Área y Coárea

5.1. Resultados

En este capítulo estudiaremos las fórmulas de Área y Coárea para funciones Lipschitz

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Si $m \geq n$ la *Fórmula de Área* afirma que la medida $n-$dimensional de $f(A)$, contando multiplicidad, puede ser calculada integrando el Jacobiano apropiado de f sobre A.
Si $m \leq n$, la *Fórmula de Coárea* establece que la integral de la medida $(n-m)-$dimensional de los conjuntos de nivel de f es calculada utilizando el Jacobiano.

Primero abordaremos la Fórmula de Área, para esto primero demostraremos una serie de lemas que nos ayudarán en la demostración de la fórmula como tal, por lo que a lo largo de esta primera parte consideraremos

$$n \leq m$$

Lema 5.1. ([1]).

Consideremos $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *lineal.* $n \leq m$, *luego*

$$\mathcal{H}^n(L(A)) = [L]\mathcal{L}^n(A).$$

Para todo $A \subset \mathbb{R}^n$.

Demostración.

1. Escribamos $L = O \circ S$ como en el teorema 1.47; $[L] = |det\ S|$.

2. Si $[L]=0$, luego $dim(S(\mathbb{R}^n)) \leq n-1$ y se sigue que $dim(L(\mathbb{R}^n)) \leq n-1$. En consecuencia tenemos que $\mathcal{H}^n(L(\mathbb{R}^n))=0$.

3. Si $[L]>0$, entonces

$$\frac{\mathcal{H}^n(L(B(x,r)))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = \frac{\mathcal{L}^n(O^* \circ L(B(x,r)))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = \frac{\mathcal{L}^n(O^* \circ O \circ S(B(x,r)))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))}$$

$$= \frac{\mathcal{L}^n(S(B(x,r)))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = \frac{\mathcal{L}^n(S(B(0,1)))}{\alpha(n)}$$

$$= |det\ S| = [L].$$

4. Definamos $v(A) \equiv \mathcal{H}^n(L(A))$ para todo $A \subset \mathbb{R}^n$. Luego v es una medida de Radon, v es absolutamente continua respecto a $\mathcal{L}^n$, denotado $v \ll \mathcal{L}^n$ (definición 1.38) y

$$D_{\mathcal{L}^n} v(x) = \lim_{r \to 0} \frac{v(B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = [L].$$

Por tanto, para todo conjunto de Borel $B \subset \mathbb{R}^n$, el teorema 1.39 implica que

$$v(B) = \int_B D_{\mathcal{L}^n} v\ dy.$$

Es decir

$$\mathcal{H}^n(L(B)) = [L]\mathcal{L}^n(B).$$

Como v y $\mathcal{L}^n$ son medidas de Radon, la misma fórmula se mantiene para todos los conjuntos $A \subset \mathbb{R}^n$.

$\square$

De aquí en adelante consideraremos f Lipschitz.

Lema 5.2. ([1]).

Consideremos $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n-$*medible. Luego*

(i) $f(A)$ *es* $\mathcal{H}^n-$*medible,*

(ii) la aplicación $y \to \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})$ *es* $\mathcal{H}^n-$*medible sobre* $\mathbb{R}^m$,

(iii) $\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n \ \leq \ (Lip(f))^n \mathcal{L}^n(A).$

La función $y \to \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})$ es llamada *función multiplicidad.*

Demostración.

1. Consideraremos sin pérdida de generalidad que A es acotado.

2. Por el teorema 1.9 existen conjuntos compactos $K_i \subset A$ tales que

$$\mathcal{L}^n(K_i) > \mathcal{L}^n(A) - \frac{1}{i} \qquad (1 = 1, 2, ...). \tag{$*$}$$

   Ahora como K_i es $\mathcal{L}^n - medible$, en particular tenemos que,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(A - K_i) &= \mathcal{L}^n(A) - \mathcal{L}^n(A \cap K_i) \\ &= \mathcal{L}^n(A) - \mathcal{L}^n(K_i) \end{aligned}$$

   Luego por $(*)$ tenemos que $\mathcal{L}^n(A - K_i) < 1/i$. Ahora, como f es continua, $f(K_i)$ es compacto y por ende $\mathcal{H}^n - medible$. Luego, $f(\cup_{i=1}^{\infty} K_i) = \cup_{i=1}^{\infty} f(K_i)$ es $\mathcal{H}^n - medible$. Más aún,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n\left(f(A) - f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right)\right) &\leq \mathcal{H}^n\left(f\left(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right)\right) \\ &\leq (Lip(f))^n \mathcal{L}^n\left(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right) = 0. \end{aligned}$$

   Esto último por el teorema 4.3, por tanto $f(A)$ es $\mathcal{H}^n - medible$. Esto prueba (i).

3. Definamos

$$\mathcal{B}_k \equiv \{Q \mid Q = (a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n],\ a_i = \frac{c_i}{k}\ ,\ b_i = \frac{c_i + 1}{k}\ ,\ c_i \ entero\ ,\ i = 1, 2, ..., n\},$$

   Nótese que

$$\mathbb{R}^n \subset \bigcup_{Q \in \mathcal{B}_k} Q.$$

Ahora definamos

$$g_k(A) \equiv \sum_{Q \in \mathcal{B}_k} \chi_{f(A \cap Q)} \ es\ \mathcal{H}^n - medible\ por\ (i),$$

y

$$g_k(y) = \ numero\ de\ cubos\ Q \in \mathcal{B}_k\ tales\ que\ f^{-1}\{y\} \cap (A \cap Q) \neq \emptyset.$$

Luego

$$g_k(y) \uparrow \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) \qquad siempre\ que \qquad k \to \infty$$

para todo $y \in \mathbb{R}^m$, por tanto $y \to \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})$ es $\mathcal{H}^n - medible.$

4. Por el Teorema de la Convergencia Monótona,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\ d\mathcal{H}^n &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_k\ d\mathcal{H}^n \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{Q \in \mathcal{B}_k} \mathcal{H}^n(f(A \cap Q)) \\
&\leq \limsup_{k\to\infty} \sum_{Q \in \mathcal{B}_k} (Lip(f))^n \mathcal{L}^n(A \cap Q) \\
&= (Lip(f))^n \mathcal{L}^n(A).
\end{aligned}$$

□

Lema 5.3. ([1]).

Tomemos $t > 1$ *y definamos* $B \equiv \{x \mid Df(x)\ existe,\ Jf(x) > 0\}$. *Luego existe una colección enumerable* $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ *de conjuntos de Borel en* $\mathbb{R}^n$ *tales que*

(i) $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$;

(ii) $f|_{E_k}$ *es uno-a-uno,* $(k = 1, 2, ...)$; *y*

(iii) para cada $k = 1, 2, ...,$ *existe un automorfismo simétrico* $T_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$Lip((f|_{E_k}) \circ T_k^{-1}) \leq t \qquad Lip(T_k \circ (f|_{E_k})^{-1}) \leq t,$$

$$t^{-n}|det\ T_k| \leq Jf|_{E_k} \leq t^n|det\ T_k|.$$

Demostración.

1. Tomemos $\epsilon > 0$ de modo que

$$\frac{1}{t} + \epsilon < 1 < t - \epsilon.$$

   Consideremos C un subconjunto enumerable denso de B (es decir, $\overline{C} = B$) y consideremos $\mathbf{S}$ un subconjunto enumerable denso de automorfismos simétricos de $\mathbb{R}^n$.

2. Luego, para cada $c \in C$, $T \in S$, y $i = 1, 2, ...,$ definimos $E(c, T, i)$ como el conjunto de todos los $b \in B \cap B(c, 1/i)$ que satisfacen

$$\left(\frac{1}{t} + \epsilon\right)|Tv| \leq |Df(b)v| \leq (t - \epsilon)|Tv| \qquad (*)$$

   Para todo $v \in \mathbb{R}^n$ y

$$|f(a) - f(b) - Df(b) \cdot (a - b)| \leq \epsilon|T(a - b)| \qquad (**)$$

   Para todo $a \in B(b, 2/i)$. Nótese que $E(c, T, i)$ es un conjunto de Borel ya que Df es Borel medible. De $(*)$ y $(**)$ podemos llegar a que

$$\frac{1}{t}|T(a - b)| \leq |f(a) - f(b)| \leq t|T(a - b)| \qquad (***)$$

   Para $b \in E(c, T, i)$, $a \in B(b, 2/i)$.

3. Ahora probaremos que si $b \in E(T, c, i)$, entonces

$$\left(\frac{1}{t} + \epsilon\right)^n |det\ T| \leq Jf(b) \leq (t - \epsilon)^n|det\ T|.$$

   Procedamos: escribimos $Df(b) = L = O \circ S$, anteriormente definido;

$$Jf(b) = [Df(b)] = |det\ S|.$$

Ahora por $(*)$,

$$\left(\frac{1}{t} + \epsilon\right) |Tv| \leq |(O \circ S)v| = |Sv| \leq (t - \epsilon)|Tv|$$

Para todo $v \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\left(\frac{1}{t} + \epsilon\right) |v| \leq |(S \circ T^{-1})v| \leq (t - \epsilon)|v| \qquad (v \in \mathbb{R}^n).$$

Y así

$$(S \circ T^{-1})(B(0,1)) \subset B(0, t - \epsilon);$$

Y aplicando el lema 5.1,

$$|det\ (S \circ T^{-1})|\alpha(n) \leq \mathcal{L}^n(B(0, t - \epsilon)) = \alpha(n)(t - \epsilon)^n,$$

Y por tanto

$$|det\ S| \leq (t - \epsilon)^n |det\ T|.$$

La otra desigualdad se demuestra de manera análoga.

4. Reescribamos la colección contable $\{E(c, T, i) \mid c \in C,\ T \in \mathbf{S},\ i = 1, 2, ...\}$ como $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$. Tomemos cualquier $b \in B$, escribamos $Df(b) = O \circ S$ como venimos haciendo, y escojamos $T \in \mathbf{S}$ tal que

$$Lip(T \circ S^{-1}) \leq \left(\frac{1}{t} + \epsilon\right)^{-1}, \qquad Lip(S \circ T^{-1}) \leq t - \epsilon.$$

Ahora tomemos $i \in \{1, 2, ...\}$ y $c \in C$ de modo que $|b - c| < 1/i$,

$$|f(a) - f(b) - Df(b) \cdot (a - b)| \leq \frac{\epsilon}{Lip(T^{-1})} |a - b| \leq \epsilon |T(a - b)|$$

para todo $a \in B(b, 2/i)$. Luego $b \in E(c, T, i)$. Luego como esto vale para todo $b \in B$, (i) queda probado.

5. Ahora escojamos cualquier conjunto E_k, el cual es de la forma $E(c,T,i)$ para algún $c \in C$, $T \in \mathbf{S}$, $i = 1, 2, ...$ Escribamos $T_k = T$. Aplicando $(***)$,

$$\frac{1}{t}|T_k(a-b)| \leq |f(a) - f(b)| \leq t|T_k(a-b)|$$

Para cualesquiera $b \in E_k$, $a \in B(b, 2/i)$. Como $E_k \subset B(c, 1/i) \subset B(b, 2/i)$, luego tenemos que

$$\frac{1}{t}|T_k(a-b)| \leq |f(a) - f(b)| \leq t|T_k(a-b)| \qquad (****)$$

Para cualesquiera $a, b \in E_k$; por tanto $f|_{E_k}$ es uno-a-uno.

6. Finalmente, nótese que $(****)$ implica

$$Lip((f|_{E_k}) \circ T_k^{-1}) \leq t, \qquad Lip(T_k \circ (f|_{E_k})^{-1}) \leq t,$$

mientras que por lo probado en 3. Tenemos que

$$t^{-n}|det\ T_k| \leq Jf|_{E_k} \leq t^n|det\ T_k|.$$

Así, (iii) queda probado.

$\square$

Ahora sí, procederemos a demostrar la fórmula de Área.

Teorema 5.4. Fórmula de Área ([1]).

Consideremos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz, $n \leq m$. Luego para cada conjunto $\mathcal{L}^n -$ medible $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\int_A Jf\ dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\ d\mathcal{H}^n(y).$$

Demostración.

1. Aplicando el Teorema de Rademacher (1.43), podemos asumir que $Df(x)$ y $Jf(x)$ existen para todo $x \in A$. También podemos suponer $\mathcal{L}^n(A) < \infty$.

2. Caso 1. $A \subset \{x \mid Jf(x) > 0\}$. Fijemos $t > 1$ y tomemos conjuntos de $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ como en el lema 5.3. Podemos considerar que los conjuntos $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ son disyuntos. Definamos $\mathcal{B}_k$ como en la prueba del lema 5.2. Definamos

$$F_j^i = E_j \cap Q_i \cap A \qquad (Q_i \in \mathcal{B}_k,\ j = 1, 2, ...).$$

Luego los conjuntos F_j^i son disyuntos y $A = \cup_{i,j=1}^{\infty} F_j^i$.

3. Ahora probaremos que

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathcal{H}^n(f(F_j^i)) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\ d\mathcal{H}^n$$

Definamos

$$g_k \equiv \sum_{i,j=1}^{\infty} \chi_{f(F_j^i)}$$

Luego $g_k(y)$ es el número de conjuntos $\{F_j^i\}$ tales que $F_j^i \cap f^{-1}\{y\} \neq \emptyset$. Luego $g_k\{y\} \uparrow \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})$ siempre que $k \to \infty$. Y aplicando el Teorema de la Convergencia Monótona llegamos a que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_k\ d\mathcal{H}^n \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathcal{H}^n(f(F_j^i))\end{aligned}$$

que es lo que se quería.

4. Nótese que

$$\mathcal{H}^n(f(F_j^i)) = \mathcal{H}^n(f|_{E_j} \circ T_j^{-1} \circ T_j(F_i^j)) \leq t^n \mathcal{L}^n(T_j(F_j^i))$$

y

$$\mathcal{L}^n(T_j(F_j^i)) = \mathcal{H}^n(T_j \circ (f|_{E_j})_j^{-1} \circ f(F_j^i)) \leq t^n \mathcal{H}^n(f(F_j^i))$$

Por el lema 5.3. Luego

$$t^{-2n}\mathcal{H}^n(f(F_j^i)) \leq t^{-n}\mathcal{L}^n(T_j(F_j^i))$$

$$= t^{-n}|det\ T_j|\mathcal{L}^n(F_j^i)$$

$$\leq \int_{F_j^i} Jf\ dx$$

$$\leq t^n|det\ T_j|\mathcal{L}^n(F_j^i)$$

$$= t^n\mathcal{L}^n(T_j(F_j^i))$$

$$\leq t^{2n}\mathcal{H}^n(f(F_j^i)),$$

Donde aplicamos repetidamente los lemas 5.1 y 5.3. Ahora sumando sobre i y j,

$$t^{-2n}\sum_{i,j=1}^{\infty}\mathcal{H}^n(f(F_j^i)) \leq \int_A Jf\ dx \leq t^{2n}\sum_{i,j=1}^{\infty}\mathcal{H}^n(f(F_j^i)).$$

Ahora haciendo $k \to \infty$, y aplicando lo demostrado en 3.,

$$t^{-2n}\int_{\mathbb{R}^m}\mathcal{H}^0(A\cap f^{-1}\{y\})\ d\mathcal{H}^n \leq \int_A Jf\ dx$$

$$\leq t^{2n}\int_{\mathbb{R}^m}\mathcal{H}^0(A\cap f^{-1}\{y\})\ d\mathcal{H}^n.$$

Finalmente, hacemos $t \to 1^+$, y llegamos a lo que queríamos.

5. Caso 2. $A \subset \{x \mid Jf(x) = 0\}$. Dado $\epsilon > 0$. escribimos $f = p\circ g$, donde

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \qquad g(x) \equiv (f(x), \epsilon x)\ para\ x \in \mathbb{R}^n,$$

y

$$p : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad p(y,z) = y\ \ para\ y \in \mathbb{R}^m,\ z \in \mathbb{R}^n.$$

6. Ahora veamos que existe una constante C tal que

$$0 < Jg(x) < C\epsilon$$

Para $x \in A$.

Entonces, escribamos $g = (f^1, ..., f^m, \epsilon x_1, ..., \epsilon x_n)$; luego

$$Dg(x) = \begin{bmatrix} Df(x) \\ \epsilon I \end{bmatrix}_{(n+m)\times n}$$

Como $Jf(x)^2$ equivale a la suma de los cuadrados de los $(n \times n) - \textit{subdeterminantes}$ de $Df(x)$ de acuerdo con la fórmula de Binet-Cauchy (ver 1.49), vemos que

$$Jg(x)^2 = \textit{suma de los cuadrados de los } (n{\times}n){-}\textit{subdeterminantes de } Dg(x) \geq \epsilon^{2n} > 0.$$

Más aún, como $|Df| \leq Lip(f) < \infty$, podemos emplear la fórmula de Binet-Cauchy para calcular

$$Jg(x)^2 = Jf(x)^2 + \{\textit{suma de los cuadrados de los terminos que involucra al menos un } \epsilon\} \leq C\epsilon^2$$

Para cada $x \in A$.

7. Como $p : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una proyección, podemos calcular utilizando el caso 1 como lo hicimos anteriormente,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n(f(A)) &\leq \mathcal{H}^n(g(A)) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{m+n}} \mathcal{H}^0(A \cap g^{-1}\{y,z\})\ d\mathcal{H}^n(y,z) \\ &= \int_A Jg(x)\ dx \\ &\leq \epsilon C \mathcal{L}^n(A). \end{aligned}$$

Haciendo $\epsilon \to 0$ concluimos que $\mathcal{H}^n(f(A)) = 0$, y por tanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\ d\mathcal{H}^n = 0,$$

Esto ya que el soporte de $\mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})$ está contenido en $f(A)$. Pero entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\ d\mathcal{H}^n = 0 = \int_{\mathbb{R}^n} Jf\ dx.$$

8. Para el caso general escribimos, $A = A_1 \cup A_2$ con $A_1 \subset \{x \mid Jf(x) > 0\}$, $A_2 \subset \{x \mid Jf(x) = 0\}$, y aplicamos los casos 1 y 2.

$\square$

Teorema 5.5. Fórmula de cambio de variable ([1]).

Consideremos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *Lipschitz,* $n \leq m$. *Luego para cada función* $\mathcal{L}^n-$*sumable* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)Jf(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x) \right]\ d\mathcal{H}^n(y).$$

Demostración.

1. Caso 1. $g \geq 0$. De acuerdo con el teorema 1.14 podemos escribir

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \chi_{A_i}$$

Para conjuntos $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ $\mathcal{L}^n-$medibles apropiados. Luego el Teorema de la Convergencia Monótona implica

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} gJf\ dx &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_i} Jf\ dx \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{A_i} Jf\ dx \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A_i \cap f^{-1}\{y\})\ d\mathcal{H}^n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} \chi_{A_i}(x)\ d\mathcal{H}^n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \chi_{A_i}(x)\ d\mathcal{H}^n(y)
\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \left[\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x) \right] \, d\mathcal{H}^n(y).$$

2. Caso 2. g es cualquier función $\mathcal{L}^n-$sumable. Escribimos $g = g^+ - g^-$ y aplicamos el Caso 1.

$\square$

Ahora, de manera análoga demostraremos una serie de lemas que posteriormente utilizaremos para demostrar la fórmula de Coárea. Ahora consideraremos

$$n \geq m$$

Lema 5.6. ([1]).

Consideremos $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *lineal,* $n \geq m$, *y* $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n-$ *medible. Luego*

(i) La aplicación $y \to \mathcal{H}^{n-m}(A \cap L^{-1}\{y\})$ *es* $\mathcal{L}^m-$ *medible, además*

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap L^{-1}\{y\})dy = [L]\mathcal{L}^n(A).$

Demostración.

1. Caso 1. $dim\ L(\mathbb{R}^n) < m$.
   Luego $A \cap L^{-1}\{y\} = \emptyset$ y en consecuencia $\mathcal{H}^{n-m}(A \cap L^{-1}\{y\}) = 0$ para $\mathcal{L}^m$ c.s. $y \in \mathbb{R}^m$. Además, si escribimos $L = S \circ O^*$ como en el teorema de Descomposición Polar (1.46), tenemos que $L(\mathbb{R}^n) = S(\mathbb{R}^m)$. Luego $dim\ S(\mathbb{R}^m) < m$ y por tanto $[L] = |det\ S| = 0$.

2. Caso 2. $L = P$ =proyección ortogonal de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^m$.
   Luego para cada $y \in \mathbb{R}^m$, $P^{-1}\{y\}$ es un subespacio afín $(n-m)-$dimensional de $\mathbb{R}^n$. Por el Teorema de Fubini (Ver 1.27),

$$y \to \mathcal{H}^{n-m}(A \cap P^{-1}\{y\}) \ es \ \mathcal{L}^m - medible$$

   y

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap P^{-1}\{y\}) \, dy = \mathcal{L}^n(A). \qquad (*)$$

3. Caso 3. $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ dim(L(\mathbb{R}^n)) = m$.
   Usando el Teorema de Descomposición Polar (1.46), podemos escribir

$$L = S \circ O^*$$

   donde

$$S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \ \text{ es simétrica,}$$

$$O : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \ \text{ es ortogonal,}$$

$$[L] = |det\ S| > 0.$$

4. Ahora probaremos que $O^* = P \circ Q$, donde P es la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^m$ y $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es ortogonal. Entonces,

   Consideremos Q cualquier función ortogonal de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$ tal que

$$Q^*(x_1, ..., x_m, 0, ..., 0) = O(x_1, ..., x_m)$$

   Para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Nótese que

$$P^*(x_1, ..., x_m) = (x_1, ..., x_m, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$$

   Para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Luego $O = Q^* \circ P^*$ y por tanto $O^* = P \circ O$.

5. $L^{-1}\{0\}$ es un subespacio $(n-m)-$dimensional de $\mathbb{R}^n$ y $L^{-1}\{y\}$ es una traslación de $L^{-1}\{0\}$ para cada $y \in \mathbb{R}^m$. Luego por el Teorema de Fubini (1.27),
   $y \to L^{-1}\{y\}$ es $\mathcal{L}^m-$medible, y podemos calcular

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(A) &= \mathcal{L}^n(Q(A)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(Q(A) \cap P^{-1}\{y\})\ dy \qquad \text{por } (*) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap Q^{-1} \circ P^{-1}\{y\})\ dy.\end{aligned}$$

   Ahora hagamos $z = Sy$. Luego

$$|det\ S|\mathcal{L}^n(A) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap Q^{-1} \circ P^{-1} \circ S^{-1}\{z\})\ dz$$

Pero $L = S \circ O^* = S \circ P \circ Q$, y por tanto

$$[L]\mathcal{L}^n(A) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap L^{-1}\{z\})\ dz.$$

$\square$

De aquí en adelante consideraremos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz.

Lema 5.7. ([1]).

Consideremos $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n -$ medible, $n \geq m$. Luego

(i) $f(A)$ *es* $\mathcal{L}^m -$ *medible,*

(ii) $A \cap f^{-1}(y)$ *es* $\mathcal{H}^{n-m} -$ *medible para* $\mathcal{L}^m$ *c.s.* y,

(iii) La aplicación $y \to \mathcal{H}^{n-m}(A \cap L^{-1}\{y\})$ *es* $\mathcal{L}^m -$ *medible,*

(iv) $\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})dy \leq (\alpha(n-m)\alpha(m))/\alpha(n)(Lip(f))^m\mathcal{L}^n(A).$

Demostración.

1. El enunciado (i) se prueba exactamente igual al enunciado correspondiente en el lema 5.2.

2. Para cada $j = 1, 2, ...,$ existe una colección de bolas cerradas $\{B_i^j\}_{i=1}^{\infty}$ tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^j, \qquad diam\ B_i^j \leq \frac{1}{j}\ ,$$

y

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_i^j) \leq \mathcal{L}^n(A) + \frac{1}{j}\ .$$

Definamos

$$g_i^j \equiv \alpha(n-m)\left(\frac{diam\ B_i^j}{2}\right)^{n-m} \chi_{f(B_i^j)}\ .$$

Por (i), g_i^j es $\mathcal{L}^m-$medible. Nótese también que para todo $y \in \mathbb{R}^m$,

$$\mathcal{H}_{1/j}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} g_i^j(y).$$

Luego, usando el Lema de Fatou y la Desigualdad Isodiamétrica (Sección 3.1), calculamos

$$\int_{\mathbb{R}^m}^{*} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\ dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m}^{*} \lim_{j\to\infty} \mathcal{H}_{1/j}^{n-m}(A \cap f^{-1})\ dy$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^m} \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} g_i^j\ dy$$

$$\leq \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int g_i^j\ dy$$

$$= \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(n-m) \left(\frac{diam\ B_i^j}{2}\right)^{n-m} \mathcal{L}^m(f(B_i^j))$$

$$\leq \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(n-m) \left(\frac{diam\ B_i^j}{2}\right)^{n-m} \alpha(m) \left(\frac{diam\ f(B_i^j)}{2}\right)^{m}$$

$$\leq \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(n-m) \left(\frac{diam\ B_i^j}{2}\right)^{n-m} \alpha(m) Lip(f)^m \left(\frac{diam\ B_i^j}{2}\right)^{m}$$

$$\leq \frac{\alpha(n-m)\alpha(m)}{\alpha(n)} (Lip(f))^m \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_i^j)$$

$$\leq \frac{\alpha(n-m)\alpha(m)}{\alpha(n)} (Lip(f))^m\ \mathcal{L}^n(A).$$

Por tanto

$$\int_{\mathbb{R}^m}^{*} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\ dy \leq \frac{\alpha(n-m)\alpha(m)}{\alpha(n)} (Lip(f))^m\ \mathcal{L}^n(A). \qquad (*)$$

Esto probará (iv) una vez hayamos establecido (iii).

3. Caso 1: A es compacto.
   Fijemos $t \geq 0$, y para cada entero positivo i, consideremos U_i el conjunto de todos los puntos $y \in \mathbb{R}^m$ para los cuales existe una colección finita de conjuntos abiertos $S_1, ..., S_l$ tales que

$$\begin{cases} A \cap f^{-1}\{y\} \subset \bigcup_{j=1}^{l} S_i, \\ diam\ S_j \leq \dfrac{1}{i} \qquad (j = 1, 2, ..., l), \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{l} \alpha(n-m) \left(\frac{diam\ S_j}{2} \right)^{n-m} \leq t + \frac{1}{i}\ . \end{cases}$$

4. Probaremos que U_i es abierto.

   Tomemos $y \in U_i$, luego $A \cap f^{-1}\{y\} \subset \cup_{j=1}^{l} S_j$. Luego como f es continua y A es compacto,

$$A \cap f^{-1}\{z\} \subset \bigcup_{j=1}^{l} S_j$$

   para todo z lo suficientemente cercano a y.

5. Ahora probaremos que

$$\{y \mid \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$$

   y por lo tanto es un conjunto de Borel.

   Procedamos, si $\mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t$, luego para cada $\delta > 0$,

$$\mathcal{H}_{\delta}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t.$$

   Dado i, tomemos $\delta \in B(0, 1/i)$. Luego existen conjuntos $\{S_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que

$$\begin{cases} A \cap f^{-1}\{y\} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S_i, \\ diam\ S_j \leq \delta < \dfrac{1}{i} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(n-m) \left(\frac{diam\ S_j}{2} \right)^{n-m} \leq t + \frac{1}{i}\ . \end{cases}$$

Podemos considerar a los S_j conjuntos abiertos. Como $A \cap f^{-1}\{y\}$ es compacto, una subcolección finita $\{S_1, ..., S_l\}$ cubre a $A \cap f^{-1}\{y\}$, y por tanto $y \in U_i$. Luego

$$\{y \mid \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t\} \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$$

por otro lado, si $y \in \cap_{i=1}^{\infty} U_i$, luego para cada i,

$$\mathcal{H}_{1/i}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t + \frac{1}{i}$$

luego

$$\mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t.$$

Por tanto

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \subset \{y \mid \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t\}.$$

6. Podemos concluir de 5. que para el conjunto compacto A la función

$$y \to \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})$$

es Borel medible.

7. Caso 2: A es abierto.
Existen conjuntos compactos $K_1 \subset K_2 \subset ... \subset A$ tales que

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i.$$

Luego, para cada $y \in \mathbb{R}^m$,

$$\mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) = \lim_{i \to \infty} \mathcal{H}^{n-m}(K_i \cap f^{-1}\{y\})$$

y por ende la función

$$y \to \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})$$

es Borel medible.

8. Caso 3. $\mathcal{L}^n(A) < \infty$.
Existen conjuntos abiertos $V_1 \supset V_2 \supset ... \supset A$ tales que

$$\lim_{i\to\infty} \mathcal{L}^n(V_i - A) = 0, \qquad \mathcal{L}^n(V_1) < \infty.$$

Ahora

$$\mathcal{H}^{n-m}(V_i \cap f^{-1}\{y\}) \leq \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) + \mathcal{H}^{n-m}((V_i - A) \cap f^{-1}\{y\})$$

y luego por $(*)$

$$\begin{aligned} &\limsup_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m}^{*} |\mathcal{H}^{n-m}(V_i \cap f^{-1}\{y\}) - \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})| \, dy \\ &\leq \limsup_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m}^{*} \mathcal{H}^{n-m}((V_i - A) \cap f^{-1}\{y\}) \, dy \\ &\leq \limsup_{i\to\infty} \frac{\alpha(n-m)\alpha(m)}{\alpha(n)} (Lip \ f)^m \mathcal{L}^n(V_i - A) = 0. \end{aligned}$$

Luego

$$\mathcal{H}^{n-m}(V_i \cap f^{-1}\{y\}) \to \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})$$

$\mathcal{L}^m$ $c.s.$, y de acuerdo con el Caso 2,

$$y \to \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})$$

es $\mathcal{L}^m$-medible. Además, vemos que $\mathcal{H}^{n-m}((V_i - A) \cap f^{-1}\{y\}) \to 0$ $\mathcal{L}^m$ $c.s.$ y por tanto $A \cap f^{-1}\{y\}$ es $\mathcal{H}^{n-m}$-medible para $\mathcal{L}^m$ $c.s.$ y.

9. Caso 4. $\mathcal{L}^n(A) = \infty$.
Escribimos A como la unión de una sucesión creciente de conjuntos acotados $\mathcal{L}^n$-medibles y aplicamos el Caso 3 para probar

$$A \cap f^{-1}\{y\} \text{ es } \mathcal{H}^{n-m}\text{-medible para } \mathcal{L}^m \text{ c.s. } y,$$

y

$$y \to \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})$$

Es $\mathcal{L}^m$-medible.

Esto prueba (ii) y (iii), y (iv) se sigue de $(*)$.

$\square$

Lema 5.8. ([1]).

Tomemos $t > 1$, *consideremos* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *Lipschitz, y definamos el conjunto*

$$B = \{x \mid Dh(x) \; existe, \; Jh(x) > 0\}.$$

Existe una colección enumerable $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ *de conjuntos de Borel en* $\mathbb{R}^n$ *tales que*

(i) $\mathcal{L}^n(B - \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k) = 0;$

(ii) $h|_{D_k}$ *es uno a uno para* $k = 1, 2, \ldots$; *y*

(iii) Para cada $k = 1, 2\ldots$, *existe un automorfismo simétrico* $S_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$Lip(S_k^{-1} \circ (h|_{D_k})) \leq t, \qquad Lip((h|_{D_k})^{-1} \circ S_k) \leq t$$

$$t^{-n}|det\; S_k| \leq Jh|_{D_k} \leq t^n|det\; S_k|.$$

Demostración.

1. Aplicamos el lema 5.3 con h en lugar de f para encontrar conjuntos de Borel $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ y un automorfismo simétrico $T_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

(a) $$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$

(b) $h|_{E_k}$ es uno-a-uno,

(c) $$\begin{cases} Lip((h|_{E_k}) \circ T_k^{-1}) \leq t, \; Lip(T_k \circ (h|_{E_k})^{-1}) \leq t \\ t^{-n}|det\; T_k| \leq Jh|_{E_k} \leq t^n|det\; T_k| \qquad (k = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

De acuerdo con (c), $(h|_{E_k})^{-1}$ es Lipschitz y por tanto, por el teorema 1.43, existe una función Lipschitz $h_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $h_k = (h|_{E_k})^{-1}$ sobre $h(E_k)$.

2. Ahora probaremos que $Jh_k > 0$ $\mathcal{L}^n$ $c.s.$ sobre $h(E_k)$. Procedamos,

   Como $h_k \circ h(x) = x$ para $x \in E_k$, el corolario 1.45 implica

$$Dh_k(h(x)) \circ Dh(x) = I \qquad \mathcal{L}^n \textit{ c.s. sobre } E_k,$$

   y por tanto

$$Jh_k(h(x))Jh(x) = 1 \qquad \mathcal{L}^n \textit{ c.s. sobre } E_k.$$

   Esto implica que $Jh_k(h(x)) > 0$ para $\mathcal{L}^n$ $c.s.$ $x \in E_k$, y aplicando el hecho de que h es Lipschitz, llegamos a lo que queríamos.

3. Ahora aplicando el lema 5.3 a h_k, existen conjuntos de Borel $\{F_j^k\}_{j=1}^{\infty}$ y automorfismos simétricos $\{R_j^k\}_{j=1}^{\infty}$ tales que

   (d) $$\mathcal{L}^n\left(h(E_k) - \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j^k\right) = 0;$$

   (e) $h_k|_{F_j^k}$ es uno-a-uno;

   (f) $$\begin{cases} Lip((h_k|_{F_j^k} \circ (R_j^k)^{-1})) \leq t, \ Lip(R_j^k \circ (h_k|_{F_j^k})^{-1}) \leq t \\ t^{-n}|det\ R_j^k| \leq Jh_k|_{F_j^k} \leq t^n|det\ R_j^k| \ (k = 1, 2, ...). \end{cases}$$

   Definamos los siguientes conjuntos

$$D_j^k \equiv E_k \cap h^{-1}(F_j^k), \ S_j^k \equiv (R_j^k)^{-1} \qquad (k = 1, 2, ...).$$

4. Ahora probaremos que $\mathcal{L}^n(B - \cup_{k,j=1}^{\infty} D_j^k) = 0$.

   En efecto, nótese que

$$\begin{aligned} h_k\left(h(E_k) - \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j^k\right) &= h^{-1}\left(h(E_k) - \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j^k\right) \\ &= E_k - \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j^k. \end{aligned}$$

   Luego como h_k es Lipschitz, por (d) llegamos a que

$$\mathcal{L}^n\left(E_k - \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j^k\right) = 0 \qquad (k = 1, 2, ...).$$

Y haciendo uso de (a) llegamos a lo que queríamos.

5. (b) implica que $h|_{D_j^k}$ es uno-a-uno.

6. Finalmente probaremos que para cada $k, j = 1, 2, ...,$ tenemos que

$$Lip((S_j^k)^{-1} \circ (h|_{D_j^k})) \leq t, \qquad Lip((h|_{D_j^k})^{-1} \circ S_j^k) \leq t$$

$$t^{-n}|det\ S_j^k| \leq Jh|_{D_j^k} \leq t^n|det\ S_j^k|.$$

Procedamos,

$$\begin{aligned} Lip((S_j^k)^{-1} \circ (h|_{D_j^k})) &= Lip(R_j^k \circ (h|_{D_j^k})) \\ &\leq Lip(R_j^k \circ (h_k|_{F_j^k})^{-1}) \leq t \end{aligned}$$

por (f); de manera análoga,

$$\begin{aligned} Lip((h|_{D_j^k})^{-1} \circ S_j^k) &= Lip((h|_{D_j^k})^{-1} \circ (R_j^k)^{-1}) \\ &\leq Lip((h_k|_{F_j^k}) \circ (R_j^k)^{-1}) \leq t. \end{aligned}$$

Más aún, podemos notar que,

$$Jh_k(h(x))Jh(x) = 1 \qquad \mathcal{L}^n \ c.s.\ sobre\ D_j^k.$$

Luego (f) implica

$$t^{-n}|det\ S_j^k| = t^{-n}|det\ R_j^k|^{-1} \leq Jh|_{D_j^k} \leq t^n|det\ R_j^k|^{-1} = t^n|det\ S_j^k|.$$

□

Ahora sí, procederemos a demostrar la fórmula de Coárea.

Teorema 5.9. Fórmula de Coarea ([1]).

Consideremos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *Lipschitz,* $n \geq m$. *Luego para cada conjunto* $\mathcal{L}^n$*-medible* $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\int_A Jf \; dx = \int_{R^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \; dy.$$

Demostración.

1. En vista del Teorema de Rademacher (1.44), podemos asumir que $Df(x)$, y por ende $Jf(x)$, existen para todo $x \in A$ y que $\mathcal{L}^n(A) < \infty$.

2. Caso 1. $A \subset \{x \mid Jf(x) > 0\}$, para cada $\lambda \in \Lambda(n, n-m)$, (ver 1.49) escribimos

$$f = q \circ h_\lambda,$$

donde

$$h_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}, \quad h_\lambda(x) \equiv (f(x), P_\lambda(x)) \qquad (x \in R^n)$$

$$q : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m, \quad q(y,z) \equiv y \qquad (y \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^{n-m}),$$

y P_λ es la proyección definida en 1.49. Definamos

$$\begin{aligned} A_\lambda &\equiv \{x \in A \mid det\ Dh_\lambda \neq 0\} \\ &= \{x \in A \mid P_\lambda|_{[Df(x)]^{-1}(0)} \ es\ inyectiva\}. \end{aligned}$$

3. Fijemos $t > 1$ y apliquemos el lema 5.8 a $h = h_\lambda$ para obtener conjuntos de Borel disyuntos $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ y automorfismos simétricos $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ que satisfacen las afirmaciones (i)-(iii) en el lema 5.8. Definamos $G_k \equiv A \cap D_k$.

4. Ahora probaremos que $t^{-n}[q \circ S_k] \leq Jf|_{G_k} \leq t^n[q \circ S_k]$.

   Procedamos, como $f = q \circ h$, tenemos $\mathcal{L}^n$ $c.s.$

$$\begin{aligned} Df &= q \circ Dh \\ &= q \circ S_k \circ S_k^{-1} \circ Dh \\ &= q \circ S_k \circ D(S_k^{-1} \circ h) \\ &= q \circ S_k \circ C \end{aligned}$$

   Donde $C \equiv D(S_k^{-1} \circ h)$.

Por el lema 5.8,

$$t^{-1} \leq Lip(S_k^{-1} \circ h) = Lip(C) \leq t \text{ sobre } G_k. \qquad (*)$$

Ahora escribimos

$$Df = S \circ O^*$$

$$q \circ S_k = T \circ P^*$$

Para $S, T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ simétricas y $O, P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ortogonales.
Luego tenemos

$$S \circ O^* = T \circ P^* \circ C. \qquad (**)$$

Y en consecuencia

$$S = T \circ P^* \circ T \circ O.$$

Como $G_k \subset A \subset \{x \mid Jf(x) > 0\}$, $det\ S \neq 0$ y por tanto $det\ T \neq 0$.
Luego si $v \in \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned} |T^{-1} \circ Sv| &= |P^* \circ C \circ Ov| \\ &\leq |C \circ Ov| \\ &\leq t|Ov| \qquad \text{por } (*) \\ &= t|v|. \end{aligned}$$

Luego

$$(T^{-1} \circ S)(B(0,1)) \subset B(0,t),$$

Y por tanto

$$Jf = |det\ S| \leq t^n |det\ T| = t^n [q \circ S_k].$$

Similarmente, si $v \in \mathbb{R}^m$, tenemos de $(**)$

$$|S^{-1} \circ Tv| = |O^* \circ C^{-1} \circ Pv|$$

$$\le |C^{-1} \circ Pv|$$
$$\le t|Pv| \qquad \text{por} \quad (*)$$
$$\le t|v|.$$

Luego

$$[q \circ S_k] = |det\ T| \le t^n |det\ S| = t^n Jf.$$

5. Ahora calculemos,

$$\begin{aligned}
t^{-3n+m}&\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(G_k \cap f^{-1}\{y\})\ dy \\
&= t^{-3n+m}\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(h^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\}))\ dy \\
&\le t^{-2n}\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(S_k^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\}))\ dy \\
&= t^{-2n}\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(S_k^{-1} \circ h(G_k) \cap (q \circ S_k)^{-1}\{y\})\ dy \\
&= t^{-2n}[q \circ S_k]\mathcal{L}^n(S_k^{-1} \circ h(G_k)) \qquad \text{por lema 5.6} \\
&\le t^{-2n}[q \circ S_k]\mathcal{L}^n(G_k) \\
&\le \int_{G_k} Jf\ dx \\
&\le t^{n}[q \circ S_k]\mathcal{L}^n(G_k) \\
&\le t^{2n}[q \circ S_k]\mathcal{L}^n(S_k^{-1} \circ h(G_k)) \\
&= t^{2n}\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(S_k^{-1} \circ h(G_k) \cap (q \circ S_k)^{-1}\{y\})\ dy \\
&\le \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(h^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\}))\ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(G_k \cap f^{-1}\{y\})\ dy.
\end{aligned}$$

Como

$$\mathcal{L}^n\left(A - \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k\right) = 0,$$

Podemos sumar sobre k, usando el lema 5.7, y haciendo $t \to 1^+$ para concluir

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\ dy = \int_A Jf\ dx.$$

6. Caso 2. $A \subset \{x \mid Jf(x) = 0\}$.
   Fijemos $\epsilon > 0$ y definamos

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,\ g(x, y) \equiv f(x) + \epsilon y$$

$$p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,\ p(x, y) \equiv y \qquad\qquad (x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m).$$

   Luego

$$Dg = (Df,\ \epsilon I)_{m \times (n+m)},$$

   Y

$$\epsilon^m \leq Jg = [Dg] = [Dg^*] \leq C\epsilon.$$

7. Obsérvese que

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\ dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y - \epsilon w\}) \qquad \text{para todo } w \in \mathbb{R}^m.$$

$$= \frac{1}{\alpha(m)} \int_{B(0,1)} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-1}(A \cap f^{-1}\{y - \epsilon w\})\ dy\ dw.$$

8. Consideremos $y \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^m$, y definamos $B \equiv A \times B(0,1) \subset \mathbb{R}^{n+m}$.
   Probaremos que

$$B \cap g^{-1}\{y\} \cap p^{-1}\{w\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } w \notin B(0,1) \\ (A \cap f^{-1}\{y - \epsilon w\}) \times \{w\} & \text{si } w \in B(0,1). \end{cases}$$

En efecto, tenemos que $(x,z) \in B \cap g^{-1}\{y\} \cap p^{-1}\{w\}$ si y solo si

$$x \in A,\ z \in B(0,1),\ f(x) + \epsilon z = y,\ z = w;$$

Esto si y solo si

$$x \in A,\ z = w \in B(0,1),\ f(x) = y - \epsilon w;$$

Y esto si y solo si

$$w \in B(0,1),\ (x,z) \in (A \cap f^{-1}\{y - \epsilon w\}) \times w.$$

9. Ahora usamos lo probado en 2. para continuar el cálculo desde 7:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\ dy$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha(m)} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(B \cap g^{-1}\{y\} \cap p^{-1}\{w\})\ dw\ dy \\
&\leq \frac{\alpha(n-m)}{\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^n(B \cap g^{-1}\{y\})\ dy \\
&= \frac{\alpha(n-m)}{\alpha(n)} \int_B Jg\ dx\ dz \\
&\leq \frac{\alpha(n-m)\alpha(m)}{\alpha(n)} \mathcal{L}^n(A) \sup_B Jg \\
&\leq C\mathcal{L}^n(A)\epsilon.
\end{aligned}$$

Haciendo $\epsilon \to 0$ obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}\ dy) = 0 = \int_A Jf\ dx.$$

10. En el caso general escribimos $A = A_1 \cup A_2$ donde $A_1 \subset \{x \mid Jf(x) > 0\}$, $A_2 \subset \{x \mid Jf(x) = 0\}$, y aplicamos los casos 1 y 2 anteriores.

$\square$

Teorema 5.10. Fórmula de cambio de variable ([1]).

Consideremos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *Lipschitz,* $n \geq m$. *Luego para cada función* $\mathcal{L}^n-$*sumable* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *tal que*

$$g|_{f^{-1}\{y\}} \quad \textit{es} \quad \mathcal{H}^{n-m}-\textit{sumable para} \quad \mathcal{L}^m \quad \textit{c.s.} \quad y$$

Tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) Jf(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{f^{-1}\{y\}} g \, d\mathcal{H}^{n-m} \right] \, dy.$$

Demostración.

1. Caso 1. $g \geq 0$.
   Escribamos $g = \sum_{i=1}^{\infty} (1/i)\chi_{A_i}$ para ciertos conjuntos $\mathcal{L}^n-$medibles $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$; esto es posible por el teorema 1.9 de la sección 1.1. Luego el Teorema de la Convergencia Monótona implica

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g \; Jf \; dx &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{A_i} Jf \; dx \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(f^{-1}\{y\} \cap A_i) \; dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \mathcal{H}^{n-m}(f^{-1}\{y\} \cap A_i) \; dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{f^{-1}\{y\}} g \; d\mathcal{H}^{n-m} \right] \; dy.
\end{aligned}$$

2. Caso 2. g es cualquier función $\mathcal{L}^n-$sumable. Escribamos $g = g^+ - g$ y usemos el Caso 1.

$\square$

5.2. Aplicaciones

Tomando la fórmula de cambio de variable cuando $n \geq m$, y restringiéndonos a campos escalares llegamos al siguiente teorema

Teorema 5.11. ([6]).

Consideremos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función Lipschitz y asumamos que para c.s.* $r \in \mathbb{R}$ *el conjunto de nivel*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = r\}$$

es una superficie suave, hipersuperficie $(n-1)-$*dimensional en* $\mathbb{R}^n$. *Supongamos también que* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es continua y sumable. Luego*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g|Df|\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{f=r} g\ dS \right) dr.$$

Demostración.

Este es una restricción del teorema 5.10, basta con hacer $m = 1$, y S (longitud de arco) sería $\mathcal{H}^{n-1}$.

□

Más aún, si tomamos $f(x) = |x - x_0|$, donde x_0 es un punto fijo de $\mathbb{R}^n$, tenemos el siguiente teorema,

Teorema 5.12. Coordenadas polares ([6]).

(i) Consideremos $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *continua y sumable. Luego*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\ dx = \int_0^{\infty} \left(\int_{\partial B(x_0,r)} g\ dS \right) dr$$

Para cada punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(ii) En particular

$$\frac{d}{dr}\left(\int_{B(x_0,r)} g \ dx\right) = \int_{\partial B(x_0,r)} g \ dS$$

Para cada $r > 0$.

Demostración. Este es un caso paricular del teorema 5.11, aquí hacemos $f(x) = |x - x_0|$, y nuestros conjuntos de nivel son las circunferencias de centro x_0 y radio $r > 0$, donde x_0 y r son elementos cualesquiera de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^+$ respectivamente.

$\square$

Conclusiones

- La medida de Hausdorff $\mathcal{H}^s$ es una medida Borel regular sobre $\mathbb{R}^n$ cuya dimensión s puede ser cualquier número real no negativo.
- La medida de Hausdorff $\mathcal{H}^s$, $0 \leq s \leq \infty$, es una generalización de la medida de Lebesgue $\mathcal{L}^n, n \in \mathbb{Z}^+$. Estas son iguales siempre que $s = n$.
- Dada una función Lipschitz $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, la medida $n-$dimensional de $(A, f(A))$ puede ser calculada integrando el Jacobiano apropiado de f sobre A.
- Dada una función Lipschitz $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $m \leq n$ la medida $(n-m)-$dimensional de los conjuntos de nivel de f puede ser calculada utilizando el Jacobiano.

Bibliografía

[1] Lawrence C. Evans; Ronald F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press Inc., Boca Raton, Florida, 1992.

[2] H. Federer,*Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag, New York, 1969.

[3] R. Hardt, *An Introduction to Geometric Measure Theory*. Lecture Notes, Melbourne University, 1979.

[4] K. Falconer, *Fractal Geometry*. Wiley, New York, 1990.

[5] F. Morgan, *Geometric Measure Theory: A Beginners Guide*. Academic Press, Boston, 1988.

[6] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Berkeley, 1997.

[7] Robert G. Bartle, *The Elements of Integration*. John Wiley & Sons, U.S.A, 1966.