

**AUTORIZACIÓN DE LOS AUTORES PARA LA CONSULTA, LA  
REPRODUCCIÓN PARCIAL O TOTAL, Y PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DEL  
TEXTO COMPLETO**

Puerto Colombia, **09 DE OCTUBRE DE 2020**

Señores

**DEPARTAMENTO DE BIBLIOTECAS**

Universidad del Atlántico

Cuidad

**Asunto: Autorización Trabajo de Grado**

Cordial saludo,

Yo, **FIAMA JIMENEZ OCHOA.**, identificado(a) con **C.C. No. 1.042.453.957.** de **SOLEDAD**, autor(a) del trabajo de grado titulado **SISTEMAS HOMOGENEOS PERTURBADOS MULTIPARAMETRICOS CON CICLOS LÍMITES** presentado y aprobado en el año **2020** como requisito para optar al título Profesional de **MATEMATICA.**; autorizo al Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico para que, con fines académicos, la producción académica, literaria, intelectual de la Universidad del Atlántico sea divulgada a nivel nacional e internacional a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios del Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico pueden consultar el contenido de este trabajo de grado en la página Web institucional, en el Repositorio Digital y en las redes de información del país y del exterior, con las cuales tenga convenio la Universidad del Atlántico.
- Permitir consulta, reproducción y citación a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato CD-ROM o digital desde Internet, Intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer.

Esto de conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

Atentamente,

Firma *Fiama J8a.*

**FIAMA JIMENEZ OCHOA**

**C.C. No. 1.042.453.957. de SOLEDAD**



Universidad  
del Atlántico

CÓDIGO: FOR-DO-110

VERSIÓN: 01

FECHA: 02/DIC/2020

**DECLARACIÓN DE AUSENCIA DE PLAGIO EN TRABAJO ACADÉMICO PARA GRADO**

*Este documento debe ser diligenciado de manera clara y completa, sin tachaduras o enmendaduras y las firmas consignadas deben corresponder al (los) autor (es) identificado en el mismo.*

Puerto Colombia, **09 DE OCTUBRE DE 2020**

Una vez obtenido el visto bueno del director del trabajo y los evaluadores, presento al **Departamento de Bibliotecas** el resultado académico de mi formación profesional o posgradual. Asimismo, declaro y entiendo lo siguiente:

- El trabajo académico es original y se realizó sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, en consecuencia, la obra es de mi exclusiva autoría y detento la titularidad sobre la misma.
- Asumo total responsabilidad por el contenido del trabajo académico.
- Eximo a la Universidad del Atlántico, quien actúa como un tercero de buena fe, contra cualquier daño o perjuicio originado en la reclamación de los derechos de este documento, por parte de terceros.
- Las fuentes citadas han sido debidamente referenciadas en el mismo.
- El (los) autor (es) declara (n) que conoce (n) lo consignado en el trabajo académico debido a que contribuyeron en su elaboración y aprobaron esta versión adjunta.

Título del trabajo académico:	<b>SISTEMAS HOMOGENEOS PERTURBADOS MULTIPARAMETRICOS CON CICLOS LÍMITES</b>
Programa académico:	<b>MATEMATICAS</b>

Firma de Autor 1:	<i>Fiama J Ba.</i>						
Nombres y Apellidos:	<b>FIAMA JIMENEZ OCHOA</b>						
Documento de Identificación:	CC	X	CE		PA	Número:	1.042.453.957
Nacionalidad:	<b>COLOMBIANA</b>				Lugar de residencia:		
Dirección de residencia:							
Teléfono:					Celular:		

**FORMULARIO DESCRIPTIVO DEL TRABAJO DE GRADO**

<b>TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO DE GRADO</b>	<b>SISTEMAS HOMOGENEOS PERTURBADOS MULTIPARAMETRICOS CON CICLOS LÍMITES</b>
<b>AUTOR(A) (ES)</b>	<b>FIAMA JIMENEZ OCHOA</b>
<b>DIRECTOR (A)</b>	<b>JORGE RODRIGUEZ CONTRERAS</b>
<b>CO-DIRECTOR (A)</b>	
<b>JURADOS</b>	<b>OSMIN FERRER VILLAR BORIS REYES CASSIANI</b>
<b>TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TITULO DE</b>	<b>MATEMATICA</b>
<b>PROGRAMA</b>	<b>MATEMATICAS</b>
<b>PREGRADO / POSTGRADO</b>	<b>PREGRADO</b>
<b>FACULTAD</b>	<b>CIENCIAS BASICAS</b>
<b>SEDE INSTITUCIONAL</b>	<b>PUERTO COLOMBIA</b>
<b>AÑO DE PRESENTACIÓN DEL TRABAJO DE GRADO</b>	<b>2020</b>
<b>NÚMERO DE PÁGINAS</b>	<b>86</b>
<b>TIPO DE ILUSTRACIONES</b>	<b>GRÁFICOS</b>
<b>MATERIAL ANEXO (VÍDEO, AUDIO, MULTIMEDIA O PRODUCCIÓN ELECTRÓNICA)</b>	<b>NO APLICA</b>
<b>PREMIO O RECONOCIMIENTO</b>	<b>NO APLICA</b>



Universidad del Atlántico  
Facultad de Ciencias Básicas  
Programa de Matemáticas

# SISTEMAS HOMOGENEOS PERTURBADOS MULTIPARAMETRICOS CON CICLOS LÍMITES

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Matemático

**Autor: Fiana Jimenez Ochoa**

**Director: Jorge Rodríguez Contreras Ph.D**

Barranquilla, Atlántico  
Julio 2020

# Aprobación

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad del Atlántico como integrantes del jurado examinador del trabajo de grado titulado “**Sistemas homogéneos perturbados multiparamétricos con ciclos límites**”, presentado por la estudiante **Fiana Jiménez Ochoa**, titular de la Cédula de Ciudadanía **1.042.453.957**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Universidad para optar al título de Matemático.

---

Director

---

Jurado

---

Jurado

# Tabla de Contenido

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>V</b>
<b>Introducción y Estado del Arte</b>	<b>VI</b>
<b>1. Marco teórico</b>	<b>1</b>
<b>2. Reducción a 4 familias</b>	<b>8</b>
2.1. Existencia de ciclos límites . . . . .	11
<b>3. Singularidades en el plano finito</b>	<b>13</b>
3.1. Singularidades de la familia I . . . . .	13
3.2. Singularidades de la familia II . . . . .	14
3.3. Singularidades de la familia III . . . . .	15
3.4. Singularidades en el plano finito Familia IV . . . . .	18
3.4.1. Estudio del punto singular $(\epsilon, 0)$ . . . . .	18
3.4.2. Singularidades en el caso $1 + \frac{m}{s} > 0$ . . . . .	22
<b>4. Singularidades en el infinito</b>	<b>25</b>
4.1. Singularidades familia I . . . . .	25
4.2. Singularidades familia II . . . . .	36
4.3. Singularidades familia III . . . . .	40
4.4. Rectas invariantes . . . . .	45
<b>5. Bifurcaciones</b>	<b>47</b>
5.1. Familia I . . . . .	47
5.2. Familia II . . . . .	48
5.3. Familia III . . . . .	49
<b>6. Retrato de Fase</b>	<b>53</b>
6.1. Familia I . . . . .	53
6.2. Familia II . . . . .	56
6.3. Familia III . . . . .	60

<i>TABLA DE CONTENIDO</i>	II
<b>7. Centros de la Familia IV</b>	<b>65</b>
7.1. Centro en el caso $s = -\frac{1}{2}$	65
7.2. Centro en el caso $s = \frac{1}{m-2}$	66
<b>8. Bifurcación <math>X_0 + X_2 \leftrightarrow X_2</math></b>	<b>68</b>
8.1. Rectas invariantes en $m < 0$	68
8.2. Retrato de fase en la región $\mathbf{R}$	69
8.2.1. Retrato de fase en el caso $s = 0$	70
8.2.2. Retrato de fase en el caso $s \neq 0$	72
8.2.3. Retrato de fase en el esfera de Poincaré	73
8.3. Singularidades en el infinito del sistema 8.1	76
8.3.1. Retrato de fase sistema 8.1 en $\mathbf{R}_1$	78
8.4. Bifurcaciones	79
<b>Conclusiones</b>	<b>83</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>84</b>

# Resumen

En este trabajo de investigación prestamos una contribución a algunos de los temas estudiados anteriormente, iniciado con la ecuación de Van Der Pol y la idea de ciclo límite de Poincaré, siempre con el uso de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en el plano. Inicialmente demostramos basándonos en el trabajo de Su Guang-jan [27]. (ver también el libro de [Zhang, pag 284] ) que un sistema diferencial polinomial cuadrático perturbado

$$\begin{cases} \dot{x} &= a + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ \dot{y} &= b + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \end{cases}$$

tiene como máximo dos ciclos límites. Es un hecho clave en la prueba que los sistemas cuadráticos con una recta invariante tienen como máximo un ciclo límite.[7]

Demostrando primero que dicho sistema es equivalentemente afín a cuatro familias. También demostramos que las familias **IV**(**III** en el caso  $s = 0$ ) es equivalentemente afín a

$$\begin{cases} \dot{x} = \epsilon^2 - x^2 + xy \\ \dot{y} = \beta(\epsilon^2 - x^2 + xy) + mxy + sy^2 \end{cases}$$

y por último probamos que es una familia rotatoria de campos vectoriales.

Luego, estudiamos el comportamiento de las singularidades de las familias I, II y III tanto en el plano finito como en el infinito, utilizando los teoremas 1.0.2, 1.0.3, 1.0.4, 1.0.5 y la técnica del Blow-up. En la familia III además de lo anterior dividimos el plano en tres regiones  $R_1, R_2, R_3$  para saber el comportamiento de las singularidades en el infinito.

Además, realizamos el estudio de las diferentes bifurcaciones que aparecen en cada una de las familias I, II y III. En base a los resultados del estudio del comportamiento de las singularidades y la primera parte de este, obtenemos el retrato de fase de cada una de estas familias.

También, probamos que dado  $\epsilon = 1$  para  $s = \frac{1}{2}$ , ó,  $s = \frac{m}{m-2}$  para  $m < 0$ , los puntos  $(1, 0)$  y  $(-1, 0)$  son centros.

Finalmente, probamos que las únicas rectas invariantes del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2 + xy \\ \dot{y} = \beta(-x^2 + xy) + mxy + sy^2 \end{cases} \quad (1)$$

son de la forma  $y = Ax$ , ó,  $x = 0$  y en base a esto hallamos el retrato de fase del sistema en la esfera de Poincaré.

También realizamos el estudio del comportamiento de las singularidades en el infinito del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \epsilon^2 - x^2 + xy \\ \dot{y} = \beta(\epsilon^2 - x^2 + xy) + mxy + sy^2 \end{cases}$$

para  $s \neq 0$ . Seguidamente su retrato de fase en la región  $R_1$ .

Luego, observamos la bifurcación  $X_0 + X_2 \leftrightarrow X_2$ , ( $s \neq 0$ ) que se comporta de la siguiente manera para  $\epsilon > 0$ , tenemos que alrededor de cada uno de los puntos singulares  $(\epsilon, 0)$  y  $(-\epsilon, 0)$  se tiene un ciclo límite y para  $\epsilon = 0$  estos puntos se colapsan en el punto singular  $(0, 0)$  el cual tiene dos sectores elípticos. El caso  $\epsilon < 0$  tiene el mismo comportamiento de  $\epsilon > 0$ .

# Agradecimientos

A Dios primeramente por regalarme el maravilloso don de la vida, por colocarme en una maravillosa familia y por nunca faltarme.

A mi asesor el Dr. Jorge Rodríguez Contreras por la orientación y ayuda que me brindó para la realización de esta tesis, por su apoyo y amistad impulsándome siempre a seguir adelante.

A mis padres por haberme forjado como la persona que soy hoy, quienes me motivaron constantemente para alcanzar mis anhelos y siempre fueron mi gran apoyo.

A O. Enrique Dede Mejia, Boris Lora, Carlos Araujo y a todos los profesores que fueron fundamentales en mi proceso como estudiante de Matemáticas.

A mis compañeros Isaias Beleño y Efren Mesino, por su amistad y ayuda siempre que los necesite.

A mi hermano Jesus Jimenez Ochoa quien siempre me lleno de motivos para alcanzar este título y de quien quiero ser su orgullo.

Finalmente, a mi familia en general quienes me impulsaron siempre a culminar con éxito este proyecto.

Muchas gracias.

# Introducción y Estado del Arte

La historia de la ciencia y la tecnología se nutre por la necesidad del hombre de explicar los hechos naturales, prediciendo el futuro y por último, controlándolo activamente. Sin duda, la matemática como lenguaje de ciencia desempeña un papel clave para lograr estas necesidades. Desde que Isaac Newton y Gottfried Leibnitz introdujeron el cálculo diferencial en 1682, las ecuaciones diferenciales han sido probablemente una de las herramientas más eficientes para modelar la realidad en un lenguaje abstracto. Hoy en día, éstas se convirtieron en uno de los pilares de la filosofía matemática.

A pesar que Newton dijo hace tres siglos que es muy útil resolver las ecuaciones diferenciales, el auge del estudio de las ecuaciones diferenciales no llegó sino hasta hace cien años aproximadamente, gracias a H. Poincaré. Cabe decir, que entre la época de Newton y Poincaré muchos matemáticos se interesaban en esta materia, sin embargo en una dirección muy distinta a la del matemático francés. Su interés, por lo general, se centraba en la integración y cuadratura de las ecuaciones diferenciales. En la época de Poincaré, este enfoque parecía ser una manera bastante difícil en comparación con los resultados que proporcionaba.

La originalidad de la contribución de Poincaré, explicada en un trabajo compuesto por cuatro partes entre 1881 y 1886, consiste en una concepción más bien diferente de las ecuaciones diferenciales. Para él, éstas no sólo constituyen objetos puramente formales sujetos a algunas reglas de cálculo, sino también objetos con el significado geométrico, lo que dio inicio a la *Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales*. Aunque él sólo considera ecuaciones en dos variables, muchas de sus ideas se han aplicado a las dimensiones mayores. Poincaré propuso la descripción del *retrato de fase* de la ecuación diferencial, es decir, la colección de la información mínima sobre las órbitas requeridas para determinar su estructura topológica. Acuña la expresión de ciclo límite desarrolla los conceptos teóricos tan importantes como el *mapeo de retorno* o el *Teorema de la Región Anular*, lo cual con la contribución del matemático sueco I. Bendixson en 1901 se transformó en el famoso Teorema de Poincaré-Bendixson. El resultado anterior confirma que las soluciones, en las cuales realmente estamos interesados, son aquellas que llamamos *singulares* (puntos críticos, órbitas periódicas y separatrices), debido a que bajo condiciones de compactibilidad, cualquier otra curva solución tiende hacia un conjunto de curvas singulares, llamadas *conjunto límite*. Por lo tanto, el retrato fase se determina por el carácter y la configuración de las soluciones singulares.

Usando el mismo término, podríamos decir que la Teoría Cualitativa representa un retrato de las ecuaciones diferenciales prestando atención sólo a las partes más importantes: las soluciones

singulares.

Aunque, hoy en día apreciamos de manera significativa la contribución de Poincaré, la introducción de la teoría nueva se desarrollaba lentamente hasta la segunda mitad de este siglo. Sin embargo, al mismo tiempo, el eco era considerable: en Rusia, el grupo de A. Liapunov también se ha interesado en los métodos nuevos, mientras que el matemático alemán D. Hilbert, en 1900, propuso entre sus "problemas" más conocidos lo que sigue a continuación ( la segunda parte del problema 16 ):

¿Cuál es el número máximo  $H(n)$  de los ciclos límites de un campo vectorial polinomial del grado  $n$ ,

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

¿Cuál es su configuración ?

Como se puede ver el problema es bastante complejo para ser resuelto como un todo.

De aquella época consideramos importante mostrar algunas otras contribuciones:

En 1923, H. Dulac prueba (de forma errónea, como se descubrió más tarde) el número de ciclos límites de un campo vectorial polinomial concreto en el plano finito. A pesar del vacío que deja en la prueba, las ideas que usa son beneficiosas. Es el primer paso en la dirección que Hilbert señaló en 1900.

En el año 30, A. Andronov y L. Portraying se ocupan de uno de los temas fundamentales en la Teoría Cualitativa: la estabilidad estructural. Ésta consiste en saber cuál de los retratos de fase mantiene su topología bajo variaciones pequeñas de los coeficientes en la ecuación diferencial. Cuando ésta no se da, se debe entrar en el estudio de *bifurcaciones*.

En 1926, B. Van Der Pol obtiene una ecuación diferencial para describir las oscilaciones de amplitud constante en un triodo al vacío y usa los métodos gráficos para probar la existencia de una órbita periódica. Un tiempo después, en 1929, A. Andronov establece la relación entre el experimento de Van Der Pol y la idea de ciclo límite de Poincaré. Es la primera confirmación práctica de la existencia de ciclos límite.

En 1928, el ingeniero francés A. Liénard publica un trabajo en la revista *Révue générale d'électricité*, la formulación matemática del cual se relaciona estrictamente con la del oscilador de Van Der Pol.

Hasta 1981 se creyó que el problema de la finitud trabajado por Dulac entre los años 1889 y 1923 era verdadero. Finalmente, se demostró que la prueba era falsa. en 1985, siguiendo caminos distintos, Y. Il'yashenko y J. écalle solucionaron esta congetura. Hoy en día existe un grupo numeroso de matemáticos estudiando problemas de la finitud.

Respecto a otros tres problemas, además de su valor intrínseco, éstos representaron un importante paso hacia delante en la aplicación de las ecuaciones diferenciales. Muchos trabajos en la tecnología electrónica, especialmente en la ex-uni6n sovi6tica, marcaron el camino iniciado por la ecuaci6n de Van Der Pol.

Por otro lado, con los trabajos de A. Kolmogorov(1934) y G. Gause(1936), la teorí a de los modelos presa-depredador tom6 un impulso fuerte, tratando de generalizar y refinar la idea inicial de A. Lotka y V. Volterra. Sin duda alguna, el inter6s proveniente de otros campos de la ciencia para el uso de las ecuaciones diferenciales a motivado su estudio. Ahora los modelos

con ecuaciones diferenciales se han propagado en las soluciones de los problemas de la biología, física, química, economía, teoría de control, epidemiología entre otras de tal forma que han llegado a ser una herramienta indispensable para las aplicaciones.

# Capítulo 1

## Marco teórico

En esta sección enunciaremos teoremas que utilizaremos para el estudio del comportamiento local cerca una singularidad.

**Lema 1.0.1.** *Las soluciones del sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = a + \sum a_{ij}x^i y^j \\ \dot{y} = b + \sum b_{ij}x^i y^j \end{cases}$$

con  $n \in \mathbb{N}$ , son simétricas respecto al origen.

**Teorema 1.0.2.** *Sea  $(0,0)$  una singularidad aislada del campo vectorial  $X(x,y) = (ax + by + F(x,y), cx + dy + G(x,y))$ , donde  $F, G$  son analíticas en una vecindad del origen y tiene expansiones en series que comienzan con términos de grado dos en  $x$  e  $y$ . Decimos que  $(0,0)$  es una singularidad no degenerada si  $ad - bc \neq 0$ . Sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  los valores propios de  $\mathbf{DX}(0,0)$ . Entonces:*

- 1) *Si  $\lambda_1, \lambda_2$  son reales y  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ , entonces  $(0,0)$  es punto silla, cuyas separatrices tienden a  $(0,0)$  en las direcciones dadas por los vectores propios asociados con  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .*
- 2) *Si  $\lambda_1, \lambda_2$  son reales y  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ , entonces  $(0,0)$  es un nodo. Si  $\lambda_1 > 0$  ( $\lambda_1 < 0$ ) entonces es un fuente (sumidero).*
- 3) *Si  $\lambda_1 = \alpha + \beta i$  y  $\lambda_2 = \alpha - \beta i$  con  $\alpha, \beta \neq 0$  entonces  $(0,0)$  es un foco. Si  $\alpha > 0$  ( $\alpha < 0$ ) entonces es repulsor (atractor).*
- 4) *Si  $\lambda_1 = \beta i$  y  $\lambda_2 = -\beta i$ , entonces  $(0,0)$  es un centro lineal, topológicamente un foco o un centro.*

Ver [3].

**Teorema 1.0.3.** *Sea  $(0,0)$  una singularidad aislada del sistema:*

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x,y) \\ \dot{y} = Y(x,y) \end{cases}$$

donde  $X$  e  $Y$  son analíticas en una vecindad del origen y tienen expansiones que comienzan con términos de segundo grado en  $x$  e  $y$ . Sea  $y = f(x)$  la solución de la ecuación  $y + Y(x, y) = 0$  en una vecindad de  $(0, 0)$ , y supongamos que la expansión en serie de la función  $g(x) = X(x, f(x))$  tiene la forma  $g(x) = a_m x^m + \dots$  donde  $m \geq 2$ ,  $a_m \neq 0$ . Entonces

- 1) Si  $m$  es impar y  $a_m > 0$ , entonces  $(0, 0)$  es topológicamente un nodo.
- 2) Si  $m$  es impar y  $a_m < 0$ , entonces  $(0, 0)$  es topológicamente una silla, donde dos de sus separatrices tienden a  $(0, 0)$  en las direcciones  $0$  y  $\pi$ , y las otras dos en direcciones  $\frac{\pi}{2}$  y  $\frac{3\pi}{2}$ .
- 3) Si  $m$  es par, entonces  $(0, 0)$  es un silla-nodo es decir una singularidad cuya vecindad es la unión de un sector parabólico y dos sectores hiperbólicos, dos de sus separatrices tienden a  $(0, 0)$  en las direcciones de  $\frac{\pi}{2}$  y  $\frac{3\pi}{2}$ , y las otras dos en las direcciones  $0$  o  $\pi$  de acuerdo con  $a_m < 0$  o  $a_m > 0$ .

Ver [3].

**Teorema 1.0.4.** Sea  $(0, 0)$  una singularidad aislada del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= y + X(x, y) \\ \dot{y} &= Y(x, y) \end{cases}$$

donde  $X$  e  $Y$  son analíticas en una vecindad del origen y tienen expansiones que comienzan con términos de segundo grado en  $x$  e  $y$ . Sea  $y = F(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$  una solución de la ecuación  $y + X(x, y) = 0$  en una vecindad de  $(0, 0)$ , y supongamos que tienen la siguiente expansión en serie de la función  $f(x) = Y(x, F(x)) = a x^\alpha (1 + \dots)$  y  $\Phi(x) = \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) (x, F(x)) = b x^\beta (1 + \dots)$  donde  $a \neq 0$ ,  $\alpha \geq 2$ , y  $\beta \geq 1$ . Entonces

- 1) Si  $\alpha$  es par y
  - 1.a)  $\alpha > 2\beta + 1$ , entonces el origen es un silla-nodo (Índice 0), (Figura 2.4 a).
  - 1.b) Si  $\alpha < 2\beta + 1$ , ó,  $\Phi(x) \equiv 0$ , entonces el origen es una singularidad cuya vecindad es la unión de dos sectores hiperbólicos (Índice 0), (Figura 2.4 b).
- 2) Si  $\alpha$  es impar y  $a > 0$ , entonces el origen es un silla (Índice -1), (Figura 2.4 c).
- 3) Si  $\alpha$  es impar,  $a < 0$ , y
  - 3.a) Si  $(\alpha > 2\beta + 1, y, \beta \text{ par, ó, } \alpha = 2\beta + 1, y, \beta \text{ es par})$  y  $b^2 + 4a(\beta + 1) \geq 0$ , entonces el origen es un nodo (Índice +1), (Figura 2.5 d). El nodo es estable si  $b < 0$ , o inestable si  $b > 0$ .

3.b) Si  $(\alpha > 2\beta + 1, y, \beta \text{ impar, ó, } \alpha = 2\beta + 1, y, \beta \text{ impar})$  y  $b^2 + 4a(\beta + 1) \geq 0$ , entonces el origen es la unión de un sector hiperbólico y un sector elíptico (Índice +1), (Figura 2.5 e).

3.c) Si  $\alpha = 2\beta + 1$  y  $b^2 + 4a(\beta + 1) < 0$ , ó,  $(\alpha < 2\beta + 1, \text{ ó, } \Phi(x) \equiv 0)$ , entonces el origen es un foco, o, un centro (Índice +1)

Ver [1].

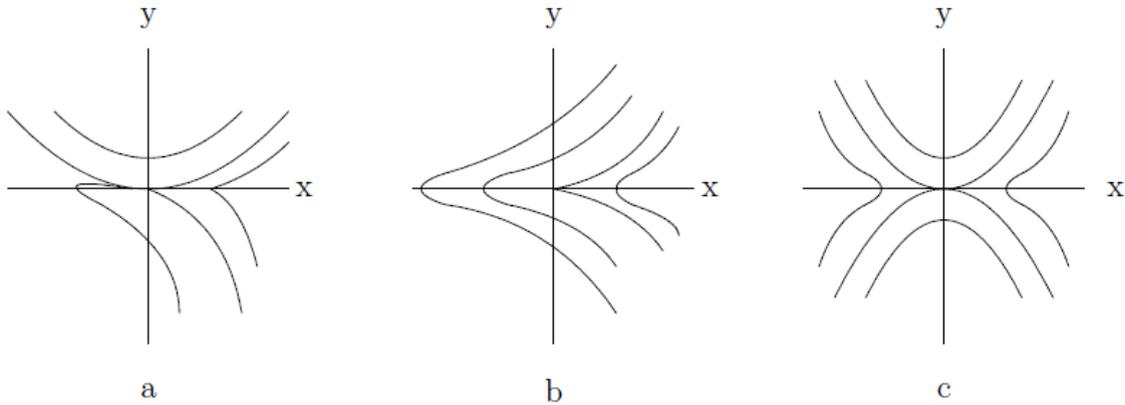


Figura 2.4 Comportamiento local cerca una singularidad

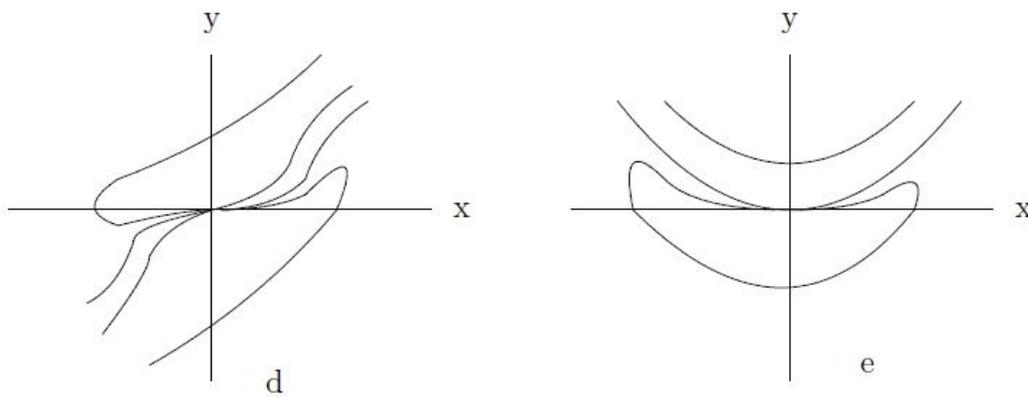


Figura 2.5 Comportamiento local cerca una singularidad

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ \dot{y} &= x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

**Teorema 1.0.5.** Para el sistema (1.1), consideremos

$$\begin{aligned} W_1 &= A\alpha - B\beta \\ W_2 &= [\beta(5A - \beta) + \alpha(5B - \alpha)\gamma] \\ W_3 &= (A\beta + B\alpha)\gamma\delta \end{aligned}$$

donde,

$$A = a_{20} + a_{02}$$

$$B = b_{20} + b_{02}$$

$$\alpha = a_{11} + 2b_{02}$$

$$\beta = b_{11} + 2a_{20}$$

$$\gamma = b_{20}A^3 - (a_{20} - b_{11})A^2B + (b_{02} - a_{11})AB^2 - a_{02}B^3$$

$$\delta = a_{02}^2 + b_{20}^2 + a_{02}A + b_{20}B$$

Entonces:

1)  $(0, 0)$  es un foco débil de  $k$ -orden ( $k = 1, 2, 3$ ) si solo si se cumple una de las siguientes condiciones:

a)  $W_1 \neq 0$

b)  $W_1 = 0, y, W_2 \neq 0$

c)  $W_1 = W_2 = 0, y, W_3 \neq 0$

2) La estabilidad del foco débil es decidida por el signo de  $W_k$ . Es estable si  $W_k < 0$  e inestable si  $W_k > 0$ .

3)  $(0, 0)$  es un centro si solo si  $W_1 = W_2 = W_3 = 0$

Ver [39]

**Singularidades en el infinito:** Usaremos la compactificación de Poincarè, ver [34], para representar las soluciones de las 4 familias estudiadas.

### Compactificación de Poincarè

Consideremos en  $\mathbb{R}^3$  la esfera  $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  y el plano  $\pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = 1\}$ , que es tangente a  $S^2$  en el punto  $(0, 0, 1)$ . Sea  $r$  una recta que pasa por el origen  $(0, 0, 0)$  y un punto  $P$  de  $\pi$ , entonces  $r$  intercepta  $S^2$  en dos puntos  $P_+$  y  $P_-$ , donde el primero esta en el hemisferio abierto superior  $H_+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2; x_3 > 0\}$  y el segundo está en el hemisferio abierto inferior  $H_- = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2; x_3 < 0\}$ . Esto nos da dos difeomorfismo sobreyectivos  $f_+ : \pi \rightarrow H_+$  y  $f_- : \pi \rightarrow H_-$  cuyas expresiones para  $(x_1, x_2)$ , son

$$f_+(x_1, x_2) = \frac{(x_1, x_2, 1)}{\Delta(x)} \text{ y } f_-(x_1, x_2) = \frac{(x_1, x_2, 1)}{\Delta(x)},$$

donde  $\Delta(x) = (x_1^2 + x_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ . Sea  $X$  un campo vectorial polinomial de grado  $n$  sobre el plano y sea  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x_1, x_2, x_3) = x_3^{n-1}$ . Entonces el campo vectorial  $f \cdot (f_+)_* X = f \cdot Df_+(X \circ (f_+)^{-1})$  y  $f \cdot (f_-)_* X$ , extienden  $X$  en un campo vectorial analítico  $p(X)$ , sobre  $S^2$ . El ecuador es invariante bajo el flujo de  $p(X)$  y una vecindad del ecuador corresponde a una vecindad en el infinito en  $\mathbb{R}^2$ .

Para el estudio de  $p(X)$  usamos las siguientes coordenadas en  $S^2$ . Sea  $U_i = \{y \in S^2; y_i > 0\}$  y  $V_i = \{y \in S^2; y_i < 0\}$ . Sea  $F_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $F_i(y) = (y_j y_i^{-1}, y_k y_i^{-1})$  para  $j < k$  y  $j, k \neq i$ .

Definamos  $G_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^2$  por la misma expresión. Consideremos el campo vectorial  $p(X)$ , donde  $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  es tal que  $P$  y  $Q$  son polinomios de grado a lo más  $n$  y al menos uno de ellos es de grado  $n$ . Entonces  $(F_1)_*(p(X))$  es dado por

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= \Delta(z)^{1-n} z_2^n [-z_1 P(z_2^{-1}, z_1 z_2^{-1}) + Q(z_2^{-1}, z_1 z_2^{-1})], \\ \dot{z}_2 &= -\Delta(z)^{1-n} z_2^{n+1} P(z_2^{-1}, z_1 z_2^{-1}) \end{cases} \quad (1.2)$$

Donde  $\Delta(z) = (1 + z_1^2 + z_2^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $z_1 = x_2 x_1 = y x^{-1}$ ,  $z_2 = x_3 x_1^{-1} = x^{-1}$ . Aquí los puntos del ecuador son representados por  $z_2 = 0$ , los puntos de la semiesfera nordeste por  $z_2 > 0$  y el punto  $(0, 0)$  corresponde al punto  $(1, 0, 0) \in S^2$ .  $(F_2)_*(p(X))$  es dado por

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= \Delta(z)^{1-n} z_2^n [P(z_1 z_2^{-1}, z_2^{-1}) - z_1 Q(z_1 z_2^{-1}, z_2^{-1})], \\ \dot{z}_2 &= -\Delta(z)^{1-n} z_2^{n+1} Q(z_1 z_2^{-1}, z_2^{-1}) \end{cases} \quad (1.3)$$

Como el nordeste de la semiesfera corresponde a  $z_2 > 0$  y  $(0, 0) = F_2(0, 1, 0)$ . El campo vectorial  $(G_i)_*(p(X))$  tiene las mismas expresiones de  $(F_i)_*(p(X))$ , multiplicadas por  $(-1)^{n-1}$ , pero en este caso el nordeste de la semiesfera corresponde a  $z_2 < 0$ .

En lo que sigue iniciaremos el estudio de las singularidades en el infinito de las diferentes familias a las que el sistema cuadrático es equivalentemente afín.

**Centros y focos débiles:** Consideremos la siguiente ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sum_{i+j=0}^2 a_{ij} x^i y^j}{\sum_{i+j=0}^2 b_{ij} x^i y^j} \quad (1.4)$$

Supongamos que (1.4) tiene una singularidad de tipo centro y además que está situada en el origen. Se ha probado que un centro de la ecuación (1.4) solo puede darse en el caso de raíces imaginarias puras de la ecuación característica. Por medio de transformaciones lineales no degeneradas, la ecuación (1.4) siempre puede reducirse a la forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + ax^2 + (2b + \alpha)xy + cy^2}{y + bx^2 + (2c + \beta)xy + dy^2} \quad (1.5)$$

**Teorema 1.0.6.** *La ecuación (1.5) tiene un centro en el origen si y solo si cumple una de las siguientes condiciones:*

- 1)  $\alpha = \beta = 0$ .
- 2)  $a + c = b + d = 0$ .
- 3)  $a = c = \beta = 0$ ,  $b = d = \alpha = 0$ .
- 4)  $a + c = \beta = \alpha + 5(b + d) = bd + 2d^2 + a^2 = 0$ , pero  $b + d \neq 0$ ,  $b + d = \alpha = \beta + 5(a + c) = ac + 2a^2 + d^2 = 0$ , pero  $a + c \neq 0$ .
- 5)  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{b + d}{a + c} = k$ ,  $ak^3 - (3b + \alpha)k^2 + (3c + \beta)k - d = 0$ .

Ver [22]

**Primeras cantidades de Lyapunov:** Consideremos la ecuación diferencial

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (f(x, y), g(x, y)) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

en el plano  $f, y, g$  son funciones analíticas que satisfacen  $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ . Es bien conocido que cuando el origen es un punto crítico no hiperbólico de tipo foco el estudio de su estabilidad se reduce a la computación de las cantidades de Lyapunov  $V_{2k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Por medio de un cambio lineal de coordenadas y reescalando el tiempo si es necesario, la ecuación diferencial planar puede ser escrita como

$$\dot{z} = F(z, \bar{z}) = iz + \sum_{k=2}^{\infty} F_k(z, \bar{z}) \quad (1.6)$$

donde  $z = x + iy$ ,  $y$ ,  $F_k$  es un polinomio homogéneo complejo de grado  $k$ .

**Teorema 1.0.7.** *Consideremos la ecuación diferencial (1.6). Sean*

$$\begin{aligned} F_2(z, \bar{z}) &= Az^2 + Bz\bar{z} + C\bar{z}^2 \\ F_3(z, \bar{z}) &= Dz^3 + Ez^2\bar{z} + Fz\bar{z}^2 + G\bar{z}^3 \\ F_4(z, \bar{z}) &= Hz^4 + Iz^3\bar{z} + Jz^2\bar{z}^2 + Kz\bar{z}^3 + L\bar{z}^4 \\ F_5(z, \bar{z}) &= Mz^5 + Nz^4\bar{z} + Oz^3\bar{z}^2 + Pz^2\bar{z}^3 + Qz\bar{z}^4 + R\bar{z}^5 \end{aligned}$$

Entonces las primeras cantidades de Lyapunov de (1.6) son:

$$(i) V_3 = 2\pi(\Re(E) - \Im(AB))$$

$$(ii) V_5 = \frac{\pi}{3} \left( 6\Re(O) + \Im(3E^2 - 6DF + 6A\bar{I} - 12BI - 6B\bar{J} - 8CH - 2C\bar{K}) + \Re(-8C\bar{C}E + 4AC\bar{F} + 6A\bar{B}F + 6B\bar{C}F - 12B^2D - 4ACD - 6A\bar{b}D + 10B\bar{C}D + 4A\bar{C}G + 2BC\bar{G}) + \Im(6A\bar{B}^2C + 3A^2B^2 - 4A^2\bar{B}C + 4\bar{B}^3C) \right)$$

Para más detalle ver [17] En términos de los coeficientes.

**Notación 1.0.8.** *Si  $P$  y  $Q$  comienzan con términos de grado 1, es decir, si*

$$\begin{aligned} P_1(x, y) &= ax + by \\ Q_1(x, y) &= cx + dy \end{aligned}$$

con  $a, b, c, y, d$  no todos son ceros, entonces las direcciones en la cual la trayectoria puede aproximarse al origen por las direcciones  $\theta$ , la cual satisface

$$b\text{sen}^2\theta + (a - d)\text{sen}\theta\text{cos}\theta - c\text{cos}^2\theta = 0$$

Para  $\text{cos}\theta \neq 0$  en esta ecuación, es decir, si  $b \neq 0$ , esta ecuación es equivalente a

$$b\tan^2\theta + (a - d)\tan\theta - c = 0$$

Ver [24]

**Notación 1.0.9.**  $\dot{x}|_{y=0} = -x^2 < 0$  y  $\dot{y}|_{y=0} = -\beta x^2 < 0$

**Ciclos límites para un sistema cuadrático con una recta invariante:** Enunciaremos tres teoremas, el primero se refiere a las condiciones de Cherkas-Zhilevich's, el segundo al exponente característico y el tercero a la función Lyapunov.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\varphi(y) - F(x) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x) \end{aligned} \tag{1.7}$$

**Teorema 1.0.10.** *Supongamos que para el sistema (1.7) las siguientes condiciones se cumplen:*

- 1)  $xg(x) > 0$  cuando  $x \neq 0$ ,  $y$ ,  $y\varphi(y) > 0$  cuando  $y \neq 0$ .
- 2)  $\varphi(y)$  es monótona creciente y  $f(0) < 0$  ( $f(0) > 0$ ).
- 3) Existen números reales  $\alpha$  y  $\beta$  tales que la función

$$f_1(x) = f(x) + g(x)[\alpha + \beta F(x)]$$

tiene ceros simples  $x_1 < 0 < x_2$ ,  $y$ ,  $f_1(x) \leq 0$  en  $[x_1, x_2]$ .

- 4) Fuera de  $[x_1, x_2]$  la función  $\frac{f_1(x)}{g(x)}$  no es decreciente (no es creciente).

- 5) Todos los ciclos contienen al intervalo  $[x_1, x_2]$  sobre el eje  $x$ .

Entonces el sistema (1.7) tiene a lo más un ciclo límite, si existe es estable (inestable).

Ver [11]

**Teorema 1.0.11.** *Sean  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  un abierto y  $X = (X_1, X_2) : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase  $C^1$ . Sea  $\gamma$  una órbita periódica de  $X$  de período  $T$  e  $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  una transformación de Poincarè en una sección transversal de  $\Sigma$  en  $\gamma$ . Entonces*

$$\Pi'(p) = \exp \left( \int_0^T \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt \right)$$

donde  $\operatorname{div} X(x) = D_1 X_1(x) + D_2 X_2(x)$ . En particular,  $\int_0^T \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt < 0$ , entonces  $\gamma$  es estable, y si  $> 0$  es inestable.

Ver [34], pag 29-30.

**Teorema 1.0.12.** *Sea  $\bar{\mathbf{x}} = 0$  un punto de equilibrio de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  y  $V$  una función definida positivamente en una vecindad  $U$  de  $\mathbf{0}$ , con  $V(0) = 0$ .*

- i) *Si  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \forall \mathbf{x} \in U - \{\mathbf{0}\}$ , entonces  $\mathbf{0}$  es estable.*
- ii) *Si  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \forall \mathbf{x} \in U - \{\mathbf{0}\}$ , entonces  $\mathbf{0}$  es asintóticamente estable.*
- iii) *Si  $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0 \forall \mathbf{x} \in U - \mathbf{0}$ , entonces  $\mathbf{0}$  es repulsor.*

Ver [19]

# Capítulo 2

## Reducción a 4 familias

En este capítulo hallaremos las familias de sistemas que son equivalentes a el sistema cuadrático perturbado

$$\begin{cases} \dot{x} = a + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ \dot{y} = b + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \end{cases} \quad (2.1)$$

para realizar el estudio de las singularidades en cada una de las familias.

**Teorema 2.0.1.** *El sistema cuadrático homogéneo perturbado*

$$\begin{cases} \dot{x} = a + \sum a_{ij}x^i y^j \\ \dot{y} = b + \sum b_{ij}x^i y^j \end{cases} \quad (2.2)$$

con  $a^2 + b^2 \neq 0$  es equivalentemente afín, escalando la variable  $t$  si es necesario, a una de las siguientes familias:

$$\begin{aligned} \mathbf{FAMILIA I} & \begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 \\ \dot{y} = \beta(1 - x^2) + mxy \end{cases} \\ \mathbf{FAMILIA II} & \begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 \\ \dot{y} = \beta(1 - x^2) + mxy + y^2 \end{cases} \\ \mathbf{FAMILIA III} & \begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 + xy \\ \dot{y} = \beta(1 - x^2 + xy) + mxy \end{cases} \\ \mathbf{FAMILIA IV} & \begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 + xy \\ \dot{y} = \beta(1 - x^2 + xy) + mxy + sy^2 \end{cases} \end{aligned}$$

*Demostración.*

Inicialmente probaremos que el sistema (2.1) es equivalente a:

$$\begin{cases} \dot{x} = a + a_{20}x^2 + a_{11}xy \\ \dot{y} = b + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \end{cases} \quad (2.3)$$

En efecto si  $a_{02} \neq 0$ , y,  $b_{20} = 0$ , entonces intercambiando  $x$ ,  $e$ ,  $y$ , el sistema (2.1) es transformado en el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \epsilon^2 - x^2 + xy \\ \dot{y} = \beta(\epsilon^2 - x^2 + xy) + mxy + sy^2 \end{cases} \quad (2.4)$$

Ahora si  $b_{20} \neq 0$ , sea  $x = \bar{x} + \lambda\bar{y}$ ,  $e$ ,  $y = \bar{y}$ . Reemplazando en el sistema (2.1) se tiene que:

$$\begin{aligned}\dot{x} + \lambda \dot{y} &= a + a_{20}\bar{x}^2 + (2a_{20}\lambda + a_{11})\bar{x}\bar{y} + (a_{20}\lambda^2 + a_{11}\lambda + a_{02})\bar{y}^2 \\ \dot{y} &= b + b_{20}\bar{x}^2 + (2b_{20}\lambda + b_{11})\bar{x}\bar{y} + (b_{20}\lambda^2 + b_{11}\lambda + b_{02})\bar{y}^2\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (a - \lambda b) + (a_{20} - \lambda b_{20})\bar{x}^2 + (2a_{20}\lambda + a_{11} - 2b_{20}\lambda^2 - b_{11}\lambda)\bar{x}\bar{y} + (a_{20}\lambda^2 + a_{11}\lambda + a_{02} - b_{11}\lambda^2 - b_{02}\lambda)\bar{y}^2 \\ \dot{y} &= b + b_{20}\bar{x}^2 + (2b_{20}\lambda + b_{11})\bar{x}\bar{y} + (b_{20}\lambda^2 + b_{11}\lambda + b_{02})\bar{y}^2\end{aligned}$$

Sea  $\lambda$  la raíz real del polinomio

$$b_{20}s^3 + (b_{11} - a_{20})s^2 + (b_{02} - a_{11})s - a_{02} = 0$$

En este caso nos queda:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (a - \lambda b) + (a_{20} - \lambda b_{20})\bar{x}^2 + (2a_{20}\lambda + a_{11} - 2b_{20}\lambda^2 - b_{11}\lambda)\bar{x}\bar{y} \\ \dot{y} &= b + b_{20}\bar{x}^2 + (2b_{20}\lambda + b_{11})\bar{x}\bar{y} + (b_{20}\lambda^2 + b_{11}\lambda + b_{02})\bar{y}^2\end{aligned}$$

Por lo tanto solo consideraremos el sistema (2.4). Como  $a^2 + b^2 \neq 0$ , en este caso el origen no es un punto singular. Sea  $a \neq 0$ , y sea  $(x_1, y_1)$  punto singular, luego  $(-x_1, -y_1)$  también es punto singular.

Como  $a \neq 0$ , sabemos que  $x \neq 0$ . Cuando  $y_1 = 0$ , usaremos la transformación  $x = x_1\bar{x}$ ,  $e, y = \bar{y}$ , y en el caso que  $y_1 \neq 0$ , usaremos la transformación  $x = x_1\bar{x}$ ,  $e, y = y_1\bar{x} + \bar{y}$ .

Luego:

$$\dot{x} = x_1\dot{\bar{x}} \Rightarrow \dot{\bar{x}} = \frac{a}{x_1} + (a_{20}x_1 + a_{11}y_1)\bar{x}^2 + a_{11}\bar{x}\bar{y}$$

$$\dot{y} = y_1\dot{\bar{x}} + \dot{\bar{y}} \Rightarrow (b - \frac{ay_1}{x_1}) + (b_{20}x_1^2 + b_{02}y_1^2 + b_{11}x_1y_1 - a_{20}x_1y_1 - a_{11}y_1^2)\bar{x}\bar{y} + b_{02}\bar{y}^2$$

Entonces:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{a} + (a_{20}x_1 + a_{11}y_1)\bar{x}^2 + a_{11}\bar{x}\bar{y}$$

$$\dot{\bar{y}} = \bar{b} + (b_{20}x_1^2 + b_{02}y_1^2 + (b_{11} - a_{20})x_1y_1 - a_{11}y_1^2)\bar{x}^2 + (b_{11}x_1 + 2b_{02}y_1 - a_{11})\bar{x}\bar{y} + b_{02}\bar{y}^2$$

Como  $(x_1, y_1)$  es un punto singular se tiene

$$\begin{aligned}a + a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1y_1 &= 0 \\ b + b_{20}x_1^2 + b_{11}x_1y_1 + b_{02}y_1^2 &= 0\end{aligned}$$

Se tiene

$$\begin{aligned}-\frac{a}{x_1} &= a_{20}x_1 + a_{11}x_1y_1 \\ b &= -b_{20}x_1^2 - b_{11}x_1y_1 - b_{02}y_1^2\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \bar{a} - \frac{a}{x_1} \bar{x}^2 + a_{11} \bar{x} \bar{y} \\ \dot{y} &= \bar{b} - \left(b + \frac{a}{x_1} y_1\right) \bar{x}^2 + (b_{11} x_1 + 2b_{02} y_1 - a_{11}) \bar{x} \bar{y} + b_{02} \bar{y}^2\end{aligned}$$

Intercambiando  $x, y$  por  $\bar{x}, \bar{y}$  se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a - ax^2 + a'_{11} xy \\ \dot{y} &= b - bx^2 + b'_{11} xy + b'_{02} y^2\end{aligned}$$

Sea

$$\tau = at \rightarrow \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{a} \frac{dx}{dt}$$

Luego:

$$\begin{aligned}a \frac{dx}{d\tau} &= a - ax^2 + a'_{11} xy \\ a \frac{dy}{d\tau} &= b - bx^2 + b'_{11} xy + b'_{02} y^2\end{aligned}$$

O sea que

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= 1 - x^2 + \alpha xy \\ \frac{dy}{d\tau} &= \beta(1 - x^2) + m_1 xy + ny^2\end{aligned}$$

1) Para  $\alpha = 0$

- Si  $n = 0$ , el sistema nos queda

$$I = \begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 \\ \dot{y} = \beta(1 - x^2) + m_1 xy \end{cases}$$

- Si  $n \neq 0$ , sea  $\bar{y} = ny$ , luego

$$\frac{\dot{\bar{y}}}{n} = l - lx^2 + m_1 x \frac{\bar{y}}{n} + n \frac{\bar{y}^2}{n^2} \Rightarrow \dot{\bar{y}} = nl - nlx^2 + m_1 x \bar{y} + \bar{y}^2$$

Luego al cambiar  $\bar{y}$ , por  $y$  se tiene

$$II = \begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 \\ \dot{y} = \beta - \beta x^2 + m_1 xy + y^2 \end{cases}$$

2) Para  $\alpha \neq 0$ , realizaremos la siguiente sustitución  $y = \frac{1}{\alpha}\bar{y}$  en el sistema (2.2 ). Luego:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 - x^2 + x\bar{y} \\ \dot{y} &= \alpha l - \alpha l x^2 + \alpha m_1 x y - \alpha n y^2 \\ &= \alpha l - \alpha l x^2 + m_1 x \bar{y} + \frac{n}{\alpha} \bar{y}^2\end{aligned}$$

- Luego si  $n = 0$  se tiene:

$$III = \begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 + xy \\ \dot{y} = \beta - \beta x^2 + m_1 xy \end{cases}$$

- Para  $n \neq 0$  se tiene:

$$IV = \begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 + xy \\ \dot{y} = \beta - \beta x^2 + m_1 xy + sy^2 \end{cases}$$

Sea  $m_1 = \beta + m$ , luego las familias **III** y **IV** nos quedan:

$$\begin{aligned}III &= \begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 + xy \\ \dot{y} = \beta(1 - x^2 + xy) + mxy \end{cases} \\ IV &= \begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 + xy \\ \dot{y} = \beta(1 - x^2 + xy) + mxy + sy^2 \end{cases}\end{aligned}$$

□

## 2.1. Existencia de ciclos límites

**Lema 2.1.1.** *Las familias I, y, II no tienen ciclos límites.*

*Demostración.*

Como  $x = 1$ ,  $y$ ,  $x = -1$  son rectas invariantes para I, y, II, y estas contienen todos los puntos singulares, entonces no existen ciclos límites. □

**Notación 2.1.2.** *La recta  $x = 0$  es una recta sin contactos, ya que  $\dot{x}|_{x=0} = 1$*

**Lema 2.1.3.** *Los ciclos límites no pueden intersectar a la recta  $x = 0$ .*

*Demostración.*

Como  $x = 0$  es un recta sin contactos los ciclos límites no pueden intersectarla. □

**Lema 2.1.4.** *Los sistemas III, y, IV tienen a lo más dos ciclos límites.*

*Demostración.*

Probaremos que para  $x > 0$  estos sistemas tienen a lo más un ciclo límite. Sea  $\eta = 1 - x^2 + xy$ ,  $x = x$ ,  $y = y$ ,  $dt = x d\tau$ , así que

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = x\eta \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\tau} = x(\beta(1 - x^2 + xy) + mxy + sy^2)\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{d\eta}{d\tau} &= -2x \frac{dx}{d\tau} + y \frac{dx}{d\tau} + x \frac{dy}{d\tau} \\ &= -2x^2\eta + xy\eta + x^2(\beta(1 - x^2 + xy) + mxy + sy^2) \\ &= -2x^2\eta + \eta(\eta - 1 + x^2) + \beta x^2 - \beta x^4 + (\beta + m)x^2(\eta - 1 + x^2) + s(\eta - 1 + x^2)^2 \\ &= (-\eta + (\beta + m)\eta - m + 2s\eta - 2s)x^2 + (m + s)x^4 + ((1 + s)\eta^2 - (2s + 1)\eta + s^2)\end{aligned}$$

Sea  $u = x^2$ ,  $y = y$ ,  $\eta = \eta$ , así que

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= 2u\tau \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= ((-1 + \beta + m + 2s)\eta - m - 2s)u + (m + s)u^2 + ((1 + s)\eta^2 - (2s + 1)\eta + s^2)\end{aligned}$$

Como en este último sistema  $u = 0$  es una recta invariante, se tiene que este sistema tiene a lo más un ciclo límite; Así que los sistemas III, y, IV en el plano  $x > 0$ , tienen a lo más un ciclo límite, por lo tanto usando el Lema 1.0.1, tenemos que a lo más tienen dos ciclos límites.  $\square$

# Capítulo 3

## Singularidades en el plano finito

### 3.1. Singularidades de la familia I

**Proposición 3.1.1.**

- a)  $(1,0)$  es un punto silla si  $m > 0$ .
- b)  $(1,0)$  es atractor si  $m < 0$ .
- c) Si  $m = 0$  el sistema tiene infinitos puntos críticos.

*Demostración.*

Hallaremos los puntos críticos del sistema

$$\begin{aligned}1 - x^2 &= 0 \\ \beta(1 - x^2) + mxy &= 0\end{aligned}$$

Luego para  $m \neq 0$  los puntos críticos son  $(1, 0)$  y  $(-1, 0)$  y para  $m = 0$  existen  $\infty$  puntos críticos la matriz Jacobiana del sistema en el punto  $(1, 0)$  es

$$\mathbf{M}(1, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2\beta & m \end{bmatrix}$$

- a) Los valores propios son  $\lambda_1 = -2$  y  $\lambda_2 = m$  por lo tanto si  $m > 0$ , se tiene que  $(1, 0)$  es un punto silla
- b) Si  $m < 0$  se tiene que los dos valores propios son negativos y por lo tanto  $(1, 0)$  es un nodo atractor
- c) En el caso  $m = 0$  el sistema nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 - x^2 \\ \dot{y} &= \beta(1 - x^2)\end{aligned}$$

Por lo tanto si  $m = 0$  se tiene infinitos puntos críticos.

□

**Proposición 3.2.1.**

- a)  $(1, 0)$  es un silla-nodo si  $m = 0$ .
- b)  $(1, 0)$  es un punto silla y  $(1, -m)$  es un nodo atractor si  $m > 0$ .
- c)  $(1, 0)$  es un nodo atractor y  $(1, -m)$  es punto silla si  $m < 0$ .

*Demostración.*

Primero hallaremos los puntos críticos para  $m \neq 0$  del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 - x^2 = 0 \\ \beta(1 - x^2) + mxy + y^2 = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$x = 1$  y  $my + y^2 = 0$ , luego  $y = 0$  y  $y = -m$ , por lo tanto los puntos críticos son  $(1, 0)$ , y,  $(1, -m)$ .

La matriz jacobiana del sistema en  $(1, 0)$  es

$$\mathbf{M}(1, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2\beta & m \end{bmatrix}$$

y en  $(1, -m)$  es

$$\mathbf{M}(1, -m) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ (-2 - m)\beta - m^2 & -m \end{bmatrix}$$

Los valores propios de la matriz  $M(1, 0)$  son  $\lambda_{1(1,0)} = -2$  y  $\lambda_{2(1,0)} = m$  y los valores propios de la matriz  $M(1, -m)$  son  $\lambda_{1(1,-m)} = -2$  y  $\lambda_{2(1,-m)} = -m$

a) Si  $m = 0$ , el sistema nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 \\ \dot{y} = \beta(1 - x^2) + y^2 \end{cases} \quad (3.2)$$

Sea  $u = x - 1$ , entonces el sistema nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{u} = -u^2 - 2u \\ \dot{y} = \beta(-u^2 - 2u) + y^2 \end{cases} \quad (3.3)$$

Sea  $v = -\beta u + y \Rightarrow \dot{v} = -\beta\dot{u} + \dot{y} = y^2$ , entonces el sistema nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{u} = -u^2 - 2u \\ \dot{v} = \beta(\beta u^2 + 2uv) + v^2 \end{cases} \quad (3.4)$$

Multiplicando por  $-\frac{1}{2}$  se tiene :

$$\begin{cases} \dot{x} = u + \frac{1}{2}u^2 \\ \dot{v} = -\beta(\frac{1}{2}\beta u^2 + uv) - \frac{1}{2}v^2 \end{cases} \quad (3.5)$$

Aplicando el Teorema 2.2 :

$$u + \frac{1}{2}u^2 = 0 \Rightarrow g(v) = V(u(v), v) = -\frac{1}{2}v^2$$

de esta forma se tiene  $n = 2$ , y,  $a_n = -\frac{1}{2}$

por lo tanto  $(1, 0)$  es un silla-nodo.

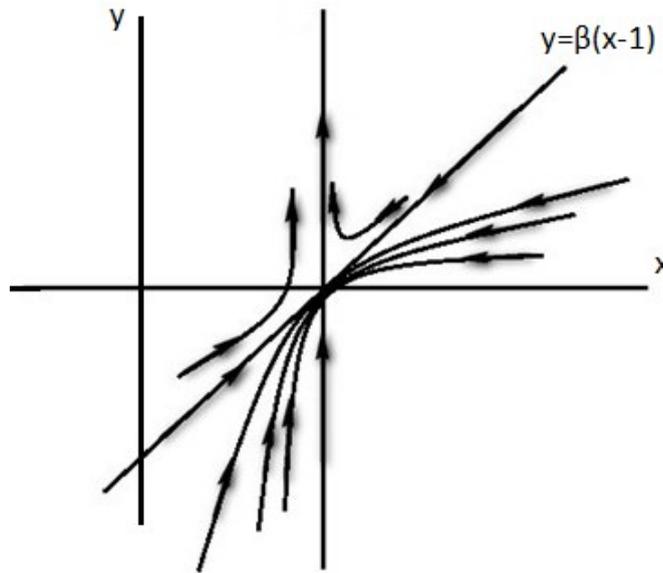


Figura 2.9,  $\beta > 0$

- b) Si  $m > 0$ , se tiene que  $\lambda_{1(1,0)} < 0$  y  $\lambda_{2(1,0)} > 0$ , por otra parte  $\lambda_{1(1,-m)} < 0$  y  $\lambda_{2(1,-m)} < 0$  y así podemos afirmar que el punto  $(1, 0)$  es un punto silla y el punto  $(1, -m)$  es un nodo atractor.
- c) Si  $m < 0$ , se tiene que los dos valores propios de  $M(1, 0)$  son negativos y de aquí el punto  $(1, 0)$  es un nodo atractor , y que  $\lambda_{1(1,-m)}\lambda_{2(1,-m)} < 0$  y así se tiene que el punto  $(1, -m)$  es un punto silla.

□

### 3.3. Singularidades de la familia III

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 + xy \\ \dot{y} = \beta(1 - x^2 + xy) + mxy \end{cases} \quad (3.6)$$

**Proposición 3.3.1.**

1) Si  $m = 0$ , se tiene que  $1 - x^2 + xy = 0$  es una curva de puntos críticos.

2) Si  $m \neq 0$ , los únicos puntos críticos son  $(1, 0)$ ,  $y$ ,  $(-1, 0)$ .

2.1) Si  $(\beta + m - 2)^2 + 8m > 0$ :

2.1.1)  $(1, 0)$  es un punto silla si  $m > 0$ .

2.1.2)  $(1, 0)$  es nodo repulsor si  $\beta + m - 2 > 0$  y  $m < 0$ .

2.1.3)  $(1, 0)$  es un nodo atractor si  $\beta + m - 2 < 0$  y  $m < 0$ .

2.1.4)  $(1, 0)$  es punto silla si  $\beta + m - 2 = 0$ .

2.2) Si  $(\beta + m - 2)^2 + 8m = 0$

2.2.1)  $(1, 0)$  es un nodo repulsor si  $\beta + m - 2 > 0$ .

2.2.2)  $(1, 0)$  es un nodo atractor si  $\beta + m - 2 < 0$ .

2.3) Si  $(\beta + m - 2)^2 + 8m < 0$ .

2.3.1)  $(1, 0)$  es un foco repulsor si  $\beta + m - 2 > 0$ .

2.3.2)  $(1, 0)$  es un foco atractor si  $\beta + m - 2 < 0$ .

2.3.3)  $(1, 0)$  es un foco débil estable si  $\beta + m - 2 = 0$ .

*Demostración.*

La matriz Jacobiana en el punto  $(1, 0)$  es :

$$\mathbf{Df}(\mathbf{1}, \mathbf{0}) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2\beta & \beta + m \end{bmatrix}$$

De aquí podemos hallar sus valores propios :

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ 2\beta & \lambda - \beta - m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + (2 - \beta - m)\lambda - 2m = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{\beta + m - 2}{2} \pm \frac{\sqrt{(\beta + m - 2)^2 + 8m}}{2}$$

2.1) Si  $(\beta + m - 2)^2 + 8m > 0$ ; En el caso de que  $m > 0$  se tienen dos raíces de signos contrarios por lo tanto es  $(1, 0)$  un puntos silla. Si por el contrario  $m < 0$ , y,  $\beta + m - 2 > 0$  tenemos dos raíces positivas, así que es  $(1, 0)$  un nodo repulsor.

Si  $\beta + m - 2 = 0$ , tenemos que  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ , entonces  $(1, 0)$  es un punto silla. Si  $\beta + m - 2 < 0$  y  $m < 0$  los valores propios son negativos, de ello  $(1, 0)$  es un nodo atractor.

2.2) Si  $(\beta + m - 2)^2 + 8m = 0$ . En el caso de que  $\beta + m - 2 > 0$ , tenemos dos valores propios positivos, así que  $(1, 0)$  es un nodo repulsor. En el otro caso se tiene dos valores propios negativos, entonces  $(1, 0)$  es un nodo atractor.

2.3) Si  $(\beta+m-2)^2+8m < 0$ ; En este caso tenemos que  $\lambda_1 = \frac{\beta+m-2}{2} + i\frac{\sqrt{-(\beta+m-2)^2-8m}}{2}$ ,  
 y,  $\lambda_2 = \frac{\beta+m-2}{2} - i\frac{\sqrt{-(\beta+m-2)^2-8m}}{2}$ , luego si  $\beta+m-2 > 0$ , se tiene que  $(1, 0)$   
 es un foco repulsor y en caso de que  $\beta+m-2 < 0$ , tenemos que  $(1, 0)$  es un foco atractor.  
 Ahora probaremos que en el caso  $\beta+m-2 = 0$ , el punto  $(1, 0)$  es un foco débil estable.

Sea  $u = x - 1$  y  $v = y$ , entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -2u + v + uv - u^2 \\ \dot{v} &= -2\beta u + 2v + 2uv - \beta u^2\end{aligned}$$

Ahora hallaremos los vectores propios de la matriz Jacobiana,

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2\beta & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_2 = (\lambda + 2)v_1$$

Como  $\lambda = \pm i\sqrt{-2m}$ , tenemos que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{-2m} \end{bmatrix}, \text{ y, } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{-2m}} & \frac{1}{\sqrt{-2m}} \end{bmatrix}$$

Sea

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Así que:

$$\begin{aligned}u &= w_1 & w_1 &= u \\ v &= 2w_1 + \sqrt{-2m}w_2, \text{ y, } & w_2 &= -\frac{2}{\sqrt{-2m}}u + \frac{1}{\sqrt{-2m}}v\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-2m} \\ -\sqrt{-2m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} uv - u^2 \\ -\frac{\beta+2}{\sqrt{-2m}}u^2 \end{bmatrix}$$

de aquí tenemos que:

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= \sqrt{-2m}w_2 + w_1^2 + \sqrt{-2m}w_1w_2 \\ \dot{w}_2 &= -\sqrt{-2m}w_1 - \frac{\beta-2}{\sqrt{-2m}}w_1^2\end{aligned}$$

Dividiendo entre  $-\sqrt{-2m}$

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= -w_2 - \frac{1}{\sqrt{-2m}}w_1^2 - w_1w_2 \\ \dot{w}_2 &= w_1 + \frac{1}{2}w_1^2\end{aligned}$$

La divergencia de este sistema en  $(0, 0)$  es  $\operatorname{div}(P, Q) = -\frac{2w_1}{\sqrt{-2m}} - w_2 \Big|_{(0,0)} = 0$ ,

también vemos que  $a_{20} = -\frac{1}{\sqrt{-2m}}$ ,  $a_{11} = -1$ ,  $a_{02} = 0$ ,  $b_{20} = \frac{1}{2}$ ,  $b_{11} = 0$ , y,  $b_{02} = 0$ ,

luego  $A = -\frac{1}{\sqrt{-2m}}$ ,  $B = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = -1 - (-1) = 0$ , y,  $\beta = -\frac{2}{\sqrt{-2m}}$  y como

$W_1 = A\alpha - B\beta = 0 - \frac{1}{2}\frac{-2}{\sqrt{-2m}} = \frac{1}{\sqrt{-2m}}$ , por lo tanto  $(0, 0)$  es un foco débil inestable (Por teorema 1.0.5), luego  $(1, 0)$  es un foco débil estable (ya que dividimos el sistema entre  $-\sqrt{-2m}$ ).

□

### 3.4. Singularidades en el plano finito Familia IV

**Lema 3.4.1.**

- 1) Si  $1 + \frac{m}{s} \leq 0$ , los únicos puntos críticos del sistema son  $(\epsilon, 0)$ , y  $(-\epsilon, 0)$ .
- 2) Si  $1 + \frac{m}{s} > 0$ , entonces el sistema tiene cuatro puntos singulares  $(\pm\epsilon, 0)$ , y,  $(\pm\frac{\epsilon}{\sqrt{1+\frac{m}{s}}}, \mp\frac{m}{s}\frac{\epsilon}{\sqrt{1+\frac{m}{s}}})$

#### 3.4.1. Estudio del punto singular $(\epsilon, 0)$

En la siguiente proposición solo probaremos todo acerca de los puntos singulares  $(\epsilon, 0)$ , y,  $(-\epsilon, 0)$ , ya que ellos son singulares en cualquier región del plano  $1 + \frac{m}{s} > 0$ , o,  $1 + \frac{m}{s} \leq 0$ .

**Proposición 3.4.2.**

- 1) Si  $(\beta + m - 2)^2 + 8m > 0$ 
  - 1.1) Si  $m > 0$ , el punto  $(\epsilon, 0)$  es un punto silla.
  - 1.2) Si  $m < 0$ ,
    - 1.2.1) Si  $\beta + m - 2 > 0$ , el punto  $(\epsilon, 0)$  es un nodo repulsor
    - 1.2.2) Si  $\beta + m - 2 < 0$ , el punto  $(\epsilon, 0)$  es un nodo atractor.
  - 1.3) Si  $m = 0$ , y  $s \neq 0$ , y,  $\beta \neq 2$ , el punto  $(\epsilon, 0)$  es un silla nodo.

2) Si  $(\beta + m - 2)^2 + 8m = 0$ ,

2.1) Si  $\beta + m - 2 > 0$ , el punto  $(\epsilon, 0)$  es un nodo repulsor.

2.2) Si  $\beta + m - 2 < 0$ , el punto  $(\epsilon, 0)$  es un nodo atractor.

2.3) Si  $\beta + m - 2 = 0$ , el punto  $(\epsilon, 0)$  tiene dos sectores hiperbólicos

3) Si  $(\beta + m - 2)^2 + 8m < 0$ ,

3.1) Si  $\beta + m - 2 > 0$ , el punto  $(\epsilon, 0)$  es un foco repulsor.

3.2) Si  $\beta + m - 2 < 0$ , el punto  $(\epsilon, 0)$  es un foco atractor.

3.3) Si  $\beta + m - 2 = 0$ ,

3.3.1) Si  $s \in (\frac{1}{2}, \frac{m}{m-2})$ , entonces el punto  $(\epsilon, 0)$  es un foco débil estable.

3.3.2) Si  $s \notin [-\frac{1}{2}, \frac{m}{m-2}]$ , entonces el punto  $(\epsilon, 0)$  es un foco débil inestable.

3.3.3) Si  $s \in \{-\frac{1}{2}, \frac{m}{m-2}\}$ , entonces el punto  $(\epsilon, 0)$  es un centro.

*Demostración.*

La matriz asociada al sistema en el punto  $(\epsilon, 0)$  es:

$$\mathbf{Df}(\epsilon, 0) = \epsilon \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2\beta & \beta + m \end{bmatrix}$$

Sus valores propios son:

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2\epsilon & -\epsilon \\ 2\epsilon\beta & \lambda - (\beta + m)\epsilon \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + (2 - \beta - m)\epsilon\lambda - 2m\epsilon^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \epsilon \left( \frac{\beta + m - 2}{2} \pm \frac{\sqrt{(\beta + m - 2)^2 + 8m}}{2} \right)$$

1) Si  $(\beta + m - 2)^2 + 8m > 0$ .

En el caso de que  $m > 0$  se tienen dos raíces de signos opuestos por lo tanto es  $(\epsilon, 0)$  un punto silla.

1.1) Si por el contrario  $m < 0$ , tenemos dos raíces positivas en el caso de que  $\beta + m - 2 > 0$ , así que es  $(\epsilon, 0)$  un nodo repulsor. En caso contrario se tienen dos raíces negativas, de aquí  $(\epsilon, 0)$  es un nodo atractor.

2) Si  $(\beta + m - 2)^2 + 8m = 0$ .

En el caso de que  $\beta + m - 2 > 0$ , tenemos dos valores propios positivos, así que  $(\epsilon, 0)$  es un nodo repulsor. En el otro caso se tiene dos valores propios negativos, entonces  $(\epsilon, 0)$  es un nodo atractor.

2.1) Si  $\beta + m - 2 = 0 \Rightarrow \beta = 2$ , y,  $m = 0$ , en este caso la matriz asociada al sistema es:

$$Df(\epsilon, 0) = \epsilon \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

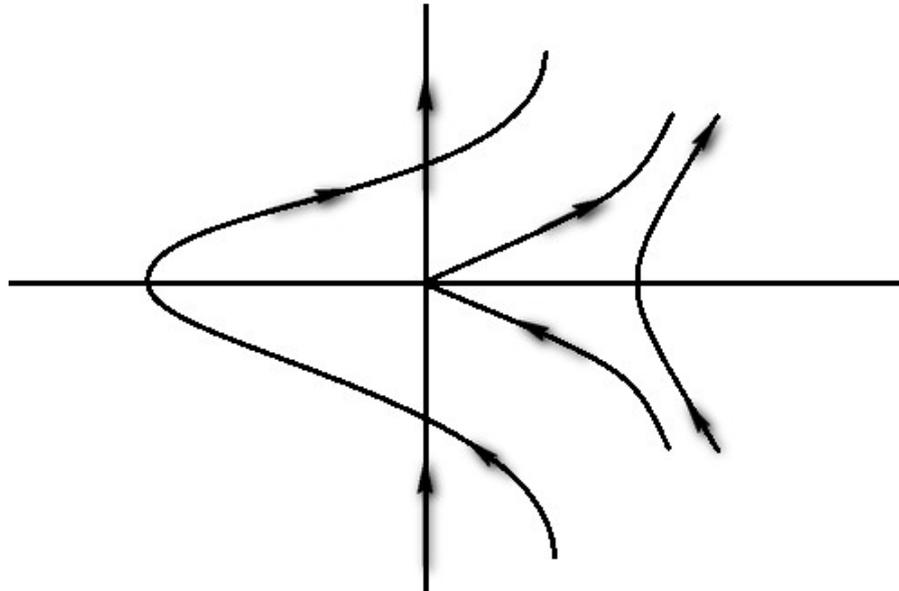
Así que sus valores propios son  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Sea  $u = x - \epsilon$ , e,  $y = v$ , luego

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \epsilon v - 2\epsilon u - u^2 + uv \\ \dot{v} &= 2\epsilon v - 4\epsilon u - 2u^2 + 2uv + sv^2 \end{aligned}$$

Sea  $w = v - 2u \Rightarrow \dot{w} = \dot{v} - 2\dot{u}$ , así que:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= sv^2 \\ \dot{v} &= 2\epsilon w + (s + \frac{1}{2})v^2 - \frac{1}{2}w^2 \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema 1.4, tenemos que  $W(w, v) = \frac{s}{2\epsilon}v^2$ , y,  $V(w, v) = (\frac{s}{2\epsilon} + \frac{1}{4\epsilon})v^2 - \frac{1}{4\epsilon}w^2$ , así que  $w = -(\frac{s}{2\epsilon} + \frac{1}{4\epsilon})v^2 + \dots$ , y,  $f(v) = \frac{s}{2\epsilon}v^2$  de aquí  $a = \frac{s}{2\epsilon} \neq 0$ , y,  $\alpha = 2$ ; además  $\Phi(v) = \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial W}{\partial w} = (\frac{s}{\epsilon} + \frac{1}{2\epsilon})v$ ,  $b = (\frac{s}{\epsilon} + \frac{1}{2\epsilon}) \neq 0$ , y,  $\beta = 1$ . Por lo tanto tenemos que  $\alpha$  es par, y,  $\alpha < 2\beta + 1$ , entonces el punto tiene dos sectores hiperbólicos.



Dos sectores hiperbólicos

3) Si  $(\beta + m - 2)^2 + 8m < 0$

En este caso tenemos que  $\lambda_1 = \epsilon \left( \frac{\beta + m - 2}{2} + i \frac{\sqrt{-(\beta + m - 2)^2 - 8m}}{2} \right)$ , y,  $\lambda_2 = \epsilon \left( \frac{\beta + m - 2}{2} - i \frac{\sqrt{-(\beta + m - 2)^2 - 8m}}{2} \right)$ , luego si  $\beta + m - 2 > 0$ , se tiene que  $(\epsilon, 0)$  es un foco inestable y en caso de que  $\beta + m - 2 < 0$ , tenemos que  $(\epsilon, 0)$  es un foco atractor.

3.1) Ahora probaremos que en el caso  $\beta + m - 2 = 0$ , el punto  $(\epsilon, 0)$  es un foco débil, si

$$s \neq -\frac{1}{2}, y, s \neq \frac{m}{m-2}.$$

Sea  $u = x - \epsilon$  y  $v = y$ , entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -2\epsilon u + \epsilon v + uv - u^2 \\ \dot{v} &= -2\epsilon\beta u + 2\epsilon v + 2uv - \beta u^2 + sv^2\end{aligned}$$

Ahora hallaremos los vectores propios de la matriz Jacobiana,

$$\begin{bmatrix} -2\epsilon & \epsilon \\ -2\epsilon\beta & 2\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_2 = (\lambda + 2)v_1$$

Como  $\lambda = \pm i\epsilon\sqrt{-2m}$ , tenemos que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{-2m} \end{bmatrix}, y, P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{-2m}} & \frac{1}{\sqrt{-2m}} \end{bmatrix}$$

Sea

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Así que:

$$\begin{aligned}u &= w_1 & w_1 &= u \\ v &= 2w_1 + \sqrt{-2m}w_2 & w_2 &= -\frac{2}{\sqrt{-2m}}u + \frac{1}{\sqrt{-2m}}v\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon\sqrt{-2m} \\ -\epsilon\sqrt{-2m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} w_1^2 + \sqrt{-2m}w_1w_2 \\ \frac{4s+m}{\sqrt{-2m}}w_1^2 + 4sw_1w_2 + s\sqrt{-2m}w_2^2 \end{bmatrix}$$

de aquí tenemos que:

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= \epsilon\sqrt{-2m}w_2 + w_1^2 + \sqrt{-2m}w_1w_2 \\ \dot{w}_2 &= -\epsilon\sqrt{-2m}w_1 - \frac{4s+m}{\sqrt{-2m}}w_1^2 + 4sw_1w_2 + s\sqrt{-2m}w_2^2\end{aligned}$$

Dividiendo entre  $-\epsilon\sqrt{-2m}$

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= -w_2 - \frac{1}{\epsilon\sqrt{-2m}}w_1^2 - \frac{1}{\epsilon}w_1w_2 \\ \dot{w}_2 &= w_1 + \frac{4s+m}{2\epsilon m}w_1^2 - \frac{4s}{\epsilon\sqrt{-2m}}w_1w_2 - \frac{s}{\epsilon}w_2^2\end{aligned}$$

La divergencia de este sistema en  $(0,0)$  es

$$\operatorname{div}(P, Q)_{(0,0)} = -\frac{2w_1}{\epsilon\sqrt{-2m}} - \frac{1}{\epsilon}w_2 - \frac{4s}{\epsilon\sqrt{-2m}}w_1w_2 - \frac{s}{\epsilon}w_2^2 \Big|_{(0,0)} = 0$$

Además sabemos que  $a_{20} = -\frac{1}{\epsilon\sqrt{-2m}}$ ,  $a_{11} = -\frac{1}{\epsilon}$ ,  $a_{02} = 0$ ,  $b_{20} = \frac{4s+m}{2\epsilon m}$ ,  $b_{11} = -\frac{4s}{\epsilon\sqrt{-2m}}$ ,  $y$ ,  $b_{02} = -\frac{s}{\epsilon}$ , luego  $A = -\frac{1}{\epsilon\sqrt{-2m}}$ ,  $B = \frac{4s+m}{2\epsilon m} - \frac{s}{\epsilon}$ ,  $\alpha = -\frac{1}{\epsilon} - \frac{2s}{\epsilon}$ ,  $y$ ,  $\beta = -\frac{4s+2}{\epsilon\sqrt{-2m}}$ , así que

$$W_1 = A\alpha - B\beta = -\frac{2(2s+1)((m-2)s-m)}{\epsilon^2 m \sqrt{-2m}}$$

por lo tanto  $(0,0)$  es un foco débil, luego  $(\epsilon,0)$  es un foco débil en el caso de que  $s \neq -\frac{1}{2}$ ,  $y$ ,  $s \neq \frac{m}{m-2}$ .

Si  $s \in (-\frac{1}{2}, \frac{m}{m-2})$  se tiene que  $(\epsilon,0)$  es un foco débil estable y en el caso que  $s \notin [-\frac{1}{2}, \frac{m}{m-2}]$  se tiene que  $(\epsilon,0)$  es un foco débil inestable.

□

### 3.4.2. Singularidades en el caso $1 + \frac{m}{s} > 0$

**Proposición 3.4.3.** Si  $m > 0$ , el retrato de fase del punto  $P_1$  es equivalente al retrato de fase del punto  $(\epsilon,0)$  en  $m < 0$ .

*Demostración.*

Sea  $v = mx + sy$ , reemplazando en el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \epsilon^2 - x^2 + xy \\ \dot{y} = \beta(\epsilon^2 - x^2 + xy) + mxy + sy^2 \end{cases} \quad (3.7)$$

se tiene que:

$$\dot{x} = \epsilon^2 - \left(1 + \frac{m}{s}\right)x^2 + \frac{1}{s}xv$$

$$\dot{v} = (m + s\beta) \left( \epsilon^2 - \left(1 + \frac{m}{s}\right)x^2 + \frac{1}{s}xv \right) - mxv + v^2$$

Sea  $z = \alpha x$ ,  $w = \gamma v$ ,  $y$ ,  $t = \frac{1}{\alpha}t_1$  donde  $\gamma = \frac{1}{s\alpha}$  y  $\alpha = \sqrt{1 + \frac{m}{s}}$ , entonces

$$\dot{z} = \epsilon^2 - \frac{1 + \frac{m}{s}}{\alpha^2}z^2 + \frac{1}{s\alpha\gamma}zw$$

$$\dot{w} = \frac{m + s\beta}{m + s} \left( \epsilon^2 - z^2 + zw \right) - \frac{m}{\left(1 + \frac{m}{s}\right)}zw + sw^2$$

Sea  $\delta = \frac{m + s\beta}{m + s}$ ,  $y$ ,  $\mu = -\frac{m}{\left(1 + \frac{m}{s}\right)}$  así que  $\mu < 0 \Leftrightarrow m > 0$  y de aquí el sistema nos queda de la siguiente forma:

$$\dot{z} = \epsilon^2 - \frac{1 + \frac{m}{s}}{\alpha^2}z^2 + \frac{1}{s\alpha\gamma}zw$$

$$\dot{w} = \delta \left( \epsilon^2 - z^2 + zw \right) + \mu zw + sw^2$$

Por lo tanto el sistema nos queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \epsilon^2 - z^2 + zw \\ \dot{w} &= \delta \left( \epsilon^2 - z^2 + zw \right) + \mu zw + sw^2 \end{aligned}$$

El punto crítico  $(\epsilon, 0)$  en este sistema, es el punto  $P_1$  en el sistema (3.7).

En la siguiente Proposición solo demostraremos las propiedades del punto  $P_1 = \left(\alpha, -\frac{m}{s}\alpha\right)$ , donde  $\alpha = \frac{\epsilon}{\sqrt{1 + \frac{m}{s}}}$ , ya que para el punto  $(\epsilon, 0)$  se probaron en la Proposición 3.4.2.

Sea  $b_1 = \alpha \left(2 + \frac{m}{s} - \beta + m\right)$  □

**Proposición 3.4.4.**

1) Si  $b_1^2 - 8m > 0$ , y,

1.1) Si  $b_1 > 0$ ,  $y$ ,  $m > 0$ , entonces  $P_1$  es un nodo atractor.

1.2) Si  $b_1 < 0$ ,  $y$ ,  $m > 0$ , se tiene que  $P_1$  es un nodo repulsor.

- 1.3) Si  $m < 0$ , tenemos que  $P_1$  es un punto silla.
- 2) Si  $b_1^2 - 8m = 0$ , y,
- 2.1) Si  $b_1 > 0$  entonces  $P_1$  es un nodo atractor.
- 2.2) Si  $b_1 < 0$  se tiene que  $P_1$  es un nodo repulsor.
- 3) Si  $b_1^2 - 8m < 0$ , y,
- 3.1) Si  $b_1 > 0$ , entonces  $P_1$  es un foco atractor.
- 3.2) Si  $b_1 < 0$ , se tiene  $P_1$  es un foco repulsor.
- 3.3) Si  $b_1 = 0$ , y,  $m > 0$ , entonces  $P_1$  es un foco débil.

*Demostración.*

Por la Proposición 3.4.3 todos los incisos con  $m > 0$  son ciertos, así que solo nos falta demostrar los incisos donde  $m < 0$ .

La matriz asociada al sistema en el punto  $P_1$  es:

$$\mathbf{Df}\left(\alpha, \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}\alpha\right) = \begin{bmatrix} \alpha\left(2 + \frac{m}{s}\right) & -\alpha \\ b_1 & -\alpha(\beta - m) \end{bmatrix}$$

Su ecuación característica es  $\lambda^2 + b_1\lambda + 2m = 0$ , luego si  $b_1^2 - 8m > 0$ , y,  $m < 0$ , sus valores propios tienen signos opuestos, así que  $P_1$  es un punto silla.

Si  $b_1^2 - 8m = 0$ , sus valores propios serán ambos negativos (o positivos) en el caso de que  $b_1 > 0$  (o  $b_1 < 0$ ), así que  $P_1$  es un nodo atractor (repulsor).

Si  $b_1^2 - 8m < 0$ , la ecuación característica tiene raíces imaginarias, luego  $P_1$  es un foco atractor (repulsor) si  $b_1 > 0$  ( $b_1 < 0$ ).  $\square$

En particular para  $\epsilon = 1$  se cumplen todas las Proposiciones

# Capítulo 4

## Singularidades en el infinito

### 4.1. Singularidades familia I

En la carta  $U_1$

Para  $\beta \neq 0$  el sistema nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -z^2 y + y + \beta(z^2 - 1) + my \\ \dot{z} &= -z(z^2 - 1) \end{aligned} \quad (4.1)$$

la matriz Jacobiana del sistema es :

$$\mathbf{M}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} -z^2 + 1 + m & -2zy + 2\beta z \\ 0 & -3z^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Para  $\beta = 0$  el sistema nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -z^2 y + y + my \\ \dot{z} &= -z(z^2 - 1) \end{aligned} \quad (4.2)$$

la matriz Jacobiana del sistema es :

$$\mathbf{M}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} -z^2 + 1 + m & -2zy \\ 0 & -3z^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Primero hallaremos los puntos críticos en el infinito para el caso  $\beta \neq 0$ , en efecto para  $z = 0$  se tiene que  $y = \frac{\beta}{m+1}$  para  $m \neq -1$

Por lo tanto en  $(\frac{\beta}{m+1}, 0)$  la matriz nos queda :

la matriz Jacobiana del sistema es :

$$\mathbf{M}\left(\frac{\beta}{m+1}, \mathbf{0}\right) = \begin{bmatrix} m+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora hallaremos los puntos críticos en el caso  $\beta = 0$ , en efecto para  $z = 0$  se tiene que  $y = 0$  si  $m \neq -1$

Por lo tanto la matriz jacobiana en el punto  $(0, 0)$  es :

$$\mathbf{M}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 1 + m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Notación 4.1.1.** *En el caso de que  $m = -1$ , para  $\beta \neq 0$  el sistema no tiene puntos críticos, y para  $\beta = 0$  el sistema tiene infinitos puntos críticos.*

**Proposición 4.1.2.** *En la carta  $U_1$  se tiene :*

- a)  $(\frac{\beta}{m+1}, 0)$  es un nodo repulsor si  $m > -1$  y  $\beta \neq 0$ .
- b)  $(\frac{\beta}{m+1}, 0)$  es un punto silla si  $m < -1$  y  $\beta \neq 0$ .
- c) No existen puntos críticos si  $m = -1$  y  $\beta \neq 0$
- d) En el caso de que  $m = -1$  y  $\beta = 0$  hay infinitos puntos críticos
- e)  $(0, 0)$  es un punto silla si  $m < -1$  y  $\beta = 0$
- f)  $(0, 0)$  es un nodo repulsor si  $m > -1$ , y,  $\beta = 0$

*Demostración.*

- a) Los valores propios de la matriz  $M(\frac{\beta}{m+1}, 0)$  son  $\lambda_1 = m + 1$  y  $\lambda_2 = 1$ , por lo tanto si  $m + 1 > 0$  es un nodo repulsor.
- b) Los valores propios de la matriz  $M(\frac{\beta}{m+1}, 0)$  son  $\lambda_1 = m + 1$  y  $\lambda_2 = 1$ , por lo tanto si  $m + 1 < 0$  es un punto silla.
- c) Si  $m = -1$ , y,  $\beta \neq 0$ , para  $z = 0$  se tiene que  $\dot{y} = -1$  luego el sistema no tiene puntos críticos.
- d) Para  $\beta = 0$  y  $m = -1$  el sistema nos queda de la siguiente forma :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -z^2 y \\ \dot{z} &= -z(z^2 - 1) \end{aligned}$$

luego para  $z = 0$  se tiene que  $\dot{y} = 0$ , así que el sistema tiene infinitos puntos críticos.

- e) Los valores propios de la matriz  $M(\frac{\beta}{m+1}, 0)$  son  $\lambda_1 = m+1$  y  $\lambda_2 = 1$ , por lo tanto si  $m+1 < 0$  es un punto silla.
- f) Los valores propios de la matriz  $M(0, 0)$  son  $\lambda_1 = m+1$  y  $\lambda_2 = 1$ , por lo tanto si  $m+1 > 0$  es un nodo repulsor.

□

**En la carta  $U_2$** 

Para  $\beta \neq 0$  el sistema nos queda de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= z^2 - \beta x z^2 + \beta x^3 - (m+1)x^2 \\ \dot{z} &= -z(\beta z^2 - \beta x^2 + mx)\end{aligned}\tag{4.3}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y, para  $\beta = 0$  el sistema nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= z^2 - (m+1)x^2 \\ \dot{z} &= -mxz\end{aligned}\tag{4.4}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Proposición 4.1.3.**

- a) Para  $\beta \neq 0$ , y  $m > 0$  se tiene que  $(0, 0)$  es un punto crítico con dos sectores elíptico.
- b) Para  $m > 0$ , y,  $\beta = 0$ , se tiene que  $(0, 0)$  tiene dos sectores elíptico.
- c) Para  $-1 < m < 0$  el punto  $(0, 0)$  punto silla degenerado de índice -2.
- d) Para  $m < -1$ , el punto  $(0, 0)$  es un silla nodo alternada.
- e) Para  $m = -1$  se tiene que  $(0, 0)$  silla con 1 sector nodal de índice -1

*Demostración.*

- a)  $x\dot{z} - z\dot{x} = -z(z^2 - x^2) = 0 \Rightarrow z = 0 \quad z = -x \quad z = x$ . Usaremos la técnica del Blow-up: Sea  $x = x$ ,  $y$ ,  $z = \eta x$ , entonces  $\dot{\eta} = -\eta x(\eta^2 - 1)$ . Luego

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2(\eta^2 - 1 - m - \beta\eta^2 x + \beta x) \\ \dot{\eta} &= -\eta x(\eta^2 - 1)\end{aligned}\tag{4.5}$$

Dividiendo entre  $x$  se tiene :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(\eta^2 - 1 - m - \beta\eta^2x + \beta x) \\ \dot{\eta} &= -\eta(\eta^2 - 1) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Los puntos críticos de este sistema son  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ , y  $(0,-1)$  y las matrices jacobianas correspondientes son :

$$\mathbf{M}(0,0) = \begin{bmatrix} -m-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego  $(0,0)$  es un punto silla

$$\mathbf{M}(0,\pm 1) = \begin{bmatrix} -m & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Luego  $(0,\pm 1)$  es un nodo atractor.

Usando el Blow-up II tenemos que  $x = \eta z$ ,  $y, z = z$ , entonces  $\dot{\eta} = z(1 - \eta^2)$

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= z(1 - \eta^2) \\ \dot{z} &= -z(\beta z^2 - \beta\eta^2 z^2 + m\eta z) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Dividiendo entre  $z$  se tiene :

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= 1 - \eta^2 \\ \dot{z} &= -z(\beta z - \beta\eta^2 z + m\eta) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Los puntos críticos  $(1,0)$  es atractor y  $(-1,0)$  es repulsor

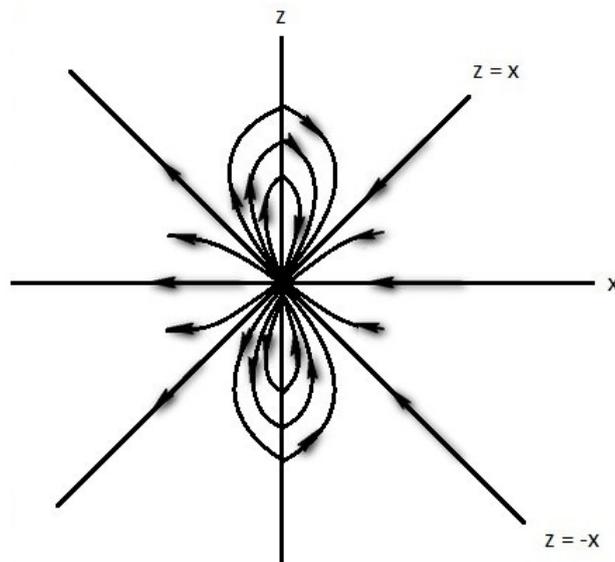


Figura 2.16

Así que el retrato de fase global es

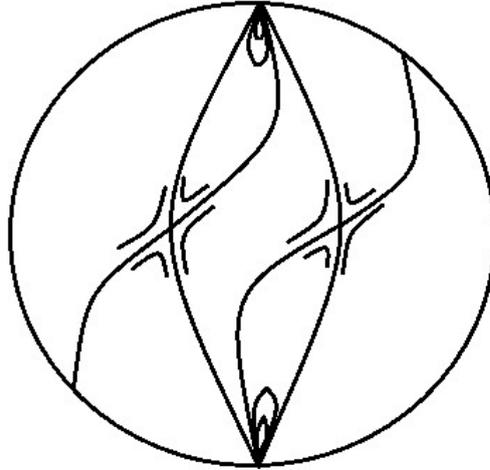


Figura 2.17,  $\beta > 0$

b) Para  $\beta = 0$  se tiene que las entradas en el infinito son:

$$x\dot{z} - z\dot{x} = z(z^2 - x^2) = 0 \Rightarrow z = 0 \quad z = x \quad z = -x$$

Aplicando la técnica del Blow-up

Blow-up I

$x = x$ ,  $y = z = \eta x$ , entonces  $\dot{\eta} = \eta x(1 - \eta^2)$  se tiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2(\eta^2 - (m+1)) \\ \dot{\eta} &= \eta x(1 - \eta^2) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Dividiendo entre x

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(\eta^2 - (m+1)) \\ \dot{\eta} &= \eta(1 - \eta^2) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Los puntos críticos son  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ , y  $(0, -1)$  y sus jacobianos son :

$$\mathbf{M}(0, 0) = \begin{bmatrix} -(m+1) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}(0, \pm 1) = \begin{bmatrix} -m & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Luego  $(0, 0)$  es un punto silla y  $(0, \pm 1)$  es un nodo atractor.

Usando Blow-up II tenemos que  $x = \eta z$ ,  $y = z$ , entonces  $\dot{\eta} = -z(\eta^2 - 1)$  y así tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= -z(\eta^2 - 1) \\ \dot{z} &= -m\eta z^2 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Dividiendo entre  $z$  se tiene :

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= -(\eta^2 - 1) \\ \dot{z} &= -m\eta z \end{aligned} \tag{4.12}$$

Tenemos que  $(1, 0)$  es un nodo atractor y  $(-1, 0)$  es un nodo repulsor

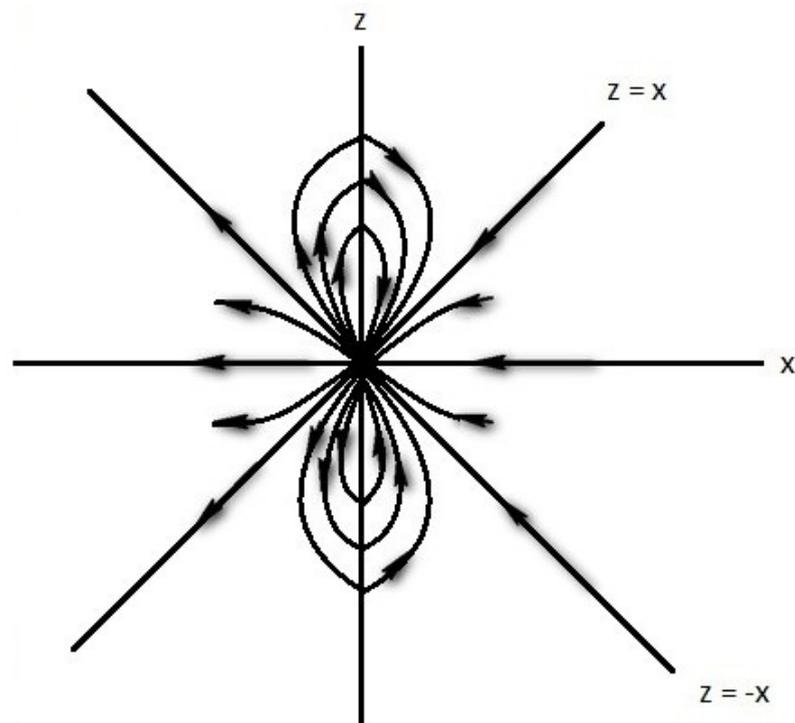


Figura 2.24

Así que el retrato de fase global es:

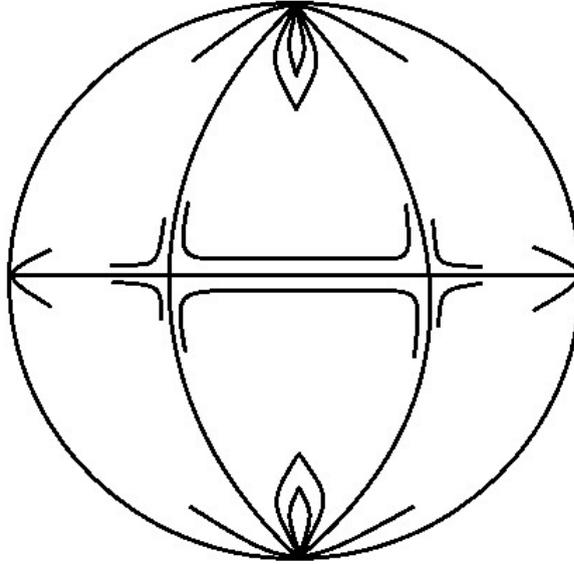


Figura 2.25

c)  $x\dot{z} - z\dot{x} = -z(z^2 - x^2) = 0 \Rightarrow z = 0 \quad z = -x \quad z = x.$

Usaremos la técnica del Blow-up :

Sea  $x = x, y, z = \eta x$ , entonces  $\dot{\eta} = -\eta x(\eta^2 - 1)$ . Luego

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2(\eta^2 - 1 - m - \beta\eta^2 x + \beta x) \\ \dot{\eta} &= -\eta x(\eta^2 - 1) \end{aligned} \tag{4.13}$$

Dividiendo entre x se tiene :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(\eta^2 - 1 - m - \beta\eta^2 x + \beta x) \\ \dot{\eta} &= -\eta(\eta^2 - 1) \end{aligned} \tag{4.14}$$

Los puntos críticos de este sistema son  $(0, 0), (0, 1), y, (0, -1)$  y las matrices jacobianas correspondientes son :

$$\mathbf{M}(0, 0) = \begin{bmatrix} -m - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego  $(0, 0)$  es un punto silla, si  $-1 < m < 0$

$$\mathbf{M}(0, \pm 1) = \begin{bmatrix} -m & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Luego  $(0, \pm 1)$  es un punto silla

Usando el Blow-up II tenemos que  $x = \eta z$ ,  $y, z = z$ , entonces  $\dot{\eta} = z(1 - \eta^2)$

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= z(1 - \eta^2) \\ \dot{z} &= -z(\beta z^2 - \beta \eta^2 z^2 + m\eta z) \end{aligned} \tag{4.15}$$

Dividiendo entre  $z$  se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= 1 - \eta^2 \\ \dot{z} &= -z(\beta z - \beta \eta^2 z + m\eta) \end{aligned} \tag{4.16}$$

Los puntos críticos  $(1, 0)$ , y  $(-1, 0)$  son sillas para  $m < 0$  y  $(\beta \neq 0, \text{ en el caso } m = -1)$ .

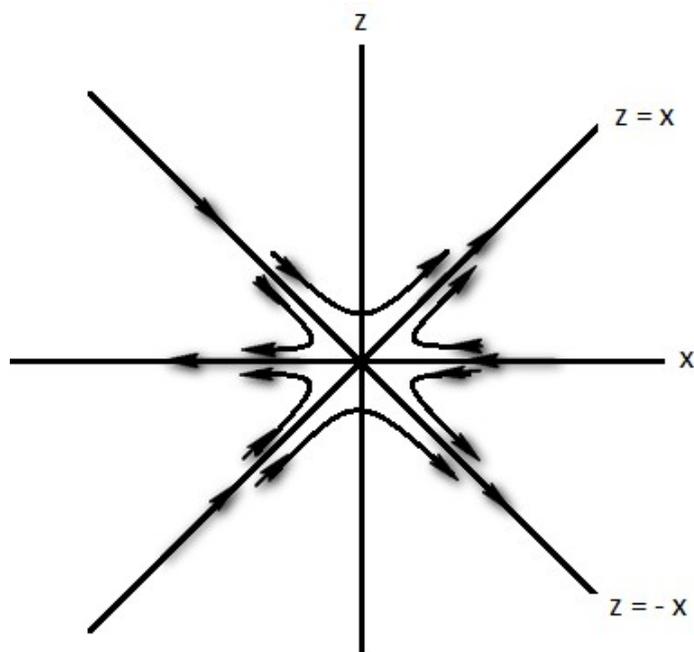


Figura 2.32

Así que el retrato de fase global es:

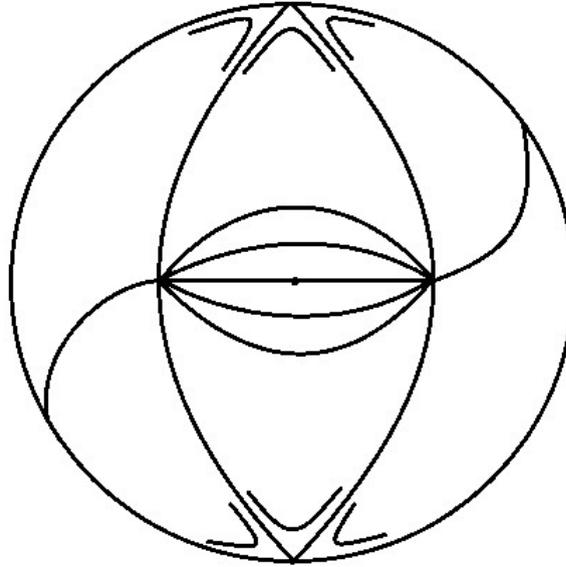


Figura 2.33

d) Aplicando la técnica del Blow-up:

Blow-up I

Sea  $x = x$ ,  $y = y$ ,  $z = \eta x$ , entonces  $\dot{\eta} = \eta x(-\eta^2 + 1)$

Luego

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2(\eta^2 - 1 - \beta\eta^2 x + \beta x - m) \\ \dot{\eta} &= -\eta x(\eta^2 - 1) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Dividiendo entre  $x$  el sistema nos queda:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(\eta^2 - 1 - \beta\eta^2 x - m + \beta x) \\ \dot{\eta} &= -\eta(\eta^2 - 1) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Luego  $(0, 0)$  es un nodo repulsor y  $(0, \pm 1)$  son sillas

Blow-up II:

$x = \eta z$ ,  $y = y$ ,  $z = z$

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= z(1 - \eta^2) \\ \dot{z} &= -z^2(\beta z - \beta\eta^2 z + m\eta) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Dividiendo entre  $z$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= 1 - \eta^2 \\ \dot{z} &= -z(\beta z - \beta\eta^2 z + m\eta) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Luego  $(\pm 1, 0)$  son sillas

Figura 2.40

Así que su retrato de fase global es

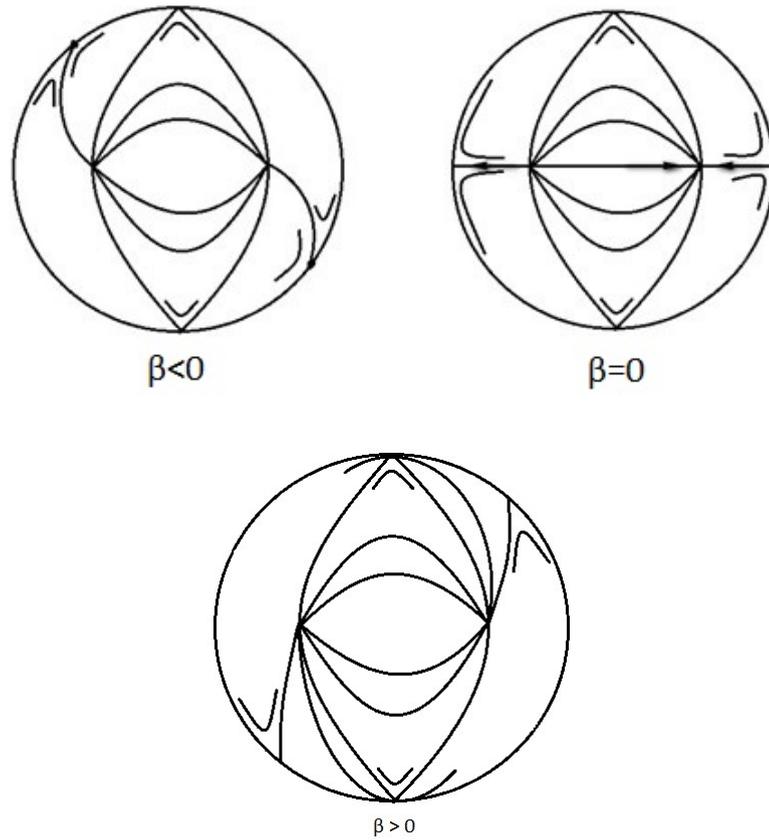


Figura 2.41

e)  $m = -1$  y  $\beta \neq 0$  el sistema nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z^2 - \beta x z^2 + \beta x^3 \\ \dot{z} &= -z(z^2 - x^2 - x) \end{aligned} \tag{4.21}$$

Luego la matriz jacobiana del punto crítico  $(0, 0)$  es :

$$\mathbf{M}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x\dot{z} - \dot{x}z = z(x^2 - z^2) = 0 \Rightarrow z = 0 \quad z = x \quad z = -x$$

Aplicando la técnica del Blow-up :

Bow-up I Sea  $x = x, y, z = \eta x$ , entonces  $\dot{\eta} = \eta x(-\eta^2 + 1)$

Luego

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2(\eta^2 - \beta\eta^2x + \beta x) \\ \dot{\eta} &= -\eta x(\eta^2 - 1) \end{aligned} \tag{4.22}$$

Dividiendo entre x se tiene :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(\eta^2 - \beta\eta^2x + \beta x) \\ \dot{\eta} &= -\eta(\eta^2 - 1) \end{aligned} \tag{4.23}$$

Luego  $(0, \pm 1)$  son puntos sillas. Para el punto  $(0, 0)$  aplicaremos el Teorema 1.3

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(\eta^2 - \beta\eta^2x + \beta x) \\ \dot{\eta} &= \eta - \eta^3 \end{aligned} \tag{4.24}$$

$\eta = 0 \Rightarrow g(x) = \beta x^2 \Rightarrow m = 2 \quad a_m = \beta > 0 \Rightarrow (0, 0)$  es un silla nodo.

Luego su retrato de fase es:

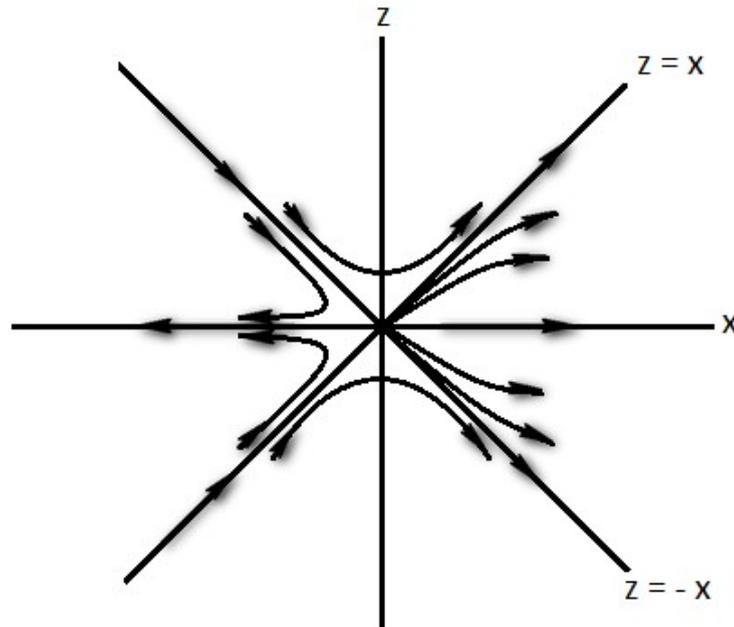


Figura 2.44,  $\beta > 0$

Así que:

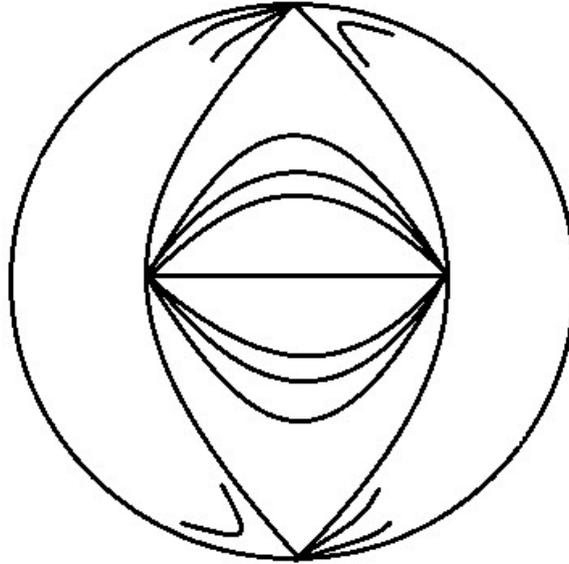


Figura 2.45,  $\beta > 0$

□

## 4.2. Singularidades familia II

En la carta  $U_1$

El sistema nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -z^2y + (m+1)y + \beta z^2 - \beta + y^2 \\ \dot{z} &= -z(z^2 - 1) \end{aligned} \tag{4.25}$$

**Proposición 4.2.1.**

- a)  $(r_1, 0)$  es un nodo repulsor y  $(r_2, 0)$  es un punto silla si  $(m+1)^2 + 4\beta > 0$
- b)  $(-\frac{m+1}{2}, 0)$  es un silla nodo si  $(m+1)^2 + 4\beta = 0$
- c) Si  $(m+1)^2 + 4\beta < 0$ , no existen puntos críticos.

donde  $r_1 = -\frac{m+1}{2} + \frac{\sqrt{(m+1)^2 + 4\beta}}{2}$ ,  $y$ ,  $r_2 = -\frac{m+1}{2} - \frac{\sqrt{(m+1)^2 + 4\beta}}{2}$

*Demostración.*

De la ecuación, si  $z = 0$  se tiene que  $y^2 + (m+1)y - \beta = 0$

$$y = -\frac{m+1}{2} \pm \frac{\sqrt{(m+1)^2 + 4\beta}}{2}$$

Para  $(m+1)^2 + 4\beta < 0$  no existen puntos críticos

a) Si  $(m + 1)^2 + 4\beta > 0$ , la matriz jacobiana de  $r_1$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}_1, \mathbf{0}) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{(m+1)^2 + 4\beta}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y la matriz jacobiana de  $r_2$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}_2, \mathbf{0}) = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{(m+1)^2 + 4\beta}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De aquí se tiene que los valores propios para  $(r_1, 0)$  son positivos y los de  $(r_2, 0)$  uno es negativo y otro positivo, luego  $(r_1, 0)$  es un nodo repulsor y  $(r_2, 0)$  es un punto silla.

b) Ahora si  $(m + 1)^2 + 4\beta = 0$

$$\mathbf{M}\left(-\frac{\mathbf{m} + 1}{2}, \mathbf{0}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En este caso el sistema nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{y} = -\frac{m+1}{2}z^2 - z^2y + \left(y + \frac{m+1}{2}\right)^2 \\ \dot{z} = -z(z^2 - 1) \end{cases} \quad (4.26)$$

Sea  $u = y + \frac{m+1}{2}$  entonces,

$$\begin{cases} \dot{u} = -\frac{(m+1)^2}{4}z^2 - z^2u + u^2 + \frac{m+1}{2}z^2 \\ \dot{z} = -z(z^2 - 1) \end{cases} \quad (4.27)$$

$$z - z^3 = 0 \Rightarrow z = f(u) = 0 \Rightarrow g(u) = u^2, \quad a_m = 1, \quad y, \quad m = 2$$

Luego

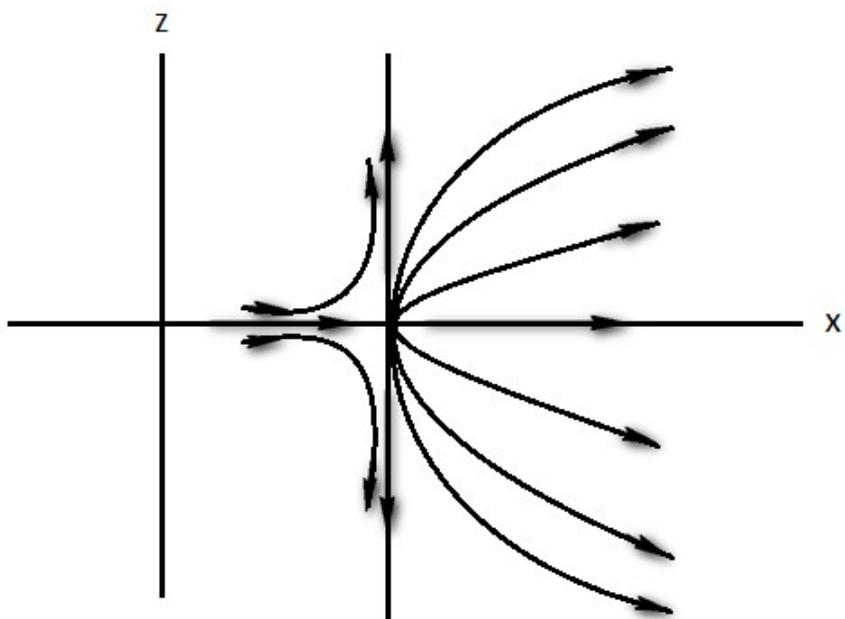


Figura 2.47

**En la Carta  $U_2$**

El sistema nos queda de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 - \beta)z^2 - x^2 + \beta x^3 - mx^2 - x \\ \dot{z} = -z(\beta z^2 - x^2 + mx + 1) \end{cases} \quad (4.28)$$

□

**Proposición 4.2.2.** *El punto  $(0,0)$  es un nodo atractor para  $\beta, m \in \mathbb{R}$ .*

*Demostración.*

La matriz jacobiana del punto  $(0,0)$  es :

$$\mathbf{M}(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego  $(0,0)$  es un nodo atractor.

Así que el retrato de fase para:

1.-  $(m + 1)^2 + 4\beta > 0$  es:

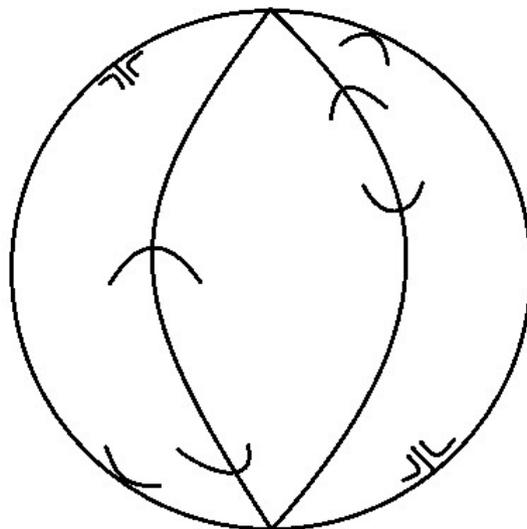


Figura 2.48

2.-  $(m + 1)^2 + 4\beta = 0$  es:

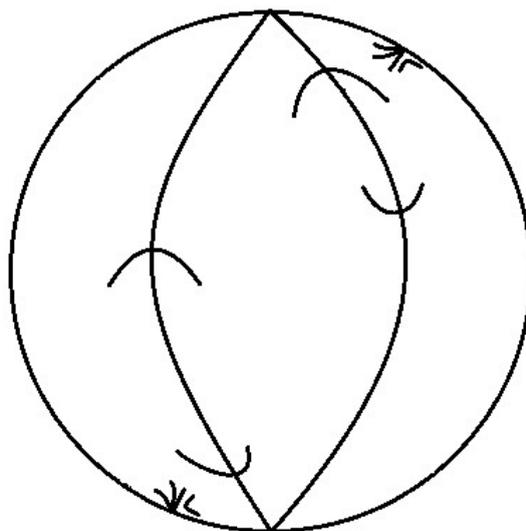


Figura 2.49

3.-  $(m + 1)^2 + 4\beta < 0$  es:

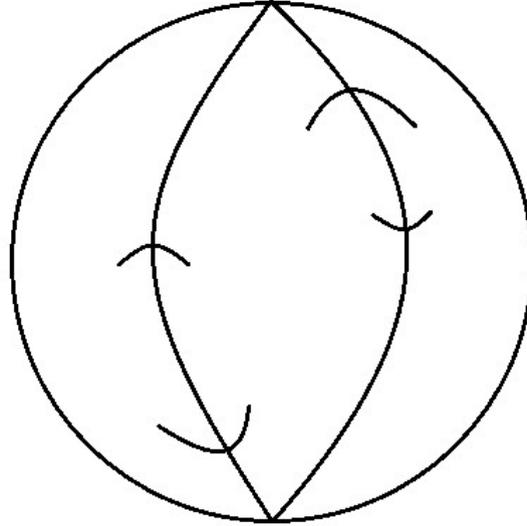


Figura 2.50

□

### 4.3. Singularidades familia III

**Proposición 4.3.1.** Sea  $\Delta_2 = (\beta + m + 1)^2 - 4\beta$

$$y_1 = \frac{\beta + m + 1}{2} + \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2}$$

$$y_2 = \frac{\beta + m + 1}{2} - \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2},$$

entonces

- a)  $y_1 > 1, y_2 > 1$  en la región  $R_1$ .
- b)  $y_1 < 1, y_2 < 1$  en la región  $R_2$ .
- c)  $y_1 > 1, y_2 < 1$  en la región  $R_3$ .

Donde

$$R_1 = \{(m, \beta) | \beta + m - 1 > 0, m < 0, y, \Delta_2 > 0\}$$

$$R_2 = \{(m, \beta) | \beta + m - 1 < 0, m < 0, y, \Delta_2 > 0\}$$

$$R_3 = \{(m, \beta) | m > 0, y, \Delta_2 > 0\}$$

*Demostración.*

a)  $y_1 > 1, y_2 > 1 \Leftrightarrow \beta + m - 1 > \sqrt{\Delta_2} \Leftrightarrow (\beta + m - 1)^2 > \Delta_2 \Leftrightarrow (\beta + m - 1)^2 - (\beta + m + 1)^2 > -4\beta \Leftrightarrow -4(\beta + m) > -4\beta \Leftrightarrow m < 0$ .

Por lo tanto  $\beta + m - 1 > 0, m < 0, \Delta_2 > 0$ , o sea que  $(m, \beta) \in R_1$

b)  $y_1 < 1$ , e,  $y_2 < 1 \Leftrightarrow \beta + m - 1 < -\sqrt{\Delta_2} \Leftrightarrow (\beta + m - 1)^2 > \Delta_2 \Leftrightarrow (\beta + m - 1)^2 - (\beta + m + 1)^2 > -4\beta \Leftrightarrow -4(\beta + m) > -4\beta \Leftrightarrow m < 0$ .

Por lo tanto  $\beta + m - 1 < 0$ ,  $m < 0$ , y  $\Delta_2 > 0$ , así que  $(m, \beta) \in R_2$ .

c)  $y_1 > 1$ , e,  $y_2 < 1 \Leftrightarrow \beta + m + \sqrt{\Delta_2} > 1$ , y,  $\beta + m - \sqrt{\Delta_2} < 1 \Leftrightarrow \beta + m - 1 > -\sqrt{\Delta_2}$ , y,  $\beta + m - 1 < \sqrt{\Delta_2} \Leftrightarrow -\sqrt{\Delta_2} < \beta + m - 1 < \sqrt{\Delta_2} \Leftrightarrow (\beta + m - 1)^2 < \Delta_2 \Leftrightarrow -4(\beta + m) < -4\beta \Leftrightarrow m > 0$ .

Por lo tanto  $(m, \beta) \in R_3$

□

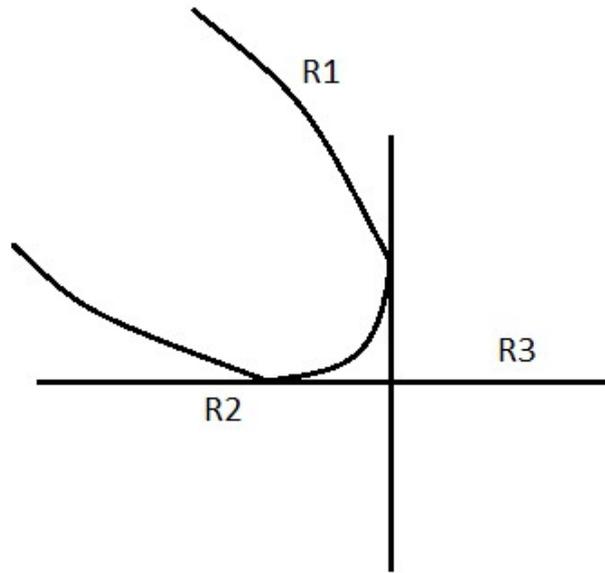


Figura 2.51, Regiones

**En la carta  $U_1$**

El sistema nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= z^2(\beta - y) - y^2 + (\beta + m + 1) \\ \dot{z} &= -z^3 + z(1 - y) \end{aligned} \tag{4.29}$$

**Proposición 4.3.2.**

- a)  $(y_1, 0)$  es un nodo atractor e  $(y_2, 0)$  es un punto silla, en la región  $R_1$ .
- b)  $(y_1, 0)$  es un punto silla e  $(y_2, 0)$  es un nodo repulsor en la región  $R_2$ .
- c)  $(y_1, 0)$  es un nodo atractor, e,  $(y_2, 0)$  es un nodo repulsor, en la región  $R_3$ .

d)  $(y_3, 0)$  es un silla nodo en el caso de que  $\Delta_2 = 0$ .

donde

$$y_1 = \frac{\beta + m + 1}{2} + \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2}$$

$$y_2 = \frac{\beta + m + 1}{2} - \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2}$$

$$y_3 = \frac{\beta + m + 1}{2}$$

*Demostración.*

Para  $z = 0$  se tiene que  $y^2 - (\beta + m + 1)y - \beta = 0$ , luego  $y_1 = \frac{\beta + m + 1}{2} + \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2}$ , e,  $y_2 = \frac{\beta + m + 1}{2} - \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2}$ , de aquí  $(y_1, 0)$  e  $(y_2, 0)$  son los únicos puntos críticos en el caso de que  $\Delta_2 > 0$ .

Sean

$$\mathbf{Df}(y_1, \mathbf{0}) = \begin{bmatrix} -\sqrt{\Delta_2} & 0 \\ 0 & 1 - y_1 \end{bmatrix}, y, \mathbf{Df}(y_2, \mathbf{0}) = \begin{bmatrix} -\sqrt{\Delta_2} & 0 \\ 0 & 1 - y_2 \end{bmatrix}$$

Luego en la región  $R_1$  se tiene que  $(y_1, 0)$  es un nodo atractor, ya que los valores propios son negativos y  $(y_2, 0)$  es un punto silla, ya que sus valores propios tienen signos opuestos. En  $R_2$  se tiene que  $(y_1, 0)$  es punto silla y  $(y_2, 0)$  es un nodo repulsor, ya que sus valores propios son negativos. En  $R_3$  se tiene que  $(y_1, 0)$  es nodo atractor y  $(y_2, 0)$  es nodo repulsor.

En el caso de que  $\Delta_2 = 0$ , el sistema queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= z^2(\beta - y) - (y - \frac{\beta + m + 1}{2})^2 \\ \dot{z} &= -z^3 + z(1 - y) \end{aligned} \tag{4.30}$$

y la matriz jacobiana del sistema es:

$$\mathbf{Df}(y, \mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1 - \beta - m}{2} \end{bmatrix}$$

Sea  $u = y - \frac{\beta + m + 1}{2}$ , entonces  $\dot{u} = \dot{y}$  así que el sistema nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= z^2(\beta - u - \frac{\beta + m + 1}{2}) - u^2 \\ \dot{z} &= -z^3 + z(\frac{1 - \beta - m}{2} - u) \end{aligned} \tag{4.31}$$

Dividiendo entre  $-\frac{\beta + m - 1}{2}$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{2}{\beta + m - 1}u^2 - \frac{\beta - m - 1}{\beta + m - 1}z^2 + \frac{2}{\beta + m - 1}uz^2 \\ \dot{z} &= z + \frac{2}{\beta + m - 1}uz + \frac{2}{\beta + m - 1}z^3 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Así que del Teorema 1.3 se tiene  $z = f(u) = 0$  entonces  $g(u) = \frac{2}{\beta + m - 1}u^2$

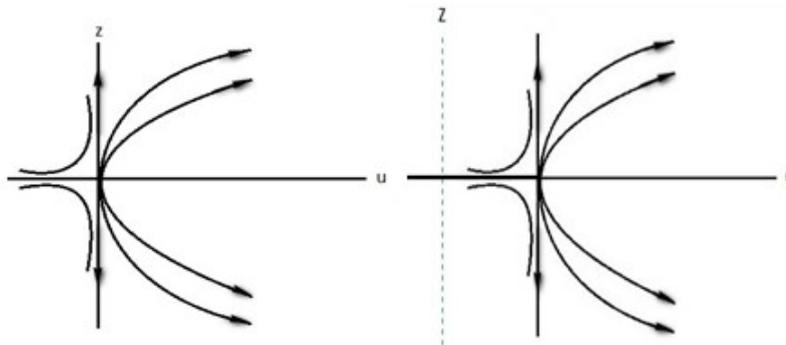


Figura 2.52,  $\beta + m - 1 > 0$

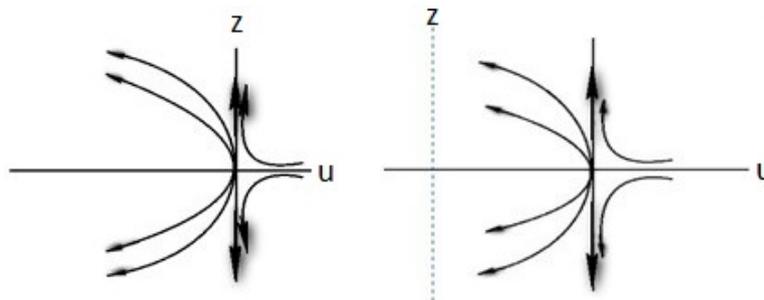


Figura 2.53,  $\beta + m - 1 < 0$

Si  $\Delta_2 < 0$ , no hay solución. □

**En la carta  $U_2$**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z^2(1 - \beta x) + \beta x^3 - (\beta + 1)x^2 - mx^2 + x \\ \dot{z} &= -z(\beta z^2 - \beta x^2 + \beta x + mx) \end{aligned} \tag{4.33}$$

**Proposición 4.3.3.** *El punto  $(0,0)$  es un nodo repulsor si  $m > 0$  y un punto silla en el caso que  $m < 0$ .*

*Demostración.*

La matriz jacobiana

$$Df(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando el Teorema 1.0.3 se tiene que  $x(z) = f(z) = -z^2 + \dots$  y de aquí  $g(z) = mz^3 + \beta z^5 + \dots$ , así que para  $m > 0$  es un nodo repulsor y para  $m < 0$  es un punto silla.  $\square$

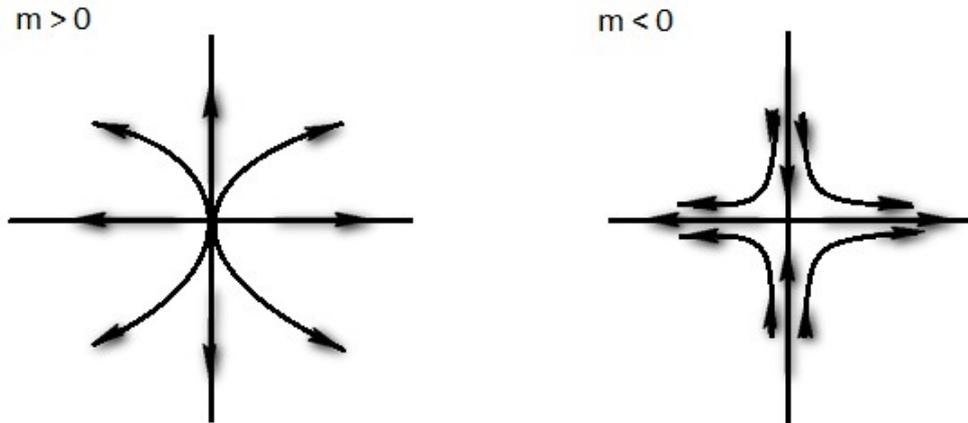


Figura 2.54

**Proposición 4.3.4.** *La recta que conecta los dos puntos silla nodos o los sillars en el infinito del sistema es una recta sin contactos.*

*Demostración.*

Como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 - x^2 + xy \\ \dot{y} &= \beta(1 - x^2 + xy) + mxy \end{aligned}$$

Sea  $L = y - \alpha x = 0$ , donde  $\alpha = \frac{\beta + m + 1}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ ,  $y = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ ,  $\Delta = (\beta + m + 1)^2 - 4\beta$ , entonces

$$\frac{dL}{dt} = \dot{y} - \alpha \dot{x} = (\beta - \alpha) + x^2(-\alpha^2 + (\beta + m + 1)\alpha - \beta) = (\beta - \alpha) = \frac{\beta - m - 1}{2} +$$

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{2} > 0$$

ya que  $\beta + m - 1 > 0$ , y,  $m < 0$ .

Entonces  $y - \alpha x = 0$ , es una recta sin contacto, además  $\dot{x}|_{(0,0)} = 1 > 0$   $\square$

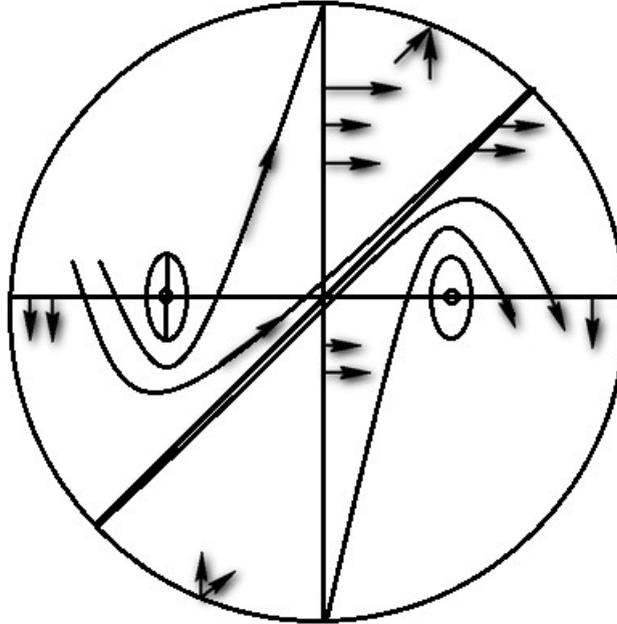


Figura 2.55

#### 4.4. Rectas invariantes

En esta sección hallaremos las rectas invariantes para las diferentes familias.

**Lema 4.4.1.** *En el sistema I se tiene:*

- a) Si  $\beta = 0$ ,  $y$ ,  $m \neq 0$ , entonces  $y = 0$  es una recta invariante.
- b) Si  $\beta = m = 0$ , luego  $y = C$  es una recta invariante para  $C \in \mathbb{R}$
- c) Si  $\beta = -m$ ,  $y$ ,  $m \neq 0$ , entonces la recta  $y = \beta x + C$  es una recta invariante.
- d)  $x = \pm 1$  es un recta invariante, para  $(m, \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

*Demostración.*

Sea  $y = Ax + C$ , entonces  $\dot{y} - A\dot{x} = 0$ , luego  $\beta(1 - x^2 + Ax^2 + Cx) + mx(Ax + C) - A(1 - x^2) = 0$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} \beta - A &= 0 \\ \beta C + mC &= 0 \\ -\beta + A\beta + mA + A &= 0 \end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned} \beta &= A \\ (\beta + m)C &= 0 \\ (\beta + m)A &= 0 \end{aligned}$$

De aquí tenemos que si:

$\beta = 0$ , y  $m \neq 0$ , se tiene  $A = 0$ , y,  $C = 0$ , así que  $y = 0$ , es un recta invariante.

Si  $\beta = m = 0$ , se tiene que  $A = 0$  y  $C$  es cualquier real.

Si  $\beta = -m$ , y  $m \neq 0$  se tiene que  $A = \beta$ , y,  $C$  es cualquier real.

Por último  $x = \pm 1$  es un recta invariante, ya que  $\dot{x}|_{x=\pm 1} = 0$ . □

**Lema 4.4.2.** *En el sistema II se tiene:*

a)  $y = \pm\sqrt{-\beta}x \pm \sqrt{\pm\sqrt{-\beta} - \beta}$ , es una recta invariante, si  $\beta \in (-\infty, -1]$ .

b)  $y = 0$  es una recta invariante, si  $\beta = 0$ .

c)  $y = \beta x$  es un recta invariante, si  $\beta = \frac{1-m}{2}$ .

*Demostración.*

Sea  $y = Ax + C$  recta invariante de II, entonces  $\dot{y} - Ax = 0$ , luego

$$\beta(1 - x^2 + x(Ax + C)) + mx(Ax + C) - A(1 - x^2 + x(Ax + C)) - A(1 - x^2)^2 = 0$$

así que:

$$\begin{aligned} \beta - A + C^2 &= 0 \\ (\beta + m + 2A)C &= 0 \\ -\beta + (\beta + m)A + A^2 &= 0 \end{aligned}$$

Sí  $\beta + m + 2A = 0$ , se tiene que  $A = \pm\sqrt{-\beta}$  y de aquí  $C = \sqrt{\sqrt{-\beta} - \beta}$ , siempre que  $\beta \in (-\infty, -1]$ . Por lo tanto  $y = \pm\sqrt{-\beta}x \pm \sqrt{\sqrt{-\beta} - \beta}$  es un recta invariante si  $\beta \in (-\infty, -1]$

Si  $C = 0$ , se tiene que  $A = \beta$  donde  $\beta = 0$ , ó,  $\beta = \frac{1-m}{2}$ . Por lo tanto  $y = 0$  es una recta invariante si  $\beta = 0$  y  $y = \beta x$  es una recta invariante si  $\beta = \frac{1-m}{2}$ . □

# Capítulo 5

## Bifurcaciones

### 5.1. Familia I

1. **Conexión de sillars.** De la proposición 3.1.1 en  $m > 0$  se tiene que  $(1, 0)$ , y,  $(-1, 0)$  son puntos sillars. Ahora en la familia **I**, sea  $u = x - 1$  entonces el sistema nos queda:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -2u - u^2 \\ \dot{y} &= -2\beta u + my - \beta u^2 + muy \end{aligned}$$

Luego de la nota 1.0.8 y el sistema anterior se tiene que las direcciones  $\theta$  de las trayectorias satisfacen la siguiente ecuación:

$$(-2 - m) \sin \theta \cos \theta + 2\beta \cos^2 \theta = \cos \theta [-(2 + m) \sin \theta + 2\beta \cos \theta] = 0$$

De aquí se tiene que :

$$\cos \theta = 0 \quad \tan \theta = \frac{2\beta}{2 + m}$$

Así que  $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ , y,  $\tan \theta$  es mayor o menor o igual 0 de acuerdo con el valor de  $\beta$ . Por lo tanto en  $\beta = 0$  existe una conexión de silla.

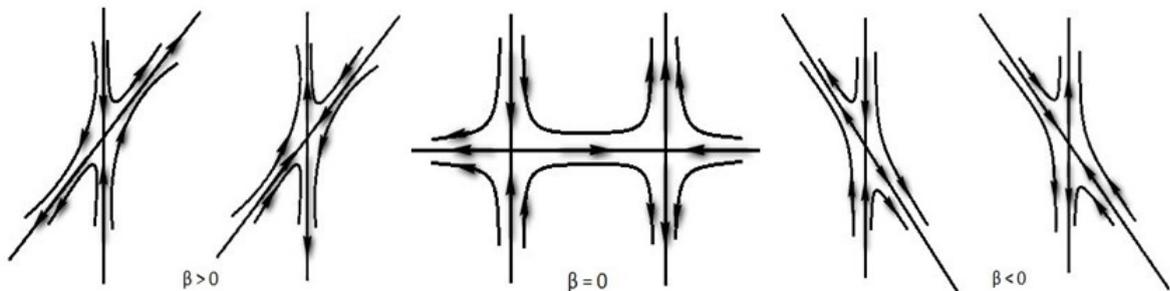


Diagrama de bifurcación

2. **Infinita degenerada**

De la Proposición 4.2.1, observamos la siguiente bifurcación en  $m = -1$ , se tiene que para  $\beta = 0$  existen infinitos puntos críticos y que para  $\beta \neq 0$  no existen puntos críticos en el infinito.

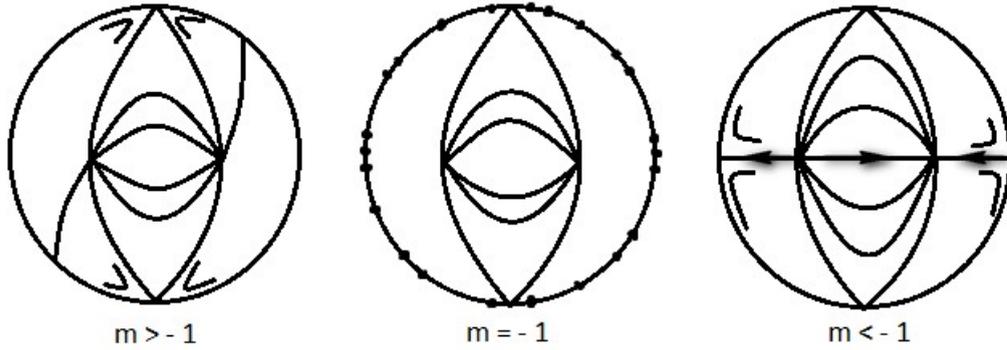


Diagrama de bifurcación  $\beta = 0$

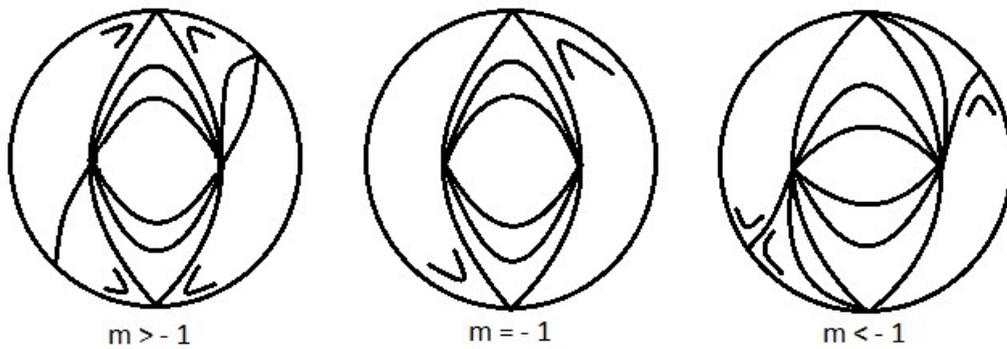
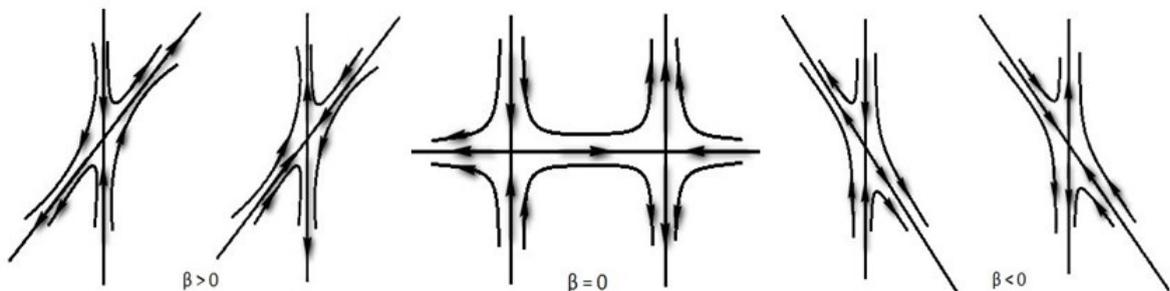


Diagrama de bifurcación  $\beta > 0$

## 5.2. Familia II

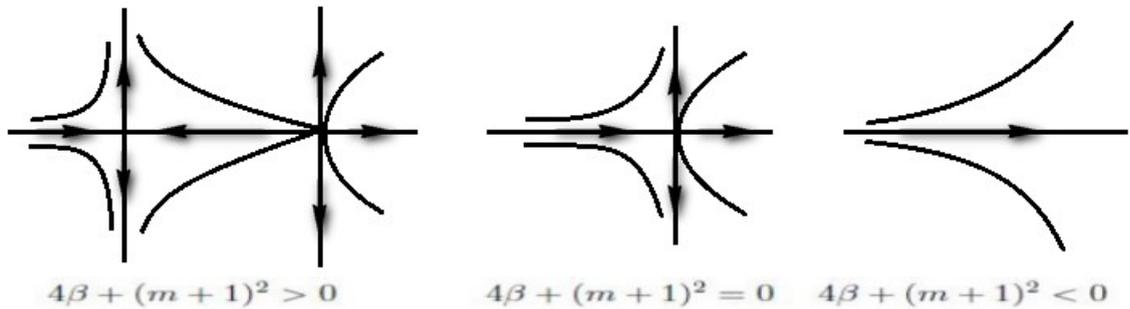
### 1. Conexión de sillars

Por la Proposición 3.2.1 tenemos que en  $4\beta + (m + 1)^2 = 0$  existe una conexión de silla.



2. Bifurcación Silla-Nodo

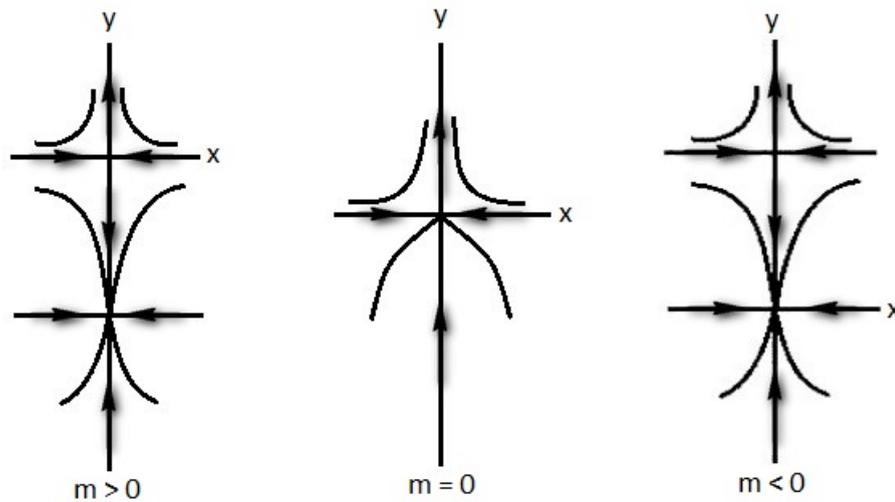
Por la Proposición 4.2.2 tenemos que en  $(m + 1)^2 + 4\beta = 0$  existe una bifurcación silla nodo.



3. Silla nodo alternada

Esta bifurcación se comporta de la siguiente manera, para el valor del parámetro positivo se tienen un nodo repulsor (atractor) y un silla, cuando el parámetro se anula se colapsan estos puntos en un silla-nodo y para valores negativos del parámetro se vuelve a la posición del valor positivo.

En  $m = 0$  por la Proposición 3.2.1 se tiene esta clase de bifurcación.



5.3. Familia III

1. Conexión de sillas.

De la Proposición 3.3.1, en  $m > 0$  se tiene que  $(1, 0)$ ,  $y$ ,  $(-1, 0)$  son sillas. Ahora en la familia **III** sea  $u = x - 1$  entonces el sistema nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -2u + y - u^2 + uy \\ \dot{y} &= -2\beta u + (\beta + m)y - \beta u^2 + (\beta + m)uy \end{aligned}$$

Del sistema anterior y la nota 1.0.8, las direcciones  $\theta$  de sus trayectorias satisfacen la siguiente ecuación:

$$\sin^2 \theta + (-2 - \beta - m) \sin \theta \cos \theta + 2\beta \cos^2 \theta = 0$$

que es equivalente a

$$\tan^2 \theta + (2 + \beta + m) \tan \theta + 2\beta = 0$$

Luego

$$\tan \theta = \frac{2 + \beta + m}{2} \pm \frac{\sqrt{(2 + \beta + m)^2 - 8\beta}}{2}$$

Así que para:

$$\begin{aligned} \beta > 0 & \quad \tan \theta_1 > 0 & \quad \text{y } \tan \theta_2 > 0 \\ \beta = 0 & \quad \tan \theta_1 > 0 & \quad \text{y } \tan \theta_2 = 0 \\ \beta < 0 & \quad \tan \theta_1 > 0 & \quad \text{y } \tan \theta_2 < 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto en  $\beta = 0$  existe una conexión de sillas.

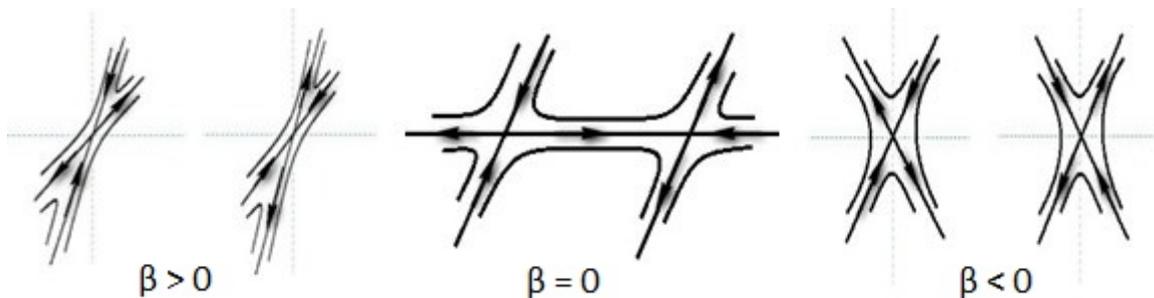


Diagrama de bifurcación

## 2. Bifurcación de Hopf

De la Proposición 3.3.1, se tiene que para  $m < 0$ ,  $\beta + m - 2 = 0$  es una bifurcación de Hopf.

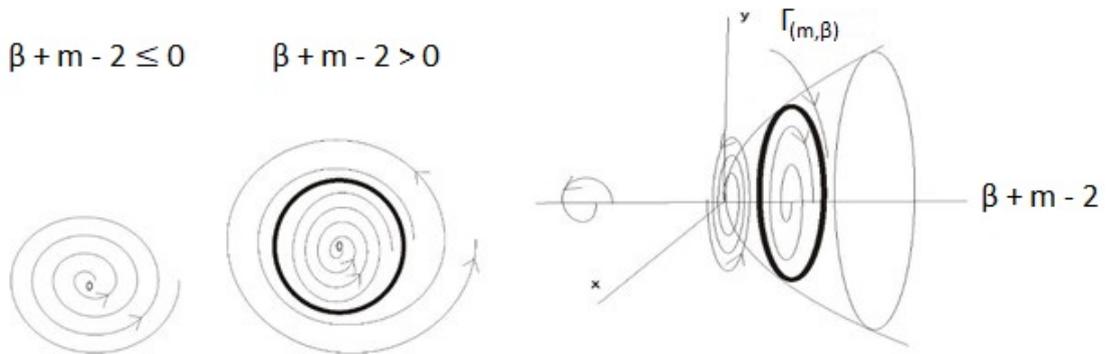


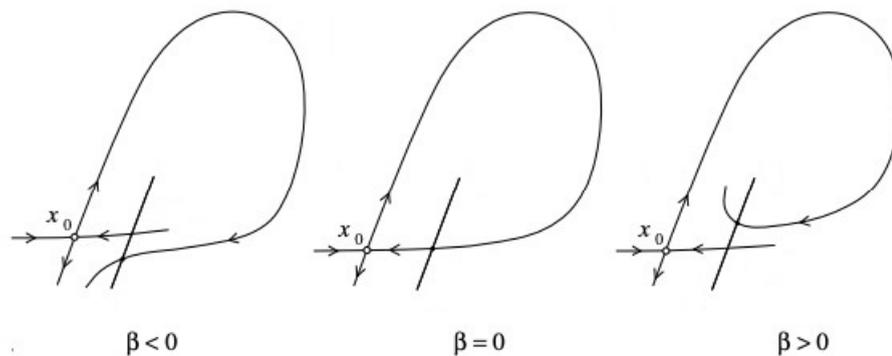
Diagrama de bifurcación y una familia biparamétrica  $\Gamma_{(m,\beta)}$  de ciclos límites

### 3. Bifurcación Homoclínica

De la Proposición 3.3.1 en  $m < 0$ , y,  $\beta + m - 2 = 0$  se tiene que  $(1, 0)$  es un foco débil estable y que en  $(\beta + m - 2)^2 + 8m < 0$ , y,  $\beta + m - 2 > 0$  el punto  $(1, 0)$  es un foco repulsor, luego en esta región existen ciclos límites, así que por la teoría de los campos rotatorios en la región

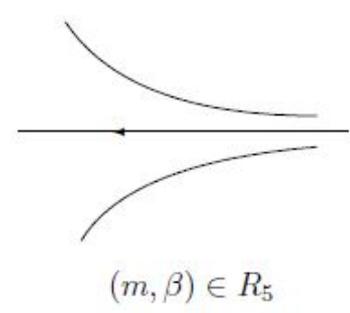
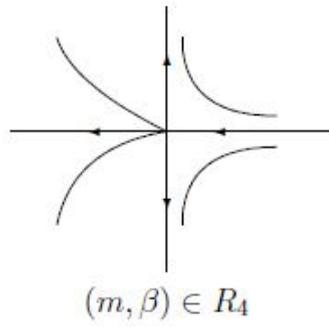
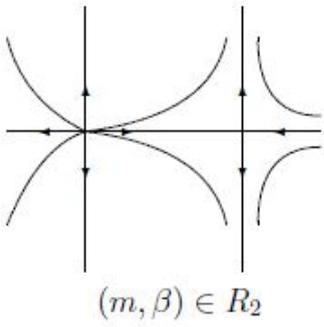
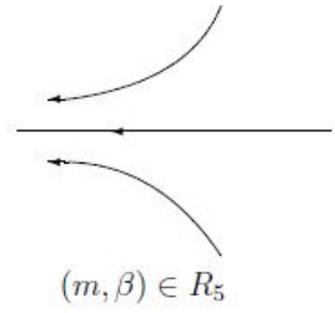
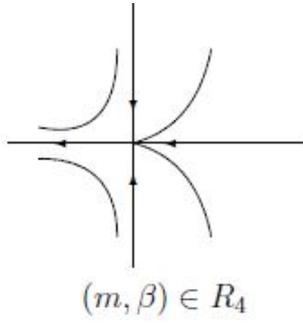
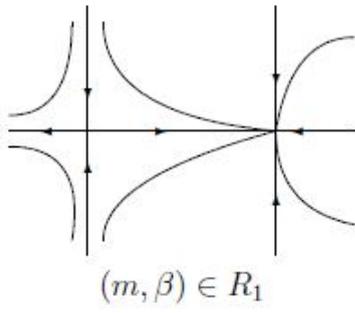
$$(\beta + m - 2)^2 + 8m < 0 \quad \beta + m - 2 > 0 \quad (\beta + m + 1)^2 - 4\beta > 0$$

existe una curva  $\beta = H(m)$  donde los ciclos límites son destruidos, así que en  $\beta = H(m)$  hay una bifurcación homoclínica.



### 4. Bifurcación Silla-Nodo

De la Proposición 4.3.4 se tiene que para  $m < 0$ , y,  $(\beta + m + 1)^2 - 4\beta = 0$  hay una bifurcación silla-nodo, donde  $R_1$ , y,  $R_2$  como en la Proposición 4.3.3,  $R_4 = \{(m, \beta) | (\beta + m - 1)^2 - 4\beta = 0\}$ , y,  $R_5 = \{(m, \beta) | (\beta + m - 1)^2 - 4\beta < 0\}$ .

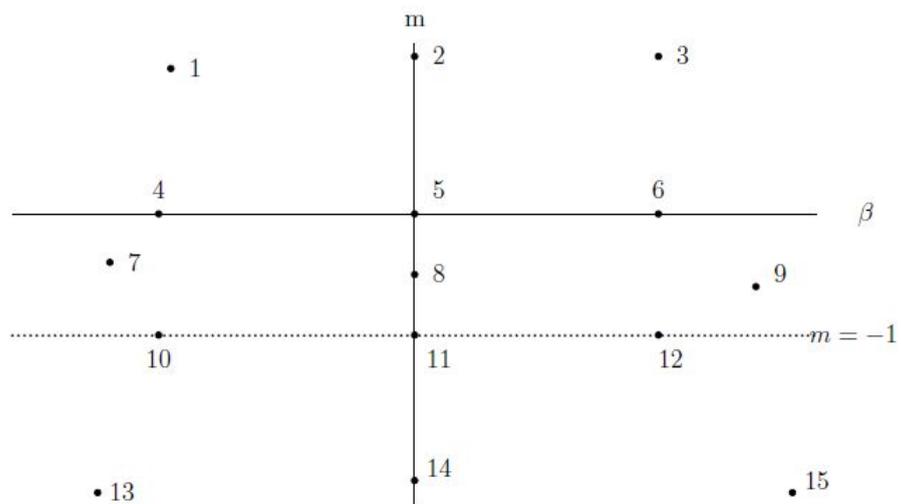


# Capítulo 6

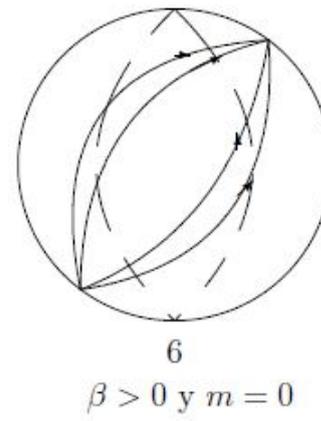
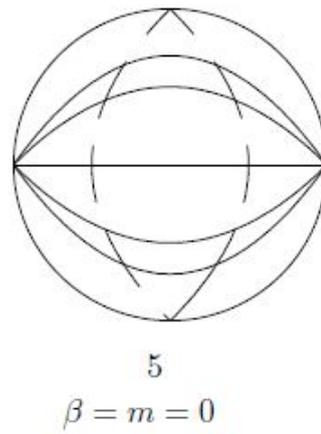
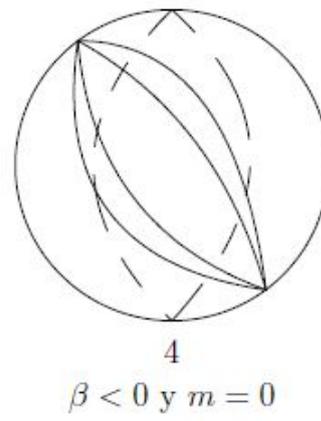
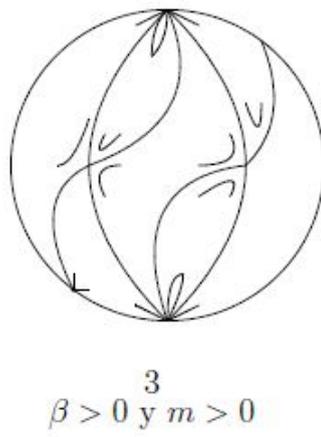
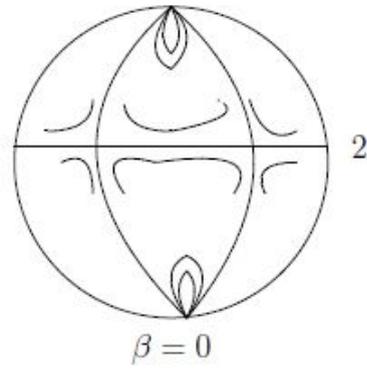
## Retrato de Fase

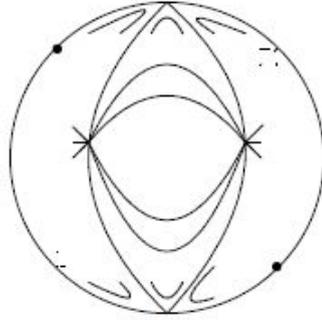
### 6.1. Familia I

Retrato de fase global de la familia I

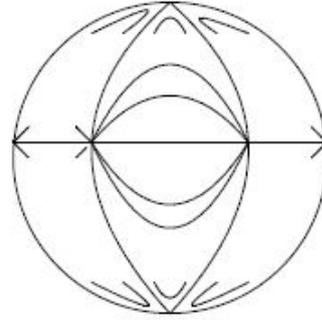


Los retratos de fase global en cada posición son:

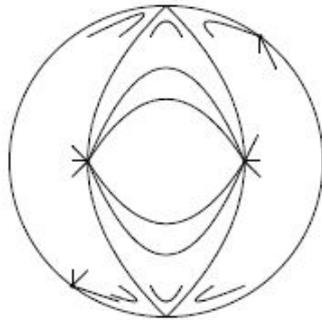




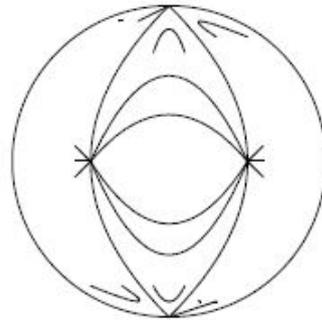
7  
 $\beta < 0$



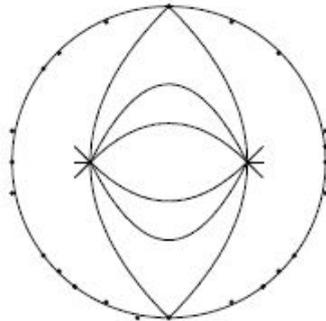
8  
 $\beta = 0$



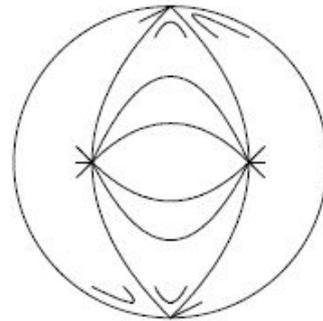
9  
 $\beta > 0 \quad m < 0$



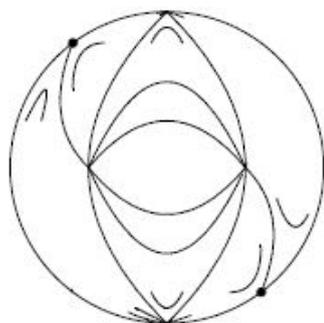
10  
 $\beta < 0 \quad m = -1$



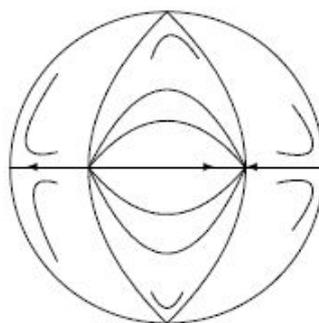
11  
 $\beta = 0 \text{ y } m = -1$



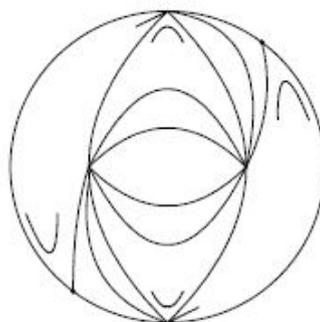
12  
 $\beta > 0 \text{ y } m = -1$



13  
 $\beta < 0$  y  $m < -1$



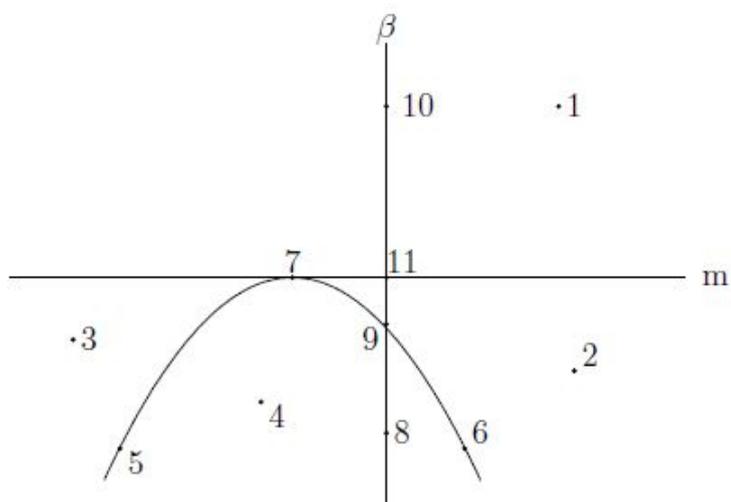
14  
 $\beta = 0$  y  $m < -1$



15  
 $\beta > 0$  y  $m < -1$

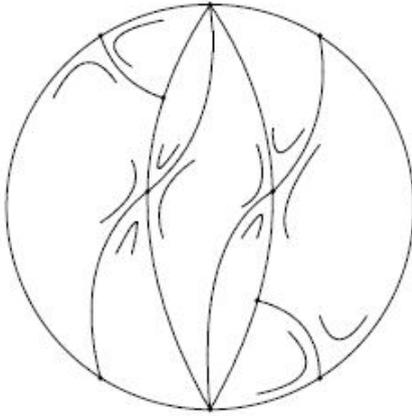
## 6.2. Familia II

Retrato de fase global de la familia II es



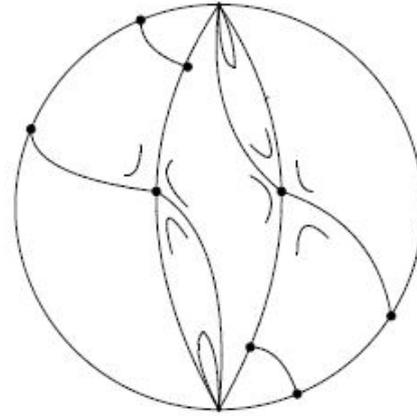
$$(m + 1)^2 + 4\beta = 0$$

Los retratos de fase global en cada posición son:



1

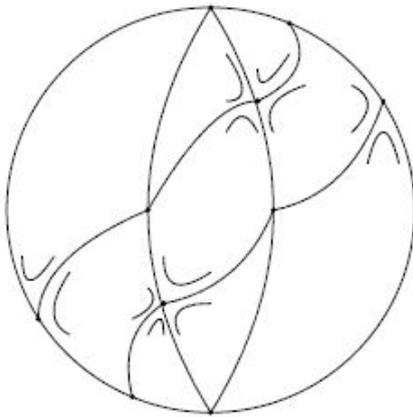
$$\beta > 0$$



2

$$m > 0$$

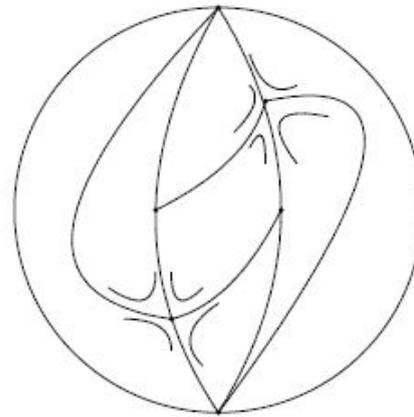
$$\beta < 0$$



3

$$\beta < 0$$

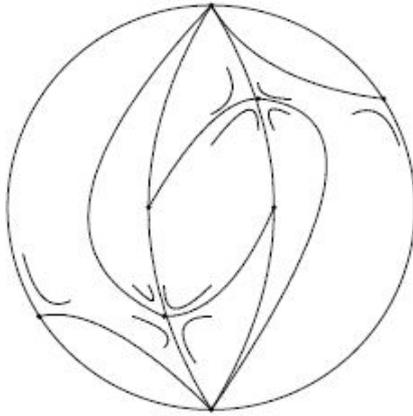
$$(m + 1)^2 + 4\beta > 0$$



4

$$m < 0$$

$$(m + 1)^2 + 4\beta < 0$$

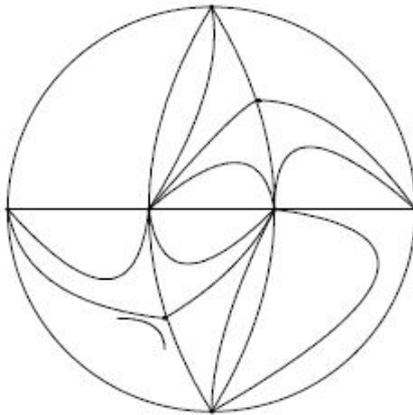


5  
 $\beta < 0$  y  $m < 0$

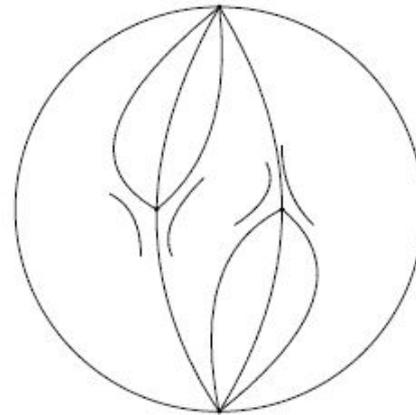


6  
 $\beta < 0$  y  $m > 0$

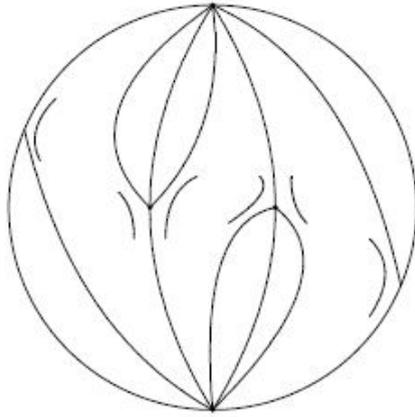
$$(m + 1)^2 + 4\beta = 0$$



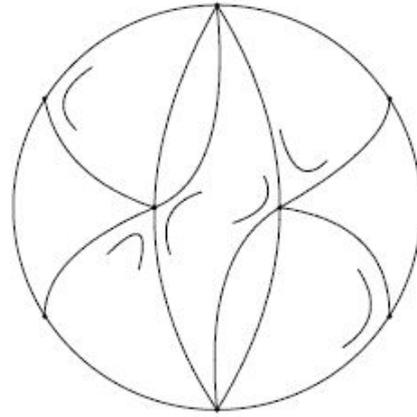
7  
 $\beta = 0$  y  $m = -1$   
 $(m + 1)^2 + 4\beta = 0$



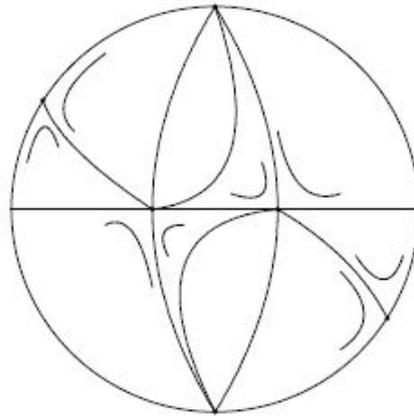
8  
 $\beta < 0$  y  $m = 0$   
 $(m + 1)^2 + 4\beta < 0$



9  
 $\beta < 0$  y  $m = 0$   
 $(m + 1)^2 + 4\beta = 0$



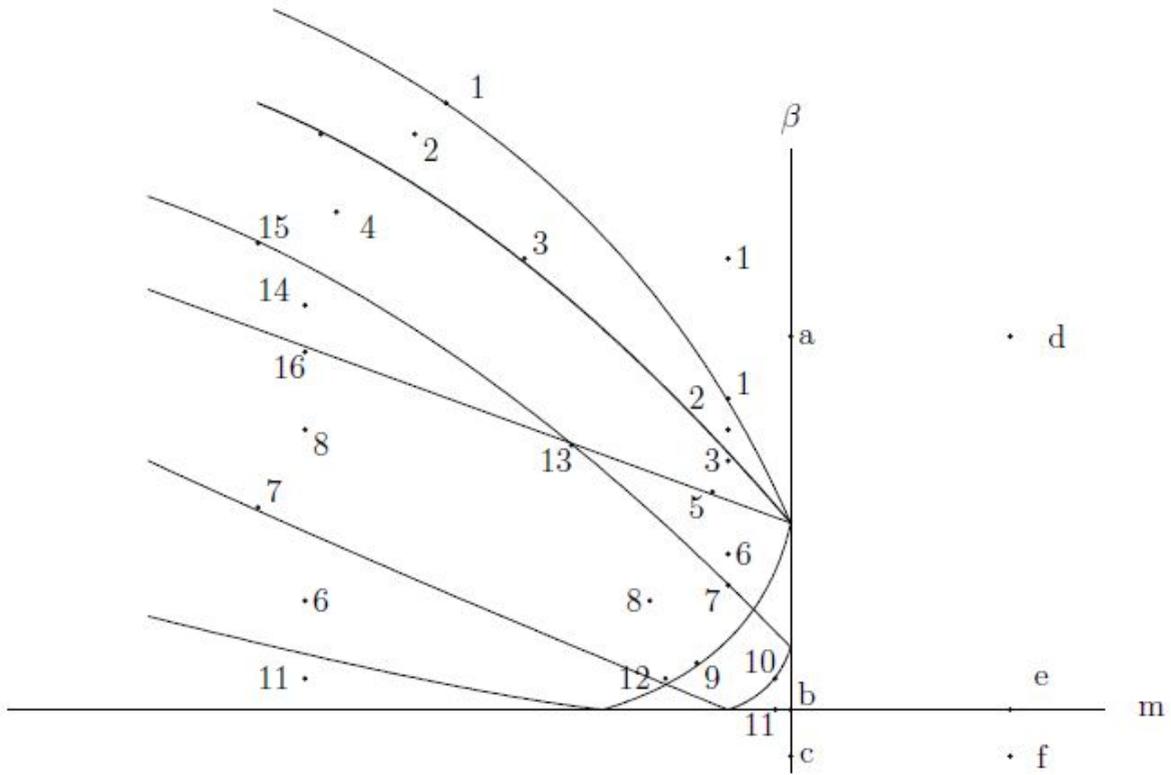
10  
 $\beta > 0$  y  $m = 0$   
 $(m + 1)^2 + 4\beta > 0$



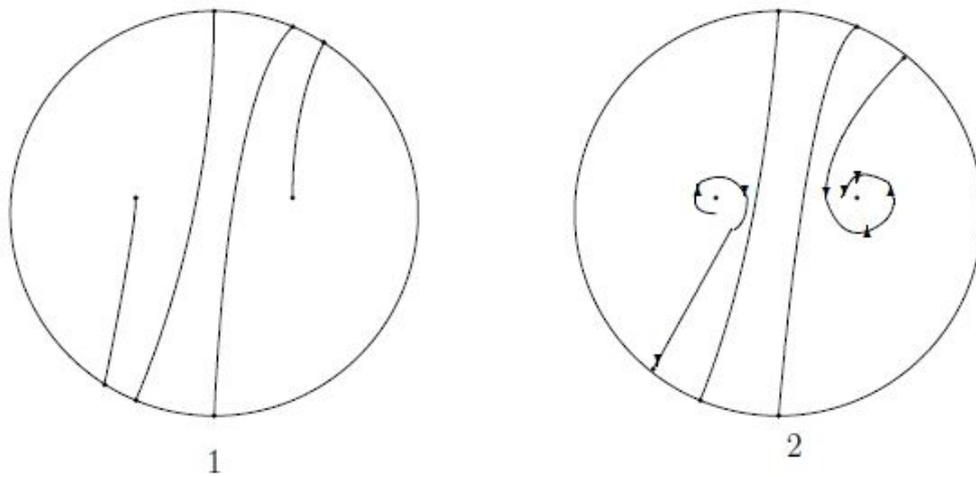
11  
 $\beta = 0$  y  $m = 0$   
 $(m + 1)^2 + 4\beta > 0$

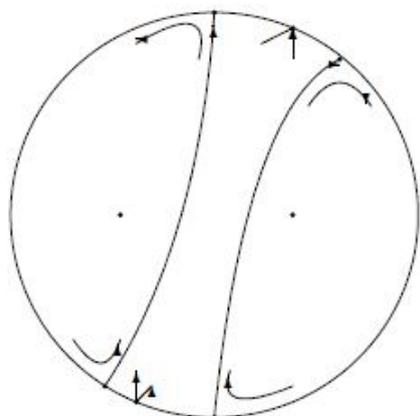
### 6.3. Familia III

El retrato de fase global de la familia III es:

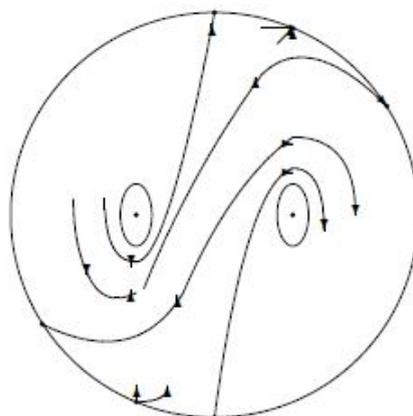


Los retratos de fase global de cada posición son:

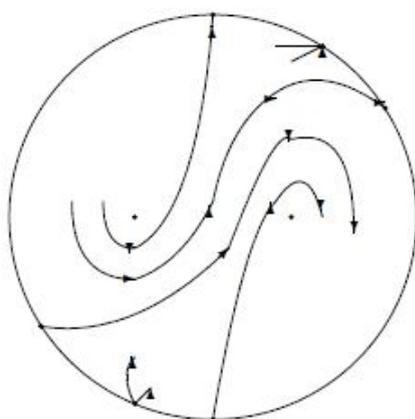




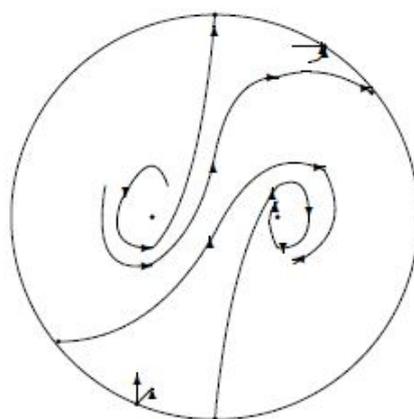
3



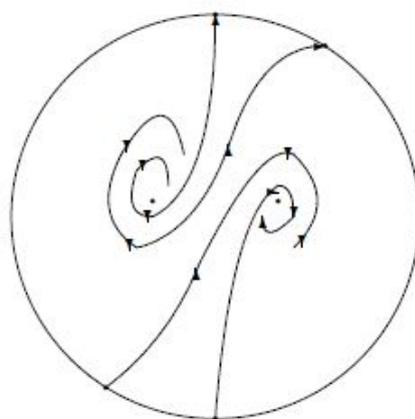
4



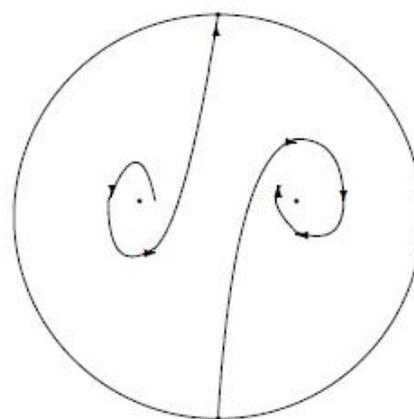
5



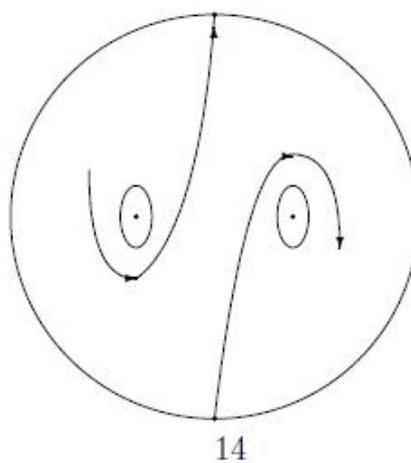
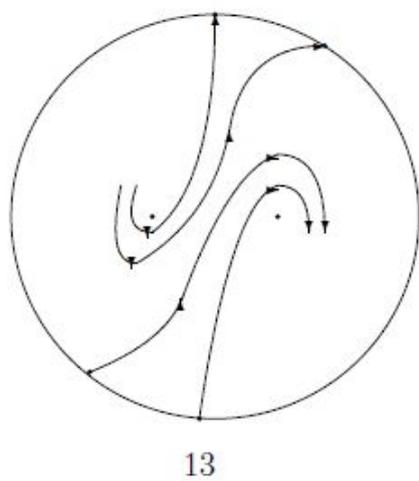
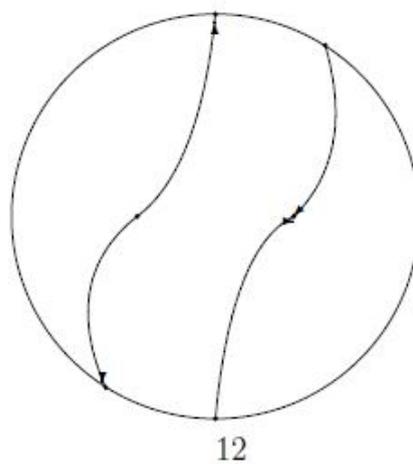
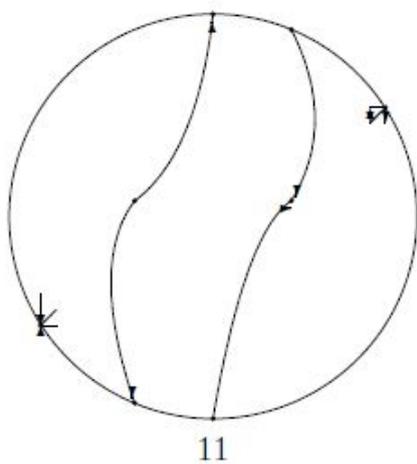
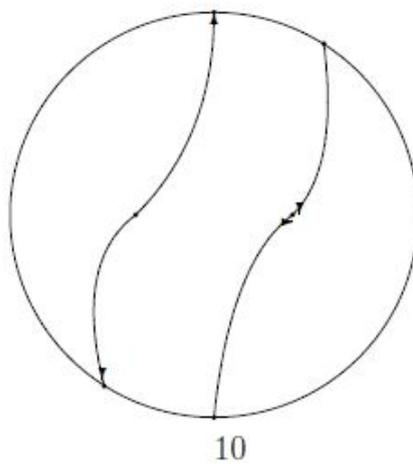
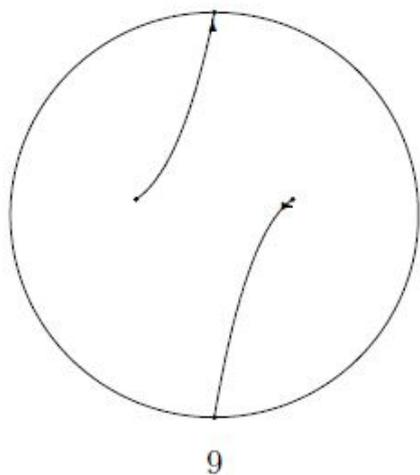
6

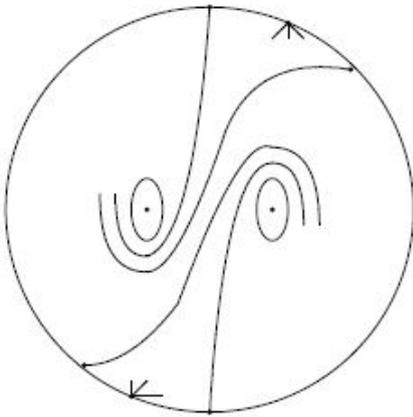


7

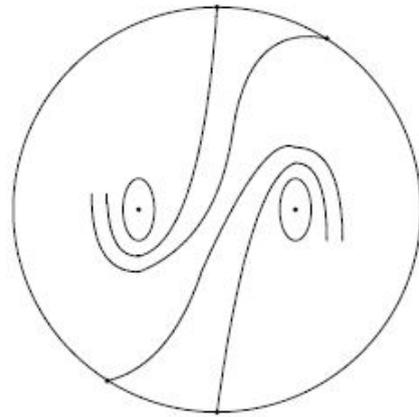


8

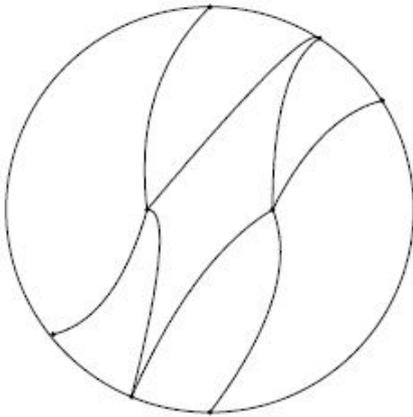




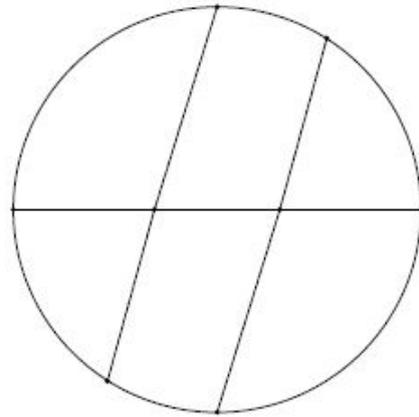
16



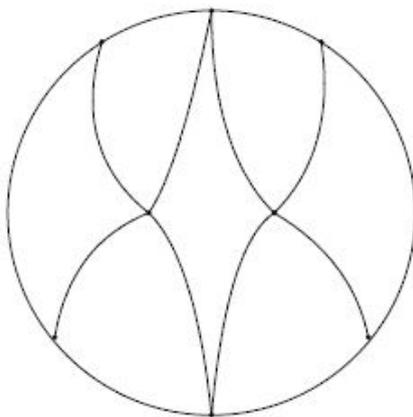
15



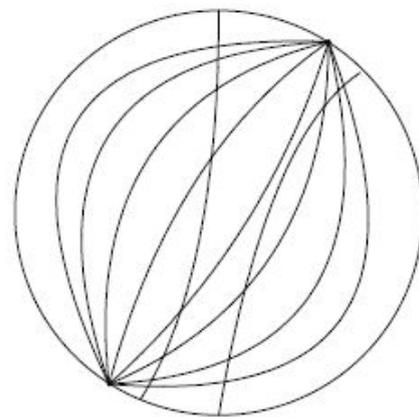
d



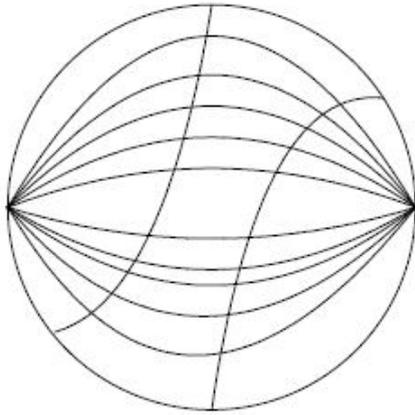
e



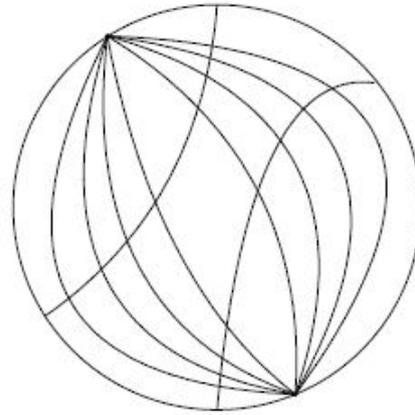
f



a



b



c

# Capítulo 7

## Centros de la Familia IV

Es fácil ver usando el Teorema 1.0.5 que los únicos centros para  $\epsilon = 1$  vienen dados por

$$s = -\frac{1}{2} \text{ y } s = \frac{m}{m-2}, \text{ con } m < 0.$$

### 7.1. Centro en el caso $s = -\frac{1}{2}$

Ahora probaremos que en el siguiente sistema los puntos críticos  $(1, 0)$ , y,  $(-1, 0)$  son centros.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 - x^2 + xy \\ \dot{y} &= (2 - m)(1 - x^2 + xy) + mxy - \frac{1}{2}y^2 \end{aligned} \quad (7.1)$$

**Proposición 7.1.1.** *Los puntos  $(1, 0)$ ,  $y$ ,  $(-1, 0)$  son centros del sistema (7.1).*

*Demostración.*

$$\mathbf{Df}(1, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2(2 - m) & 2 \end{bmatrix}$$

Los valores propios son  $\pm i\sqrt{-2m}$ , por el teorema de Dulac el punto  $(1, 0)$  es un centro, centro-foco o un foco.

Sea  $u = x - 1$ ,  $y = y$ , entonces

$$\dot{u} = -2u + v - u^2 + uv$$

$$\dot{v} = -2(2 - m)u + (2 - m)v - (2 - m)u^2 + (2 - m)uv - \frac{1}{2}v^2$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{-2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

De aquí se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-2m} \\ -\sqrt{-2m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{w_1^2 + \sqrt{-2m}w_1w_2}{-2 + m} \\ \frac{\sqrt{-2m}w_1^2 - 2w_1w_2 - \frac{1}{2}\sqrt{-2m}w_2^2}{-2 + m} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= \sqrt{-2m}w_2 + w_1^2 + \sqrt{-2m}w_1w_2 \\ \dot{w}_2 &= -\sqrt{-2m}w_1 + \frac{-2+m}{\sqrt{-2m}}w_1^2 - 2w_1w_2 - \frac{1}{2}w_2^2\end{aligned}$$

Luego

$$\frac{dw_2}{dw_1} = -\frac{w_1 + \frac{-2+m}{2m}w_1^2 + \frac{2}{\sqrt{-2m}}w_1w_2 + \frac{1}{2}w_2^2}{w_2 + \frac{1}{\sqrt{-2m}}w_1^2 + w_1w_2}$$

Así tenemos que:

$$a = \frac{-2+m}{2m}, 2b + \alpha = \frac{2}{\sqrt{-2m}}, c = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{\sqrt{-2m}}, 2c + \beta = 1, \text{ y } d = 0;$$

de aquí se tiene que  $\alpha = \beta = 0$ , y así podemos concluir que el punto  $(1, 0)$  es un centro.  $\square$

## 7.2. Centro en el caso $s = \frac{m}{m-2}$

Ahora para el siguiente sistema probaremos lo mismo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 - x^2 + xy \\ \dot{y} &= (2-m)(1-x^2+xy) + mxy + \frac{m}{m-2}y^2\end{aligned}\tag{7.2}$$

**Proposición 7.2.1.** *Los puntos singulares  $(1, 0)$ , y  $(-1, 0)$  son centros del sistema (7.2).*

*Demostración.*

$$\mathbf{Df}(1, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2(2-m) & 2 \end{bmatrix}$$

Los valores propios son  $\pm i\sqrt{-2m}$ , por el teorema de Dulac el punto  $(1, 0)$  es un centro, centro-foco .

Sea  $u = x - 1$ ,  $y = y$ , entonces

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -2u + v - u^2 + uv \\ \dot{v} &= -2(2-m)u + (2-m)v - (2-m)u^2 + (2-m)uv + \frac{m}{m-2}v^2\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{-2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

De aquí se tiene:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-2m} \\ -\sqrt{-2m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} w_1^2 + \sqrt{-2m}w_1w_2 \\ \frac{m^2+2m}{(m-2)\sqrt{-2m}}w_1^2 + \frac{4m}{m-2}w_1w_2 + \frac{m}{m-2}\sqrt{-2m}w_2^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \sqrt{-2m} \begin{bmatrix} w_2 \\ -w_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1^2 + \sqrt{-2m}w_1w_2 \\ \frac{m^2 + 2m}{(m-2)\sqrt{-2m}}w_1^2 + \frac{4m}{m-2}w_1w_2 + \frac{m}{m-2}\sqrt{-2m}w_2^2 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\frac{dw_2}{dw_1} = -\frac{w_1 + \frac{m+2}{2(m-2)}w_1^2 - \frac{4m}{(m-2)\sqrt{-2m}}w_1w_2 - \frac{m}{m-2}w_2^2}{w_2 + \frac{1}{\sqrt{-2m}}w_1^2 + w_1w_2}$$

Así tenemos que:  $a = \frac{m+2}{2(m-2)}$ ,  $b = \frac{1}{\sqrt{-2m}}$ ,  $c = -\frac{m}{m-2}$ ,

$\alpha = -\frac{2(3m-2)}{(m-2)\sqrt{-2m}}$ ,  $\beta = \frac{3m-2}{m-2}$ , y  $d = 0$ ; Sea  $k = \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{2}{\sqrt{-2m}}$ ,

y también tenemos que  $\frac{b+d}{a+c} = k$ , además

$$ak^3 - (3b + \alpha)k^2 + (3c + \beta)k - d = \frac{2m+4}{m(m-2)\sqrt{-2m}} + 2\frac{3m-6-6m+4}{m(m-2)\sqrt{-2m}} +$$

$$\frac{4}{(m-2)\sqrt{-2m}} = \frac{8m+4-12m-4}{m(m-2)\sqrt{-2m}} + \frac{4}{(m-2)\sqrt{-2m}} = 0$$

Así el punto  $(1, 0)$  es un centro. □

# Capítulo 8

## Bifurcación $X_0 + X_2 \leftrightarrow X_2$

### 8.1. Rectas invariantes en $m < 0$

**Proposición 8.1.1.** *Las rectas invariantes del sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2 + xy \\ \dot{y} = \beta(-x^2 + xy) + mxy + sy^2 \end{cases} \quad (8.1)$$

son de la forma  $y = Ax$ ,  $y, x = 0$ .

*Demostración.*

Sea  $y = Ax + B$  recta invariante del sistema (8.1), entonces  $\dot{y} - A\dot{x} = 0$ , además  $\dot{y} - A\dot{x} = [-\beta + (\beta + m + 1)A + (s - 1)A^2]x^2 + B[(\beta + m - A) + 2sA]x + sB^2$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{l} 1) \quad (1 - s)A^2 - (\beta + m + 1)A + \beta = 0 \\ 2) \quad B[(\beta + m - A) + 2sA] = 0 \\ 3) \quad sB^2 = 0 \end{array} \quad (8.2)$$

Ahora si  $s \neq 0$ , de la ecuación (3) del sistema (8.2) se tiene que  $B = 0$ .

Si  $s = 0$ , se tiene el siguiente sistema

$$\begin{array}{l} 1) \quad A^2 - (\beta + m + 1)A + \beta = 0 \\ 2) \quad B(\beta + m - A) = 0 \end{array} \quad (8.3)$$

De la ecuación (2) del sistema (8.3) se tiene que, o  $B = 0$ , o,  $A = \beta + m$ .

Si  $A = \beta + m$ , reemplazando en la ecuación 1 del sistema (8.3) se tiene que  $m = 0$  y  $m < 0$  (absurdo), entonces  $B = 0$ .

Por lo tanto las rectas invariantes del sistema (8.1) son de la forma  $y = Ax$ . □

**Notación 8.1.2.** *De la ecuación (8.1) en los sistemas (8.2) y (8.3) se tiene que si  $y = Ax$  es una recta invariante, entonces*

$$(1 - s)A^2 - (\beta + m + 1)A + \beta = 0$$

para cualquier valor de  $s$ .

**Lema 8.1.3.** Sean

$$\Delta(s) = (\beta + m + 1)^2 - 4\beta(1 - s)$$

$$A_1(s) = \frac{\beta + m + 1}{2(1 - s)} + \frac{\sqrt{\Delta(s)}}{2(1 - s)}$$

$$A_2(s) = \frac{\beta + m + 1}{2(1 - s)} - \frac{\sqrt{\Delta(s)}}{2(1 - s)}$$

$$A_3(s) = \frac{\beta + m + 1}{2(1 - s)}$$

entonces

- a) Si  $\Delta(s) = 0$ , entonces  $y = A_3(s)x$  es la única recta invariante.
- b) Si  $\Delta(s) > 0$ , entonces  $y = A_1(s)x$ ,  $y = A_2(s)x$  son las únicas rectas invariantes.
- c) Si  $\Delta(s) < 0$ , entonces el sistema no tiene rectas invariantes.

Es inmediato de la Nota (1.0.9) y la Proposición (8.1.1)

## 8.2. Retrato de fase en la región $\mathbf{R}$

Sea  $\mathbf{R} = \{(\beta, m, s) \mid \beta + m - 2 > 0, \beta - H(m) < 0, y, -\frac{1}{2} < s < \frac{m}{m-2} \quad m < 0\}$

**Proposición 8.2.1.** Sea  $L$  la recta  $y = Cx$ , luego:

- a) Si  $\Delta(s) < 0$ , entonces  $\frac{dL}{dt} < 0$ .
- b) Si  $\Delta(s) = 0$ ,  $y, C \neq A_3(s)$  entonces  $\frac{dL}{dt} < 0$ .
- c) Si  $\Delta(s) > 0$ ,  $y, C \notin [A_2(s), A_1(s)]$ , entonces  $\frac{dL}{dt} < 0$ .
- d) Si  $\Delta(s) > 0$ ,  $y, C \in (A_2(s), A_1(s))$ , entonces  $\frac{dL}{dt} > 0$ .

*Demostración.*

- a)  $\frac{dL}{dt} = \frac{dy}{dt} - A \frac{dx}{dt} = -[(1 - s)A^2 + (\beta + m + 1)A + \beta]x^2 < 0$ .
- b)  $\frac{dL}{dt} = -(1 - s)[C - A_3(s)]^2 x^2 < 0$
- c)  $\frac{dL}{dt} = -(1 - s)[C - A_1(s)][C - A_2(s)]x^2 < 0$

$$d \quad \frac{dL}{dt} = -(1-s)[C - A_1(s)][C - A_2(s)]x^2 > 0$$

□

**Lema 8.2.2.** Si  $\Delta(s) \geq 0$ , y supongamos que  $(\beta, m, s) \in \mathbf{R}$ , entonces

a)  $-1 + A_1(s) > 0$ .

b)  $-1 + A_2(s) > 0$

*Demostración.*

a) Como  $\beta + m > 2 \Rightarrow \beta + m - 1 + 2s > 1 + 2s > 0$ , luego  $-1 + \frac{\beta + m + 1}{2(1-s)} = \frac{\beta + m - 1 + 2s}{2(1-s)} > 0$ , así que  $-1 + A_1(s) > 0$ .

b) Como  $s < \frac{m}{m-2} \Rightarrow m + s < \frac{m(m-1)}{m-2} < 0$ , así que  $-4(1-s)(m+s) > 0$ , luego  $(\beta + m - 1 + 2s)^2 > (\beta + m + 1)^2 - 4\beta(1-s)$ , y de aquí tenemos que  $\beta + m + 1 - 2(1-s) > \sqrt{(\beta + m + 1)^2 - 4\beta(1-s)} \Rightarrow \frac{\beta + m + 1}{2(1-s)} - 1 > \frac{\sqrt{(\beta + m + 1)^2 - 4\beta(1-s)}}{2(1-s)}$ , por lo tanto  $-1 + A_2(s) > 0$ .

□

**Lema 8.2.3.**  $\dot{x}\Big|_{y=A_k(s)x} > 0$  y  $\dot{y}\Big|_{y=A_k(s)} > 0$ ,  $k = 1, 2, 3$

Como  $\dot{x}\Big|_{y=A_k(s)x} = x^2(-1 + A_k(s)) > 0$  por Lema anterior.

### 8.2.1. Retrato de fase en el caso $s = 0$

1)  $\Delta(0) < 0$

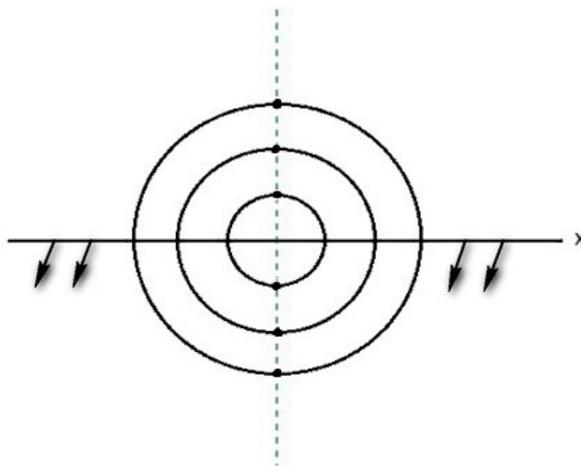


Fig 5.1 retrato de fase  $\Delta(0) < 0$

2)  $\Delta(0) = 0$

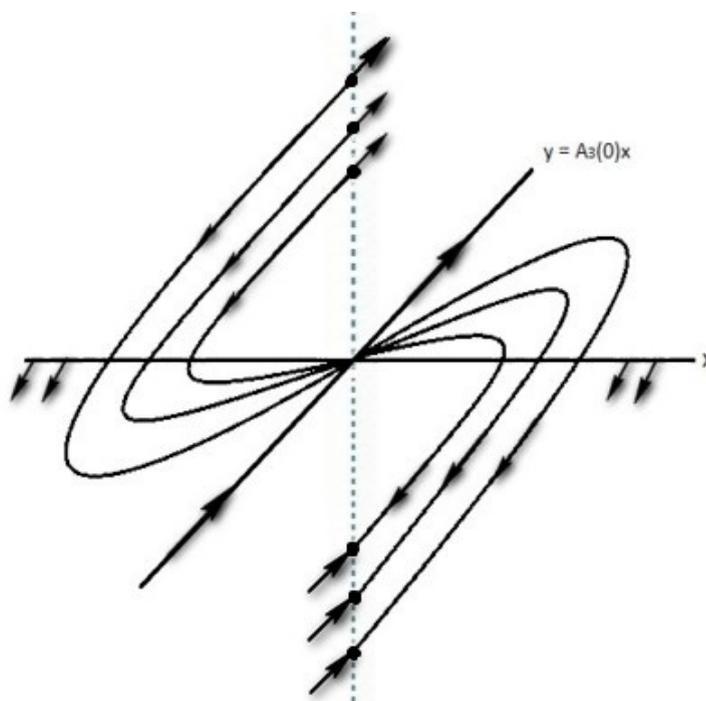


Fig 5.2 retrato de fase  $\Delta(0) = 0$

3)  $\Delta(0) > 0$

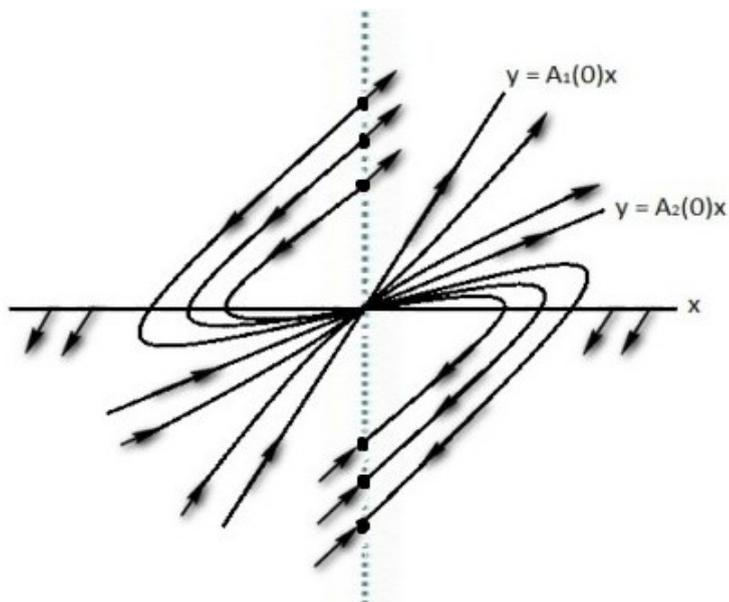


Fig 5.3 retrato de fase  $\Delta(0) > 0$

8.2.2. Retrato de fase en el caso  $s \neq 0$

1)  $\Delta(s) < 0$

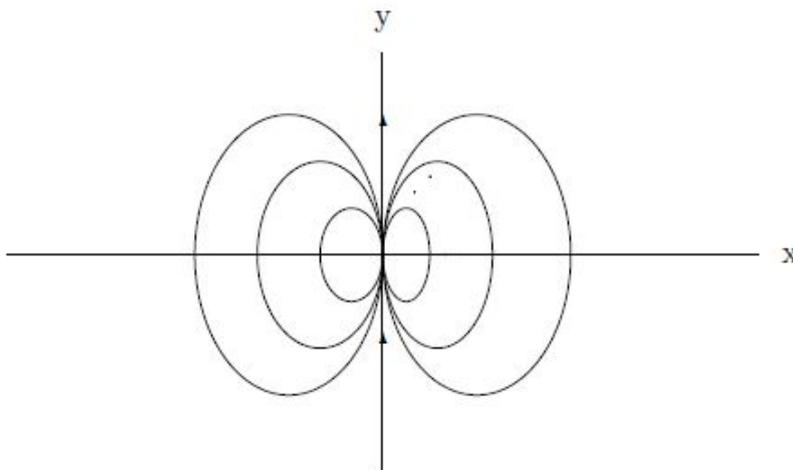


Fig 5.4 retrato de fase  $\Delta(s) < 0$

2)  $\Delta(s) = 0$

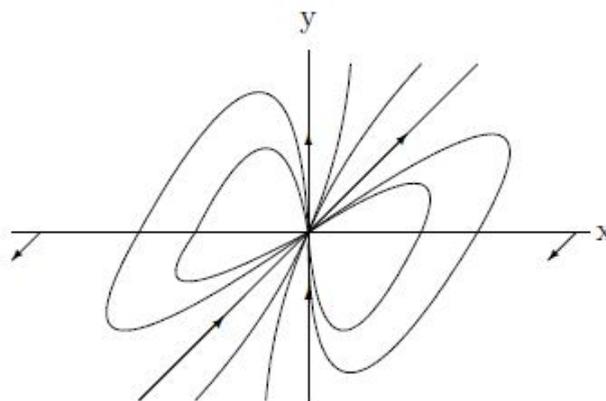


Fig 5.5 retrato de fase  $\Delta(s) = 0$

3)  $\Delta(s) > 0$

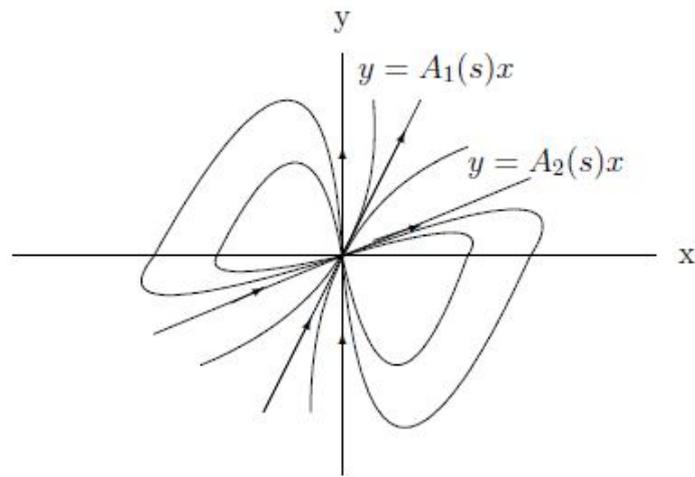


Fig 5.6 retrato de fase  $\Delta(s) > 0$

### 8.2.3. Retrato de fase en el esfera de Poincaré

1) Caso en donde  $\Delta(0) < 0$

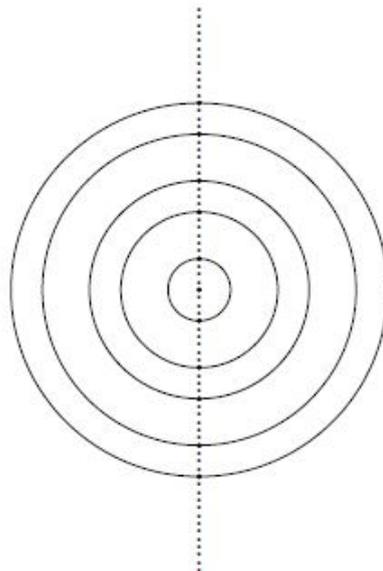


Fig 5.7  $\Delta(0) < 0$

2) Caso en donde  $\Delta(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

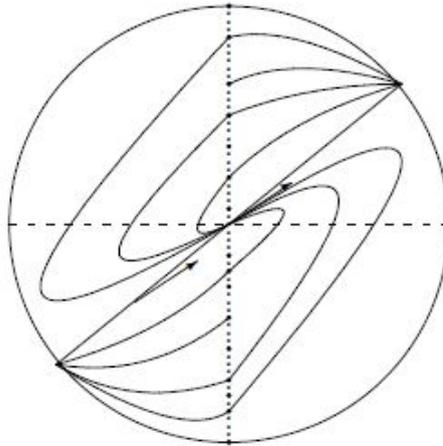


Fig 5.8  $\Delta(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

3) Caso en donde  $\Delta(\mathbf{0}) > \mathbf{0}$

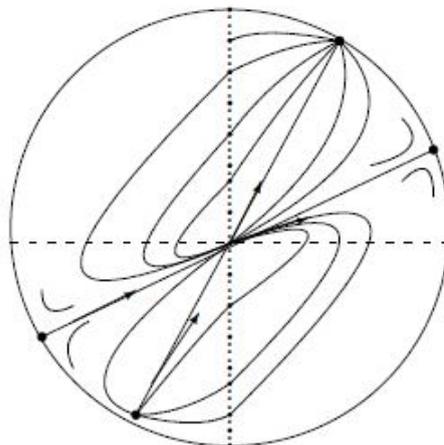


Fig 5.9  $\Delta(\mathbf{0}) > \mathbf{0}$

4) Caso en donde  $\Delta(s) < 0$

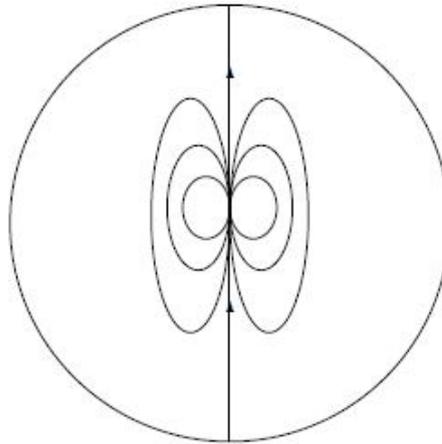


Fig 5.10  $\Delta(s) < 0$

5) Caso en donde  $\Delta(s) = 0$

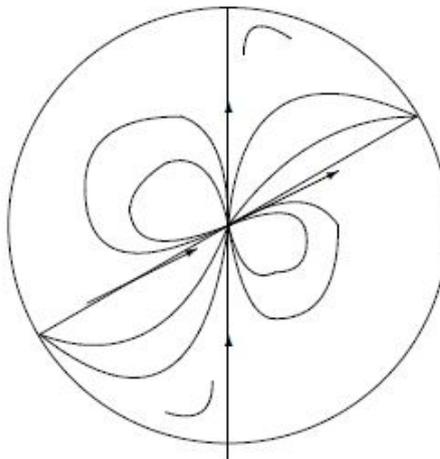


Fig 5.11  $\Delta(s) = 0$

6) Caso en donde  $\Delta(\mathbf{s}) > 0$

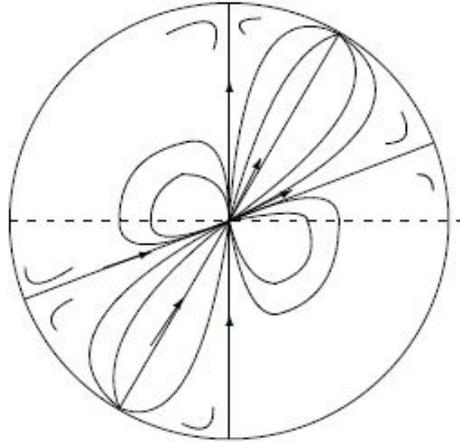


Fig 5.12  $\Delta(\mathbf{s}) > 0$

### 8.3. Singularidades en el infinito del sistema 8.1

En la carta  $U_1$  se tiene el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -yz^2\epsilon^2 - (1-s)y^2 + (\beta + m + 1)y - \beta \\ \dot{z} &= -z(\epsilon^2 z^2 + y - 1) \end{aligned} \quad (8.4)$$

#### Proposición 8.3.1.

- a) Si  $\Delta(s) > 0$ , entonces
  - a<sub>1</sub>)  $(A_1(s), 0)$  es un nodo atractor.
  - a<sub>2</sub>)  $(A_2(s), 0)$  es un punto silla.
- b) Si  $\Delta(s) = 0$ , entonces  $(A_3(s), 0)$  es un silla nodo.
- c) Si  $\Delta(s) < 0$  no existen puntos críticos.

*Demostración.*

- a) Para  $z = 0$ , se tiene que  $y_1 = A_1(s)$ , e,  $y_2 = A_2(s)$  y las matrices jacobianas de  $(A_1(s), 0)$ , y,  $(A_2(s), 0)$  son :

$$\mathbf{Df}(\mathbf{A}_1(\mathbf{s}), \mathbf{0}) = \begin{bmatrix} -\sqrt{\Delta(s)} & 0 \\ 0 & 1 - A_1(s) \end{bmatrix} \quad \mathbf{Df}(\mathbf{A}_2(\mathbf{s}), \mathbf{0}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\Delta(s)} & 0 \\ 0 & 1 - A_2(s) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto  $(A_1(s), 0)$  es nodo atractor y  $(A_2(s), 0)$  es un silla.

b) En el caso  $\Delta(s) = 0$  se tiene  $(A_3(s), 0)$  es punto crítico; Sea  $u = y - A_3(s)$  entonces

$$\dot{u} = -(1-s)u^2 - \frac{\beta + m + 1}{2(1-s)}\epsilon^2 z^2 - \epsilon^2 uz^2$$

$$\dot{z} = z\left(1 - \frac{\beta + m + 1}{2(1-s)}\right) - \epsilon^2 z^3 - uz$$

Dividiendo entre  $1 - \frac{\beta + m + 1}{2(1-s)} = 1 - A_3(s) < 0$  se tiene

$$\dot{u} = -\frac{(1-s)}{1-A_3(s)}u^2 - \frac{A_3(s)}{1-A_3(s)}\epsilon^2 z^2 - \frac{1}{1-A_3(s)}\epsilon^2 uz^2$$

$$\dot{z} = z - \frac{1}{1-A_3(s)}\epsilon^2 z^3 - \frac{1}{1-A_3(s)}uz$$

Luego para  $z = 0$ , se tiene  $g(u) = -\frac{(1-s)}{1-A_3(s)}u^2$ , de aquí podemos afirmar que  $(A_3(s), 0)$  es un silla nodo.

□

En la carta  $U_2$  se tiene el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \epsilon^2 z^2 + (1-s)x - x^2(\beta + m + 1) + \beta x^3 - \beta \epsilon^2 x z^2 \\ \dot{z} &= -z[\beta \epsilon^2 z^2 + (\beta + m)x - \beta x^2 + s] \end{aligned} \quad (8.5)$$

La matriz jacobiana asociada al sistema es :

$$\begin{bmatrix} 1-s & 0 \\ 0 & -s \end{bmatrix}$$

**Lema 8.3.2.** *En la carta  $U_2$  se tiene:*

a) *Si  $s > 0$ , entonces  $(0, 0)$  es un punto silla.*

b) *Si  $s < 0$ , entonces  $(0, 0)$  es un nodo repulsor.*

Es inmediato de la matriz jacobiana.

**8.3.1. Retrato de fase sistema 8.1 en  $\mathbf{R}_1$**

$$\mathbf{R}_1 = \left\{ (\beta, m, s) \mid 1 + \frac{m}{s} < 0 \quad \beta + m - 2 > 0 \quad \beta - H(m) < 0 \right\}$$

1) Caso  $\Delta(s) < 0$

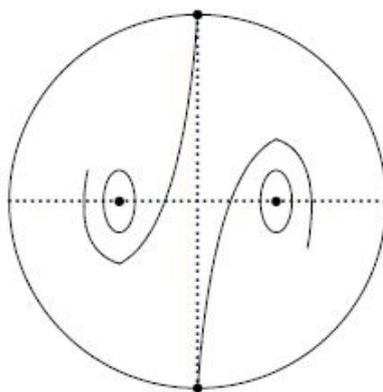


Fig 5.13  $\Delta(s) < 0$

2) Caso  $\Delta(s) = 0$

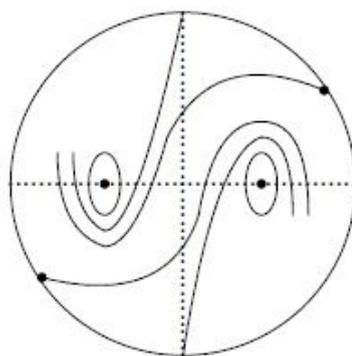


Fig 5.14  $\Delta(s) = 0$

3) Caso  $\Delta(s) > 0$

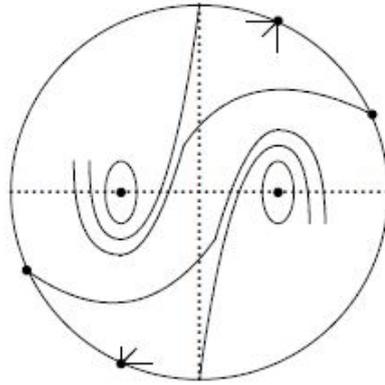


Fig 5.15  $\Delta(s) > 0$

### 8.4. Bifurcaciones

Estas bifurcaciones las encontramos en la región  $\mathbf{R} \cap \mathbf{R}_1$  con la condición que se le impone a  $\Delta$  en cada caso.

1)  $s = 0$

1.1)  $\Delta(0) < 0$

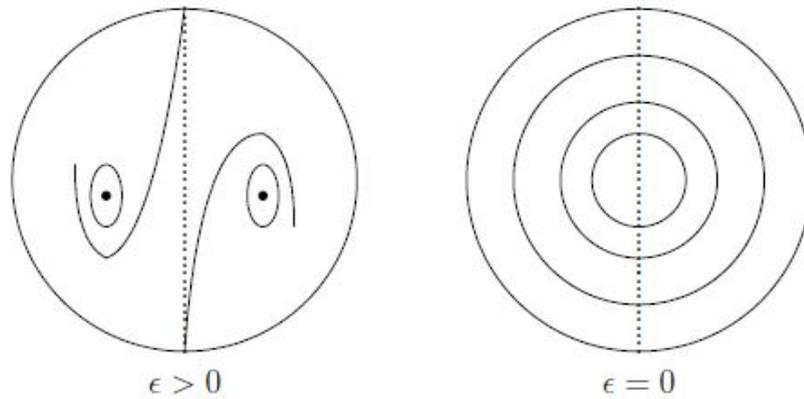


Fig 5.16  $\Delta(0) < 0$

1.2)  $\Delta(0) = 0$

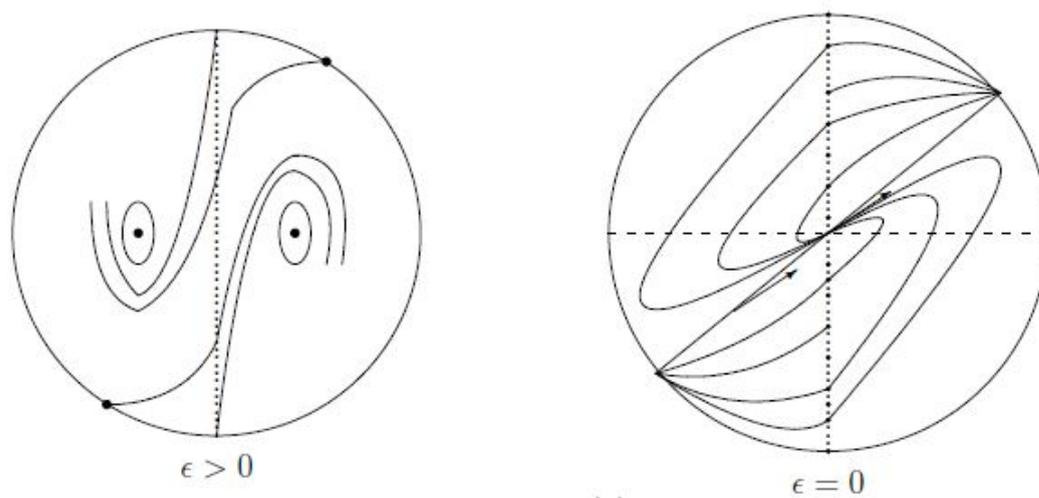


Fig 5.17  $\Delta(0) = 0$

1.3)  $\Delta(0) > 0$

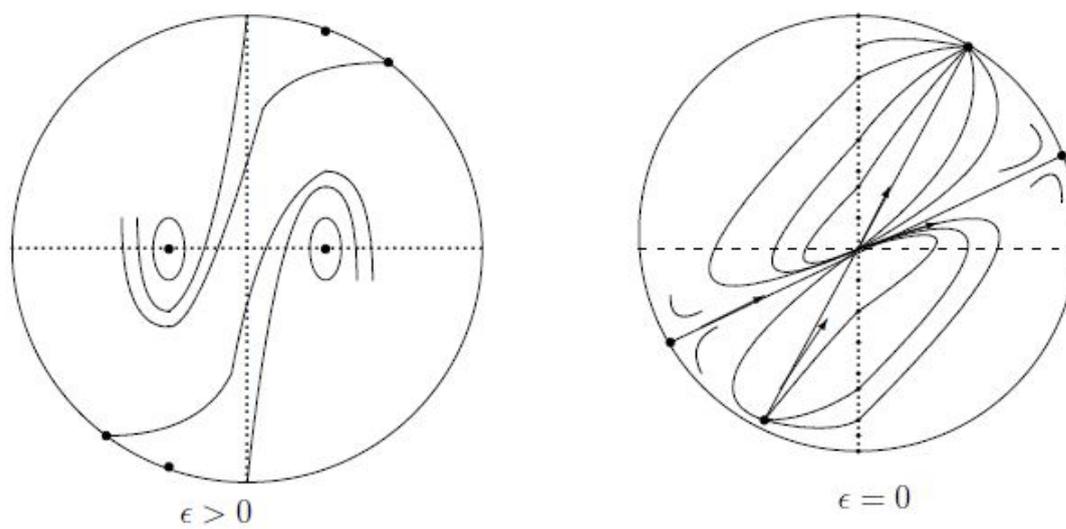


Fig 5.18  $\Delta(0) > 0$

2)  $s \neq 0$

2.1)  $\Delta(s) < 0$

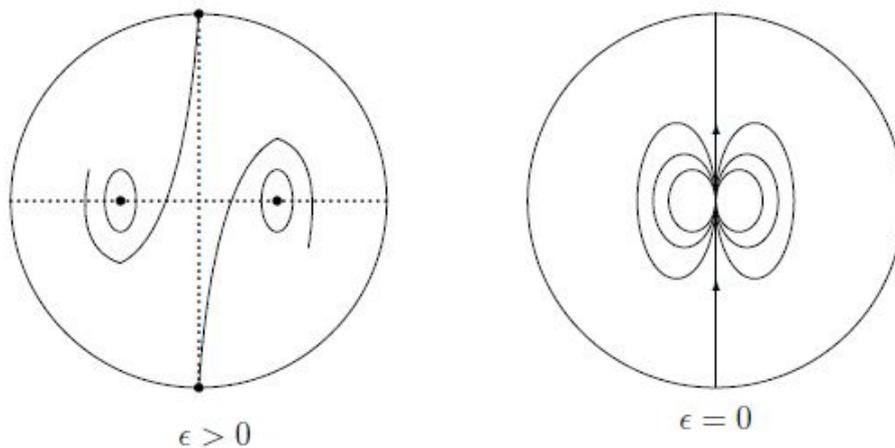


Fig 5.19  $\Delta(s) < 0$

2.2)  $\Delta(s) = 0$

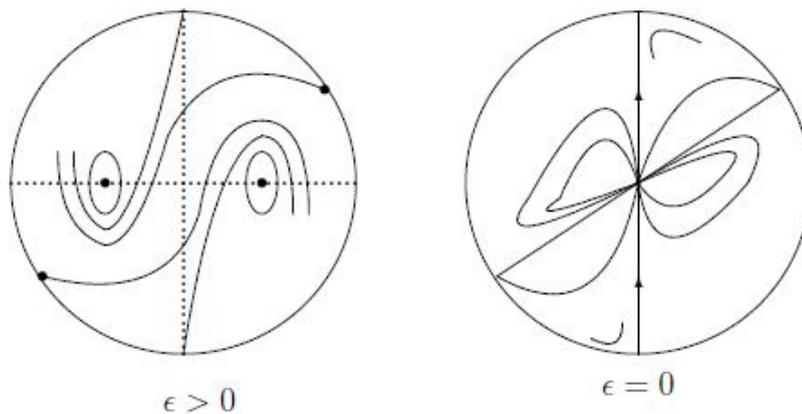


Fig 5.20  $\Delta(s) = 0$

2.3)  $\Delta(s) > 0$

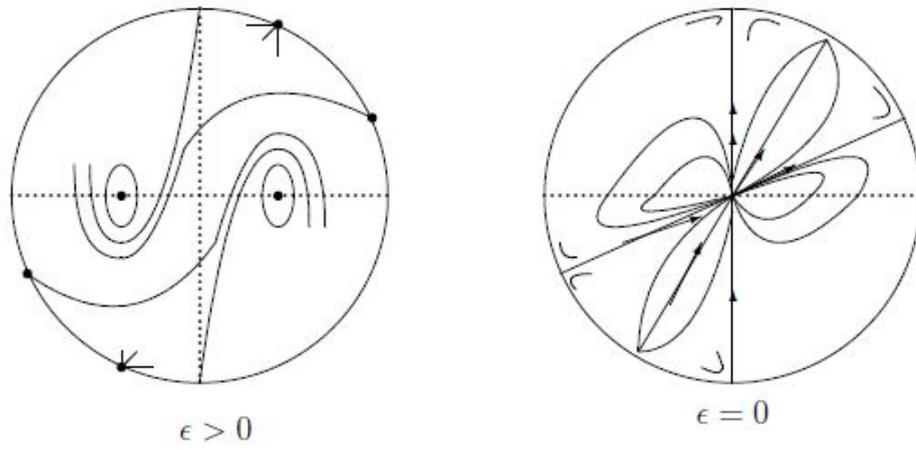


Fig 5.21  $\Delta(s) > 0$

# Conclusiones

- El sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ \dot{y} &= b + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2\end{aligned}$$

tiene como máximo dos ciclos límites. Más concretamente, o no tiene ciclos límites o tiene dos.

- Las únicas rectas invariantes del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2 + xy \\ \dot{y} = \beta(-x^2 + xy) + mxy + sy^2 \end{cases}$$

son de la forma  $y = Ax$ , ó,  $x = 0$ .

# Bibliografía

- [1] A. F. Andreev, *Investigation of the behaviour of the integral curves of a system of two differential equations in the neighborhood of a singular point*, Translation of A.M.S., 8(1958), 183-207.
- [2] Andronov A., Leontovich E., *Theory of Bifurcations of Dynamical System on a Plane*. I.P.S.T., Jerusalem, 1971.
- [3] Andronov A., Leontovich E., *Qualitative Theory of second-order Dynamic Systems*. I.P.S.T., Jerusalem, 1973.
- [4] José Argémi, *Sur les points singuliers multiples de systmes dynamiques dans  $R^2$* . Ann. Mat., IV 79 (1968) 35-70.
- [5] Arnold V., *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, Rubinõs-1860 Madrid 1995
- [6] H. W. Bover, F. Dumortier, S.J van Strien and F. Takens “*Structures in Dynamics Studies in Math. Physics vol 2*”, Ed. E. M de Jayer, North-Holland 1991.
- [7] B. Coll and J. Llibre, *Limit cycles for a quadratic system with an invariant straight line and some evolution of phase portraits*. Qualitative theory of diff. equations (Szeged, 1988) 111-123, Colloq. Math Soc. Janos Bolyai, 53, North-Holland 1990.
- [8] W.A. Coppel, *A survey of quadratic systems*. Journal of differential equations 2, 293- 304 (1966).
- [9] W.A. Coppel, *Some quadratic systems with at most one limit cycle*. Dynamics reported, 2, 61-87 (1989).
- [10] L. A. Cherkas, *the absence of limit cycles for a differential equation with stable focus*. Differential’nye Uravneniya, 6, 5 (1970) 779-783 [Russian], or Differential Equations, 6, 5 (1970) 589-592 [English].
- [11] L. A. Cherkas and L. I. Zhilevich, *Some criteria for the absence of limit cycles and for the existence of a single limit cycle*. Differential’nye Uravneniya, 6, 7 (1970) 1170-1178 [Russian], or Differential Equations, 6, 7 (1970) 891-897 [English].

- [12] L. A. Cherkas and L. I. Zhilevich, *Limit cycles of some differential equations*. *Differentsial'nye Uravneniya*, 8, 7 (1972) 1207-11213 [Russian], or *Differential Equations*, 8, 7 (1972) 924-929 [English].
- [13] C. Chicone and T. Jinghuam, *On general properties of quadratic systems*, *Amer. Math. Monthly*, 89(1982), 167- 178.
- [14] R. M. Evdokimenko, *Behavior of integral curves of a dynamic system*. *Differentsial'nye Uravneniya*, 12, 9 (1976) 1557-1567 [Russian], or *Differential Equations*, 12, 9 (1976) 1095-1103[English].
- [15] G.F.D. Duff, *Limit cycles and rotated vector fields*, *Ann. of Math.*, 67 (1953) 15-31.
- [16] A. Gasull and R. Prohens, *On quadratic systems with a degenerate critical point*. *Rocky Mountain* 26, 1, 135-164 (1996).
- [17] A. Gasull and R.Prohens, *Effective computation of the first Lyapunov quantities for a planar differential equation*. *Applicationes Mathematicae* 24, 3, 243-250 (1997).
- [18] A. Gasull, Robert E. Kooij and Joan Torregrosa, *Limit cycles in the Holling - Tanner model*, *Publicacions Matemàtiques*, Vol 41 (1997), 149 - 167.
- [19] J. Hale y H. Koçak *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag New-York 1991.
- [20] Hurewicz Witold, *Sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Ediciones Rialp, Madrid, 1978.
- [21] N. A. Lukashevich, *Integral curves of Darboux's equation*, *Differentsial'nye Uravneniya*, 2, 5 (1966) 628-633[Russian], or *Differential Equations*, 2, 5 (1966)[English].
- [22] N. A. Lukashevitch , *Integral curves of a certain differential equation*. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1, 1 (1965) 82-95 [Russian], or *Differential Equations* 1, 1 (1965) 60- 70[English].
- [23] V.A. Lunkevich and K. S. Sibirskii, *Integrals of a general quadratic differential system in cases of center*. *Differentsial'nye Uravneniya*, 18, 5 (1982) 786-792[Russian], or *Differential Equations* 18, 5 (1982) 563-568[English].
- [24] Perko L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, 2nd. ed.. Springer-Verlag New-York 1996.
- [25] Perko L., *Rotated vector fields and the global behavior of limit cycles for a class of quadratic systems in the plane*, *Journal of Differential Equations* 18, 63-86 (1975)
- [26] B. A. Razzakova, *Integral curves of a homogeneous equation in the large on the whole plane*. *Differentsial'nye Uravneniya*, 7, 6 (1971) 1126-1127[Russian], or *Differential Equations*, 7, 6 (1971) 855-856[English].
- [27] Suo Guangjian, *Existence of at most two limit cycles for the system of differential equations*. *Reports of the Faculty of Technical Mathematics and Informatics*, N§ 90-03, Delft 1990.

- [28] K. S. Sibirskii, *On the number of limit cycles in the neighborhood of a singular point*. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1, 1 (1965) 53-66 [Russian], or *Differential Equations*, 1, 1 (1965) 36-47[English].
- [29] K. S. Sibirskii, *An algebraic integral in the case of center*. *Differentsial'nye Uravneniya*, 8, 12 (1972) 2211-2214 [Russian], or *Differential Equations*, 8, 12 (1972) 1711-1714 [English].
- [30] Dana Schlomiuk, *Elementary and algebraic invariant curves of differential equations*. Nser and by Quebec Education Ministry.
- [31] Wiggins S., *Global Bifurcations and Chaos*. Springer-Verlag New-York 1988.
- [32] Wiggins S., *Introduction to Applied Nonlinear Systems and Chaos*. Springer-Verlag New-York 1990.
- [33] J. Guckenheimer y P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer- Verlag New-York 1983
- [34] J. Sotomayor, *Curvas definidas por equações diferenciais no plano*. Rio de Janeiro, IMPA, 1981.
- [35] Shen Boqian, *Distinguish problem for some type critical cycle on quadratic system*. *Ann. of Diff. Eqs.* 8(2) 1992.
- [36] Shen Boqian, *Phase - Portrait discussion about a quadratic differential system with a variation of parameter as saddle - node appear saddle - node*, *Ann. of Diff. Eqs.* 7(4)1991.
- [37] Tsutomu Date, *Classification and Analysis of two - dimensional real homogeneous quadratic differential equations*. *Journal of Differential Equation* 32,311-334(1979).
- [38] A. I. Yablonskii, *Algebraic integrals of a differential equation system*. *Differentsial'nye Uravneniya*, 6, 10 (1970) 1752-1760 [Russian],or *Differential Equations* 6, 10 (1970) 1326-1333[English].
- [39] Ye Yan-Qian, *Theory of Limit Cycles*. Translation of Mathematical Monographs, Volume 66, 1986.
- [40] Ye Yanqian, *Some problems in the qualitative theory of ordinary differential equations*, *Journal Differential Equations* 46,153-164 (1982).
- [41] L. I. Zhilevich, *Separatrices and limit cycles of certain differential equations*. *Differentsial'nye Uravneniya*, 7, 6 (1971)782-790[Russian], or *Differential Equations*, 7, 6 (1971) 597-602[English].
- [42] Zhang Zhifen and others, *Qualitative theory of differential equations*, Translation of Math. Monographs 101, AMS, USA 1992.