



Universidad  
del Atlántico

CÓDIGO: FOR-DO-109

VERSIÓN: 0

FECHA: 03/06/2020

**AUTORIZACIÓN DE LOS AUTORES PARA LA CONSULTA, LA  
REPRODUCCIÓN PARCIAL O TOTAL, Y PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DEL  
TEXTO COMPLETO**

Puerto Colombia, **30 DE ABRIL DE 2020**

Señores

**DEPARTAMENTO DE BIBLIOTECAS**

Universidad del Atlántico

Cuidad

**Asunto: Autorización Trabajo de Grado**

Cordial saludo,

Yo, **CARLOS ALBERTO ANTEQUERA CABRERA.**, identificado(a) con **C.C. No. 72.003.974** de **BARRANQUILLA**, autor(a) del trabajo de grado titulado **DIFICULTADES SOBRE LA APREHENSIÓN DEL ÁLGEBRA LINEAL EN ESTUDIANTES DE EDUCACION SUPERIOR** presentado y aprobado en el año **2020** como requisito para optar al título Profesional de **LICENCIADO EN MATEMATICAS.**; autorizo al Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico para que, con fines académicos, la producción académica, literaria, intelectual de la Universidad del Atlántico sea divulgada a nivel nacional e internacional a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios del Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico pueden consultar el contenido de este trabajo de grado en la página Web institucional, en el Repositorio Digital y en las redes de información del país y del exterior, con las cuales tenga convenio la Universidad del Atlántico.
- Permitir consulta, reproducción y citación a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato CD-ROM o digital desde Internet, Intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer.

Esto de conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

Atentamente,

Firma

**CARLOS ALBERTO ANTEQUERA CABRERA**  
**C.C. No. 72.003.974 de BARRANQUILLA**

**DECLARACIÓN DE AUSENCIA DE PLAGIO EN TRABAJO ACADÉMICO PARA GRADO**


*Este documento debe ser diligenciado de manera clara y completa, sin tachaduras o enmendaduras y las firmas consignadas deben corresponder al (los) autor (es) identificado en el mismo.*

Puerto Colombia, **30 DE ABRIL DE 2020**

Una vez obtenido el visto bueno del director del trabajo y los evaluadores, presento al **Departamento de Bibliotecas** el resultado académico de mi formación profesional o posgradual. Asimismo, declaro y entiendo lo siguiente:

- El trabajo académico es original y se realizó sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, en consecuencia, la obra es de mi exclusiva autoría y detento la titularidad sobre la misma.
- Asumo total responsabilidad por el contenido del trabajo académico.
- Eximo a la Universidad del Atlántico, quien actúa como un tercero de buena fe, contra cualquier daño o perjuicio originado en la reclamación de los derechos de este documento, por parte de terceros.
- Las fuentes citadas han sido debidamente referenciadas en el mismo.
- El (los) autor (es) declara (n) que conoce (n) lo consignado en el trabajo académico debido a que contribuyeron en su elaboración y aprobaron esta versión adjunta.

Título del trabajo académico:	<b>DIFICULTADES SOBRE LA APREHENSIÓN DEL ÁLGEBRA LINEAL EN ESTUDIANTES DE EDUCACION SUPERIOR</b>
Programa académico:	<b>LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS</b>

Firma de Autor 1:							
Nombres y Apellidos:	<b>CARLOS ALBERTO ANTEQUERA CABRERA</b>						
Documento de Identificación:	CC	<input checked="" type="checkbox"/>	CE		PA		Número: <b>72.003.974</b>
Nacionalidad:	<b>COLOMBIANO</b>				Lugar de residencia:		
Dirección de residencia:							
Teléfono:					Celular:		



**FORMULARIO DESCRIPTIVO DEL TRABAJO DE GRADO**

<b>TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO DE GRADO</b>	<b>DIFICULTADES SOBRE LA APREHENSIÓN DEL ÁLGEBRA LINEAL EN ESTUDIANTES DE EDUCACION SUPERIOR.</b>
<b>AUTOR(A) (ES)</b>	<b>CARLOS ALBERTO ANTEQUERA CABRERA</b>
<b>DIRECTOR (A)</b>	<b>YESIKA PAOLA ROJAS SANDOVAL</b>
<b>CO-DIRECTOR (A)</b>	
<b>JURADOS</b>	<b>RAFAEL SANCHEZ ANILLO MAURICIO PABLO GOMEZ MUÑOZ</b>
<b>TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TITULO DE</b>	<b>LICENCIADO EN MATEMATICAS</b>
<b>PROGRAMA</b>	<b>LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS</b>
<b>PREGRADO / POSTGRADO</b>	<b>PREGRADO</b>
<b>FACULTAD</b>	<b>CIENCIAS DE LA EDUCACION</b>
<b>SEDE INSTITUCIONAL</b>	<b>SEDE NORTE</b>
<b>AÑO DE PRESENTACIÓN DEL TRABAJO DE GRADO</b>	<b>2020</b>
<b>NÚMERO DE PÁGINAS</b>	<b>64</b>
<b>TIPO DE ILUSTRACIONES</b>	<b>FIGURAS Y FOTOGRAFÍAS</b>
<b>MATERIAL ANEXO (VÍDEO, AUDIO, MULTIMEDIA O PRODUCCIÓN ELECTRÓNICA)</b>	<b>No aplica</b>
<b>PREMIO O RECONOCIMIENTO</b>	<b>No aplica</b>



DIFICULTADES SOBRE LA APREHENSIÓN DEL ÁLGEBRA LINEAL EN ESTUDIANTES  
DE EDUCACION SUPERIOR

CARLOS ALBERTO ANTEQUERA CABRERA

UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BARRANQUILLA

2020



DIFICULTADES SOBRE LA APREHENSIÓN DEL ÁLGEBRA LINEAL EN ESTUDIANTES  
DE EDUCACION SUPERIOR

CARLOS ALBERTO ANTEQUERA CABRERA

TRABAJO DE GRADO COMO REQUISITO PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

ASESORA

Mg. YESIKA ROJAS SANDOVAL

UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BARRANQUILLA

2020

**NOTA DE ACEPTACIÓN**

---

---

---

---

---

---

**Evaluador I**

---

**Evaluador II**

## **AGRADECIMIENTOS**

*Le doy gracias a Dios por darme la fortaleza, la paciencia y las ganas para cumplir la meta de ser un profesional, ya que me brindó a través de mi formación como profesional la sabiduría y la inteligencia necesaria que mantuve a través de todo el proceso. Agradezco a mis hermanos Mónica Antequera, Julio Mario Antequera y Claudia Antequera por el apoyo que me brindaron en toda mi formación y darme todas aquellas sugerencias que me ayudaron a pensar de manera diferente optando por una actitud positiva para conseguir el logro deseado. Gracias a mi prima Yolima Rocío Cabrera por darme ese apoyo incondicional para lograr ser lo que soy como profesional y todas aquellas peticiones venidas de nuestro Padre a través de sus oraciones. Agradezco a nuestra asesora Msc Yesika Rojas por todo el tiempo que me brindó en la preparación de este trabajo de grado, por sus enseñanzas y sus consejos que fueron necesarias en el desarrollo de este trabajo.*

**Carlos Alberto Antequera Cabrera**

## **DEDICATORIA**

*A mis hijos que fueron toda mi inspiración durante toda la carrera dándome su cariño y que fue el combustible que mantuvo el tesón en mi formación, a mi esposa Blanca Judith Bolívar por ser y estar incondicionalmente a mi lado, manteniendo la paciencia, brindándome su apoyo para cumplir el deseo de ser un profesional.*

***Carlos Alberto Antequera Cabrera***



## CONTENIDO

RESUMEN.....	1
ABSTRACT.....	2
INTRODUCCIÓN .....	3
CAPÍTULO I PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	6
1.1. Descripción Del Problema.....	6
1.2. Formulación del Problema .....	8
1.3. Justificación.....	9
1.4. Objetivos .....	11
1.4.1. Objetivo General .....	11
1.4.2. Objetivos Específicos .....	11
CAPITULO II MARCO REFERENCIAL.....	11
2.1. Antecedentes.....	11
2.2. Marco Teórico.....	17
2.2.1. Breve historia del álgebra lineal .....	17
2.2.2. La asignatura álgebra lineal .....	19
2.2.3. Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.....	20
2.2.4. Aportes teóricos de Duval.....	22
2.2.5. Teoría de los registros de representaciones semióticas.....	23
2.2.6. Los principios de un conocimiento pertinente.....	29
CAPITULO III DISEÑO METODOLÓGICO .....	32
3.1. Metodología y diseño de investigación .....	32
3.2. Población y muestra .....	34
3.3. Técnicas e instrumentos de recolección de la información.....	35
CAPITULO IV ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS.....	36
4.1 Prueba diagnóstica.....	36
CAPÍTULO V CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....	56
5.1. Conclusiones .....	56
5.2. Recomendaciones .....	57
REFERENTES BIBLIOGRAFICOS .....	59
ANEXOS.....	62

**LISTA DE FIGURAS**

Figura 1: Respuesta del primer estudiante al punto 1 de la prueba diagn3stica.....	37
Figura 2: Respuesta del primer estudiante al punto 2 de la prueba diagn3stica.....	39
Figura 3: Respuesta del primer estudiante al punto 3 de la prueba diagn3stica.....	41
Figura 4: Respuesta del primer estudiante al punto 4 de la prueba diagn3stica.....	42
Figura 5: Respuesta del primer estudiante al punto 5 de la prueba diagn3stica.....	43
Figura 6: Respuesta del segundo estudiante al punto 1 de la prueba diagn3stica.....	45
Figura 7: Respuesta del segundo estudiante al punto 2 de la prueba diagn3stica.....	46
Figura 8: Respuesta del segundo estudiante al punto 3 de la prueba diagn3stica.....	47
Figura 9: Respuesta del segundo estudiante al punto 4 de la prueba diagn3stica.....	48
Figura 10: Respuesta del segundo estudiante al punto 5 de la prueba diagn3stica.....	49
Figura 11: Respuesta del tercer estudiante al punto 1 de la prueba diagn3stica. ....	50
Figura 12: Respuesta del tercer estudiante al punto 2 de la prueba diagn3stica. ....	51
Figura 13: Respuesta del tercer estudiante al punto 3 de la prueba diagn3stica. ....	52
Figura 14: Respuesta del tercer estudiante al punto 4 de la prueba diagn3stica. ....	54
Figura 15: Respuesta del tercer estudiante al punto 5 de la prueba diagn3stica. ....	55

## RESUMEN

Esta investigación tiene como objetivo, reconocer las dificultades que presentan los estudiantes de educación superior al enfrentarse a la resolución de situaciones problemas basados en el álgebra lineal en segundo cuatrimestre. El problema radica en que, si los estudiantes no tienen un buen manejo del tema de las matrices y sistema de ecuaciones lineales con varias incógnitas en general, los conlleva a cometer una serie de errores al momento de resolver situaciones problemas con matrices y sistema de ecuaciones, el error es un dato objetivo debido a las dificultades que se encuentra permanentemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los cuales forman parte fundamental en la formación de los estudiantes de educación superior sumergidos en la ciencia en diferentes disciplinas y que en algunas ocasiones no les permite adquirir de manera correcta el conocimiento.

El diseño y metodología de investigación empleado es el “estudio de casos” basado en un enfoque cualitativo, para la recolección de la información se implementarán unas técnicas e instrumentos dentro de las cuales están la prueba diagnóstica, que permitirá reconocer los errores que presentan los estudiantes debido a las dificultades presentes en la aprehensión de los conceptos básicos del álgebra lineal en segundo cuatrimestre en torno a la resolución de problemas con matrices, así mismo tener un acercamiento a las dificultades que tienen los estudiante al momento de desarrollar la temática, y así determinar si estas están siendo motivo de la presencia de errores a la hora de resolver las situaciones problemas que involucren matrices y sistema de ecuaciones. Esta investigación también permitirá mostrarles a los profesores la importancia de reconocer los errores cometidos con mayor frecuencia por los estudiantes y a partir de que dificultades puede estar manifestándose, luego de ese reconocimiento buscar la manera de que los estudiantes los superen.

**Palabras claves:** dificultades, errores, resolución de problemas, matrices, sistema de ecuaciones.

### **ABSTRACT**

This research aims to recognize the difficulties that higher education students have when facing problem solving problems based on linear algebra in the second semester. The problem lies in the fact that, if students do not have a good management of the subject of matrices and system of linear equations with several unknowns in general, it leads them to commit a series of errors when solving problem situations with matrices and system of equations, the error is an objective fact due to the difficulties that are permanently found in the processes of teaching and learning of mathematics, which are a fundamental part in the training of higher education students immersed in science in different disciplines and that in Sometimes it does not allow them to acquire knowledge correctly.

The research design and methodology used is the "case study" based on a qualitative approach, for the collection of information techniques and instruments will be implemented within which are the diagnostic test, which allow recognize the errors that students present due to the difficulties present in the apprehension of the basic concepts of linear algebra in the second four-month period around the resolution of problems with matrices, as well as having an approach to the difficulties that students have at the time of develop the theme, and thus determine if these are being the reason for the presence of errors when solving the problem situations involving matrices and system of equations. This research will also allow teachers to show the importance of recognizing the mistakes made most frequently by students and from what difficulties it may be manifesting, after that recognition look for ways for students to overcome them.

**Keywords:** difficulties, errors, problem solving, matrices, system of equations.

## INTRODUCCIÓN

A través de los tiempos hemos visto como civilizaciones extranjeras han desarrollado técnicas para el mejoramiento y fortalecimiento de sus naciones que ha contribuido con el enriquecimiento de las ciencias matemáticas ya que ha sido el motor de los grandes avances de las culturas y por esto en los últimos años de la era actual se han difundido grandes avances en el campo del aprendizaje de las ciencias matemáticas y un rápido crecimiento en la investigación de los sistemas educativos.

Así mismo hoy por hoy el tema del aprendizaje se ha vuelto muy primordial para los docentes, en su esfuerzo por construir experiencias educativas significativas para una población estudiantil cada vez más diversa donde se espera que los estudiantes lleguen a expandir los conocimientos adquiridos e incorporar nuevos saberes a partir de los que ya poseen. (Escobar y Palencia, 2018, p.3)

Sin embargo la enseñanza de las ciencias matemáticas se aprecia como un procedimiento un poco complejo, que debe salirse de la rutina desde la cotidianidad, el conocimiento del concepto es materia fundamental para la consolidación del aprendizaje, se debe iniciar por anexar de forma idónea los términos para que la práctica sea productiva y acertada. Una visión muy llamativa acerca de la naturaleza de las ciencias matemática consiste en valorarla como una construcción del ambiente social para el desarrollo de las próximas generaciones.

Dado lo anterior, este trabajo de grado se centra en una de las habilidades de gran importancia en la aprehensión de los conceptos matemáticos como es la resolución de problemas, en este caso haciendo uso de las matrices y sistema de ecuaciones lineales con varias incógnitas los cuales son el objetivo principal en la enseñanza de los conceptos del álgebra lineal en estudiantes de

educación superior, en donde los estudiantes no están salvos de presentar dificultades en el aprendizaje del mismo que los conlleva a cometer errores. Por tal motivo que este estudio trata de reconocer las dificultades presentes en los estudiantes de educación superior al momento de realizar operaciones con matrices y sistema de ecuaciones.

Esta investigación se divide en cinco capítulos, en el primero se presenta el problema de investigación, donde se da a conocer la noción de dificultad desde la perspectiva de diferentes autores y como estos afectan el proceso de aprendizaje del álgebra lineal, y, por último, se describen las preguntas y los objetivos de la investigación.

En el segundo capítulo, se desarrolla el marco teórico, se mencionan diferentes investigaciones relacionadas con las dificultades en el aprendizaje del álgebra lineal y la resolución de problemas con matrices y sistema de ecuaciones, seguidamente se realiza un análisis de los referentes teóricos relacionados con el problema de investigación.

En el capítulo tres, se hace alusión al diseño y metodología de investigación implementado de acuerdo al tipo de intervención seleccionada para llegar a un acercamiento de la respuesta a la pregunta planteada, se realiza la descripción del diseño y las fases mediante las cuales se va a desarrollar, se presenta la población y muestra de la investigación, de la misma forma las técnicas e instrumentos utilizadas para recopilar la información. Seguidamente en el cuarto capítulo, se describe el análisis de resultados que permitieron obtener información con relación a las dificultades que presentan los estudiantes de educación superior basado en el aprendizaje de las matrices y sistema de ecuaciones además de los errores que están presentes en la resolución de problemas con matrices, puestos de manifiesto en las técnicas e instrumentos mencionados anteriormente.

Por último, en el capítulo cinco, considerando los objetivos que se plantearon, se establecen las conclusiones, de la misma forma se expone unas recomendaciones que se deben tener en cuenta y que sugiere continuar realizando futuras investigaciones con el fin de establecer con más claridad las dificultades presentes en estudiantes de educación superior, y que se puedan establecer nuevas estrategias para que estas sean superadas, en la misma medida en que se busque fortalecer el aprendizaje de la resolución de problemas con matrices y sistema de ecuaciones.

## CAPÍTULO I PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

### 1.1 Descripción del Problema

El álgebra lineal es una asignatura que por mucho tiempo ha causado apatía entre la mayoría de los estudiantes teniendo en cuenta que es una rama de las Matemáticas con un elevado grado de abstracción, ya que es uno de los pilares del lenguaje algebraico, lo cual provoca un elemento de especial dificultad para el estudiante. Esto debido a que los conceptos básicos del álgebra lineal son complicados para algunos estudiantes porque no logran entender su aplicación en la vida cotidiana (Ortega, 2002).

Con base en esto se encontró deficiencia en la aprehensión de conceptos importantes en una muestra de alumnos de educación superior del Instituto Tecnológico de Soledad Atlántico en la asignatura del álgebra lineal, que provocó confusión en el momento de realizar algunas operaciones algebraicas para la resolución de problemas basados en los cursos iniciales de ingeniería, por tal motivo esto provoca en los estudiantes dificultades en el aprendizaje que le impiden el avance del pensamiento matemático para así abstraer de manera adecuada los conocimientos necesarios para un buen manejo del álgebra lineal.

En el artículo titulado Semiótica de la matemática, en el cual establece que:

*Él lenguaje tiene un papel central, en el proceso de comunicación e interpretación y en la variedad de objetos que intervienen, para poder articular una teoría ontosemiótica entre la epistemología y la didáctica, se debe hacer teniendo en cuenta el comportamiento del individuo y el significado del contexto matemático que lo rodea (Godino, 2003).*

Un aspecto importante en uno de los principales problemas es en la búsqueda de factores que inciden en el aprendizaje del álgebra lineal como la simbolización y la comprensión exacta de lo



dicho en el lenguaje corriente para poder obtener una traducción al lenguaje algebraico correcto. El conocimiento del álgebra visto en cursos previos se convierte en una herramienta imprescindible a la introducción a los conceptos básicos del álgebra lineal para que los estudiantes avancen en los conocimientos matemáticos.

Por un lado Muñoz y Ríos (2008) concuerdan que el paso de la aritmética al álgebra produce, en la mayoría de los estudiantes, dificultades de aprendizaje, las cuales se agudizan en el tema de la resolución de problemas cuando se aplican ecuaciones lineales, ya que interviene un mayor análisis y no solo la repetición de un proceso mecánico. Basándose en esto se nota que el estudiante debe tener bien definido el uso y la comprensión de la aritmética en los procesos más elementales para la resolución de problemas basados en las operaciones básicas para que así puedan adentrarse en la preconcepción de los conocimientos básicos del álgebra para poder sentar bases hacia la introducción del álgebra lineal que pueden ayudar al estudiante en otros ámbitos de aprendizaje.

Por otra parte Socas (1997) como Esquinas (2009) coinciden en que un análisis de las dificultades específicas, así como de los errores más comunes de los estudiantes en las primeras experiencias con el álgebra, pueden ayudar a buscar estrategias idóneas para subsanar los posibles problemas de enseñanza-aprendizaje de esta temática.

Por tal razón ahondando en estas dificultades de manera objetiva se logra observar de qué manera está afectando en los estudiantes de educación superior la falta de comprensión de los conceptos en el álgebra lineal el cual provoca algunas dificultades llevando consigo algunos errores que conllevan a la mala resolución de problemas y a la formulación de los conceptos básicos basados en ingeniería.

Por este motivo al pasar del aprendizaje de la aritmética al álgebra y posteriormente al álgebra lineal va no solo de aprender reglas y operaciones básicas para la resolución de problemas, sino que implica comprender lo que realmente representan los símbolos que se están estudiando para un mejor análisis del tema en cuestión.

## **1.2 Formulación del Problema**

El álgebra lineal es una parte de las matemáticas y una de las ramas más importantes del álgebra moderna que conlleva al estudio de otras ciencias como la física, la ingeniería, la estadística, la cual se centra en el estudio de las estructuras de los espacios vectoriales y las matrices.

Al observar el estudio del álgebra lineal surgen una serie de dificultades en la aprehensión de los conceptos básicos.

- Dificultades en la representación de vectores en el plano cartesiano bidimensional y tridimensional.
- Dificultades en el entendimiento de los conceptos sobre ecuaciones lineales.
- Problemas de conceptualización de las matrices y sus representaciones.
- Dificultades en los conceptos básicos en la resolución de problemas mediante los determinantes.
- Dificultades en la concepción de lo que es un espacio vectorial.

Después de las dificultades expuestas anteriormente se plantea el siguiente interrogante:

¿Cómo analizar cualitativamente las dificultades más relevantes en los estudiantes de educación superior sobre la aprehensión del álgebra lineal?

## Preguntas Subyacentes

- ¿Cuáles son los factores académicos que influyen en el aprendizaje del álgebra lineal basados en las dificultades presentes en los estudiantes?
- ¿Cómo influyen las dificultades presentes en los conceptos relacionados con matrices y sistema de ecuaciones lineales fundados en el álgebra lineal?
- ¿Cómo identificar las dificultades presentes en los conceptos relacionados con matrices y sistema de ecuaciones lineales fundados en el álgebra lineal?

### 1.3 Justificación

El álgebra lineal es una parte fundamental de las matemáticas que ayuda a resolver problemas que modelan situaciones de la vida cotidiana donde los estudiantes que inician sus estudios superiores se ven sumergidos en un lenguaje distinto al que fueron iniciados desde el bachillerato como lo es la aritmética, por tal motivo se llega a una conceptualización diferente en el hecho de que existe una semántica distinta a la utilizada en la aritmética pero no dejando de lado las operaciones básicas ya que van de la mano para este nuevo tema.

En Colombia en la actualidad, de acuerdo al Ministerio de Educación Nacional expuesto en los estándares básicos de competencia, considerado en el pensamiento variacional (2006), reitera que un aspecto importante en el aprendizaje del álgebra corresponde a la utilización con sentido y al estudio formal de los objetos algebraicos, para lo cual es necesario ampliar la notación del lenguaje aritmético y utilizar las propiedades características de los sistemas numéricos (como la conmutativa y la asociativa de la adición, la multiplicación y la distributiva de la multiplicación con respecto de la adición, o el carácter simétrico y transitivo de la igualdad y el carácter anti simétrico y transitivo de la desigualdad). De esta manera, el cálculo algebraico surge como

generalización del trabajo aritmético con modelos numéricos en situaciones de variación de los valores de las mediciones de cantidades relacionadas funcionalmente.

Frente a las dificultades percibidas en los estudiantes universitarios en el estudio y aprehensión del álgebra lineal considerado como un conocimiento previo adquirido con una base de dificultad que los lleva a cometer errores en la resolución de problemas en situaciones de la vida cotidiana, ya que se sumergen en un nuevo lenguaje matemático y por ende pueden surgir nuevas dificultades a la hora de comprender el simbolismo algebraico, se determina que estas nuevas dificultades no se consideran errores de ejecución de procedimientos matemáticos sino que de una u otra forma se basa en conocimiento lleno de ambigüedad en el simbolismo que confunde a los estudiantes a la hora abstraer los fundamentos algebraicos.

Por otro lado en el campo de la enseñanza y aprendizaje de contenidos de Álgebra Lineal, han abordado las dificultades que se les presentan a los alumnos en la resolución de situaciones prácticas de esta rama de las matemáticas. Se pueden citar conclusiones que son comunes a diversos trabajos de investigación realizados; uno de ellos establece la poca o nula relación entre los contenidos del Álgebra Lineal con los conocimientos que le son brindados a los alumnos en los cursos previos al de la Universidad (Dorier, Robert, Robinet, Rogalsky, 2001).

Las instituciones de educación superior deben considerar la posibilidad de mostrar a los educadores la necesidad de implementar estrategias para la aprehensión de los conocimientos básicos basados en estos nuevos temas introductorios de los estudiantes universitarios, ya que con esto se consigue pasar de un pensamiento a otro y así dar un salto a la mejor manera de comprender el estudio de las situaciones naturales que se presentas en las diferentes bases del conocimiento científico.

Por tal motivo esta investigación se justifica en la manera de cómo se pueden tener instrumentos valiosos para analizar de manera cualitativa las dificultades que se presentan en los estudiantes universitarios y así poder esclarecer de manera oportuna los conceptos que requieren de manera adecuada los estudiantes universitarios para la fácil aprehensión de los conceptos del álgebra lineal.

## **1.4 Objetivos**

### **1.4.1 Objetivo General**

Analizar cualitativamente las dificultades más relevantes en los estudiantes de educación superior sobre la aprehensión del álgebra lineal.

### **1.4.2 Objetivos Específicos**

- Determinar los factores académicos que influyen en el aprendizaje del álgebra lineal basados en las dificultades presentes en los estudiantes
- Observar de qué manera influyen las dificultades presentes en los conceptos relacionados con matrices y sistema de ecuaciones lineales fundados en el álgebra lineal
- Identificar las dificultades presentes en los conceptos relacionados con matrices y sistema de ecuaciones lineales fundados en el álgebra lineal.

## **CAPITULO II MARCO REFERENCIAL**

### **2.1. Antecedentes**

Dentro de los antecedentes de este trabajo en el ámbito internacional se encontró una publicación de Socas Robayna (1997), en su trabajo titulado *Dificultades, obstáculos y errores en*

*el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria*, la cual describe que en el contexto del desarrollo del pensamiento matemático éste está lleno de obstáculos caracterizados como epistemológicos. Sin embargo éstos, no están especificados en términos de experiencias de enseñanzas regladas y organizadas en el sistema educativo; no obstante, aceptamos que tales organizaciones de las matemáticas en el sistema escolar pueden generar obstáculos que podemos caracterizar como didácticos. Ahora bien, la adquisición por parte del alumno de nuevos esquemas conceptuales está salpicado de obstáculos que podemos considerar cognitivos.

Esta investigación realiza un aporte al presente trabajo considerando que un obstáculo es un conocimiento adquirido por parte del estudiante y no como una falta de conocimiento, el cual el estudiante en este caso de nivel universitario lo toma para producir respuestas adaptadas dentro de su contexto el cual considera que es eficaz y adecuado para la resolución de problemas que se le plantean. Además cuando se usa este conocimiento fuera de ese contexto genera respuestas inadecuadas, y por ende incorrectas, considerando que los nuevos conceptos pueden producir obstáculos epistemológicos que le impiden la resolución de problemas en ese nuevo contexto.

Seguidamente Socas (2007), en su ponencia, *dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas, análisis desde el enfoque lógico semiótico*. El propósito de esta ponencia es presentar algunos resultados de investigaciones relevantes realizadas en torno a las dificultades y errores que presentan los alumnos en la construcción del lenguaje algebraico, tomando en consideración el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) como marco teórico de análisis de las dificultades y errores de los alumnos en Álgebra. En el desarrollo de la ponencia se describe, también algunos supuestos básicos en los que se sustenta el Enfoque Lógico Semiótico.

La anterior investigación aporta el hecho de que el estudiante en su fase de formación profesional se ve obligado a escoger de manera estratégica un subconjunto de situaciones que se ven inmersas en los problemas preconcebidos, de manera que puede ir adaptándose a las situaciones nuevas para así fundamentarse en los conocimientos nuevos que le permiten abstraer de manera adecuada las nuevas concepciones e ir las modificando de tal manera que se puedan adaptar a las nuevos conceptos de las nuevas situaciones.

Por otra parte Oropeza y Lezama (2007), en su documento *dificultades en la interpretación geométrica de algunos conceptos en álgebra lineal*, en la cual se exploran algunas dificultades relacionadas con la interpretación geométrica de los polinomios de segundo grado en el concepto de dependencia e independencia lineal. La naturaleza abstracta de la asignatura de Álgebra Lineal, provoca dificultades en el entendimiento de los conceptos que ésta aborda y como una cuestión importante ligada a la percepción espacial que no sólo se reduce a la geometría, se trata de la visualización en matemáticas. En este trabajo se presenta propuesta una alternativa para que los estudiantes puedan hacer uso de las representaciones geométricas con la intención de aportar ciertos rasgos de claridad en el entendimiento del concepto referido, una vez que se acepte usar el isomorfismo para representar las funciones polinomiales de orden como una representación de vectores en el espacio  $\mathbb{R}^{(n+1)}$ .

Este documento presenta un aporte importante a esta investigación de manera que permite señalar las características particulares de las dificultades encontradas en el estudio del álgebra, de tal forma que al momento de manejar los diferentes lenguajes en la comunicación matemática hace un empuje en la revisión bibliográfica de textos que de manera adecuada ayuda a caracterizar de forma diferente las dificultades en la aprehensión del álgebra lineal, de esta forma permitirá entrar en la historia del desarrollo algebraico y consultar de manera profunda el

contexto de su nacimiento y aprehensión a través del tiempo y llevarlo hacia este contexto para caracterizarlos y estudiarlos de manera cualitativa en estudiantes universitarios.

A nivel nacional el investigador Lopera (2015), en su investigación *La enseñanza del Concepto Transformación Lineal como una Matriz Asociada a un Operador Lineal* de la Universidad Nacional de Colombia de Medellín, donde mencionan que la problemática característica de este tipo de asignaturas, es el paso del lenguaje natural al lenguaje abstracto que implica, o sea, a la falta de significado y poco uso que se da en los conceptos. Es decir, la falta de comprensión, la escasa modelación de problemas con referente a los conceptos y la constante memorización de la parte aritmética, es lo que no permite visualizar ciertos procesos de resolución desde la aplicabilidad de lo aprendido, además establecen que la problemática radica en que los estudiantes de álgebra lineal poseen un desconocimiento de las estructuras algebraicas, desconociendo cosas como son los grupos abelianos, los anillos, cuerpos y los campos, y al desconocer estas se establece que no conocen los conjuntos ni se conocen las invariantes.

Por tal motivo de acuerdo a esta investigación se puede ver que de manera implícita se ve marcado que los estudiantes universitarios de alguno u otra forma poseen obstáculos que le dificultan la aprehensión de ciertos conceptos del álgebra necesarios para la resolución de problemas de la vida real, de acuerdo a esto la falta de conceptualización de algunos temas que no son vistos de manera adecuada en el estudio de la asignatura marcan la diferencia entre la comprensión y la no asimilación de conceptos claves que le permitan el entendimiento adecuado del lenguaje algebraico necesario para vencer esos obstáculos que están inmersos en el contexto actual de estos estudiantes.

Por otra parte Obando y Nelson (2008), en su trabajo de grado *Factores de la Lectura y Escritura que inciden en el Aprendizaje del Álgebra Lineal de los estudiantes de primero y segundo semestres del programa de Sistematización de datos*, de la Universidad Libre de Bogotá,



donde plantean que en el contexto de la educación matemática a nivel de la básica, la media vocacional y la superior, se presentan dificultades del aprendizaje ocasionados por distintos factores como la falta de comprensión del contexto de un problema planteado, por tal razón se muestra que las dificultades del aprendizaje del álgebra lineal se centran en la comprensión lectora, tanto para la interpretación de consignas y enunciados de problemas como para el acceso a los contenidos mediante la lectura de textos. No menos importante resulta la producción escrita por parte de los estudiantes, ya que su estructura simbólica dificulta al dar respuestas adecuadas a los problemas planteados, como para elaborar consignas o argumentaciones con sentido y coherencia que requieren de un manejo fluido del lenguaje.

Este trabajo suministra un aporte significativo debido a que podemos ver como las dificultades planteadas se han venido originando de obstáculos en los estudiantes desde muy temprano en el aprendizaje del álgebra, por tal motivo se sabe que los obstáculos que se tratan en este trabajo son los causales de dificultades que conllevan a erros de escritura, lectura y comunicación matemática dentro del contexto en el que se encuentren, esto nos da la idea de que surgen inconvenientes serios a la hora de contextualizar los conceptos del álgebra lineal en los estudiantes universitarios.

Seguidamente a nivel local Buelvas y Salazar (2015) en su trabajo de grado titulado *Álgebra Temprana a través de la Resolución de Problemas Aditivos* de la Universidad del Atlántico, describen que frente a la realidad educativa se percibe que los estudiantes no utilizan conceptos y procedimientos del álgebra cuando llegan a grados superiores, es por esto que la acción pedagógica del aula tiende a formar estereotipos de dificultad en la noción del aprendizaje matemático, los estudiantes comienzan a sentirse lejos del saber matemático y sus deficiencias (interpretar el lenguaje algebraico, identificar el grado de una ecuación, reconocer y efectuar operaciones algebraicas) aumenta creando una actitud apática en su formación académica,

acumulando una serie de situaciones que dificultan la comprensión en el tránsito de la aritmética al álgebra, de las operaciones concretas a las abstractas.

Este trabajo de grado permite ver de manera clara que de lo expresado anteriormente en esta parte de la investigación, de que se crean obstáculos epistemológicos en los estudiantes que ingresan al nivel superior de educación, creándose así vacíos conceptuales en el manejo del álgebra lineal ya que pasan de un contexto a otro de manera diferente que los lleva a tener dificultades (obstáculos) llevándolos por ende a cometer errores en la resolución de problemas algebraicos al no tener bien definidos los preconceptos de manera concreta.

Por otro lado José Solórzano Movilla (2019) en su artículo *Deconstrucción Matemática como sustento de Aplicaciones Criptográficas en el Álgebra Lineal* de la Universidad del Atlántico, citando al Ministerio de Educación Nacional el cual establece que las matemáticas constituyen uno de los elementos clave en el desarrollo de innovaciones en ingeniería, es por esta razón que su estudio es obligatorio en las facultades que forman ingenieros. Sin embargo, esta a su vez viene siendo el principal obstáculo para que los jóvenes se decidan a estudiar una ingeniería, o en su defecto deserten de la misma, conllevando que el porcentaje de desertores en las facultades de ingeniería en Colombia supere el 45%.

Por tal circunstancia destaca que entre los motivos que producen esta problemática se pueden enunciar varios, entre los cuales se destacan, falta de desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes, situación que se origina en la educación media, falta de una educación matemática acorde con las realidades de los estudiantes, entre otros factores.

En consonancia, el motivo que impulsó este trabajo es la falta de coherencia entre lo declarado en una asignatura del ciclo básico de ingeniería, álgebra lineal, y el deber ser o lo establecido universalmente para el álgebra lineal, ya que en un alto porcentaje de los programas de ingeniería se ha reducido el contenido de esta asignatura a cuatro unidades básicas, vectores, matrices,

determinantes y sistemas de ecuaciones, omitiendo temas que por sus características son esenciales en la comprensión y desarrollo de temáticas propias de semestres superiores, como lo son la investigación de operaciones, ecuaciones diferenciales, entre otras.

Este artículo deja ver en claro los factores que influyen en los estudiantes universitarios de manera que se están evidenciando obstáculos epistemológicos que no les permiten comprender la asignatura como tal, ya que vienen de un conocimiento previo dentro de un contexto diferente y al traerlos al nuevo contexto se ven inmersos en la falta de comprensión y resolución de problemas debido a la falta de contenido en la asignatura que debe ser parte clave en la formación como estudiantes en la educación superior.

## **2.2. Marco Teórico**

### **2.2.1. Breve historia del álgebra lineal.**

El Álgebra Lineal es un área de conocimiento que atraviesa todos los temas de la Matemática. El término Álgebra Lineal se impuso en la década del treinta del siglo XX. Anteriormente, siglo XVIII, XIX, los métodos utilizados se denominaban *Métodos Algebraicos Lineales*. Se basa en el estudio de las estructuras de los espacios vectoriales y las transformaciones lineales y multilineales entre espacios vectoriales. La idea de vector se inicia con el trabajo del matemático irlandés William Hamilton (1805-1865). Su propósito era extender el conjunto numérico de los números complejos, esto lo llevó a crear lo que él llamó cuaterniones y este concepto condujo al desarrollo de los vectores. Históricamente las primeras teorías del Álgebra Lineal estaban relacionadas con la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales. A raíz de las investigaciones con estos temas surgió el concepto de determinante. Esta noción y sus propiedades fueron desarrolladas por matemáticos de los siglos XVII a XIX, como Leibniz,

Cramer, Vandermonde, Bezout, Lagrange, Laplace, Gauss, Cauchy, Binet, Jacobi, Sylvester, Cayley, Hermite.

El filósofo y matemático alemán Gottfried Leibniz (1646-1716), quien junto a Newton impulsó el desarrollo del cálculo infinitesimal, utilizó los determinantes en 1693 en la solución de sistemas de ecuaciones lineales. En 1750 Cramer obtiene un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales donde el número de ecuaciones lineales debía coincidir con el número de incógnitas, utilizando determinantes. El término matriz fue creado por Sylvester en 1850. En 1877 con la noción de rango de una matriz propuesta por George Fröbenius, se consiguieron explicitar las condiciones de compatibilidad de los sistemas de ecuaciones lineales, así como su solución.

Grassmann (1809-1877) introdujo los conceptos de subespacio, generadores, dimensión y suma, así como las fórmulas para los cambios de sistemas de coordenadas.

La construcción de la teoría general de los sistemas de ecuaciones lineales culminó a finales del siglo XIX.

Peano (1888) definió de forma axiomática una estructura que relacionaba toda la teoría de matrices, determinantes y el estudio de sistemas de ecuaciones, ésta estructura es la de espacio vectorial. Centrado en los espacios vectoriales reales, el matemático alemán Töplitz (1881-1940) generalizó los principales teoremas y resultados de los espacios vectoriales reales sobre los espacios vectoriales generales, dando lugar a lo que hoy se conoce con el nombre de Álgebra lineal.

En los siglos XVIII a XIX el contenido principal del álgebra lineal lo constituían los sistemas de ecuaciones lineales y la teoría de los determinantes, la posición central en el siglo XX fue ocupada por el concepto de espacio vectorial y las nociones de transformación lineal, bilineal y multilineal.

La versión moderna del Álgebra Lineal es esencialmente una teoría basada en el concepto de espacio vectorial. Esta teoría se enseña habitualmente en su versión axiomática, es decir, presentándola como una estructura. En matemática la idea de estructura surge de una de las corrientes que intentaba fundamentar a la matemática: el Formalismo, cuyo principal impulsor fue David Hilbert. La naturalización de esta presentación puede hacer creer que es un concepto simple. Pero detrás de esta presentación lógica se esconden siglos de constantes desarrollos y difíciles fases de unificación. En recientes estudios (Dorier, Robert, Robinet y Rogalski, 2000) se buscó deconstruir esta aparente sensación de perfección asociada al Álgebra.

En los últimos años, la aplicación del Álgebra se ha incrementado. Al mismo tiempo, las mejoras de *hardware* y de *software* en las ciencias de la computación han elevado el poder de esta disciplina a partir del cual es posible resolver problemas que hace unas décadas parecían imposibles. (Vicente Rodolfo Messina, 2017, *La realización entre alfabetización y el aprendizaje del álgebra lineal en estudiantes universitarios*).

### **2.2.2. La asignatura álgebra lineal**

El Álgebra Lineal tiene en la época actual un carácter básico, por ser una disciplina que permite organizar información en cualquier contexto, discreto o continuo, y establecer un puente entre el Álgebra y la Geometría. Esta asignatura brinda al alumno universitario la posibilidad de encontrarse con una teoría matemática estructurada a partir de un conjunto de axiomas que sintetizan las propiedades fundamentales de variados conjuntos de objetos, y de realizar cálculos no triviales - aunque tampoco excesivamente complejos - sobre modelos más o menos realistas de muchos fenómenos que tienen interés en ciencias e ingeniería.

Los conceptos del álgebra lineal, por su naturaleza *fugs* (Rogalski, 1998: 5-7) (formalizadores, unificadores, generalizadores, simplificadores), al combinarse con la perspectiva geométrica y la capacidad de cálculo de las computadoras y calculadoras científicas actuales, permiten tratar en

los primeros años de la formación de grado problemas interesantes. El valor propio de la asignatura y la multiplicidad de enfoques y aplicaciones que ofrece, plantean al docente motivadores desafíos a la hora de proponer una planificación del curso, seleccionar las actividades que realizarán los estudiantes y formular estrategias didácticas.

No obstante se debe reconocer que los temas del Álgebra Lineal y la Geometría Analítica continúan siendo conocimientos de difícil aprendizaje para la mayoría de los alumnos. Esto es fundamentalmente por "la naturaleza misma del Álgebra Lineal (dificultades conceptuales) y el tipo de pensamiento necesario para su comprensión (dificultades cognitivas)" (Dorier y Sierpinska, 2000: 2). Estos dos aspectos son a menudo inseparables en el proceso real de aprendizaje. (Sara, Alicia, Scardigli, Mónica, Pustilnik, Isabel, Cittadini, Gloria y Pano, Carlos Oscar, 2006, *Errores recurrentes en el aprendizaje del álgebra lineal y registros de representación semiótica*).

### **2.2.3. Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas**

Las teoría de dificultades adoptada en esta investigación es la propuesta por Socas (1997) asociadas al aprendizaje del álgebra, quien plantea que "las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas son debidas a múltiples situaciones que se entrelazan entre sí y que van desde una deficiente planificación curricular hasta la naturaleza propia de las Matemáticas" (p.35).

Así mismo Socas (1997) en "*Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de la Matemáticas en la Educación Secundaria*", describe que las dificultades y los errores en el aprendizaje de las matemáticas no se reducen a lo menos capaces para trabajar con las matemáticas. En general, algunos alumnos, casi siempre, y algunas veces, casi todos, tienen dificultades y cometen errores en el aprendizaje de las matemáticas.

Estas dificultades que se dan en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas son de manera diferente y se pueden abordar, obviamente, desde perspectivas distintas.

Aceptando que la naturaleza de las dificultades del aprendizaje de las matemáticas es de diversa índole y que se conectan y se refuerzan en redes complejas, estas pueden ser agrupadas en cinco grandes categorías: las dos primeras asociadas a la propia disciplina (objetos matemáticos y procesos de pensamiento), la tercera ligada a los procesos de enseñanza de las matemáticas, la cuarta en conexión con los procesos cognitivos de los alumnos, y una quinta, relacionada con la falta de una actitud racional hacia las matemáticas.

De manera más explícita estas dificultades se pueden organizar, en líneas generales en los siguientes tópicos:

1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de la matemática: se relaciona con la Matemática como disciplina científica, siendo una de las variables a considerar el papel del lenguaje en la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos, los signos matemáticos presentes en el estudio de las nociones matemáticas y el lenguaje cotidiano como mediador en la interpretación de los signos, de aquí surgen el conflicto de precisión. Otro conflicto es la injerencia del lenguaje cotidiano en las matemáticas, en el uso de homónimos o específicamente de homógrafos, de manera que el uso de esas palabras involucra una confusión semántica, además, muchas palabras son exclusivas de la jerga matemática, no tienen significado en el lenguaje común, son palabras poco conocidas y usualmente mal entendidas por los estudiantes.
2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático: se originan desde la propia matemática por su naturaleza lógica, y se relacionan con las rupturas implícitas en los modos de pensamiento matemático. Una dificultad relacionada con la naturaleza de la Matemática es el aspecto deductivo formal y el pensamiento lógico que es el que proporciona la capacidad para concatenar argumentos lógicos, y que es imprescindible para alcanzar determinados niveles de competencia matemática.

3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollado para el aprendizaje de las matemáticas: los elementos en el currículo de matemática que pueden distinguirse como dificultades son: las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas que definen la competencia de un alumno en matemática, la necesidad de contenidos anteriores, el nivel de abstracción requerido, así como la naturaleza lógica de las matemáticas escolares.
4. Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos: al momento de seleccionar los recursos y diseñar estrategias en la enseñanza se deben considerar los estadios del desarrollo intelectual, sus características y las capacidades asociadas a cada estadio referidas al desarrollo cognitivo de los estudiantes. Entre los enfoques para fijar el desarrollo cognitivo de los estudiantes están los enfoques: jerárquico, evolutivo, estructuralista, constructivista, procesamiento de la información.
5. Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas: uno de los aspectos claves para comprender el comportamiento de los alumnos en las clases de matemáticas es la dimensión afectiva, al respecto.

#### **2.2.4. Aportes teóricos de Duval**

El aprendizaje de las matemáticas se considera un campo privilegiado para el estudio de ciertas actividades cognitivas tales como la conceptualización y la resolución de problemas entre otras. Se desprende del hecho, que estas actividades requieren del uso de sistemas de expresión y de representación, que son distintos a los del lenguaje natural. Por ejemplo: los números pueden ser representados en distintos sistemas de numeración (binaria, decimal, sexagesimal, etc.); las funciones pueden ser representadas de distintas formas: algebraica, tabular, gráficamente, etc.; de



la misma manera, esto sucede con otros objetos matemáticos tales como vectores, círculos, rectas, etc.

Los objetos matemáticos presentes en la actividad matemática requieren el uso de representaciones, porque es la única manera de acercarse a los objetos, ellos no son objetos con los que se pueda interactuar directamente, como lo son en otras áreas del conocimiento tales como la Biología, Física, etc. Las representaciones en matemáticas resultan ser el único medio de acceso, es por lo tanto indispensable reconocer el sitio central que ocupan las representaciones en el aprendizaje de las matemáticas (Duval, 1993).

#### **2.2.5. Teoría de los registros de representaciones semióticas.**

La Teoría de Registros de Representación Semiótica ha sido desarrollada por Raymond Duval, es filósofo y psicólogo de formación. Trabajó en el Instituto de Investigación en Educación Matemática (IREM) de Estrasburgo, en Francia, de 1970 a 1995, donde desarrolla estudios fundamentales relativos a Psicología Cognitiva, que lo lleva a producir, dentro de otras publicaciones, en su obra *Sémiosis et pensée humaine*. Tal obra ha logrado hasta la actualidad servir de marco teórico a numerosas investigaciones de corte cognitivo en diversos países de nuestro continente y de Europa.

Las representaciones semióticas resultan ser indispensables al momento de querer acceder, adquirir o comunicar conocimientos matemáticos. Un objeto matemático tiene la particularidad de contar con distintas maneras de representación semiótica, como es el caso de las funciones, estas se pueden representar en forma: tabular, grafica, algebraica o en la forma de enunciado en la lengua natural.

Las representaciones semióticas están constituidas por el uso de signos que pertenecen a un sistema de representación, por ejemplo: una gráfica al sistema cartesiano, una fórmula al sistema algebraico o un enunciado a la lengua natural; cuyos sistemas inducen a tener sus propias unidades significativas y reglas de funcionamiento.

Duval (2004) afirma que para lograr la conceptualización, o lo que podríamos considerar “aprendizaje” el estudiante debe recurrir a varios registros de representación semiótica, sean gráficos, símbolos, íconos, tablas, expresiones en lenguaje natural, etc. Este autor distingue dos conceptos fundamentales: “semiosis, la aprehensión o la producción de una representación semiótica, y noesis, los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto” (Duval, 2004, pp. 14). La tesis de Duval se reduce al siguiente enunciado “no hay noesis sin semiosis”, es decir, no se puede aprender un concepto matemático sin pasar por el necesario tratamiento y conversión de diferentes registros de representación semiótica.

Duval plantea dos preguntas que considera el núcleo del aprendizaje de las matemáticas: ¿Cómo se aprende a cambiar de registro? y ¿cómo se aprende a no confundir un objeto con la representación que se propone?, y define registro de representación semiótica como aquel registro que “constituye el margen de libertad con que cuenta un sujeto para objetivarse él mismo una idea aún confusa, un sentimiento latente, para explorar las informaciones o, simplemente, para comunicarlas a un interlocutor” (Duval, 2004, pp. 30)

Este autor distingue el concepto de “representación mental”, que es la que permite a un individuo considerar un objeto, en ausencia total de algo perceptible, del de “representación semiótica”. En otras palabras, la representación mental que tiene un sujeto en su mente acerca de

un concepto, al que sólo puede acceder por representaciones parciales: las representaciones semióticas.

Para que las representaciones puedan ser útiles en la actividad matemática, deben pertenecer a sistemas semióticos que sean registros de representación y para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir tres actividades cognoscitivas fundamentales asociadas a toda representación.

1. **La formación** de un conjunto de signos que sean identificables como una representación de algo en un sistema determinado; por ejemplo una fórmula es identificable en el registro algebraico. Esta formación implica una selección de rasgos y de datos en el contenido por presentar, esto es, si se quiere representar a la función lineal en el registro algebraico se identifica la siguiente representación:  $y = -2x + 1$ . La selección se hace en función de las unidades y de las reglas de formación que son propias de cada registro, esas reglas ya están dadas en el registro y lo importante de esta actividad es reconocerlas, no diseñarlas. Por ejemplo, si se quiere representar una función lineal de la siguiente manera:  
 $y = 2x + +1$ , esta representación algebraica no sería coherente con las reglas de formación del registro algebraico. La segunda actividad es la de tratamiento.
2. **El tratamiento** es la transformación de una representación en el mismo registro en el cual ha sido formada, haciendo uso sólo de las reglas propias a ese registro. El tratamiento es una transformación interna a un registro. Esta actividad puede verse en el siguiente ejemplo:  $y = -2x + 1$  y  $y = -2(x - \frac{1}{2})$ . Existen reglas de tratamiento propias de cada registro, su naturaleza y número varía de un registro a otro. Por último la tercera actividad asociada a la representación es la de conversión.

3. **La conversión** es la transformación de una representación en otra que pertenece a otro registro conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial. La conversión es una transformación externa al registro de partida. No debe confundirse esta actividad con la actividad de tratamiento, por lo que debe quedar claro que no existen ni pueden existir reglas para promover esta actividad cognitiva de conversión como existen reglas de tratamiento.

No todos los sistemas semióticos permiten estas tres actividades cognitivas fundamentales, los principales registros que se utilizan en matemáticas sí permiten estas tres actividades, tales como las gráficas, expresiones algebraicas, expresiones numéricas, figuras geométricas, enunciados en la lengua natural, etc.

Distingue a su vez, dos niveles de tratamiento. Denomina “tratamiento cuasi instantáneo” a aquel que corresponde a la “familiaridad o a la experiencia que resulta de una larga práctica o de una competencia adquirida en un dominio” (Duval, 2004, pp. 40), lo que se suele llamar un tratamiento mecánico. Por otro lado, “tratamiento intencional” es aquel que “para ser efectuado toma al menos el tiempo del control consciente” (Duval, 2004, pp. 41). A mayor posibilidad de tratamientos cuasi instantáneos que posea un estudiante, mayor posibilidad de tratamientos intencionales. Duval afirma también, que estos procesos deben ser enseñados para que el alumno pueda aprenderlos, y dice: “un aprendizaje que considere la relación estrecha que existe entre la noesis y la semiosis debe colocar a los alumnos en condiciones que permitan esta toma de consciencia más global, y para ello, se les deben presentar tareas específicas” (Duval, 1998, pp. 189)

A estas tareas que debieran ser propuestas a los estudiantes el autor las clasifica en tres categorías: las de “aprehensión de las representaciones semióticas”, que apuntan a la formación de registros; las de “tratamientos propios de una categoría de registro”, en las que el estudiante o bien debe aplicar tratamientos cuasi-instantáneos, como operaciones realizadas mecánicamente o en las que el tratamiento es intencional, pero siempre trabajando en un mismo registro de representación; y las de “producción de representaciones complejas” que implican necesariamente conversión entre registros.

Ahora bien, con respecto a las actividades propuestas a los estudiantes con el fin de que realicen conversiones, Duval (2006) aclara que no basta con tareas que exigen simplemente traducir de un registro a otro como por ejemplo que reconozcan al mismo objeto en una expresión de una función lineal y la gráfica de una recta. A este tipo de conversiones sencillas o directas, el autor denomina “yuxtaposición” y aclara que “la yuxtaposición de dos representaciones de un mismo objeto no puede resolver el problema cognitivo del reconocimiento del mismo objeto representado, porque las diferencias de contenido de las representaciones varían independientemente de los objetos representados” (Duval, 2006, pp. 159).

Es necesario por lo tanto, que las tareas de conversión propuestas exijan más que una mera yuxtaposición, tareas en las que el estudiante deba realizar las conversiones por opción propia, ya sea por economía de trabajo (porque trabajar en un registro diferente facilita la resolución) o porque el tratamiento posterior así lo requiere. Debe existir más que una yuxtaposición, una coordinación entre los registros.

Otro aspecto central de la teoría presentada por Duval, es que “la comprensión (integradora) de un contenido conceptual, reposa en la coordinación de al menos dos registros de

representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión” (Duval, 1998, pp. 186).

Por lo tanto, no bastará con la exposición del docente para que el estudiante pueda adquirir un concepto, pues debe manipular diferentes registros de representación para poder adquirir el conocimiento, y para esto las actividades o ejercicios propuestos a los estudiantes son fundamentales. Por otra parte, no bastará con presentar y proponer actividades que apunten a aprehensión o tratamiento de registros sino que necesariamente deben implicar conversión, pues no existirá comprensión si no se maneja al menos dos registros semióticos diferentes del mismo concepto.

Las representaciones semióticas se consideran esenciales tanto para fines de comunicación como para la realización de ciertas actividades cognitivas del pensamiento, tales como propiciar el desarrollo de representaciones mentales a través de una interiorización de las representaciones semióticas.

La única forma de trabajar con los objetos matemáticos es a través de sus representaciones, pero estas, pueden ocasionar problemas en el proceso de aprendizaje cuando son confundidas con el objeto que se quiere representar, pero ¿cómo no confundir el objeto con sus representaciones en los inicios de su aprendizaje, si la única manera de enfrentarse a ellos es a través de sus representaciones?

En la actividad matemática es necesario poder movilizar varios registros en el transcurso de una misma acción o escoger un registro en lugar de otro, es importante en esta actividad poder diferenciar lo que es la semiosis de la noesis. Se le llama semiosis a la aprehensión o producción de una representación semiótica y noesis a la aprehensión conceptual de un objeto. Es importante

reconocer por un lado, que la aprehensión de los objetos matemáticos es una aprehensión conceptual y por otro lado, no puede haber una conceptualización del objeto matemático sin la aprehensión primeramente de las representaciones semióticas, una de las tesis centrales de Duval es que no puede haber noesis sin semiosis por lo que esta puede explicar las dificultades para aprender este tipo de conocimientos.

Según Duval (2006) este “estudio propone que las representaciones semióticas, incluidas cualquier lenguaje, aparecen como herramientas para producir nuevos conocimientos y no sólo para la comunicación de cualquier representación mental en particular”. El papel desempeñado por los signos, o más exactamente por los sistemas semióticos de representación, no es sólo para designar objetos matemáticos, sino también para trabajar con ellos. Lo importante no es la representación de un objeto matemático sino las transformaciones que se pueden realizar sobre ellos.

### **2.2.6. Los principios de un conocimiento pertinente**

#### **• De la pertinencia en el conocimiento**

El conocimiento de los problemas claves del mundo, de las informaciones claves concernientes al mundo, por aleatorio y difícil que sea, debe ser tratado so pena de imperfección cognitiva, más aún cuando el contexto actual de cualquier conocimiento político, económico, antropológico, ecológico... es el mundo mismo. La era planetaria necesita situar todo en el contexto y en la complejidad planetaria. El conocimiento del mundo, en tanto que mundo, se vuelve una necesidad intelectual y vital al mismo tiempo. Es el problema universal para todo ciudadano del nuevo milenio: ¿cómo lograr el acceso a la información sobre el mundo y cómo lograr la posibilidad de articularla y organizarla? ¿Cómo percibir y concebir el Contexto, lo Global (la relación todo/partes), lo Multidimensional, lo Complejo? Para articular y organizar los

conocimientos y así reconocer y conocer los problemas del mundo, es necesaria una reforma de pensamiento.

Ahora bien, esta reforma es paradigmática y no programática: es la pregunta fundamental para la educación ya que tiene que ver con nuestra aptitud para organizar el conocimiento. A este problema universal está enfrentada la educación del futuro porque hay una inadecuación cada vez más amplia, profunda y grave por un lado entre nuestros saberes desunidos, divididos, compartimentados y por el otro, realidades o problemas cada vez más poli disciplinarios, transversales, multidimensionales, transnacionales, globales, planetarios.

Para que un conocimiento sea pertinente, la educación deberá entonces evidenciar:

#### ◆ **El contexto**

El conocimiento de las informaciones o elementos aislados es insuficiente. Hay que ubicar las informaciones y los elementos en su contexto para que adquieran sentido. Para tener sentido la palabra necesita del texto que es su propio contexto y el texto necesita del contexto donde se enuncia. Por ejemplo, la palabra « amor » cambia de sentido en un contexto religioso y en uno profano; y una declaración de amor no tiene el mismo sentido de verdad si está enunciada por un seductor o por un seducido.

Claude Bastien anota que « la evolución cognitiva no se dirige hacia la elaboración de conocimientos cada vez más abstractos, sino por el contrario, hacia su contextualización » la cual determina las condiciones de su inserción y los límites de su validez. Bastien agrega que « la contextualización es una condición esencial de la eficacia (del funcionamiento cognitivo) ».

#### ◆ **Lo global (las relaciones entre todo y partes)**

Lo global es más que el contexto, es el conjunto que contiene partes diversas ligadas de manera inter-retroactiva u organizacional. De esa manera, una sociedad es más que un contexto, es un todo organizador del cual hacemos parte nosotros. El Planeta Tierra es más que un



contexto, es un todo a la vez organizador y desorganizador del cual hacemos parte. El todo tiene cualidades o propiedades que no se encontrarían en las partes si éstas se separaran las unas de las otras y ciertas cualidades o propiedades de las partes pueden ser inhibidas por las fuerzas que salen del todo. Marcel Mauss decía: « Hay que recomponer el todo ». Efectivamente, hay que recomponer el todo para conocer las partes.

De allí viene la virtud cognitiva del principio de Pascal del cual deberá inspirarse la educación del futuro: « todas las cosas siendo causadas y causantes, ayudadas y ayudantes, mediatas e inmediatas y todas sostenidas por una unión natural e insensible que liga las más alejadas y las más diferentes, creo imposible conocer las partes sin conocer el todo y tampoco conocer el todo sin conocer particularmente las partes ». Además, tanto en el ser humano como en los demás seres vivos, hay presencia del todo al interior de las partes: cada célula contiene la totalidad del patrimonio genético de un organismo policelular; la sociedad como un todo está presente en el interior de cada individuo en su lenguaje, su saber, sus obligaciones, sus normas.

Así mismo, como cada punto singular de un holograma contiene la totalidad de la información de lo que representa, cada célula singular, cada individuo singular contiene de manera holográfica el todo del cual hace parte y que al mismo tiempo hace parte de él.

#### ◆ **Lo multidimensional**

Las unidades complejas, como el ser humano o la sociedad, son multidimensionales; el ser humano es a la vez biológico, síquico, social, afectivo, racional. La sociedad comporta dimensiones históricas, económicas, sociológicas, religiosas. El conocimiento pertinente debe reconocer esta multidimensionalidad e insertar allí sus informaciones: se podría no solamente aislar una parte del todo sino las partes unas de otras; la dimensión económica, por ejemplo, está en inter-retroacciones permanentes con todas las otras dimensiones humanas; es más, la

economía conlleva en sí, de manera holográfica: necesidades, deseos, pasiones humanas, que sobrepasan los meros intereses económicos.

#### ◆ **Lo complejo**

El conocimiento pertinente debe enfrentar la complejidad. Complexus significa lo que está tejido junto; en efecto, hay complejidad cuando son inseparables los elementos diferentes que constituyen un todo (como el económico, el político, el sociológico, el psicológico, el afectivo, el mitológico) y que existe un tejido interdependiente, interactivo e interretroactivo entre el objeto de conocimiento y su contexto, las partes y el todo, el todo y las partes, las partes entre ellas. Por esto, la complejidad es la unión entre la unidad y la multiplicidad. Los desarrollos propios a nuestra era planetaria nos enfrentan cada vez más y de manera cada vez más ineluctable a los desafíos de la complejidad (Morin, 1999, p. 15-17).

## **CAPITULO III DISEÑO METODOLÓGICO**

### **3.1. Diseño y Metodología de investigación.**

Esta investigación se desarrolla con el diseño de estudio de casos, basado en un enfoque cualitativo, ya que (Hernández, 2014) hace referencia al planteamiento de un problema que es observado para desarrollar un proceso que permita descripciones, estudios e interpretaciones que generan teorías, por medio de técnicas para la recolección de datos, con relación al contexto que se encuentran. Por lo antes mencionado, se busca lograr identificar las dificultades que tienen los alumnos al momento de aprehender los conceptos básicos del álgebra lineal para así desarrollar las habilidades del pensamiento crítico en estudiantes de educación superior.

El diseño de la investigación se centra en el estudio de casos con la intención de obtener información y analizar las dificultades en que se encuentran los sujetos a estudiar; siendo este

diseño de gran valor, ya que se puede medir y registrar la conducta de las personas involucradas por medio de un acercamiento que facilite la comprensión del cómo y porqué se desarrolla determinado fenómeno investigado. Según Stake, citado por Álvarez, (2012) es: “El estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes”. En particular el diseño favorece esta investigación en la obtención de información con relación a los conocimientos que poseen los estudiantes en cuanto al tema sobre el álgebra lineal, teniendo como finalidad reconocer las dificultades que se presentan con mayor frecuencia al resolver situaciones problemas mediante el álgebra lineal.

A partir de lo anterior, la metodología de investigación mediante el estudio de casos tiene en cuenta una serie de etapas, las cuales son tomadas por la clasificación realizada por Pérez y Martínez (citado por Álvarez (2012)) las cuales son las siguientes:

### **Etapas Preactiva**

En esta Etapa se utiliza la observación, necesaria para la obtención de información que posibilite identificar la problemática que evidencian los estudiantes al momento de resolver operaciones que involucren el álgebra lineal, con la ayuda de la prueba diagnóstica se identifican las dificultades que presentan los estudiantes de educación superior en el aprendizaje de la temática y la manera en que se desenvuelven en la aplicación de conceptos.

### **Etapas Interactiva**

Luego de la indagación de la información recogida en la etapa anterior se procede al análisis de la prueba diagnóstica dirigida a los estudiantes con relación a los procedimientos que tuvieron que realizar en la prueba aplicada inicialmente, esto es para detallar los resultados que se han obtenido a partir de la etapa anterior sobre el problema estudiado, es decir las dificultades que

inciden en la resolución de problemas fundados en el álgebra lineal que los llevan a cometer errores.

### **Etapa Postactiva**

Esta etapa conlleva la elaboración de una indagación final donde se tiene en cuenta las técnicas utilizadas en la etapa anterior realizada por los estudiantes dentro de la institución, para poder delimitar las perspectivas con las que se iniciaron la investigación. Esto con el fin de determinar aquellos procesos, símbolos o análisis que realizan los estudiantes en la resolución de problemas utilizando los procesos fundados en el álgebra lineal y que los hacen incurrir en errores.

## **3.2 Población y Muestra**

### **Población**

Para la aplicación de esta investigación, se escogen estudiantes de segundo cuatrimestre del Técnico Profesional en Mantenimiento Electromecánico pertenecientes al Instituto Tecnológico de Soledad, ubicado en el municipio de Soledad Atlántico.

### **Muestra**

A consecuencia de que el diseño de estudio de casos, se realiza la selección de una muestra, considerando que “la generalización del estudio de caso no radica en una muestra probabilística extraída de la población a la que se pueda extender los resultados, sino en el desarrollo de una teoría que pueda ser transferida a otros casos” (Martinez Carazo, 2006). Teniendo en cuenta lo anterior, se procede a escoger 3 estudiantes los cuales muestran uno un mejor rendimiento académico en comparación con el otro; para su elección se tuvo en cuenta el tipo de muestra intencional, Padua (1979) afirma que “las muestras intencionales son el producto de una

selección de casos según el criterio del experto, de esta forma se seleccionan algunos casos que resultan típicos”.

### **3.3 Técnicas e instrumentos de recolección de la información**

Según Sampieri (2014) “un instrumento adecuado es aquel que registra datos observables que representan verdaderamente los conceptos o las variables que el investigador tiene en mente. Por otro lado las técnicas de recolección de datos son aquellas que les permiten a los investigadores obtener información por medio de ciertas actividades en donde los instrumentos son parte fundamental para éstas, ya que es el puente que permite la implementación de las técnicas (Hurtado, 2000).

Teniendo en cuenta lo anterior, se definen las técnicas e instrumentos fundamentales para el cumplimiento de los objetivos de esta investigación y la finalidad de cada uno de ellos, estos son:

#### **Prueba diagnóstica**

Esta técnica se lleva a cabo con el propósito de identificar las dificultades que presentan los estudiantes de segundo cuatrimestre en la resolución de problemas con la aplicación del álgebra lineal, el cual sirve como punto de partida para analizar el nivel de conocimiento que poseen en relación a esa temática y de qué manera son evidenciados en su desempeño académico. Según Santos citado por (Ahumada, 2005) “es una radiografía que facilita el aprendizaje significativo y relevante, ya que parte del conocimiento de la situación previa, de las actitudes y expectativas de los estudiantes”.

La prueba consta en total de 5 preguntas, en la cual los interrogantes 1, 2 y 3 son del tipo actitudinal que van apuntados hacia las nociones que tienen acerca de las matrices, de tal manera que se logre saber hasta qué punto manejan ese conocimiento, la pregunta 4, de tipo cognitivo

apunta a la resolución de sistema de ecuaciones en donde deben hacer uso de las matrices aumentadas para la resolución, la pregunta 5 de tipo procedimental va encaminada a la resolución de matrices y de qué modo proceden para llegar a la solución de los mismos. Será realizada de manera individual a los estudiantes seleccionados por medio de la muestra en el segundo cuatrimestre del Técnico Profesional en Mantenimiento Electromecánico del Instituto Tecnológico de Soledad (ITSA), la cual tendrá el tiempo límite de 60 minutos para ser desarrollada. Además no será calificada cuantitativamente, solo será tomada como objeto de análisis. (Anexo 1).

## **CAPITULO IV ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS**

En este capítulo se presenta el análisis e interpretación de las técnicas aplicadas a la muestra elegida y mencionada anteriormente. Para esto, se realiza una prueba diagnóstica como se especifica en las etapas de la metodología de la investigación, en donde se describe detenidamente las respuestas que dieron los estudiantes con respecto al tema de matrices y la resolución de ecuaciones, relacionándolos con los errores que cometen, verificando las dificultades que pueden hacer que cometan errores. Es de suma importancia, resaltar que las técnicas e instrumentos utilizados en la presente investigación buscan dar respuestas a los objetivos que inicialmente fueron propuestos.

### **4.1 Prueba diagnóstica**

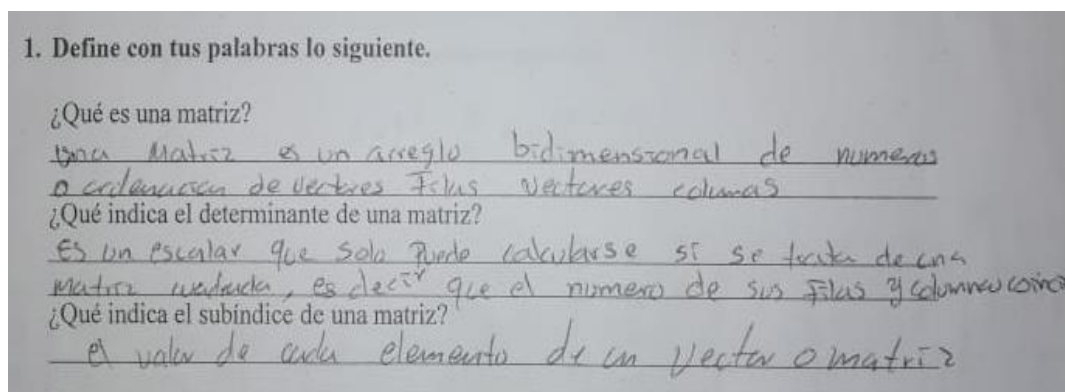
Esta prueba es realizada a tres estudiantes del Instituto Tecnológico de Soledad que serán identificados en este análisis como primer estudiante, seleccionado por tener buen rendimiento académico, el segundo estudiante, por presentar rendimiento de igual condición, y un tercer estudiante también de igual condición que los anteriores en las clases de matemáticas. Las

actividades que han sido asignadas para que los estudiantes resuelvan y posteriormente analizar e interpretar sus respuestas, son diseñadas con el objetivo de que en ellas los estudiantes puedan evidenciar dificultades en la resolución de problemas con matrices. Teniendo en cuenta la clasificación que plantea Rico (1995) se presenta el estudio de la prueba diagnóstica con sus respectivas preguntas para identificar las dificultades que presentan los estudiantes seleccionados a través de los resultados obtenidos:

### *Análisis del primer estudiante*

Teniendo en cuenta que este estudiante en las clases de matemáticas en la temática del álgebra lineal se le notaba interés por el tema de las matrices, su dedicación, participación, fervor y sus calificaciones hicieron que fuese elegido para la aplicación de la prueba diagnóstica. El estudiante al ser seleccionado mostró gran alegría por tenerlo en cuenta a la hora de participar de la prueba. Ahora, según lo mencionado anteriormente se hacen las respectivas observaciones:

#### **Punto 1.** Define con tus palabras lo siguiente:



*Figura 1: Respuesta del primer estudiante al punto 1 de la prueba diagnóstica*

Se puede observar que el primer estudiante al referirse a una matriz enseguida piensa en el plano cartesiano tratando de ubicar los números en el plano y a la vez asociarlos con vectores, sin

embargo no es capaz de explicar con sus propias palabras el significado de una matriz y menos dar una definición formal con respecto al mismo. Cuando se le pregunta qué indica el determinante de una matriz se espera que el primer estudiante responda acertadamente, pues al reconocer la matriz como un arreglo rectangular bidimensional podría esperarse aquí que conoce su significado, pero se evidencia que se confunde con otro tipo de definiciones que implican reconocer otra manera más formal de definir las, ya que trata de generalizar descuidando algunos detalles en la definición. Según Godino (2004) “Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática” (p.73). Así mismo, se refleja que el primer estudiante responde de manera no tan acertada y sus nociones con respecto al tema de matrices no son las indicadas por lo que hace que cometa errores, dando paso al error que plantea Rico (1995) sobre *errores debido a dificultades en el lenguaje* en donde se muestra que no asimila el concepto de matrices, cuyo proceso de aprendizaje no fue completado de manera satisfactoria, ya que el vocabulario que se maneja es confundido y usado inadecuadamente.

Es importante señalar que el primer estudiante en la prueba presenta dificultad de asociación e interferencia que se encuentran categorizados, ya que al momento de presentar con sus palabras lo que para él indica el subíndice de una matriz le da los valores a la posición de los elementos del vector respectivamente, mostrando que los conceptos aprendidos interfieren entre sí, puesto que para cualquier tipo de matriz se debe tener en cuenta el orden de aquella. Se espera que el estudiante responda que el índice de una matriz corresponda al orden y no a la posición de los elementos, con el fin de que revele el dominio con que maneja el tema al ser estos los elementos fundamentales en las matrices. Por lo tanto presenta *dificultades de asimilación e interferencia* destacadas en el error anteriormente mencionado.



**Punto 2.** Marque con una (X) la respuesta correcta:

2. Marque con una ( X ) la respuesta correcta.

a) Al obtener una matriz aumentada de un sistema de ecuaciones con tres incógnitas, ¿Se obtiene una matriz de coeficientes?  
Verdadero (X)      Falso ( )

b) Una matriz de  $m \times n$ , no es aquella constituida de  $m$  renglones y  $n$  columnas?  
Verdadero ( )      Falso (X)

c) El proceso de aplicar las operaciones elementales por renglones para simplificar una matriz aumentada se llama reducción por renglones?  
Verdadero (X)      Falso ( )

*Figura 2: Respuesta del primer estudiante al punto 2 de la prueba diagnóstica*

En este enunciado, se le presenta al estudiante tres preguntas de falso y verdadero el cual debe leer detenidamente con el fin de entender lo que se le está preguntando para que responda correctamente. Para este caso el estudiante debe indicar si al aumentar una matriz se obtiene una matriz de coeficientes. Aquí se responde acertadamente, lo que quiere decir que aparentemente logra comprender el concepto de matriz aumentada. Como se puede observar el estudiante presenta una dificultad al momento de relacionar el sistema de ecuaciones lineales con el de matriz, según Duval (2004) esto como consecuencia en el *tratamiento de un registro de representación semiótica que consiste en la transformación de una representación en el mismo registro en el cual ha sido formada, haciendo uso solo de las reglas propias de ese registro ya que el tratamiento es una transformación interna a un registro*. Por otro lado al observar la segunda pregunta se nota la confusión al momento de analizarla por parte del estudiante ya que no conoce la definición formal de una matriz y trata de asociar otras definiciones aprehendidas durante la temática y por lo tanto llega a no dar con la respuesta correcta, lo cual muestra la dificultad que presenta en la comprensión de los temas tratados en el aula de clase. Según Socas (1997) *el estudiante presenta dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de la*

*matemática dando a entender que el conflicto es la injerencia del lenguaje cotidiano en las matemáticas, en el uso de homónimos o específicamente de homógrafos, de manera que el uso de esas palabras involucra una confusión semántica, además, muchas palabras son exclusivas de la jerga matemática, no tienen significado en el lenguaje común, son palabras poco conocidas y usualmente mal entendidas por los estudiantes.* En la tercera pregunta a pesar de dar con la respuesta correcta, se nota que a pesar que está escrita de manera formal el estudiante se regresa a la pregunta anterior y lo asocia con las definiciones aprehendidas en el aula de manera mecánica y recuerda la similitud en los significados para así lograr dar con la respuesta correcta. *Por tal motivo presenta una dificultad basada en un tipo de conversión sencilla o directa considerada yuxtaposición de dos representaciones de un mismo objeto que no puede resolver el problema cognitivo del reconocimiento del mismo objeto representado, porque las diferencias de contenido de las representaciones varían independientemente de los objetos representados* (Duval, 2006, pp. 159). Así mismo contrastando desde otro punto de vista Socas (1997) manifiesta *una dificultad relacionada con la naturaleza de la Matemática es el aspecto deductivo formal y el pensamiento lógico que es el que proporciona la capacidad para concatenar argumentos lógicos, y que es imprescindible para alcanzar determinados niveles de competencia matemática,* el cual fue observado en la respuesta del estudiante.

De lo anterior, se puede inferir que el estudiante mantuvo algo de claridad en lo que se le preguntaba y lo que debía hacer pero omitiendo detalles fundamentales o no logra comprender el significado de un sistema de ecuaciones, por lo que incurre en *errores debidos a dificultades para obtener información relacionada con el tema* que fueron expuestos anteriormente.

**Punto 3.** Completa las siguientes frases:

3. Completa las siguientes frases.

a) Si el número de columnas de una matriz A es igual al número de renglones de una matriz B, entonces se dice que A y B son compatibles bajo la:  
Suma de matrices o Producto

b) Si una matriz A de  $2 \times 4$  se multiplica por una matriz B de  $4 \times 3$ , el resultado de esta multiplicación es una matriz de:  $4 \times 3$

*Figura 3: Respuesta del primer estudiante al punto 3 de la prueba diagnóstica.*

En este punto se le pide al estudiante completar dos frases que tienen que ver con operaciones con matrices, en la primera se nota que el estudiante no tiene claro en qué consisten las operaciones con matrices, ya que en su respuesta asegura que se puede dar el caso en general de aplicar dos operaciones distintas entre matrices la cual no es correcto, por lo tanto mantiene un grado de dificultad en comprender de manera acertada de cómo las matrices cumplen con algunas condiciones necesarias para realizar sus operaciones, aquí se puede observar según Socas (1997) *las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollado para el aprendizaje de las matemáticas: los elementos en el currículo de matemática que pueden distinguirse como dificultades son: las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas que definen la competencia de un alumno en matemática, la necesidad de contenidos anteriores, el nivel de abstracción requerido, así como la naturaleza lógica de las matemáticas escolares.* En consonancia con lo anterior podemos ver la necesidad de un conocimiento pertinente ya que según Morin (1999) *el conocimiento de las informaciones o elementos aislados es insuficiente. Hay que ubicar las informaciones y los elementos en su contexto para que adquieran sentido.* En la segunda se percibe que el estudiante no acierta correctamente ya que no tiene claro la

definición correcta del producto entre dos matrices y por lo tanto trata de adivinar cuál es la respuesta mostrando la dificultad de comprender el concepto del producto matricial el cual muestra *errores de asimilación* según Duval (2004) *distingue el concepto de “representación mental”, que es la que permite a un individuo considerar un objeto, en ausencia total de algo perceptible, del de “representación semiótica”*. En otras palabras, la representación mental que tiene un sujeto en su mente acerca de un concepto, al que sólo puede acceder por representaciones parciales: las representaciones semióticas.

**Punto 4.** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

4. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones y encontrar el valor de  $x_1, x_2$  y  $x_3$ :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

*Solución*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{R}_1 \div 2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{R}_1 \cdot \frac{1}{2} (2 \ 4 \ 6 \ | \ 18) & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \\ \textcircled{2} \text{R}_2 - 4\text{R}_1 & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \\ \textcircled{3} \text{R}_3 - 3\text{R}_1 & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix} \\ \textcircled{4} \text{R}_2 \cdot \frac{1}{-3} (0 \ -3 \ -6 \ | \ -12) & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix} \\ \textcircled{5} \text{R}_3 + 5\text{R}_2 & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \\ \textcircled{6} \text{R}_1 - 2\text{R}_2 & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \\ \textcircled{7} \text{R}_1 + \text{R}_3 & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \\ \textcircled{8} \text{R}_1 \cdot (-1) & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \\ \textcircled{9} \text{R}_3 \cdot (-1) & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ \textcircled{10} \text{R}_2 - 2\text{R}_3 & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Figura 4: Respuesta del primer estudiante al punto 4 de la prueba diagnóstica

El primer estudiante en este punto utiliza la definición aprendida en el aula de clase con respecto a tomar un sistema de ecuaciones y llevarlo a su matriz aumentada para su resolución,

pero no logra dar con la respuesta correcta ya que presenta dificultades a la hora de realizar operaciones elementales que le permiten ir reduciendo la matriz en su forma escalonada para dar la solución, por este motivo comete errores de procedimiento que lo lleva a equivocarse en la respuesta. Con base a esta observación basados en los resultados obtenidos el estudiante presenta una dificultad en la conversión de un sistema a otro dentro de un mismo registro de representación ya que según Duval (2004) afirma que *la conversión es la transformación de una representación en otra que pertenece a otro registro conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial* conllevando por lo tanto a no resolver el problema planteado.

**Punto 5.** Calcule el producto de AB de las siguientes matrices:

5. Calcule el producto de AB de las siguientes matrices:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Figura 5: Respuesta del primer estudiante al punto 5 de la prueba diagnóstica.

En este punto, el estudiante debe utilizar el componente procedimental para la resolución del producto de matrices, por lo tanto se observa que no realiza ninguna operación errando en la respuesta, esto muestra las dificultades que presenta este estudiante al momento de comprender las definiciones correctas del producto entre matrices y por lo tanto lo lleva a cometer errores y

en este caso a no responder, por tal motivo aquí el estudiante presenta dificultad asociada a la complejidad del proceso al no tener un conocimiento pertinente, según Socas (1997) *las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de la matemática: se relaciona con la Matemática como disciplina científica, siendo una de las variables a considerar el papel del lenguaje en la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos, los signos matemáticos presentes en el estudio de las nociones matemáticas y el lenguaje cotidiano como mediador en la interpretación de los signos, de aquí surgen el conflicto de precisión.* Por otra parte debido a la dificultad que se presenta en el estudiante en cuestión se debe considerar la manera en que el estudiante considera la complejidad de la operación que debe realizar por lo tanto se debe considerar lo multidimensional ya que según Morin (1999) afirma que *las unidades complejas, como el ser humano o la sociedad, son multidimensionales y que el conocimiento pertinente debe reconocer esta multidimensionalidad e insertar allí sus informaciones.*

### ***Análisis del segundo estudiante***

En la escogencia de este estudiante para aplicarle la prueba diagnóstica se tuvo en cuenta su rendimiento académico, más específicamente en el área de matemáticas el cual se encuentra en un nivel igual en comparación al desempeño de sus compañeros, este también muestra interés por el tema de las matrices y durante el desarrollo de las clases se ve su participación. A partir de lo respondido por parte de éste en la prueba se realizan las siguientes observaciones:

**Punto 1:** Define con tus palabras lo siguiente:

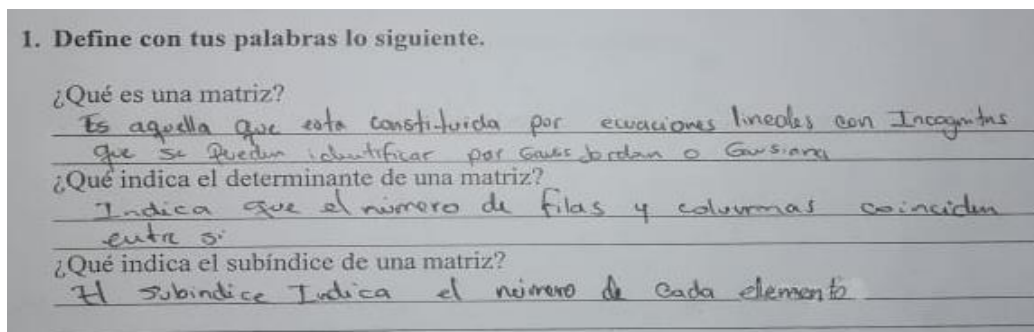


Figura 6: Respuesta del segundo estudiante al punto 1 de la prueba diagnóstica.

Al pedirle al estudiante que escribiera con sus propias palabras el significado de una matriz, se notó que no tiene una idea acerca de lo que significa lo que es una matriz, sin embargo la manera en que considera el término de matriz puede generar algún tipo de inconveniente para la asimilación de las aplicaciones con matrices, lo anterior puede estar relacionado con el tiempo que es dedicado para desarrollar ese tema, “el confiar solamente una comprensión parcial de las matrices, a menudo deja a los estudiantes confundidos en cuanto al significado de las matrices” (Fazio & Siegler, 2011, pág. 10). En la segunda se nota que el estudiante tampoco da la respuesta correcta por el mismo hecho mencionado anteriormente, y en el caso del tercero también se nota la misma condición en el estudiante ya que no da con la respuesta correcta. A partir de lo mencionado se puede inferir que con el concepto que maneja el estudiante de matriz y los términos que la conforman puede dar paso a los *errores debido a dificultades del lenguaje*, estos son notados cuando el estudiante muestra inconvenientes en el aprendizaje de conceptos y el mal uso que les dan a estos una vez deban realizar diferentes actividades que involucren ese tipo de arreglos rectangulares (Rico, 1995).

**Punto 2.** Marque con una (X) la respuesta correcta:

2. Marque con una ( X ) la respuesta correcta.

a) Al obtener una matriz aumentada de un sistema de ecuaciones con tres incógnitas, ¿Se obtiene una matriz de coeficientes?  
Verdadero (✓)      Falso ( )

b) Una matriz de  $m \times n$ , no es aquella constituida de  $m$  renglones y  $n$  columnas?  
Verdadero ( )      Falso (x)

c) El proceso de aplicar las operaciones elementales por renglones para simplificar una matriz aumentada se llama reducción por renglones?  
Verdadero (x)      Falso ( )

*Figura 7: Respuesta del segundo estudiante al punto 2 de la prueba diagnóstica.*

En este punto, el estudiante reconoce con facilidad y marca las respuestas correctas, pero se nota de manera sustancial como tiene dificultades en la aprehensión de los conceptos y definiciones acerca de las matrices, ya que en el punto uno se equivoca en todas las respuestas y en el punto dos solo debe centrarse en analizar de qué forma están escritas las preguntas y con base en ello le ayudaría a responder de manera adecuada las del punto uno, esto muestra la falta de análisis al momento de leerlas lo cual se percibe la dificultad mencionada referente a los conceptos mostrados anteriormente desarrollados en el aula de clase, por lo tanto esos factores mencionados dan paso a *errores que se dan debido a dificultades para obtener información referente a la temática* que son importantes ya que cada estudiante tiene diferentes formas de pensar y asimilar, lo que implica que el análisis se convierta para algunos una dificultad en su proceso de aprendizaje. Rico (1995) Dice que: “aunque se trata de un campo de estudio cuyo desarrollo se está iniciando, es cierto que las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante a la comprensión de lectura es una fuente de dificultades para muchos jóvenes en la realización de tareas matemáticas” (p.89).



**Punto 3.** Completa las siguientes frases:

3. Completa las siguientes frases.

a) Si el número de columnas de una matriz A es igual al número de renglones de una matriz B, entonces se dice que A y B son compatibles bajo la:  
Suma de matrices

b) Si una matriz A de  $2 \times 4$  se multiplica por una matriz B de  $4 \times 3$ , el resultado de esta multiplicación es una matriz de: \_\_\_\_\_

Figura 8: Respuesta del segundo estudiante al punto 3 de la prueba diagnóstica.

En este punto nuevamente se le pide al estudiante completar dos frases que tienen que ver con operaciones con matrices, en la primera se nota que el estudiante no tiene claro en qué consisten las operaciones con matrices, ya que en su respuesta asegura que se puede dar solamente la suma de matrices la cual no es correcto, por lo tanto mantiene un grado de dificultad en comprender de manera acertada de cómo las matrices cumplen con algunas condiciones necesarias para realizar sus operaciones. En la segunda se percibe que el estudiante no da ninguna respuesta ya que no tiene claro la definición correcta del producto entre dos matrices y por lo tanto no se atreve a dar una respuesta mostrando la dificultad de comprender el concepto del producto matricial el cual muestra *errores de asimilación* incluidos dentro de los *errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento* (Rico, 1995).

Todos esos factores dan paso a ciertos errores, como lo es el *error debido a dificultades del lenguaje*, el cual es notado al momento de no hacer buen uso de los conceptos, símbolos y vocabulario; por otra parte también está relacionado con los *errores debido a dificultades para obtener información espacial*. Seguidamente se encuentra implicado los *errores de asimilación*, contenidos en los *errores debido a asociaciones o a rigidez del pensamiento*, en donde interfieren

ciertas situaciones que impiden que asimilen la nueva información y modificar la forma de realizar las actividades de acuerdo a los saberes nuevos (Rico, 1995).

**Punto 4.** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

4. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones y encontrar el valor de  $x_1, x_2$  y  $x_3$ :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

4)  $\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right] = f_1 \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1(-4)+F_1, F_2(-3)+F_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array} \right]$

$f_1 \frac{1}{2} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \end{array} \right)$        $f_1(-4) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ -4 & -3 & -6 & -12 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \end{array} \right)$        $f_1(-3) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ -3 & -6 & -9 & -27 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right)$        $f_2 \left( \frac{1}{3} \right) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array} \right)$

$f_2 \left( \frac{1}{3} \right) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2(5)+F_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right)$

$f_2(5) \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 10 & 20 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array} \right)$

$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right)$

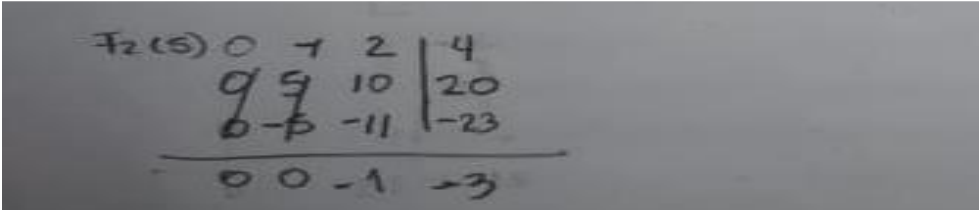
Figura 9: Respuesta del segundo estudiante al punto 4 de la prueba diagnóstica.

Al igual que el primer estudiante también en este punto utiliza la definición apprehendida en el aula de clase con respecto a tomar un sistema de ecuaciones y llevarlo a su matriz aumentada para su resolución, pero no logra dar con la respuesta correcta ya que presenta dificultades a la hora de realizar operaciones elementales que le permiten ir reduciendo la matriz en su forma escalonada para dar la solución, por este motivo comete errores de procedimiento que lo lleva a equivocarse en la respuesta. De la misma forma que en el caso del primer estudiante se nota también una dificultad en la conversión de un sistema a otro dentro de un mismo registro de representación ya que según Duval (2004) afirma que *la conversión es la transformación de una*

representación en otra que pertenece a otro registro conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial conllevando por lo tanto a no resolver el problema planteado.

**Punto 5.** Calcule el producto de AB de las siguientes matrices:

5. Calcule el producto de AB de las siguientes matrices:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$


Handwritten student work showing the calculation of the product of matrices A and B. The student has written:

$$\begin{array}{ccc|c} 72(5) & 0 & 7 & 2 & 4 \\ & 9 & 9 & 10 & 20 \\ & 0 & -7 & -11 & -23 \\ \hline & 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}$$

Figura 10: Respuesta del segundo estudiante al punto 5 de la prueba diagnóstica.

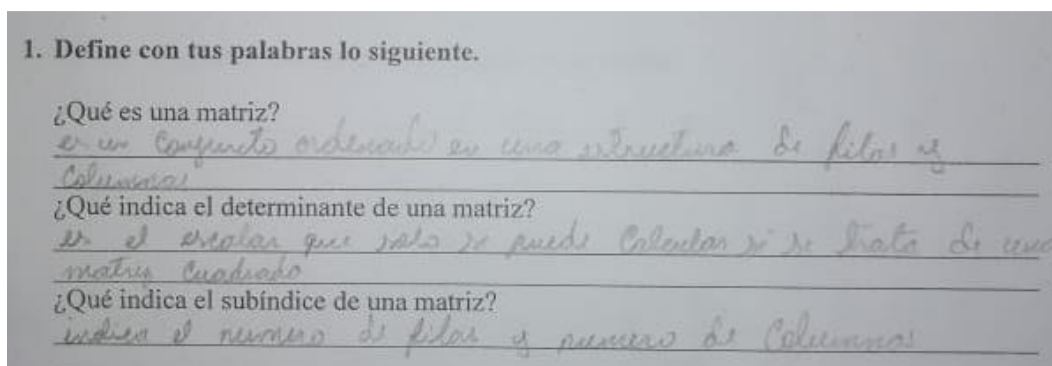
En este punto el estudiante realiza la operación de multiplicación de matrices logrando dar con la respuesta, pero se nota la dificultad que presenta en la realización de las operaciones elementales en la suma y la multiplicación de los términos que le van quedando, nuevamente se percibe la dificultad en la aprehensión de los conceptos tratados en el aula de clase referente al álgebra lineal, mostrando de esta manera confusión en el estudiante al momento de resolver problemas relacionados con el tema en cuestión. Por esta razón se puede observar la dificultad debido a la formación en el sentido que establece Duval (2004) donde *esta formación implica una selección de rasgos y de datos en el contenido por presentar, y además la selección se hace en función de las unidades y de las reglas de formación que son propias de cada registro, esas*

reglas ya están dadas en el registro y lo importante de esta actividad es reconocerlas, no diseñarlas.

### **Análisis del tercer estudiante**

En la escogencia de este estudiante para aplicarle la prueba diagnóstica se tuvo en cuenta su rendimiento académico, más específicamente en el área de matemáticas el cual se encuentra en un nivel igual en comparación al desempeño de sus dos compañeros anteriores, este también muestra interés por el tema de las matrices y durante el desarrollo de las clases se ve su participación. A partir de lo respondido por parte de éste en la prueba se realizan las siguientes observaciones:

**Punto 1:** Define con tus palabras lo siguiente:



*Figura 6: Respuesta del tercer estudiante al punto 1 de la prueba diagnóstica.*

Al pedirle nuevamente al estudiante que escribiera con sus propias palabras el significado de una matriz, se notó que en este caso tenía una idea acerca de lo que significa lo que es una matriz, sin embargo la manera en que considera el término de matriz puede generar algún tipo de inconveniente para la asimilación de las aplicaciones con matrices, lo anterior puede estar relacionado con el tiempo que es dedicado para desarrollar ese tema, “el confiar solamente una comprensión parcial de las matrices, a menudo deja a los estudiantes confundidos en cuanto al

significado de las matrices” (Fazio & Siegler, 2011, pág. 10). En la segunda se nota que el estudiante tampoco da la respuesta correcta por el mismo hecho mencionado anteriormente, y en el caso del tercero se nota un poco más acertada la respuesta pero sin tener de manera oportuna el concepto claro y formal de lo que es un subíndice de una matriz. A partir de lo mencionado se puede inferir que con el concepto que maneja el estudiante de matriz y los términos que la conforman puede dar paso a los *errores debido a dificultades del lenguaje*, estos son notados cuando el estudiante muestra inconvenientes en el aprendizaje de conceptos y el mal uso que les dan a estos una vez deban realizar diferentes actividades que involucren ese tipo de arreglos rectangulares (Rico, 1995).

**Punto 2.** Marque con una (X) la respuesta correcta:

2. Marque con una ( X ) la respuesta correcta.

a) Al obtener una matriz aumentada de un sistema de ecuaciones con tres incógnitas, ¿Se obtiene una matriz de coeficientes?  
Verdadero () Falso (  )

b) Una matriz de  $m \times n$ , no es aquella constituida de  $m$  renglones y  $n$  columnas?  
Verdadero (  ) Falso ()

c) El proceso de aplicar las operaciones elementales por renglones para simplificar una matriz aumentada se llama reducción por renglones?  
Verdadero (  ) Falso ()

*Figura 7: Respuesta del tercer estudiante al punto 2 de la prueba diagnóstica.*

En este punto al igual que el segundo estudiante, este reconoce con facilidad y marca las respuestas correctas, pero se nota de manera sustancial como tiene dificultades en la aprehensión de los conceptos y definiciones acerca de las matrices, ya que en el punto uno la manera en que respondió no le sirve de ayuda por la falta de comprensión de los conceptos fundados en el álgebra lineal referente a la temática tratada en la prueba, y en el punto dos solo debe centrarse en analizar de qué forma están escritas las preguntas y con base en ello le ayudaría a responder de

manera adecuada las del punto uno, esto muestra la falta de análisis al momento de leerlas lo cual se percibe la dificultad mencionada referente a los conceptos mostrados anteriormente desarrollados en el aula de clase y en la última parte de este punto se equivoca en dar la respuesta debido a la dificultad que presenta a la hora de relacionar las preguntas anteriores las cuales le podrían ayudar a responder, entonces es evidente que presenta también dificultad en la aprehensión de los conceptos del álgebra lineal referente a las matrices y sistema de ecuaciones, por lo tanto esos factores mencionados dan paso a *errores que se dan debido a dificultades para obtener información referente a la temática* que son importantes ya que cada estudiante tiene diferentes formas de pensar y asimilar, lo que implica que el análisis se convierta para algunos una dificultad en su proceso de aprendizaje. Rico (1995) Dice que: “aunque se trata de un campo de estudio cuyo desarrollo se está iniciando, es cierto que las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante a la comprensión de lectura es una fuente de dificultades para muchos jóvenes en la realización de tareas matemáticas” (p.89).

**Punto 3.** Completa las siguientes frases:

3. Completa las siguientes frases.

a) Si el número de columnas de una matriz A es igual al número de renglones de una matriz B, entonces se dice que A y B son compatibles bajo la:  
 \_\_\_\_\_ *no se* \_\_\_\_\_

b) Si una matriz A de  $2 \times 4$  se multiplica por una matriz B de  $4 \times 3$ , el resultado de esta multiplicación es una matriz de: \_\_\_\_\_  *$4 \times 2$*  \_\_\_\_\_

*Figura 8: Respuesta del tercer estudiante al punto 3 de la prueba diagnóstica.*

En este punto nuevamente se le pide al estudiante completar dos frases que tienen que ver con operaciones con matrices al igual que sus dos compañeros anteriores, en la primera se nota que el estudiante no sabe en qué consisten las operaciones con matrices, ya que en su respuesta no

responde nada, por lo tanto mantiene un grado de dificultad en comprender de manera acertada de cómo las matrices se pueden operar y cumplir con algunas condiciones necesarias para realizar sus operaciones. En la segunda se percibe nuevamente que el estudiante da una respuesta equivocada ya que no tiene claro la definición correcta del producto entre dos matrices y por lo tanto no se atreve a dar una respuesta acertada mostrando la dificultad de comprender el concepto del producto matricial el cual muestra *errores de asimilación* incluidos dentro de los *errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento* planteados por Rico.

Todos esos factores dan paso a ciertos errores, como lo es el *error debido a dificultades del lenguaje*, el cual es notado al momento de no hacer buen uso de los conceptos, símbolos y vocabulario; por otra parte también está relacionado con los *errores debido a dificultades para obtener información espacial*. Seguidamente se encuentra implicado los *errores de asimilación*, contenidos en los *errores debido a asociaciones o a rigidez del pensamiento*, en donde interfieren ciertas situaciones que impiden que asimilen la nueva información y modificar la forma de realizar las actividades de acuerdo a los saberes nuevos (Rico, 1995).

**Punto 4.** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

4. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones y encontrar el valor de  $x_1, x_2$  y  $x_3$ :

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18$$

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$$

Solución

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 - 4 = 4 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right]$$

$$f_1 \cdot \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right] \rightarrow f_1 \cdot (-4) + f_2 \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right]$$

$$f_1 \cdot (-3) + f_3 \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array} \right] \rightarrow f_1 \cdot \frac{1}{3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array} \right]$$

Figura 9: Respuesta del tercer estudiante al punto 4 de la prueba diagnóstica.

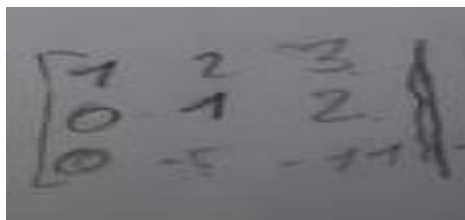
Al igual que el primer y segundo estudiante también en este punto utiliza la definición aprendida en el aula de clase con respecto a tomar un sistema de ecuaciones y llevarlo a su matriz aumentada para su resolución, pero no logra dar con la respuesta correcta ya que presenta dificultades a la hora de realizar operaciones elementales que le permiten ir reduciendo la matriz en su forma escalonada para dar la solución, por este motivo comete errores de procedimiento que lo lleva a equivocarse en la respuesta, con esto podemos mostrar según Duval (2004) donde *esta formación implica una selección de rasgos y de datos en el contenido por presentar, y además la selección se hace en función de las unidades y de las reglas de formación que son propias de cada registro, esas reglas ya están dadas en el registro y lo importante de esta actividad es reconocerlas, no diseñarlas.*



**Punto 5.** Calcule el producto de AB de las siguientes matrices:

5. Calcule el producto de AB de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -11 \end{pmatrix}$$

*Figura 10: Respuesta del tercer estudiante al punto 5 de la prueba diagnóstica.*

En este punto el estudiante realiza la operación de multiplicación de matrices pero no logra dar con la respuesta, y se nota la dificultad que presenta en la realización de las operaciones elementales en la suma y la multiplicación de los términos que le van quedando, nuevamente se percibe la dificultad en la aprehensión de los conceptos tratados en el aula de clase referente al álgebra lineal, mostrando de esta manera confusión en el estudiante al momento de resolver problemas relacionados con el tema en cuestión. De igual manera el estudiante en este punto presenta dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático ya que según Socas (1997) *se originan desde la propia matemática por su naturaleza lógica, y se relacionan con las rupturas implícitas en los modos de pensamiento matemático. Una dificultad relacionada con la naturaleza de la Matemática es el aspecto deductivo formal y el pensamiento lógico que es el que proporciona la capacidad para concatenar argumentos lógicos, y que es imprescindible para alcanzar determinados niveles de competencia matemática.* En este sentido el estudiante se encuentra inmerso en una dificultad debido a la complejidad que él mismo asume a la hora de

realizar las operaciones el cual necesita de un conocimiento pertinente para resolver el problema, por esta razón argumenta Morin (1999) que *el conocimiento pertinente debe enfrentar la complejidad. Complexus significa lo que está tejido junto; en efecto, hay complejidad cuando son inseparables los elementos diferentes que constituyen un todo.*

## **CAPITULO V CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

### **5.1 Conclusiones**

De acuerdo al objetivo general de la investigación y el análisis e interpretación de los resultados arrojados por la técnica utilizada, se pudo evidenciar y analizar cualitativamente las dificultades más relevantes en los estudiantes de educación superior sobre la aprehensión del álgebra lineal, de acuerdo a algunos factores que permitieron la dificultad en el aprendizaje de las matemáticas, como lo manifiesta Socas (1997) asociada a la complejidad de los objetos matemáticos, dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático y dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo, dando respuesta al objetivo principal del trabajo de investigación. A su vez se determinaron los factores académicos que influyeron en el aprendizaje del álgebra lineal basados en la Teoría de los registros de representaciones semióticas expuestos por Duval (2004) ya que los estudiantes presentaron dificultades relacionados con la falta de información detallada referente a la temática que los condujo a confusiones llevándolos a errores de conceptualización basadas en la formación, tratamiento y conversión de sistemas semióticos, lo cual nos dio respuesta al objetivo planteado. Por último se pudo identificar las dificultades presentes en los conceptos relacionados con matrices y sistema de ecuaciones lineales fundados en el álgebra lineal ya que de la misma manera Duval (2004) distingue a su vez, dos niveles de tratamiento uno “tratamiento cuasi instantáneo” y el otro “tratamiento

intencional”, ya que los estudiantes carecían de conceptos claves a la hora de resolver las operaciones debido a la falta de experiencia que resulta de una larga práctica de los procesos, dando respuesta al último objetivo planteado.

## **5.2 Recomendaciones**

En el aprendizaje de las matemáticas se presentan errores de diferentes tipos como se muestra en esta investigación debido a dificultades en la aprehensión de conceptos básicos del álgebra lineal, por lo que se hace necesario que los profesores centren su atención en la forma en que proponen sus estrategias presentadas en sus clases ante los estudiantes, siendo muy cuidadosos con las propuestas que llevan, ya que estas pueden ser significativas para unos o se puede dar el caso en que sea motivo de dificultades en su proceso de aprendizaje en especial con el tema de matrices y sistema de ecuaciones con varias incógnitas, buscando que exista una adecuada comprensión de los conceptos para lograr un adecuado dominio en el lenguaje matemático que es donde se presentan la mayor parte de las dificultades y a su vez, proporcionar una relación directa con los procedimientos que se realizan en la resolución de situaciones problemas, ya que “la persona que sabe matemáticas ha de ser capaz de usar el lenguaje y conceptos matemáticos para resolver problemas” (Godino, 2004). Siendo estos una fuente de motivación para los estudiantes porque pueden contextualizar lo que aprenden dándole sentido a la finalidad que tiene el aprender la temática relacionada con el álgebra lineal.

De igual manera, es importante identificar los errores que presentan los estudiantes debido a las dificultades en el proceso de aprendizaje buscando establecer sus causas y organizar la forma en que se enseñan, por lo que se recomienda realizar investigaciones que permitan corregir los errores que se identificaron debido a las dificultades en la aprehensión de conceptos para fortalecer la resolución de situaciones problemas con matrices y sistema de ecuación con varias

incógnitas en los estudiantes, utilizando los errores como mecanismo de motivación para superar las dificultades y como algo propio que puede presentar cualquier estudiante en su etapa de aprendizaje, siendo algo tan importante que debe sobrellevar y mostrar al resto de la comunidad educativa para poder contribuir a la construcción del conocimiento.

## REFERENTES BIBLIOGRAFICOS

- Álvarez, C. (2012). La elección del estudio de caso en investigación educativa. *Gazeta de Antropología*, 1-13.
- Buelvas, B, & Salazar, D. (2015). *Álgebra Temprana a través de la Resolución de Problemas Aditivos (tesis de grado)*. Universidad del Atlantico, Barranquilla, Colombia.
- Duval, R.(2004). *Teoria de los registros de representaciones semioticas*
- Escobar, L, & Palencia, S. (2018). *Errores que presentan los estudiantes en la resolución de problemas con fracciones en tercer grado* (tesis de pregrado). Universidad del Atlantico, Barranquilla, Colombia.
- Espinoza C., R., & Ríos, S. (2017). El diario de campo como instrumento para lograr una práctica reflexiva. *Congreso Nacional de investigación Educativa (COMIE)*.
- Esquinas, A. (2009). Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico, del símbolo a la formalización algebraica: Aplicación a la práctica docente. Tesis doctoral. Madrid:España.
- Fazio, L., & Siegler, R. (2011). *Enseñanza de las fracciones*. Atenas, Grecia: Series Prácticas Educativas.
- Godino, J. (2003). *Teoria de las funciones semioticas* (catedra de Universidad de Didactica de la Matematica). Universidad de Granada, Granada, España.
- Godino, J. D. (2004). Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para maestros. En J. D. Godino, *Didáctica de las Matemáticas para Maestros* (págs. 53-82).

- Hernández Sampieri, R. (2014). *Metodología de la Investigación (6ta. ed.)*. México : Interamericana Editores.
- Hurtado, J. (2000). *Metodología de la Investigación Holística*. México: Interamericana Editores.
- Lopera, C. (2015). *La enseñanza del Concepto Transformación Lineal como una Matriz Asociada a un Operador Lineal (tesis de grado)*. Universidad Nacional de Colombia, Medellin, Colombia.
- Martínez Carazo, P. C. (2006). El modelo de estudio de caso, estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y Gestión* , 1-29.
- MEN. (2015). Derechos Básicos de Aprendizaje. *Ministerio de Educación Nacional*, 11-12.
- Messina, V.(2017). *La relacion entre alfabetizacion academica y el aprendizaje del álgebra lineal en estudiantes universitarios* (tesis de maestria). Universidad Tecnologica Nacional, Buenos Aires, Argentina.
- Morin, E.(1999). *Los siete saberes necesarios para la educacion del futuro*. Paris, Francia: Organización de la Naciones Unidas para la Educacion, la Ciencia y la Cultura.
- Muñoz, M., y Ríos, C. (Octubre, 2008). Nociones básicas sobre álgebra: Análisis de las dificultades presentadas por los estudiantes en los procesos de aprendizaje de los conceptos básicos sobre álgebra. IX Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Simposio llevado a cabo en la conferencia de ASOCOLME, Colombia.
- Obando, M, & Nelson, G. (2008). *Factores de la Lectura y Escritura que inciden en el Aprendizaje del Álgebra Lineal de los estudiantes de primero y segundo semestres del*

*programa de Sistematización de datos (tesis de grado). Universidad Libre, Bogota, Colombia.*

Padua, J. (1979). *Técnicas de Investigación aplicadas a las ciencias sociales*. México: Fondo de Cultura Económica.

Ortega, P. (2002). *La enseñanza del álgebra lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico (tesis doctoral)*. Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez, & L. Rico, *Educación Matemática* (págs. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Sara, Alicia, Scardigli, Mónica, Pustilnik, Isabel, Cittadini, Gloria y Pano, Carlos Oscar. (2006). *Errores recurrentes en el aprendizaje del álgebra lineal y registros de representación semiótica*. Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina.

Socas, R. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria*. Universidad de laguna, Madrid, España .

Socas, R. (2007). *dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas, análisis desde el enfoque lógico semiótico*. Universidad de laguna, Madrid, España .

Solorzano, J.(2019). *Deconstrucción Matemática como sustento de Aplicaciones Criptográficas en el Álgebra Lineal*. Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia.

## ANEXOS

### Anexo 1

**Fecha:**

**Nombre del estudiante:**

**Cuatrimestre:**

### PRUEBA DIAGNÓSTICA

#### Álgebra lineal.

Dirigida a los estudiantes de la asignatura de álgebra lineal del programa Técnico Profesional en Mantenimiento Electromecánico del Instituto Tecnológico de Soledad Atlántico (ITSA).

**Objetivo:** Dar a conocer el aprendizaje obtenidos por los estudiantes sobre el tema del álgebra lineal y sus propiedades habiendo utilizado la enseñanza tradicional.

#### 1. Define con tus palabras lo siguiente.

¿Qué es una matriz?

---

¿Qué indica el determinante de una matriz?

---

¿Qué indica el subíndice de una matriz?

---

#### 2. Marque con una ( X ) la respuesta correcta.

a) Al obtener una matriz aumentada de un sistema de ecuaciones con tres incógnitas, ¿Se obtiene una matriz de coeficientes?

Verdadero ( )      Falso ( )

b) Una matriz de  $m \times n$ , no es aquella constituida de  $m$  renglones y  $n$  columnas?

Verdadero ( )      Falso ( )

c) El proceso de aplicar las operaciones elementales por renglones para simplificar una matriz aumentada se llama reducción por renglones?

Verdadero ( )      Falso ( )



**3. Completa las siguientes frases.**

- a) Si el número de columnas de una matriz A es igual al número de renglones de una matriz B, entonces se dice que A y B son compatibles bajo la: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- b) Si una matriz A de 2 x 4 se multiplica por una matriz B de 4 x 3, el resultado de esta multiplicación es una matriz de: \_\_\_\_\_

**4. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones y encontrar el valor de  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ :**

$$\begin{aligned}2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4\end{aligned}$$

**5. Calcule el producto de AB de las siguientes matrices:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Anexo 2

