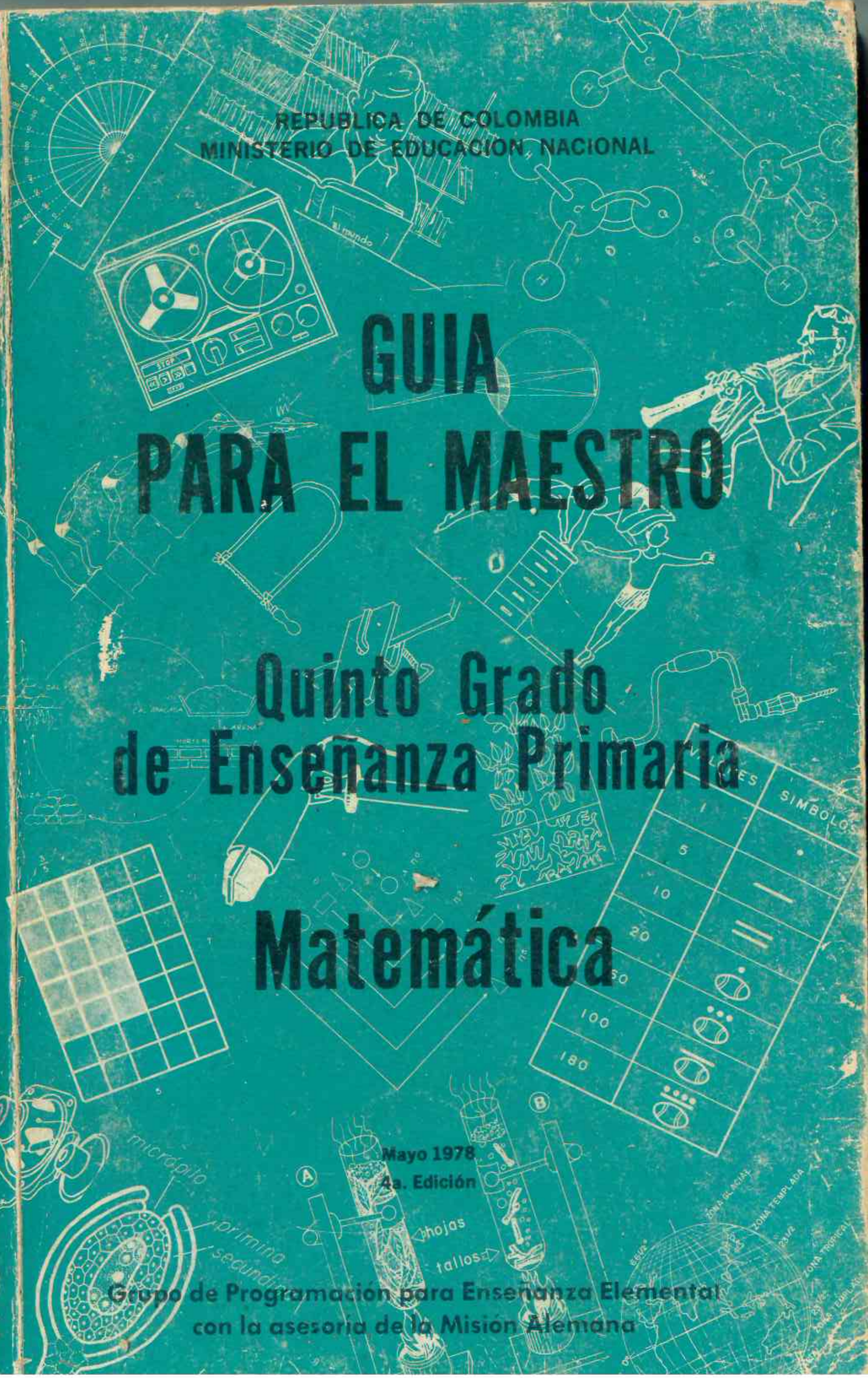
REPUBLICA DE COLOMBIA
MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL

GUIA PARA EL MAESTRO

Quinto Grado de Enseñanza Primaria

Matemática



Mayo 1978
4a. Edición

Grupo de Programación para Enseñanza Elemental
con la asesoría de la Misión Alemana

REPUBLICA DE COLOMBIA
MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL

Escuela Nº 58

GUIA
PARA EL MAESTRO

Quinto Grado
de Enseñanza Primaria

Matemática

Mayo 1978
4a. Edición

Grupo de Programación para la Enseñanza Elemental
con la asesoría de la Misión Alemana

COMITE DE ELABORACION

Inspectoras Nacionales de Educación
IRIS O. DE ARBELAEZ
SOFIA TRUJILLO L.
ENRIQUETA JIMENEZ G.
BEATRIZ VESGA G.
Técnico Icolpe
RAFAEL CARDONA O.
Dibujante
MIGUEL ENRIQUE PAYAN
Centro Regional ICCE
Asesoría
MISION PEDAGOGICA ALEMANA

CONTENIDO

INTRODUCCION

Los aspectos contemplados en esta Guía, constituyen una selección de contenido, con orientaciones metodológicas, que aspiramos le sirvan de fundamento para hacer más racional el proceso enseñanza-aprendizaje.

La organización de los contenidos con sentido estructural, que se ha venido presentando a través de los distintos grados, permite al alumno adquirir los conceptos básicos en forma unificada, haciendo posible la profundidad y extensión requeridas para este nivel, de acuerdo con la capacidad mental y el grado de madurez de aquel.

Se ha tratado de dar un enfoque de tipo integral y unificador, es decir, un desarrollo articulado con miras a establecer un empalme gradual con el nivel de enseñanza media.

En consecuencia, la presente Guía ha sido elaborada con el propósito de actualizar y enriquecer los temas que se han venido desarrollando desde el grado 1o, mediante la inclusión de una apreciable cantidad de material de enlace. Pero, además, se han incluído nuevos tópicos que facilitan el desarrollo de la capacidad del alumno para la comprensión de las grandes estructuras matemáticas, a fin de que logre enfrentar con éxito problemas de la vida diaria, teniendo en cuenta que la Matemática en los momentos actuales tiene una gran variedad de aplicaciones en los diversos campos de la actividad humana.

De acuerdo con la nueva orientación, la tarea del maestro, antes que enseñar una disciplina llena de fórmulas y simbolismos, debe acentuarse en la elaboración de conceptos, ya que éstos vienen a constituir los marcos del pensamiento y desempeñan, por lo tanto, un papel importante en los procesos mentales y en el descubrimiento de nuevas relaciones, que permitan al alumno ejercitar e incrementar su capacidad de abstraer y generalizar. Esta orientación en la enseñanza de la Matemática hace partícipe a la escuela de la función primordial de enseñar a aprender, al mismo tiempo que le facilita al maestro su labor en este sentido.

No sin razón el gran matemático CARLOS FEDERICO GAUSS, afirmó que: "La Matemática es la reina de las ciencias y la Arimética es la reina de la Matemática".

En nuestra Guía no se habla de Aritmética sino de Matemática, ya que hemos presentado en forma integrada, conceptos aritméticos, geométricos y estadísticos; y es evidente que este método es de gran valor pedagógico y didáctico.

El maestro tendrá necesidad de consultar con frecuencia las Guías anteriores, para reforzar la explicación de temas que, por su tratamiento anterior, deben profundizarse en la presente Guía. Al mismo tiempo dicha consulta será necesaria para refrescar explicaciones sobre temas que no aparecen en la presente publicación.

Además de presentar tópicos nuevos, como sistemas de numeración en base diferente a la decimal, criterios de máximo común divisor y mínimo común múltiplo y, como punto central, una teoría elemental de conjuntos, se da un nuevo enfoque metodológico a temas tratados antes.

Sin embargo, rogamos a los maestros no considerar este trabajo como algo inmejorable. Es producto humano y, por tanto, susceptible de imperfecciones. De otra parte, aunque ha sido elaborado con base en nuestras experiencias, en la de autores de textos de Matemática, de Metodología y de Sicología Educativa, solamente la vivencia total de esta guía, obtenida después de un trabajo experimental con la misma, permitirá hacer una evaluación completa y acertada sobre ella. Por lo tanto, las críticas y sugerencias que formulen los maestros que la utilicen, nos serán de excepcional utilidad para introducirle mejoras tanto didácticas como de contenido científico.

I. GENERALIDADES

A. CARACTERISTICAS DEL NIÑO DE 11 - 12 AÑOS

Uno de los aspectos que se han tenido en cuenta al elaborar las Guías para el Maestro, es la selección adecuada de contenidos y actividades, de acuerdo al crecimiento y desarrollo del niño en cada edad. Los alumnos que ingresan al 5o. Grado, cuyas edades oscilan entre 11 y 12 años, presentan, entre otras, las siguientes características:

—El pensamiento se hace lógico, particularmente por la organización de los sistemas de operaciones matemáticas como las de composición o directas, y las de descomposición o inversas, en las cuales juega papel importante su reversibilidad.

—Los elementos de la fantasía se van eliminando de la percepción, para dar cabida a representaciones realistas que se aprecian particularmente en los dibujos. El alumno advierte que las cosas del mundo exterior presentan dificultades para ser representadas, y que de la satisfacción de éstas depende la veracidad y exactitud de la interpretación.

—Al alumno le agrada proyectar sus pensamientos sobre las distintas situaciones matemáticas que la vida le presenta.

—En esta edad se amplían las nociones de tiempo y espacio, como esquemas mentales.

—Niñas y niños compiten por separado en pequeños grupos y con cierta libertad.

—En esta etapa se incurre en errores de juicio debidos, principalmente, a generalizaciones precipitadas, a impulso intelectual débil, a la falta de capacidad de concentración, a factores emocionales y a retardo pasajero del pensamiento.

B. OBJETIVOS

1. De la educación primaria

1. Contribuir al desarrollo armónico del niño y la estructuración de su personalidad, esto último por la estimación de los valores de la cultura, la formación y el afianzamiento del concepto cristiano de la vida y de los principios de libertad y democracia, factores decisivos en la evolución de la nacionalidad colombiana.
2. Dar al niño una formación integral básica, mediante el dominio de los conocimientos y de las técnicas elementales como instrumentos de cultura; y capacitarlo para que pueda ampliar dichos conocimientos y perfeccionar sus habilidades.
3. Formar en el niño hábitos de higiene, de protección de la salud, de utilización adecuada de los recursos del medio y de preservación y defensa contra los peligros, a fin de lograr la elevación del nivel de vida.
4. Proporcionar al niño oportunidades para que mediante la observación, la experiencia y la reflexión asuma actitudes que le permitan alcanzar una concepción racional del universo y desterrar supersticiones y prejuicios.
5. Capacitar al niño para una vida de responsabilidad y de

trabajo, de acuerdo con las aptitudes y vocación individuales, los recursos naturales y humanos y las técnicas modernas, para que sea útil a sí mismo y a la sociedad.

6. Preparar al niño para el empleo adecuado del tiempo libre, mediante el aprovechamiento de servicios y elementos culturales, con la práctica de manualidades, deportes y recreaciones útiles.
7. Estimular en los educandos el sentido de apreciación de los valores estéticos, valiéndose de los medios de expresión que fomentan la sensibilidad artística; y
8. Procurar el desarrollo de la conciencia y de la nacionalidad, el espíritu de convivencia, de tolerancia y de respeto mutuo, y el sentido de solidaridad con todos los pueblos del mundo.

(Decreto No. 1710 - Artículo segundo).

2. De la matemática para la enseñanza primaria (generales)

Adquirir ideas y nociones elementales, experiencias, mecanismos, destrezas y conocimientos básicos en general, en cuanto a cantidad, medida y forma.

Despertar la afición por las cuestiones matemáticas y darle al niño las herramientas necesarias para resolver los problemas que se le presenten en su medio.

Proyectar la matemática hacia las distintas ramas de la enseñanza para facilitarle al alumno la adquisición de nuevos conocimientos mediante la relación de esta ciencia con las demás.

Desarrollar en el niño la capacidad reflexiva.

(Programas de Enseñanza Primaria. Decreto 1710 de 1963 y Resol. 0068 de 1964).

3. De la matemática en el 5o. Grado de Primaria (específicos)

La Matemática como área del plan de estudios correspondiente al nivel de educación primaria, tiene —entre otras— la obligación de contribuir al logro de los objetivos generales propuestos.

Según el Decreto 1710 de 1963, el 5o. grado es la etapa final de la educación elemental; por lo tanto, es necesario afirmar los hábitos, destrezas y habilidades que se han venido desarrollando a través de los grados anteriores, a fin de lograr en el alumno una formación integral que le permita:

—Establecer las relaciones que estimulen la comprensión, interpretación y aplicación de las operaciones entre conjuntos como base para actuar con mayor seguridad y precisión en la operatoria entre números naturales.

—Demostrar dominio de un lenguaje técnico y de un simbolismo mínimo que le haga posible interpretar y expresar, con claridad y precisión, las relaciones que surjan en cualquier situación cuantitativa, adecuada a su nivel.

—Interpretar, formular, plantear y resolver, tanto gráfica como numéricamente, problemas prácticos que admitan la aplicación de patrones matemáticos ya utilizados en el campo de los números naturales, e impliquen la operatoria entre números fraccionarios y decimales.

—Manejar instrumentos de medida y de cálculo, e interpretar y elaborar gráficos, con base en conjuntos de datos.

—Demostrar dominio en la estructura de diferentes sistemas de numeración para expresar correctamente cualquier número natural, en una u otra base de agrupación, atendiendo al valor posicional de sus cifras.

—Investigar, descubrir y aplicar conceptos que tengan relación con algunas estructuras abstractas y seleccionar lógicamente los procedimientos que mejor convengan en la solución de las diferentes situaciones cuantitativas a que se enfrente el alumno.

—Continuar con éxito el estudio de la matemática en el nivel medio.

—Alcanzar también, en forma independiente, niveles superiores del conocimiento matemático, en el caso de que no le fuere posible seguir estudios formales.

C. SELECCION Y ORGANIZACION DE LOS CONTENIDOS

El trabajo presentado en esta Guía se ha dividido en 5 grandes bloques o unidades, distribuídas en 36 semanas (180 horas), dejando 5 horas flotantes (1 semana) para evaluaciones, revisión de conceptos, etc.

Hemos introducido algunas modificaciones dentro del programa oficial (Decreto 1710) por considerarlas de actualidad, conveniencia e interés para los alumnos, siendo axiomático que estamos enfrentados a un mundo cambiante, dependiente cada vez más de la técnica y de sus múltiples descubrimientos y aplicaciones, v. gr. de las calculadoras y de los cerebros electrónicos. En la era de los viajes espaciales y de los grandes adelantos científicos, en el campo de la Medicina, la Biología, la Física, etc., se impone —y el educador debe considerar este objetivo como meta permanente— una nueva metodología. La Matemática, como auxiliar indispensable de las demás disciplinas científicas, también debe participar de esta inquietud, de esta necesidad de cambio. Por tanto, ya presenta cambios de tipo metodológico, obligada por el descubrimiento de nuevos conceptos (en su campo específico) y por la implantación de nuevos sistemas pedagógicos. Las Conferencias que sobre Matemática han celebrado los países de América, han llegado a la conclusión de que es necesaria la unificación de los programas, previa la actualización de los mismos. Para ello será indispensable aplicar los nuevos enfoques y los nuevos conceptos, tales como: conjuntos, relaciones, sistemas de numeración en cualquier base, estructuras algebraicas (grupo, anillo, cuerpo, espacio vectorial), un tratamiento de la Geometría como interrelacionada con la aritmética y nociones básicas sobre Estadística, computadores, etc. Además, en 5o. grado culmina una etapa en el proceso educativo y el alumno debe adquirir las herramientas necesarias para emprender con éxito sus estudios posteriores. Es por eso por lo que hemos introducido en la UNIDAD I, una visión elemental, pero sistemática, de la Teoría de Conjuntos, la cual permite comprender en mejor forma, la estructura de los números naturales. Al lado de esta presentación integral, hemos visto la ocasión propicia para tratar, junto con la unión entre conjuntos finitos disyuntos y adición entre números naturales, los conceptos geométricos de recta y sus subconjuntos, ángulos y perímetro de polígonos, así como las propiedades fundamentales de la adición entre segmentos y entre ángulos. Y, con el producto cartesiano entre conjuntos finitos y la multiplicación entre naturales, hemos introducido aplicaciones sobre cálculo de áreas y volúmenes.

En la potenciación, aprovechamos para presentar el desarrollo de $(a+b)^2$ y $(a+b)^3$, así como área del cuadrado y volumen del cubo. También se orienta un proceso sobre radicación (raíz cuadrada) y se menciona la logaritmación como una operación inversa de la potenciación.

Se tratan con amplitud los órdenes aditivo y multiplicativo, así como los casos de la división por cero.

La UNIDAD II, es un recuento de los criterios de divisibilidad y de los números primos, presentando como innovación, diversas formas que permiten determinar cuándo un número natural es o no primo.

Aparecen como temas nuevos dentro del programa, los conceptos de máximo común divisor y mínimo común múltiplo, así como su relación con la intersección entre conjuntos.

La UNIDAD III, considerada como nueva dentro del programa de 5o. grado, refuerza los conceptos de valor de posición en nuestro sistema decimal, y muestra algunos sistemas antiguos de numeración, así como sistemas distintos al decimal (binario, octal, etc) y la forma como se pasa de un sistema a otro. Para trabajar con los diversos sistemas de numeración, el maestro puede hacer uso de un ábaco o de cualquier material sin valor —como piedras, botones usados, tapas de gaseosa, etc.

La UNIDAD IV trata de los racionales positivos y el cero (números de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números naturales y $b \neq 0$), también conocidos como números fraccionarios. Se muestra en forma sencilla el teorema sobre densidad, fundamento de muchos estudios en cursos avanzados, así como diversos enfoques sobre la manera de introducir al estudiante en las operaciones con fraccionarios. Se demuestra la no existencia de un orden multiplicativo y se hace un tratamiento completo sobre los decimales y el proceso para expresar un fraccionario en forma decimal y viceversa.

En la UNIDAD V, se afianza el concepto de proporcionalidad y se presentan múltiples aplicaciones como porcentaje, descuento, regla de tres, semejanza de polígonos, escalas, cambio, etc., así como algunos rudimentos de Estadística, a través de gráficas.

Las modificaciones que se han introducido en el contenido programático como en el enfoque metodológico de algunos temas, tienen fundamento en:

—Las sugerencias que presentaron maestros de diferentes Departamentos a través de los seminarios sobre orientación e interpretación de las Guías.

—Las recomendaciones de las conferencias interamericanas de Matemática (Bogotá, Lima, Bahía Blanca -Argentina-).

—Los avances técnicos y pedagógicos de la ciencia.

—La experiencia que sobre matemática ha realizado el ICOLPE (1).

—La programación del sistema INEM.

—Una experiencia realizada por el comité de elaboración (Area Matemática) en 15 escuelas de Bogotá, durante los meses de abril y mayo de 1974.

En esta experiencia los alumnos mostraron, a través de 4 pruebas escritas, seguimiento directo y permanente e informe de los maestros participantes, un cambio positivo y una comprensión adecuada de tales temas. Estos continúan siendo motivo de experimentación, de crítica, de modificaciones y adecuaciones al nivel de los alumnos, a las condiciones del medio y al interés y grado de preparación de los maestros.

---

(1) Matemática para la Educación Básica - Método Colombia - Doc. ICOLPE - CENDIP.

D. PARCELACION

UNIDAD UNO

Tiempo: 10 semanas (50 clases)

LA TEORIA DE CONJUNTOS BASICA PARA LA TEORIA DE NUMEROS NATURALES

1. Conceptos generales sobre conjuntos

Introducción

a. Determinación de conjuntos
b. Relación de pertenencia.
c. Formas de expresar conjuntos:
    —mediante llaves
    —utilizando diagramas de Venn-Euler
    —esquemas de Gonzet
    —curva cerrada simple.
d. Tipos de conjuntos: finito, infinito, unitario, vacío, universal.
e. Relaciones: relación de equivalencia. Equinumerosidad.
f. Construcción de los números naturales.
g. Infinitud de los números naturales.
h. Representación geométrica de los números naturales.

2. Operatoria entre conjuntos y entre números naturales.

Conjuntos disyuntos. Conjuntos intersecantes.

a. Unión entre conjuntos
b. Adición entre números naturales.

    Propiedades de la unión de conjuntos y de la adición entre números naturales:
    —Propiedad clausurativa
    —Propiedad conmutativa
    —Propiedad asociativa
    —Propiedad idéntica o modulativa
    —Propiedad cancelativa.
c. Adición de segmentos

    Propiedades de la adición de segmentos:
    —Propiedad clausurativa

—Propiedad conmutativa
—Propiedad asociativa
—Propiedad idéntica o modulativa

d. Construcción de polígonos

—En el geoplano
—En el tablero o en papel
Construcción de un triángulo equilátero
Construcción de un cuadrado
Construcción de cualquier polígono regular, con número impar de lados (pentágono, heptágono...)
Construcción de cualquier polígono regular, con número par de lados (cuadrado, hexágono, octágono...)

e. Cálculo del perímetro

f. Adición de ángulos
Concepto de ángulo
Tipos de ángulos
Angulos congruentes
Medida de ángulos. Uso del graduador
Construcción y copia de ángulos
Bisectriz de un ángulo. Trazado de la bisectriz
Propiedades de la adición de ángulos
—Propiedad clausurativa
—Propiedad conmutativa
—Propiedad asociativa
—Propiedad idéntica o modulativa.

g. Multiplicación

La multiplicación como expresión del producto cartesiano de dos conjuntos.
Propiedades del producto cartesiano y de la multiplicación entre naturales:
—Propiedad clausurativa
Area de polígonos regulares
Area de polígonos irregulares
—Propiedad conmutativa
—Propiedad asociativa
—Propiedad idéntica o modulativa
—Propiedad cancelativa
—Propiedad anulativa (absorbente o aniquilativa)
—Propiedad distributiva

h. Potenciación

Area del cuadrado (segunda potencia)

Volumen del cubo (tercera potencia)

i. Operaciones inversas de la potenciación: radicación y logaritmación
Extracción o cálculo de raíz cuadrada.
j. Subconjuntos
Partes de un conjunto
Relación de minorancia
Orden aditivo. Propiedades:

—Reflexiva
—Antisimétrica
—Transitiva
k. Sustracción
l. Orden multiplicativo
ll. División
—Propiedad clausurativa condicionada
—La división por cero.

m. División de un segmento en "n" partes congruentes.

UNIDAD DOS

Tiempo: 3 semanas (15 clases)

NOCIONES SOBRE TEORIA DE NUMEROS

1. Intersección entre conjuntos
2. Afianzamiento sobre criterios de divisibilidad
3. Múltiplos de un número
4. Números primos y compuestos
   a. Proceso para saber si un número es primo
   b. Descomposición de un número en sus factores primos
5. Máximo común divisor
   —Procesos para hallar el máximo común divisor de varios números
6. Mínimo común múltiplo
   —Procesos para hallar el mínimo común múltiplo de varios números.

UNIDAD TRES

Tiempo: 3 semanas (15 clases)

SISTEMAS DE NUMERACION

1. Orígenes de los sistemas de numeración

2. Sistemas antiguos de numeración
   Sistema Egipcio
   Sistema Babilónico
   Sistema Romano
   Sistema Maya
3. Nuestro sistema de numeración
   Valor de posición
4. Sistema octal o de base ocho
5. Sistema binario o diádico.

UNIDAD CUATRO

Tiempo: 8 semanas (40 clases)

LOS FRACCIONARIOS

1. Conceptos generales
2. Construcción de los fraccionarios:
   a. Como subregiones congruentes de una figura unitaria
   b. Como elementos separados de un conjunto
   c. Como relación entre magnitudes
   d. Como segmentos congruentes (representación lineal)
   e. Los naturales como un subconjunto de los fraccionarios
   f. Infinitud de los fraccionarios
   g. Densidad de los fraccionarios
   h. Imagen geométrica de los fraccionarios
   i. Diferentes nombres para expresar un mismo fraccionario
   j. Igualdad de fraccionarios
   k. Amplificación y simplificación
3. Operatoria entre números fraccionarios
   a. Adición
   b. Orden aditivo
   c. Sustracción
   d. Multiplicación
      —Propiedad invertiva
      —Propiedad distributiva
   e. No existe orden multiplicativo
   f. División
4. Los decimales
   a. Paso de forma fraccionaria a decimal
   b. Paso de forma decimal a fraccionaria

UNIDAD CINCO

Tiempo: 12 semanas (60 clases)

RAZONES Y PROPORCIONES

1. Conceptos generales
   a. Propiedad fundamental de las proporciones
   b. Formas de escribir una proporción
   c. Cálculo de los elementos de una proporción
   d. Cuarta, tercera y media proporcional
2. Aplicaciones de las proporciones
   a. Regla de tres simple, directa e inversa
   b. Sistema monetario
   c. Porcentaje
   d. Descuento
   e. Regla de tres compuesta
   f. Figuras semejantes
   g. La escala
   h. Gráficas estadísticas:
      1er paso: recolección de datos
      2o. paso: agrupamiento de datos
      3er paso: elaboración de cuadros.

II. ORIENTACIONES METODOLOGICAS

A. UNIDAD UNO

La teoría de conjuntos, básica para la teoría de números naturales

Objetivo general:

Propiciar situaciones matemáticas para que los alumnos logren establecer las relaciones que estimulen la comprensión, interpretación y aplicación de las operaciones entre conjuntos, como base para actuar con mayor seguridad y precisión en la operatoria entre números naturales.

Objetivos específicos:

El alumno debe ser capaz de:

—Identificar y definir conjuntos por extensión y por comprensión.

—Establecer y expresar la relación de pertenencia entre un elemento y un conjunto determinado.

—Distinguir y expresar las diferentes clases o tipos de conjuntos.

—Establecer la relación de equinumerosidad o biyección entre conjuntos.

—Determinar el natural que corresponda a un conjunto finito.

—Demostrar habilidad para utilizar correctamente símbolos y signos de mayor aplicación en las operaciones entre conjuntos y entre números naturales.

—Realizar la unión entre conjuntos disyuntos y transferirla a la operación correspondiente (adición) entre naturales, con sus respectivas propiedades.

—Formular, interpretar, plantear y resolver problemas en los cuales tenga que adicionar valores de longitudes.

—Demostrar destreza en el manejo de los instrumentos geométricos necesarios para construir y medir ángulos.

—Realizar adiciones entre ángulos en forma geométrica y aritmética.

—Demostrar destreza en la selección y manejo de los diferentes instrumentos geométricos necesarios para construir rectas paralelas y perpendiculares, y establecer las relaciones correspondientes.

—Aplicar correctamente las propiedades básicas de la unión de conjuntos disyuntos y la respectiva situación aditiva entre naturales, en la solución de problemas de la vida práctica.

—Efectuar uniones entre conjuntos disyuntos equinumerosos, así como el producto cartesiano entre dos conjuntos dados, y transferir éstos a la correspondiente operación (multiplicación) entre naturales, con sus respectivas propiedades.

—Aplicar los cálculos multiplicativos, gráficos y numéricos, en la determinación de áreas de polígonos; transferirlos al sector agrario y expresarlos correctamente de acuerdo con la unidad que se determina.

—Demostrar destreza en la selección y manejo de los instrumentos geométricos necesarios para el trazado de polígonos inscritos o circunscritos en la circunferencia.

—Aplicar los cálculos multiplicativos, gráficos y numéricos, en la determinación de volúmenes de prismas rectos.

—Trazar y construir prismas rectos.

—Aplicar correctamente la noción de potencia a través de cálculos sobre área del cuadrado y volumen del cubo, como base para la determinación de potencias mayores.

—Aplicar correctamente los cálculos de radicación de los cuadrados de los diez primeros números naturales en la solución de problemas cuyo dato único sea el área de un cuadrado.

—Identificar, interpretar y expresar simbólica y gráficamente, las partes y el complemento de un conjunto dado para transferir dichos conceptos al campo de los naturales en la relación de minorancia y en el cálculo sustractivo, respectivamente.

—Determinar, en diferentes subconjuntos de naturales, las parejas ordenadas que cumplan las relaciones "ser múltiplo de" o "ser divisor o factor de".

I. CONCEPTOS GENERALES SOBRE CONJUNTOS

Introducción

La idea de conjunto empieza en el niño desde el hogar, cuando mira a su familia como un todo; cuando observa el conjunto de sus juguetes, el grupo de sus amigos, etc. Además, desde el primer grado y en forma intuitiva el alumno trabaja y juega con los conjuntos: libros, cuadernos, compañeros, pupitres, etc.

En las Guías, especialmente en la de primer grado, se ha venido desarrollando la idea de conjunto, por lo cual dicho aspecto se da como conocido en el desarrollo de esta Guía para el 5o. grado.

Ahora se trata de capacitar al alumno para trabajar con los conjuntos en forma sistemática, es decir, para que estudie sus relaciones, sus operaciones y sus propiedades fundamentales; además, esta práctica se aprovechará para ampliar el concepto de los números naturales.

El maestro orientará a los alumnos en la construcción de conjuntos tomados de su medio natural. Gradualmente, irá aumentando el nivel de dificultad hasta que ellos puedan, sin mucho esfuerzo, formar y comprender conjuntos de tipo abstracto.

Los términos *conjunto* y *elemento* serán considerados como ideas primarias y por ahora no serán objeto de definición ("conjunto es una colección bien definida de objetos de cualquier clase", u otras similares), pues tarde o temprano se puede caer en contradicciones.

a. Determinación de conjuntos:

—Por extensión
—Por comprensión

Cuando el maestro llama a lista a sus alumnos, está determinando, en su totalidad, el conjunto de los alumnos del curso.

Cuando un alumno dice: tengo un texto de Aritmética, uno de Español, uno de Geografía, uno de Historia y uno de Religión, está nombrando, uno por uno, los elementos que integran el conjunto de sus libros de estudio.

Cuando escribimos en el tablero o en el cuaderno los numerales 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, estamos dando, en forma extensa, el conjunto de los números dígitos.

Con base en estos ejemplos y otros semejantes —y orientados por el maestro— los alumnos estarán en capacidad de determinar un conjunto por EXTENSION, es decir, nombrando o enumerando todos y cada uno de los elementos del conjunto.

Otra forma que permite determinar un conjunto consiste en establecer o detectar una o varias propiedades o características comunes a sus elementos. Se dice entonces que el conjunto está determinado por COMPRENSION. Los siguientes ejemplos aclararán este concepto:

—El conjunto de los departamentos de Colombia.

—El conjunto de las vocales de nuestro alfabeto.

—El conjunto de los números pares.

—El conjunto de los triángulos equiláteros.

En el último ejemplo se pueden hacer las siguientes consideraciones:

—Un rectángulo (no cuadrado) no puede entrar a formar parte de este conjunto ya que no es triángulo, ni tiene sus lados congruentes.

—Un cuadrado no puede ser miembro de este conjunto ya que, a pesar de tener sus lados congruentes, no es un triángulo.

—Un triángulo rectángulo no puede ser un elemento de este conjunto pues, a pesar de ser triángulo, no tiene sus tres lados congruentes entre sí.

b. Relación de pertenencia

Si observamos el conjunto formado por los departamentos de Colombia podemos afirmar, sin temor a dudas, que Atlántico es un elemento del conjunto, mientras que Montería no es un elemento del conjunto.

Lo anterior nos da la idea de una relación matemática muy importante, la cual se conoce con el nombre de RELACION DE PERTENENCIA entre elemento y conjunto.

Si un elemento x es miembro de un conjunto A, se dice que x pertenece al conjunto A o que x pertenece a A.

Si por el contrario, z es un elemento que no es miembro de un conjunto A, se dice que z no pertenece al conjunto A o que z no pertenece a A.

Es claro que siempre que se dé un elemento x cualquiera y un conjunto A cualquiera, necesariamente se cumple una sola de las afirmaciones anteriores.

c. Formas de expresar conjuntos

Convencionalmente se emplean letras mayúsculas de nuestro alfabeto para indicar conjuntos y letras minúsculas del mismo alfabeto o de otro cualquiera, números, figuras, etc., para indicar elementos. Así: A, B, C, X representarán conjuntos; **a**, **b**, **c**, **d**, **x**, 1, 2, 3, representarán elementos. Los dibujos siguientes también representan elementos:

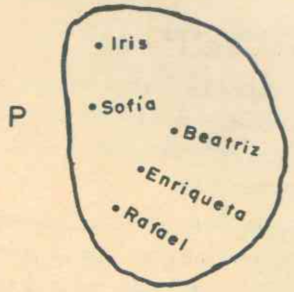
Es conveniente hacer resaltar los elementos de un conjunto dado y, para tal fin, existen formas aceptadas casi universalmente.

Supongamos que se tiene el conjunto P formado por las personas: Iris, Sofía, Beatriz, Enriqueta y Rafael. Este conjunto (determinado por extensión) se puede representar en la siguiente forma:

—Mediante llaves

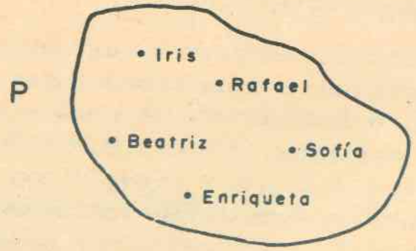
$P = \{\text{Iris, Sofía, Beatriz, Enriqueta, Rafael}\}$

—Utilizando diagramas de Venn — Euler



—Esquemas de Gonzet

—Curva cerrada simple



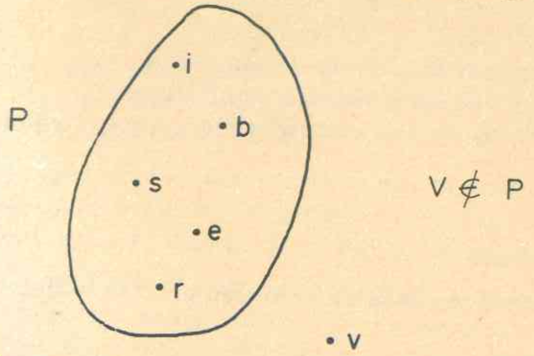
Abreviadamente este mismo conjunto se representa así:

$P = \{i, s, b, e, r\}$

Se observa claramente que cada una de las personas: Iris, Sofía, Beatriz, Enriqueta y Rafael, pertenecen al conjunto P mientras que Víctor no pertenece a dicho conjunto, lo cual se expresa:

$i \in P$
$b \in P$
$s \in P$
$e \in P$
$r \in P$
$v \notin P$

Esta última situación se representa y se expresa así:



d. Tipos de conjuntos

Las múltiples oportunidades que se proporcionen a los alumnos para observar, construir, analizar y expresar diferentes conjuntos, es un ejercicio recomendable para que logren acertar en la clasificación de cada uno de ellos.

Conjunto finito

En el ejemplo correspondiente al conjunto formado por los departamentos de Colombia, se aprecia la existencia de un número natural que responde a la pregunta: ¿Cuántos? Esto mismo ocurre en los siguientes casos y otros similares:

—el conjunto de los árboles de un bosque;
—el conjunto de las gotas de agua de los mares;
—el conjunto de los granos de arena de los desiertos;
—el conjunto de las letras de nuestro alfabeto;
—el conjunto de los habitantes del mundo.

En esta forma el alumno comprende el concepto de conjunto finito y concluye que *es aquél para el cual existe un número natural que determina la totalidad de sus elementos.*

Conjunto infinito

Cuando un conjunto excede la condición de ser finito, se dice que es infinito.

Aunque la noción de infinitud es muy abstracta para hacerla comprensible a la mente de los alumnos de esta edad, ya que la expresión "un número infinito de elementos" puede evocar en sus mentes la noción errónea de algún número muy grande pero absolutamente específico, es posible que sea intuída a través de ejemplos como los siguientes:

—El conjunto de los números naturales.
—El conjunto de los números pares.
—El conjunto de los números impares.
—El conjunto de los puntos de una recta.
—El conjunto de los triángulos equiláteros.
—El conjunto de las circunferencias que tienen el mismo centro.

Conjunto unitario

Al conjunto que posee un solo elemento se le llama unitario. Ejemplos:

—El conjunto de los Papas que han visitado a Colombia hasta 1974.

—El conjunto de los países centroamericanos cuyo nombre comienza con la letra P.

—El conjunto de los satélites naturales del planeta Tierra.

Conjunto vacío

Se acepta, por conveniencia, la existencia de un conjunto que carece de elementos, denominado conjunto vacío o nulo; y se representa con el símbolo $\emptyset$ ó $\{\ \}$

Ejemplos:

—El conjunto de las ciudades de Colombia que actualmente (1974), tienen más de 5 000 000 de habitantes.

—El conjunto de los polígonos que tienen menos de tres lados.

Conjunto universal

Cuando se habla de conjuntos, se piensa en los elementos que pertenecen a algún conjunto determinado.

Del conjunto de los alumnos, observamos que el concepto es muy amplio, ya que aquél puede referirse a:

—alumnos del mundo;
—alumnos de un continente;
—alumnos de un país;
—alumnos de un departamento;
—alumnos de una ciudad;
—alumnos de una escuela;
—alumnos de un grado escolar;
—alumnos de un sexo;
—alumnos de enseñanza pre-escolar;
—alumnos de enseñanza primaria;
—alumnos de enseñanza media;
—alumnos de enseñanza superior;
—alumnos de determinada edad...

Por tanto, debido a la gran variedad de conjuntos que pueden obtenerse del enunciado general, es necesario precisar con claridad a cuál de ellos se desea hacer referencia.

Ejemplo: Si se lleva a cabo una campaña de vacunación "en las escuelas del municipio x", no es necesario tomar en cuenta los alumnos de las escuelas de otros lugares, pues de antemano se ha precisado la totalidad de alumnos (elementos) que interesan para llevar a cabo esta labor. Por lo tanto, el Universo o conjunto Universal o Referencial lo constituye el conjunto de los alumnos de las escuelas del municipio x.

Con la determinación y análisis de otros ejemplos similares, en diferentes campos de trabajo, los alumnos concluyen que el conjunto que posee los elementos necesarios para el desarrollo de una teoría o de un trabajo específico, se le llama conjunto Universal o Conjunto Referencial o simplemente Universo.

Este conjunto lo simbolizaremos así: $\mathcal{U}$

e. Relaciones. Relación de equivalencia.

El concepto de relación es muy importante en Matemática.

Desde el primer grado elemental, y aún antes, el alumno ha venido utilizando relaciones. Así, son relaciones las expresiones siguientes:

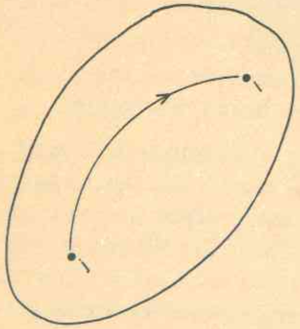
—Juan es el padre de Lucy.
—Rafael es hermano de Emilio.
—8 es mayor que 5.
—María vive más lejos de la escuela que Luisa.

—La recta r es perpendicular a la recta s.
—Jorge tiene la misma edad que Margarita.
—7 es igual a 7.

Se observa, en los anteriores ejemplos, que existe una cierta correspondencia entre dos o más elementos (no necesariamente diferentes) de dos conjuntos (no necesariamente diferentes).

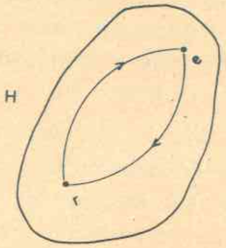
Tal correspondencia se llamará *relación.*

Una idea gráfica de la relación *ser el padre de,* donde *Juan es el padre de Lucy,* se muestra en el siguiente diagrama de Venn-Euler:



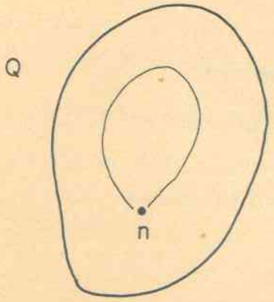
Aquí se muestra que el elemento j se relaciona o está en relación con el elemento l.

La relación *ser hermano de,* en el caso de Rafael y Emilio, se expresa gráficamente así:



Se entiende que el elemento r se relaciona con el elemento e y al mismo tiempo, el elemento e se relaciona con el elemento r.

La relación *ser hermano de,* en el caso de ser hijo único, se expresa de la manera siguiente:



Se observa que el elemento n se relaciona consigo mismo.

Dentro de las múltiples relaciones existe una de gran uso y utilidad en la Matemática; tal relación se conoce con el nombre de *relación de equivalencia.*

La relación de equivalencia tiene la característica de permitir *clasificar* los elementos de un conjunto en clases (llamadas clases de equivalencia, en las cuales cada elemento de una clase goza de la misma propiedad que le asigna la relación). Este tipo de relación no permite que el elemento del conjunto figure en dos clases diferentes.

Las actividades que a continuación se sugieren, servirán de base para que el alumno comprenda mejor los conceptos anteriores:

—Entregar a los alumnos los bloques del Referencial Uno (1);
—hacerlos esparcir sobre la mesa de trabajo (o en otro lugar apropiado);
—pedirles que hagan montones según la relación (de equivalencia), v. gr. *tener el mismo color que...*

Los alumnos obtendrán cuatro montones (clases): uno azul, uno rojo, uno verde y uno amarillo.

Todos los alumnos podrán observar que dos bloques cualesquiera de un mismo montón, tienen el mismo color y que un bloque no puede pertenecer a dos montones diferentes ya que, si un bloque es verde, no puede ser amarillo, ni azul ni rojo. Además, al reunir los montones se obtiene de nuevo el Referencial Uno.

Se puede repetir esta actividad cambiando la relación. Ejemplo:

"tener el mismo tamaño que..."
"tener la misma forma que..."
"tener el mismo grosor que..."

Consideremos ahora un grupo escolar de primer grado. La relación *tener la misma edad que,* es una relación de equivalencia, la cual se muestra en el siguiente cuadro:

GRADO I		
De 7 años	De 8 años	De 9 años
Miguel Sofía Rosa Irma Brunilda	Cecilia Eva Raúl	Juan Jacobo

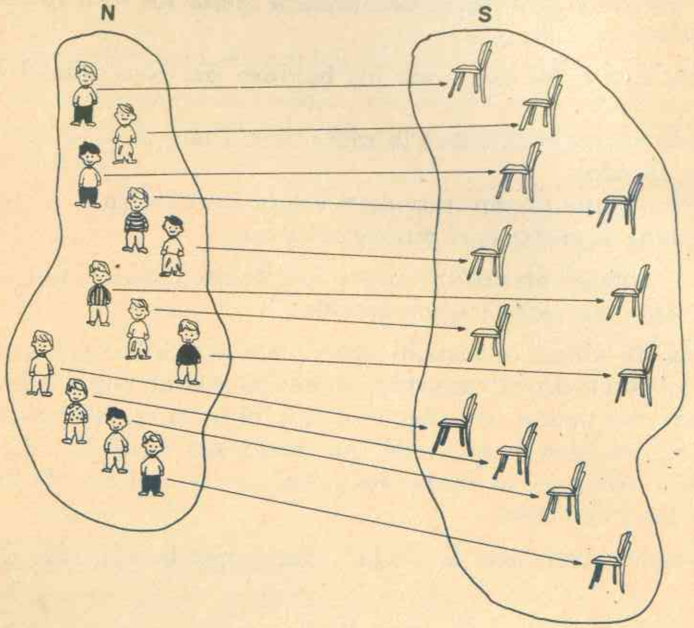
---

(1) Referencial Uno: Material que consta de 48 figuras en plástico, madera, cartón, etc., que se diferencian por:

grosor: grueso, delgado
tamaño: grande, pequeño
color: verde, azul, amarillo, rojo.
forma: triángulo, cuadrado, disco.

Equinumerosidad

Si en el salón de clases hay 12 alumnos y 12 sillas, se puede establecer una correspondencia entre cada alumno y cada silla:



Es fácil ver que a cada alumno le corresponde una sola silla y que cada silla está relacionada con un solo alumno. En otras palabras, se puede afirmar que hay tantos alumnos como sillas, o que el conjunto de alumnos tiene tantos elementos como el conjunto de las sillas. Evidentemente, esto es una relación, la cual se llama *ser equinumeroso con* (entre conjuntos).

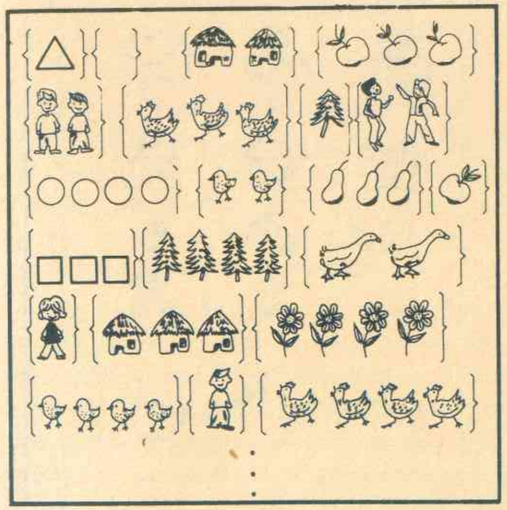
La relación *ser equinumeroso con* es una relación de equivalencia, la cual se utilizará a continuación.

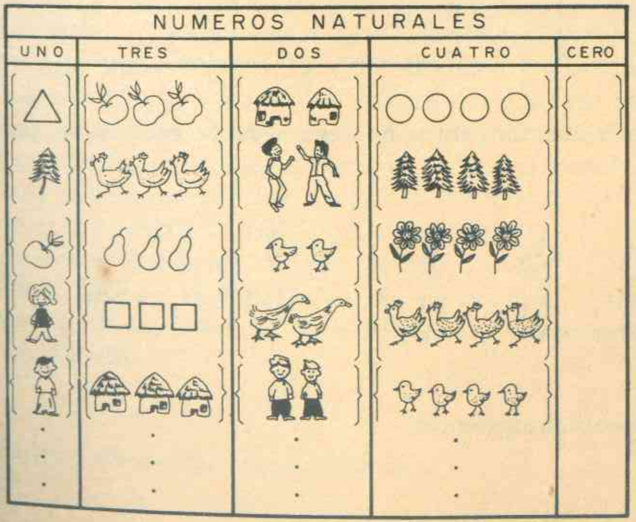
f. Construcción de los números naturales

Ahora, los alumnos están en condiciones de hacer una construcción formal de los números naturales. Los números naturales son los que se usan para contar.

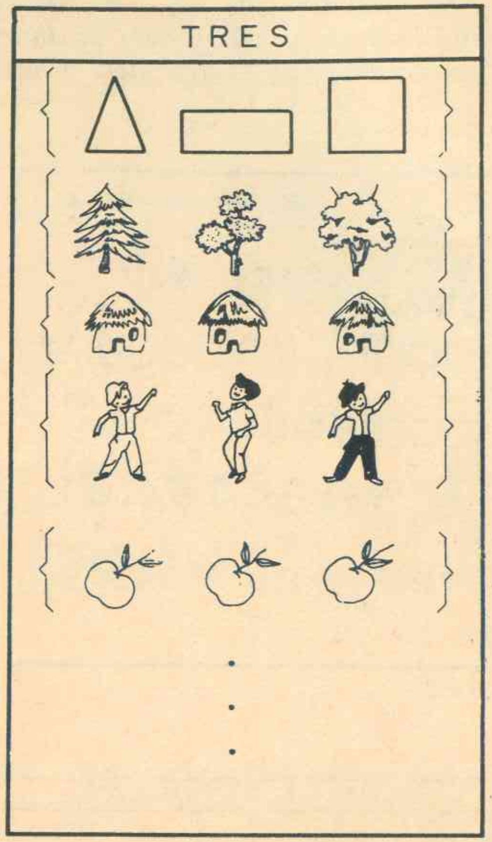
Algunos autores consideran los números naturales a partir de 1; en esta Guía se parte de 0. Existen varias formas de introducir los números naturales; una de ellas, la que se utilizará en este trabajo, es a través de la teoría de conjuntos.

Se toma el referencial formado por todos los conjuntos y éstos se clasifican usando la relación *ser equinumeroso con*. Se obtienen así las *clases de equivalencia* o números naturales.

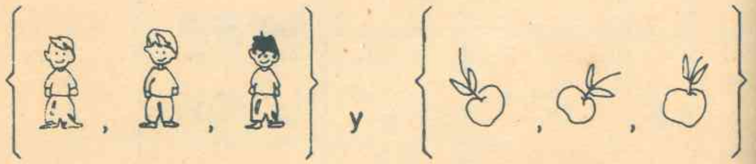




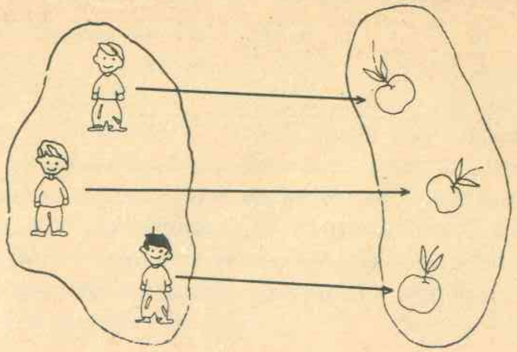
Al hacer un análisis del cuadro anterior se aprecia la forma de determinar cualquier número natural. Tomemos, por ejemplo, la clase de equivalencia TRES.



Al tomar dos conjuntos cualesquiera de esta clase, por ejemplo



, se observa lo siguiente:



Es posible establecer una correspondencia en forma tal que, a cada elemento del primer conjunto le corresponda uno solo del segundo conjunto y viceversa. Tal correspondencia se llama *biunívoca;* también se dice que existe una *biyección* entre los dos conjuntos, o que los dos conjuntos son *coordinables, equipotentes,* o *equinumerosos.*

Todos los conjuntos, de la clase de equivalencia TRES, a pesar de ser diferentes, gozan de una propiedad común: todos tienen el mismo número de elementos. Se dice entonces que TRES es la propiedad común a todos los conjuntos equinumerosos (que poseen tres elementos). Asignamos así a cada uno de los conjuntos de esta clase, un número (natural) llamado TRES y denotado con el símbolo (numeral) que, en cada sistema, tendrá la expresión (simbólica y verbal) correspondiente.

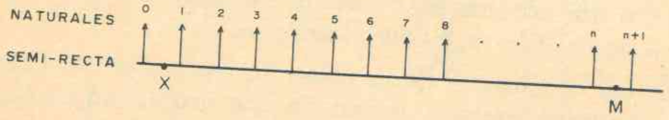
Debe hacerse énfasis en la diferencia existente entre número y numeral. El número es algo abstracto e independiente de la forma como se dice o escribe, mientras que el numeral es un simple dibujo o expresión gráfica o verbal del número. Así para el número tres, existen diversas formas de expresión oral, según el idioma de que se trate (en español: tres; en inglés: three; en alemán: drei; en francés: trois) y para los numerales, existen también diversas formas de expresión gráfica, según el sistema de que se trate (3, en el sistema indoarábigo; III, en el romano; ... en el maya; **γ**, en el griego), pero sigue siendo tres el concepto del número del cual venimos tratando.

g. Infinitud de los números naturales

Es difícil, por no decir imposible, la construcción de un número natural como 25 345 729, usando la teoría de conjuntos. Para evitar estos inconvenientes, se recurre al siguiente argumento: construído el número natural n a través de conjuntos, se agrega a cada conjunto un elemento más y se obtiene así el número natural n + 1 (es decir, el siguiente de n). Como este proceso se puede efectuar siempre, se observa que el conjunto de los números naturales es un conjunto infinito, el cual posee un primer elemento: el cero. En este conjunto no hay un último elemento ya que dado un número natural n siempre es posible construir un número natural n + 1, mayor que n.

h. Representación geométrica de los números naturales

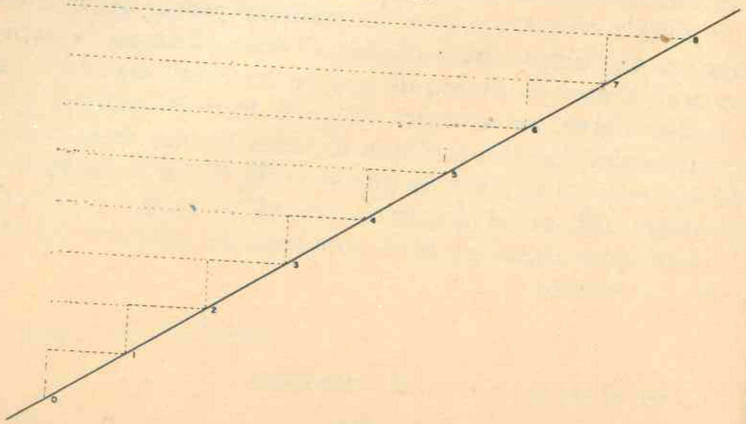
El conjunto de los números naturales se puede representar sobre una semi-recta.



Como en cada segmento hay infinitos puntos, pero sólo uno de ellos corresponde al natural que se determine, se observa que hay puntos como X y M a los cuales no les corresponde ningún número natural.

Como no existe ningún número natural entre 0 y 1, entre 1 y 2, etc., hay que saltar un "escalón" entre los puntos que determinan uno y otro natural, por lo cual se dice que la representación o imagen geométrica de los números naturales se llama *semi-recta escalonada*.

SEMIRECTA ESCALONADA



2. OPERATORIA ENTRE CONJUNTOS Y ENTRE NUMEROS NATURALES

Existe un paralelismo muy cercano entre las operaciones definidas tanto en los conjuntos como en los números naturales.

Para tratar las operaciones entre conjuntos, las cuales nos lleven a las correspondientes operaciones entre números naturales, es necesario tener muy claro el concepto de conjuntos disyuntos e intersecantes, con los cuales se va a trabajar en el paralelismo ya establecido.

Conjuntos disyuntos.

Se dice que dos conjuntos son disyuntos cuando no poseen elementos comunes. Por ejemplo, el conjunto P de los números naturales pares, menores que 10 y el conjunto I de los números naturales impares, menores que 10, constituyen dos conjuntos disyuntos ya que ningún número natural par es impar y viceversa.

$$P = \{0, 2, 4, 6, 8\} \qquad I = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Conjuntos intersecantes.

Dos conjuntos son intersecantes cuando tienen uno o más elementos comunes. Ejemplo: el conjunto V formado por las vocales de nuestro alfabeto y el conjunto A formado por las cinco primeras letras del mismo alfabeto.

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

a. Unión entre conjuntos

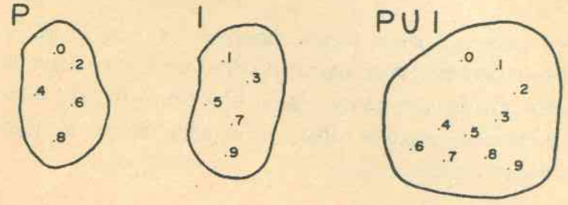
Las situaciones de la vida diaria impulsan al alumno a reunir elementos de dos o más conjuntos para obtener otro conjunto.

De esta reunión surge la operación llamada *unión o reunión de conjuntos* que se expresa con el siguiente símbolo: ∪.

Manipulando conjuntos de objetos, el alumno, en forma natural, desarrolla el concepto de unión de conjuntos, concepto que el maestro formalizará con actividades como las siguientes:

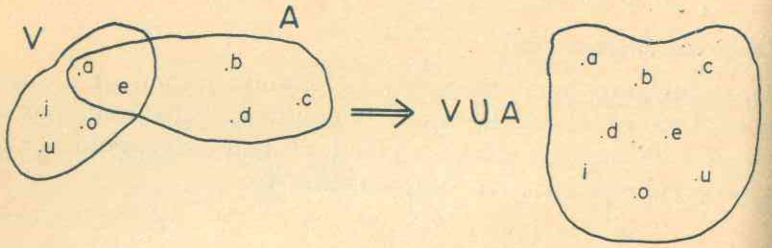
—reuniendo conjuntos disyuntos;
—reuniendo conjuntos intersecantes.

En el primer caso, la reunión del conjunto de los números pares menores que 10 con el conjunto de los números impares menores que 10, constituye un tercer conjunto formado por los números naturales menores que 10, lo cual se expresa así:



$$P = (0,2,4,6,8) \quad I = (1,3,5,7,9) \quad P \cup I = (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)$$

En el segundo caso, la reunión del conjunto V, formado por las vocales de nuestro alfabeto, con el conjunto A, formado por las cinco primeras letras del mismo alfabeto, se expresa así:



$$V = \{a,e,i,o,u\} \quad A = \{a,b,c,d,e\} \Longrightarrow V \cup A = \{a,b,c,d,e,i,o,u\}$$

b. Adición entre números naturales

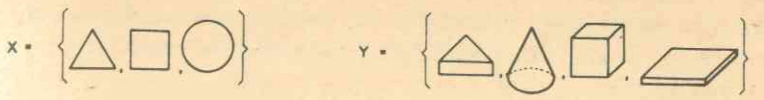
De la unión entre conjuntos disyuntos se pasa, en forma natural, a la adición entre números naturales.

Ejemplo: Sean los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{m, n\}$ que, al reunirlos, queda: $A \cup B = \{a, b, c, m, n\}$

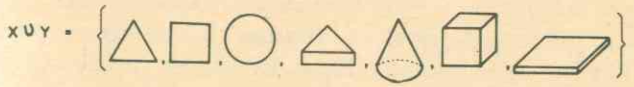
De la anterior unión entre conjuntos surge la siguiente suma entre los números naturales que se expresa así:

$$\begin{array}{ccccc} \#(A) & + & \#(B) & = & \#(A \cup B) \\ 3 & + & 2 & = & 5 \end{array}$$

En igual forma se presentan otros casos: sean los conjuntos



que reunidos, serán:



, de donde,
$$\begin{array}{ccccc} \#(X) & + & \#(Y) & = & \#(X \cup Y) \\ 3 & + & 4 & = & 7 \end{array}$$

Un contraejemplo servirá para que los alumnos comprendan por qué se habla de "unión entre conjuntos disyuntos". Sean los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $V = \{a, e, i, o, u\}$ que, al reunirlos, queda: $A \cup V = \{a, b, c, d, e, i, o, u\}$, de donde, $\#(A) + \#(V) = \#(A \cup V)$.

$$\begin{array}{ccccc} 5 & + & 5 & = & 8 \end{array}$$

La igualdad anterior es, en efecto, una falsedad ya que todos los alumnos saben que 5 + 5 es diferente de ocho. Esto se debe al hecho de que los dos conjuntos poseen elementos comunes, en este caso, (a, e); de ahí que, al efectuar la unión, los elementos repetidos se escriban una sola vez.

Propiedades de la unión de conjuntos y de la adición entre números naturales.

Propiedad clausurativa

Los alumnos comprenderán que la unión entre dos conjuntos (disyuntos o intersecantes), es de nuevo un conjunto y de ahí que la adición entre dos números naturales es también un número natural.

Esta propiedad de los conjuntos con respecto a la unión, y de los números naturales con respecto a la adición, se llama propiedad CLAUSURATIVA

En esta etapa el maestro podrá, sin ninguna dificultad, dar los nombres de las propiedades a los alumnos.

Propiedad conmutativa

La madre dice a Jorge, un niño de 7 años: "Cálzate las medias y los zapatos". Jorge, que es un poco distraído, se calza primero los zapatos y después las medias. La madre sonríe y le dice: "Jorge, primero hay que calzarse las medias y luego los zapatos".

Jorge argumenta: "Pero tú, algunos días, desayunas primero y después arreglas la cama, mientras que otros días, arreglas primero la cama y después desayunas". La madre explica que en la vida hay pares de acciones donde es indiferente cambiar el orden de las actividades, mientras que en otras dicho cambio es inaceptable.

El maestro puede aprovechar la historia para que, tanto él como los alumnos, ideen ejemplos de pares de acciones intercambiables o conmutables, y pares de acciones donde ésto no sea posible.

Ahora se pasa a los conjuntos. Ejemplo: Luis guarda en un estuche un número determinado de lápices rojos y verdes; en primer lugar coloca el conjunto "R" de los lápices rojos, formado por cuatro elementos y luego el conjunto "V" de los lápices verdes, constituído por dos elementos. Tales conjuntos se representan así:

$R = \{a, b, c, d\}$ y $V = \{m, n\}$ que, al reunirlos, queda:
$R \cup V = \{a, b, c, d, m, n\}$

José hace lo contrario: primero coloca el conjunto "V" de los lápices verdes y luego el conjunto "R" de los lápices rojos; por lo tanto su representación será:

$$V \cup R = \{m, n, a, b, c, d\}$$

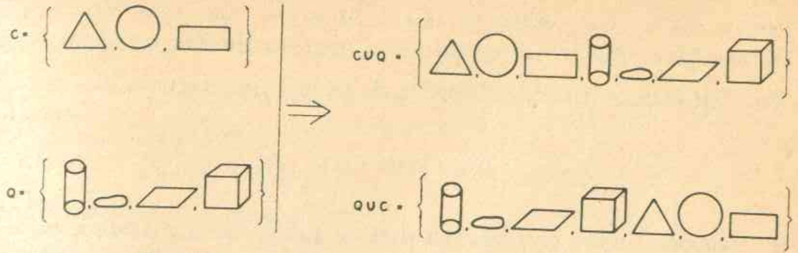
Es fácil observar que al reunir el conjunto de los lápices rojos con el conjunto de los lápices verdes, o viceversa, el resultado es el mismo: $R \cup V = V \cup R$.

De lo anterior surge la adición entre los números naturales que determinan dichos conjuntos:

$$\begin{array}{l} \#(R) + \#(V) = \#(R \cup V);\ y\ \#(V) + \#(R) = \#(V \cup R) \\ \quad 4 \quad + \quad 2 \quad = \quad 6 \quad ;\ y \quad 2 \quad + \quad 4 \quad = \quad 6 \end{array}$$

Por tanto
$$\begin{array}{l} \#(R) + \#(V) = \#(V) + \#(R) \\ \quad 4 \quad + \quad 2 \quad = \quad 2 \quad + \quad 4 \end{array}$$

En forma semejante se tiene:



$$\begin{array}{l} \#(C) + \#(Q) = \#(Q) + \#(C) \\ \quad 3 \quad + \quad 4 \quad = \quad 4 \quad + \quad 3 \end{array}$$

Ahora es posible presentar muchos casos particulares abstractos tales como:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 7 & + & 5 & = & 5 & + & 7 \\ 29 & + & 16 & = & 16 & + & 29 \\ 14 & + & 8 & = & 8 & + & 14 \\ 319 & + & 75 & = & 75 & + & 319 \end{array}$$

De todo lo anterior se puede concluir que, dados dos conjuntos cualesquiera, X y Y, así como dos números naturales cualesquiera, **a y b**, siempre es cierto que:

$$X \cup Y = Y \cup X \qquad a + b = b + a$$

Esta propiedad de los conjuntos, con respecto a la unión, y de los números naturales con respecto a la suma, recibe el nombre de propiedad CONMUTATIVA. Esta propiedad, que se ha venido utilizando desde los primeros ejercicios en el primer grado, se concibe en el sentido de que el orden de los sumandos no altera el total o suma.

Propiedad asociativa

Supóngase que el maestro forma tres conjuntos de niños: cantores (C), declamadores (D) y músicos (M), en la siguiente forma:

$C = \{$ Luis, Andrés, Gloria $\}$
$D = \{$ Julia, Dora $\}$
$M = \{$ Carlos, Beatriz, Pedro, Enrique $\}$

El maestro desea efectuar una reunión social con la participación de los tres conjuntos. Alguien propone que, al iniciar ésta, primero se presenten los conjuntos de los alumnos cantores (C) y de los alumnos declamadores (D), y luego se una a ellos el conjunto de los alumnos músicos (M). Esta reunión se expresa así:

$(C \cup D) \cup M = \{$ Luis, Andrés, Gloria, Julia, Dora $\} \cup \{$ Carlos, Beatriz, Pedro, Enrique

Al terminar el acto, todos piden que aparezca primero el conjunto de los cantores (C) y luego el conjunto de los declamadores (D) unido con el conjunto de los músicos (M). Esta nueva reunión se expresa de la manera siguiente:

$$C \cup (D \cup M) = \{\text{Luis, Andrés, Gloria}\} \cup \left\{\begin{matrix}\text{Julia, Dora, Carlos, Beatriz}\\ \text{Pedro, Enrique}\end{matrix}\right\}$$

En ambos casos se observa que, a pesar de agruparse en diferente forma, los miembros o elementos de cada conjunto son los mismos; por tanto:

$$(C \cup D) \cup M = C \cup (D \cup M).$$

Utilizando ios números asociados a los conjuntos se tiene:

$$[\#(C) + \#(D)] + \#(M) = (3+2)+4 = 5+4 = 9$$
$$\text{y } \#(C) + [\#(D) + \#(M)] = 3+(2+4) = 3+6 = 9$$

de donde: $(3 + 2) + 4 = 3 + (2 + 4)$

Se pueden ahora considerar muchos casos como:

$$(5 + 7) + 3 = 5 + (7 + 3)$$
$$8 + (9 + 2) = (8 + 9) + 2$$
$$25 + (7 + 19) = (25 + 7) + 19$$
$$(14 + 0) + 16 = 14 + (0 + 16)$$

En forma general, para tres números naturales cualesquiera, **a, b, c,** se deduce que: **$(a + b) + c = a + (b + c)$**; y para tres conjuntos cualesquiera A, B, C:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Esta propiedad, para conjuntos con respecto a la unión y para números naturales con respecto a la suma, se llama propiedad ASOCIATIVA.

El maestro debe explicar a sus alumnos que la propiedad asociativa lo único que permite es "rodar" los paréntesis, y en ningún caso intercambiar los elementos de la operación. De hacerlo, como también es posible debido a la propiedad conmutativa, se combinan las dos propiedades y es lícito escribir:

$$\begin{aligned}(a+b)+c &= a+(b+c) = (a+c)+b = a+(c+b)\\ &= b+(a+c) = b+(c+a) = (b+a)+c = (b+c)+a\\ &= c+(a+b) = c+(b+a) = (c+b)+a = c+(a+b)\end{aligned}$$

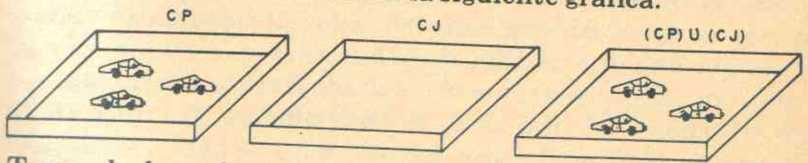
Esto permite suprimir los paréntesis y escribir, por ejemplo, que:

$$a+b+c = b+a+c = c+b+a, \text{ etc.}$$

Usando la propiedad asociativa es posible sumar cualquier cantidad de números naturales, así como reunir cualquier cantidad de conjuntos.

Propiedad idéntica o modulativa

Pedro y Juan van a un bazar; como son dos hermanos muy unidos, deciden juntar todo lo que ganen. Se acercan a una de las casetas donde rifan cajas con carritos. Hacen sus apuestas y cada uno de ellos recibe una caja; al destaparlas, Pedro ve que en la suya hay 3 carritos, mientras que en la de Juan no hay carros. Es lógico que al juntar los contenidos de las dos cajas, los hermanos tienen en total 3 carritos. Esto se observa a través de la siguiente gráfica:



Tomando los números correspondientes a los conjuntos se tiene:

$$\begin{matrix}\#(C\ P) & + & \#(C\ J) & = & \#[(C\ P) \cup (C\ J)]\\ 3 & + & 0 & = & 3\end{matrix}$$

Es fácil comprender que al efectuar la unión entre un conjunto A cualquiera y el conjunto $\emptyset$, se obtiene A, es decir, $A \cup \emptyset = A$.

En igual forma, si x es un número natural cualquiera y le adicionamos cero, se obtiene x, o sea:

$$x + 0 = x$$

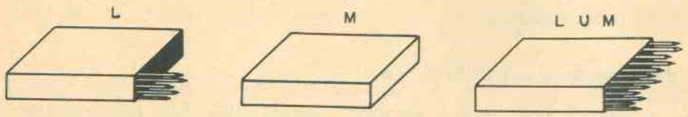
El $\emptyset$ y el 0 reciben el nombre de elemento idéntico, neutro o módulo de la unión y de la adición respectivamente. De aquí que la propiedad: $A \cup \emptyset = A$ y $x + 0 = x$, se denomine propiedad IDENTICA o MODULATIVA.

Por la conmutación: $\emptyset \cup A = A$ y $0 + x = x$; por tanto, $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$ y $x + 0 = 0 + x = x$.

Propiedad cancelativa

Un profesor motiva a sus alumnos diciéndoles: si tomo un conjunto L que tiene 5 lápices y lo reúno con otro conjunto M de lápices, que guardo en otra caja, obtenderé un nuevo conjunto que tiene 12 lápices en total. ¿Cuántos lápices constituyen el conjunto cuyo número se desconoce?

Esta situación se observa a través de la siguiente gráfica:



Tomando los números correspondientes a los conjuntos se tiene:

$$\begin{aligned} \#(L) + \#(M) &= \#(L \cup M) \\ 5 + x &= 12 \end{aligned}$$

Como el número total de lápices es resultado de la adición de los números correspondientes a los dos conjuntos dados, y se sabe que uno de ellos tiene 5 lápices, es fácil apreciar la necesidad de descomponer el resultado final en dos sumandos, de los cuales, si uno es 5, necesariamente el otro será 7, puesto que éste es el único número natural que al ser sumado con 5, da 12 como resultado.

Esta nueva igualdad quedará planteada en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \#(L) + \#(M) &= \#(L) + \#(M) \\ 5 + x &= 5 + 7 \end{aligned}$$

Como en ambos miembros de la igualdad, se encuentra un mismo sumando, en este caso 5, éste se puede cancelar sin que por ello se altere la igualdad; por tanto, $\cancel{5} + x = \cancel{5} + 7$

$$x = 7$$

Después de considerar muchos casos particulares abstractos, similares al anterior, se puede concluir que, dados dos números naturales cualesquiera, **a** y **b**, de los cuales se conoce sólo uno de ellos y el resultado o suma de los mismos, siempre es cierto que:

Si $a + x = a + b$, entonces $x = b$.

Esta propiedad de los números naturales, con respecto a la adición, recibe el nombre de propiedad CANCELATIVA.

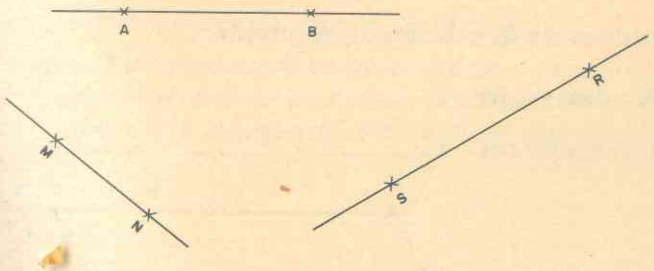
Ejemplo: la edad de Andrés, más 8 años, es igual a 23 años. ¿Cuál es la edad de Andrés?

$$\begin{aligned} x + 8 &= 23 \\ x + 8 &= 15 + 8 \\ x + \cancel{8} &= 15 + \cancel{8} \\ x &= 15 \end{aligned}$$

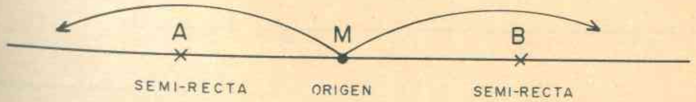
Respuesta. Andrés tiene 15 años.

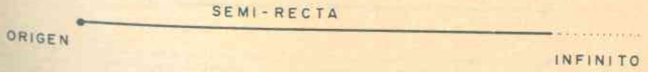
c. Adición de segmentos

Antes de entrar a adicionar segmentos conviene precisar los conceptos sobre recta, semi-recta y segmento. Una recta es una sucesión contínua e ininterrumpida de puntos que siguen una misma dirección. Está determinada por dos puntos; es un ejemplo de conjunto infinito y su representación gráfica puede hacerse mediante la utilización de un hilo tenso, entintado y puesto en contacto con el papel.

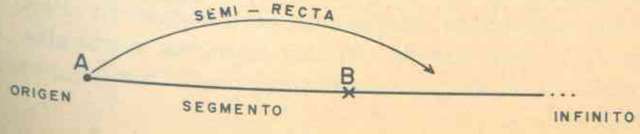


Al cortar la recta, en un punto cualquiera, resultan dos semi-rectas en sentidos opuestos y con un origen común. La semi-recta tiene origen pero no fin:

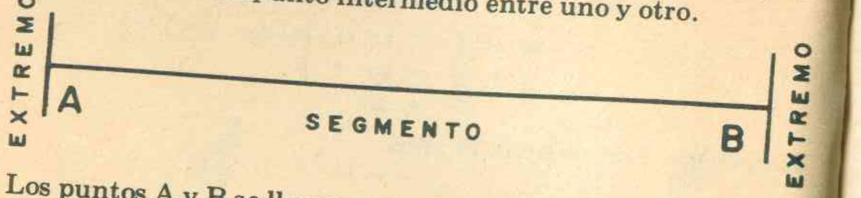




Si en la semi-recta se considera otro punto B, distinto del de origen A, esta porción de recta constituye un segmento:

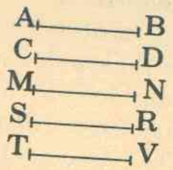


Todo segmento, a pesar de tener origen o principio y terminal o fin, también tiene infinito número de puntos, pues siempre habrá un punto intermedio entre uno y otro.



Los puntos A y B se llaman extremos del segmento.

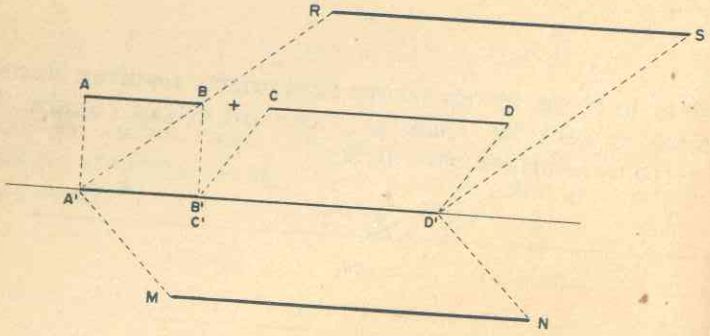
Cuando, al superponer varios segmentos, sus extremos coinciden, se dice que tales segmentos son congruentes. Ejemplo:



Propiedades de la adición de segmentos

Propiedad clausurativa

Sean los segmentos

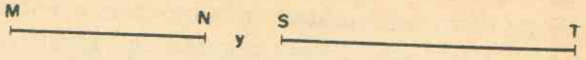


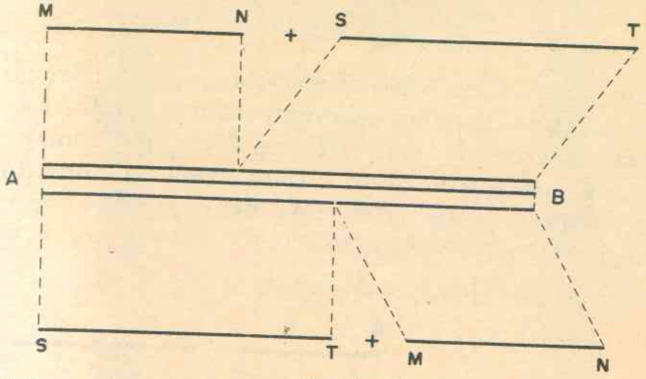
$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{A'D'}$

Al adicionar los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y, con la realización de otros casos similares, se aprecia que, siempre que se adicionen dos segmentos, se obtiene otro segmento. Pero, a diferencia de lo que sucede con los números naturales, no es único, pues de él se pueden obtener infinitos segmentos de igual longitud.

Propiedad conmutativa

Sean los segmentos



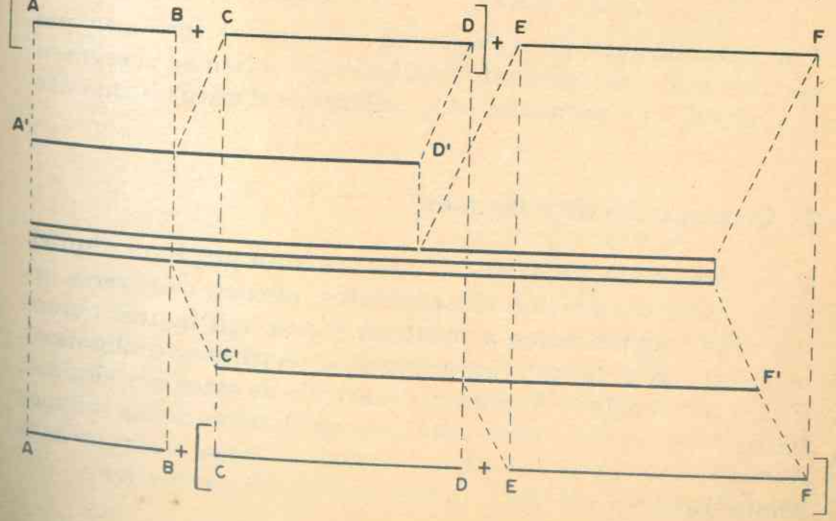


Al adicionar los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{ST}$ y, con la realización de otros casos similares, se aprecia que, al adicionar dos segmentos cualesquiera, no importa el orden en que se tomen, siempre se obtienen segmentos congruentes.

Para mayor facilidad en el trabajo que se realiza en la adición de segmentos, conviene utilizar regletas u otro material similar, antes de la representación gráfica (regla y compás).

Propiedad asociativa

Sean los segmentos



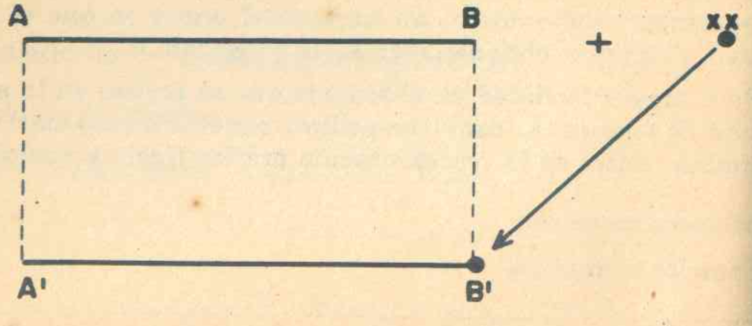
Al adicionar los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ y, con la realización de otros casos similares, se aprecia que, siempre que se adicionen tres segmentos cualesquiera, en cualquier forma de agrupación, se obtienen segmentos congruentes.

Propiedad idéntica o modulativa

Así como el cero constituye el módulo en la adición para los números naturales, en los segmentos existe también uno especial, cuyos extremos coinciden; es decir, que comienzan y terminan en un mismo punto. Este segmento constituye el punto y, como desempeña el papel del cero en la adición, se llama segmento nulo o idéntico.

Al adicionar, por ejemplo, el segmento

con el segmento nulo x˙x se obtiene:



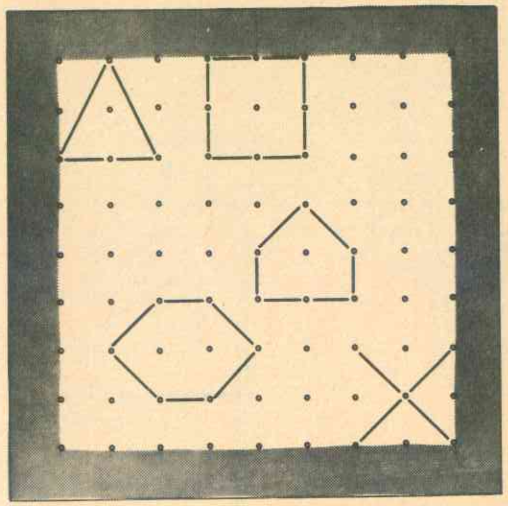
Con la realización de varios casos similares se apreciará que, siempre que a un segmento cualquiera se adicione el segmento especial x˙x o segmento nulo, se obtiene el mismo segmento.

d. Construcción de polígonos

Con base en las experiencias que los alumnos han adquirido en cuanto a adición de segmentos, pueden orientarse actividades que los lleven a construir y describir figuras planas cerradas cuyos lados sean segmentos rectilíneos (polígonos). El uso del geoplano facilita el desarrollo de estas actividades, las que luego se orientan para la construcción de las mismas figuras poligonales con utilización de algunos instrumentos geométricos como regla, compás, graduador y escuadra.

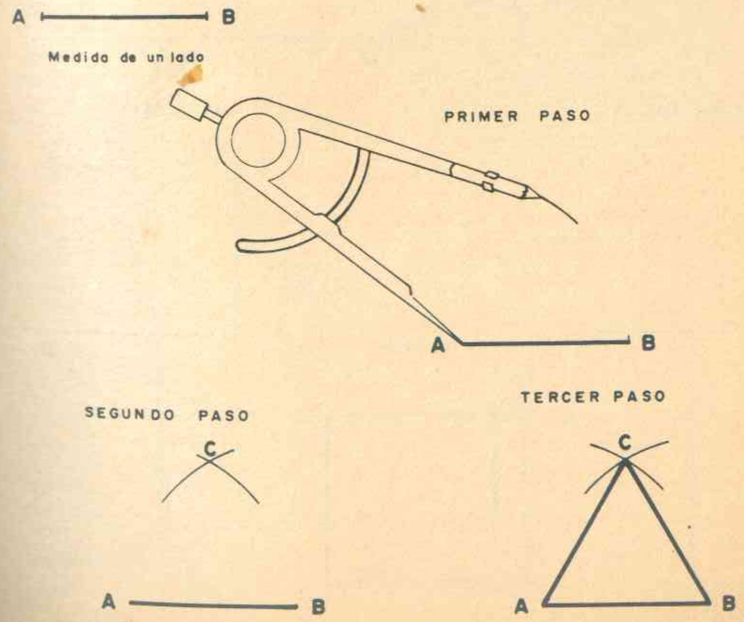
Ejemplos:

—En el geoplano



—En el tablero o en papel

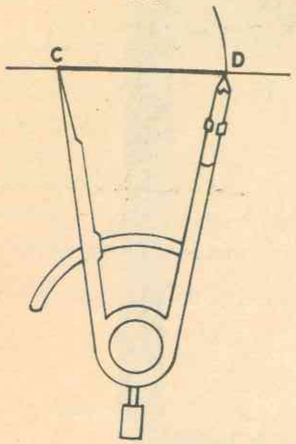
Construcción de un triángulo equilátero. Con uso de regla y compás.



Construcción de un cuadrado:

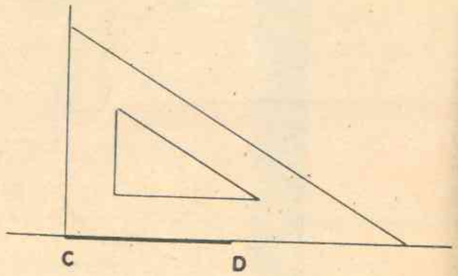
—Con uso de escuadra y compás.

PRIMER PASO

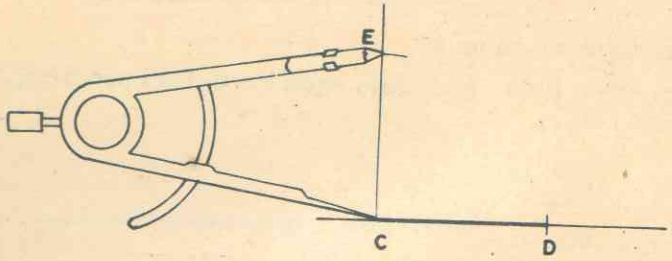


Medida de un lado

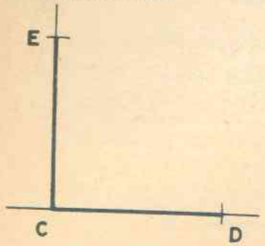
SEGUNDO PASO



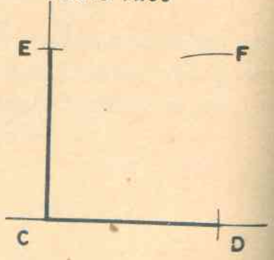
TERCER PASO



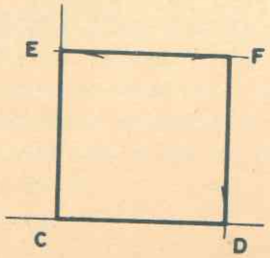
CUARTO PASO



QUINTO PASO

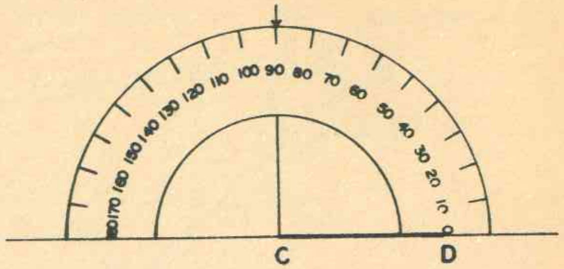


SEXTO PASO

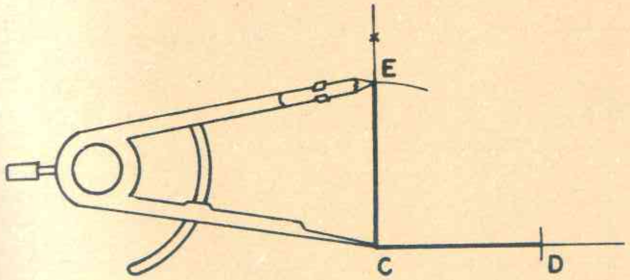


—Con uso de compás, regla y graduador.

Medida de un lado

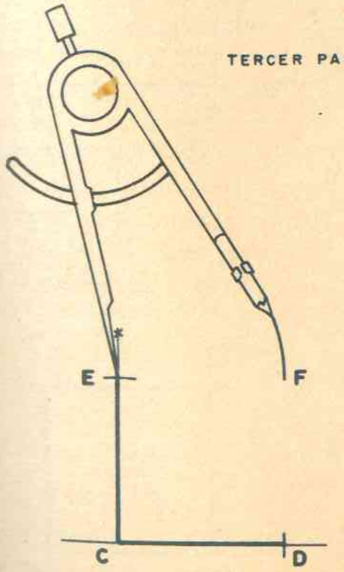


PRIMER PASO

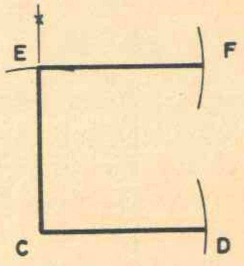


SEGUNDO PASO

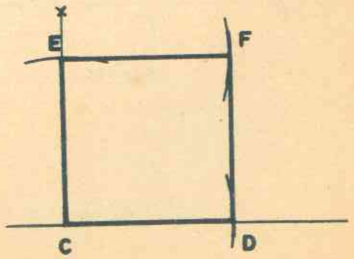
TERCER PASO



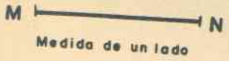
CUARTO PASO

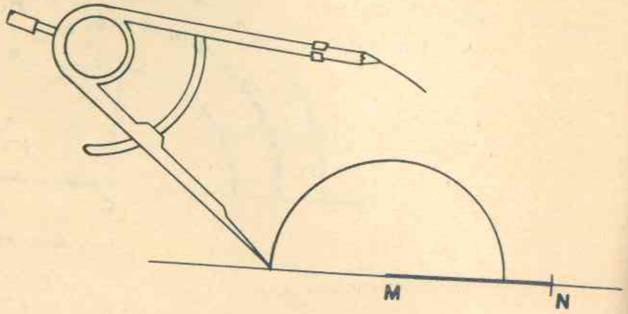


QUINTO PASO

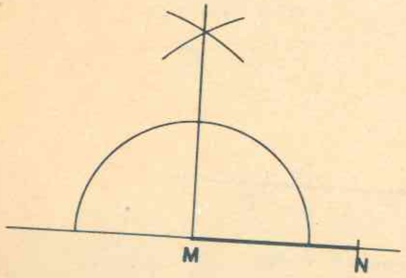


—Con uso de regla y compás.

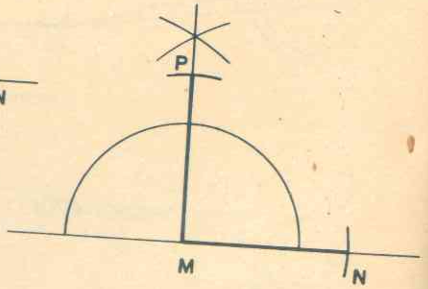




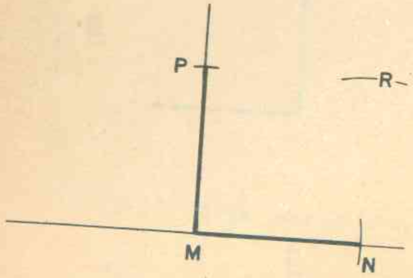
PRIMER PASO



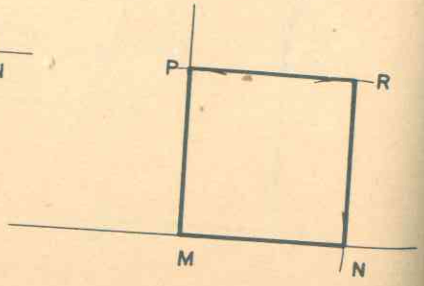
SEGUNDO PASO



TERCER PASO



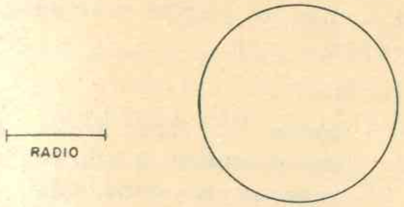
CUARTO PASO



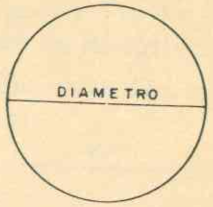
QUINTO PASO

Construcción de cualquier polígono regular, con número impar de lados (pentágono, heptágono, etc.).

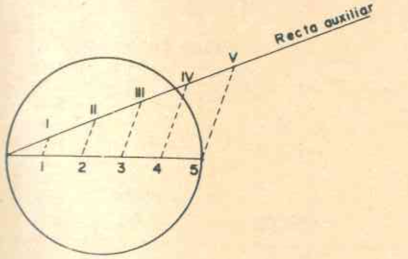
Ejemplos: Construcción del pentágono regular.

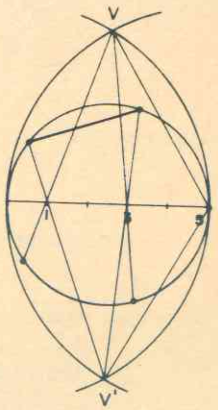


PRIMER PASO



SEGUNDO PASO



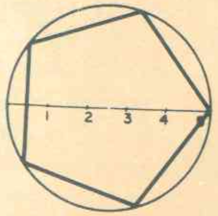


TERCER PASO

La recta auxiliar se divide en 5 partes congruentes; el último punto se une con el extremo final del diámetro y, a partir de esa primera recta se trazan paralelas que partan de los puntos señalados en la recta auxiliar. Los puntos que quedan en el diámetro se enumeran.

CUARTO PASO

Haciendo uso del compás, con una medida igual al diámetro y con centro en los extremos del mismo, se trazan dos arcos que se cortan en V y V'. Desde esos puntos se trazan semirectas que crucen por los números impares (1, 3, 5) y se prolongan hasta cortar la circunferencia.



QUINTO PASO

La unión de los puntos de corte de la circunferencia determinan la figura pedida.

Construcción de cualquier polígono regular, con número par de lados (cuadrado, hexágono, octágono, etc.).

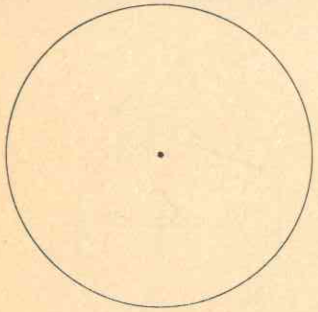
En estos casos el procedimiento es el mismo, con la diferencia de que se toman en cuenta los puntos señalados en el diámetro con los números pares.

Ejemplo: Construcción del octágono

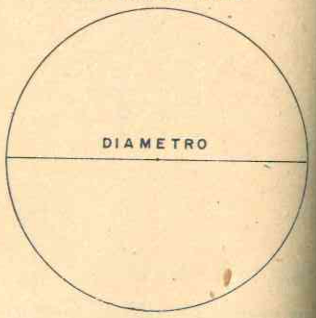

RADIO

Estas construcciones son aproximadas; por lo tanto el maestro no debe exigir demasiada exactitud en ellas.

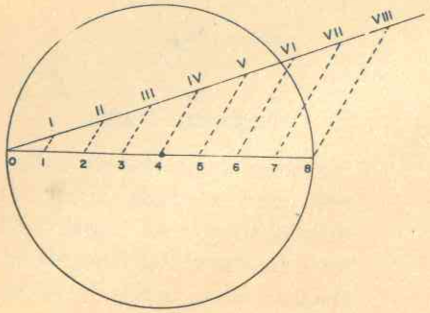
PRIMER PASO



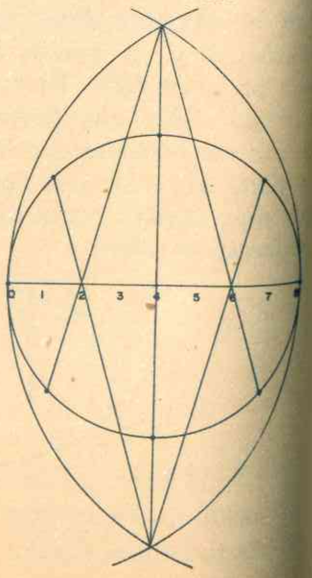
SEGUNDO PASO



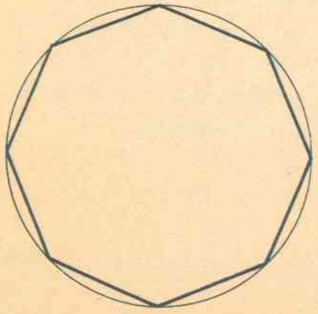
TERCER PASO



CUARTO PASO

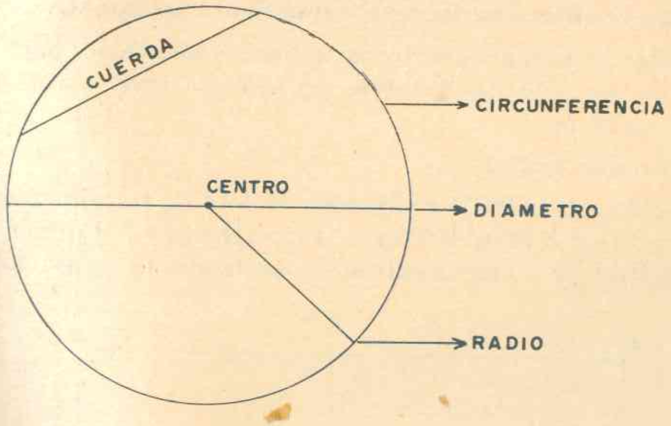


QUINTO PASO



El maestro aprovechará la construcción de los polígonos regulares, siguiendo las orientaciones indicadas anteriormente, para que los alumnos aprecien que los polígonos están inscritos en una circunferencia, puesto que sus vértices tocan puntos de ella y sus lados vienen a constituir los segmentos llamados cuerdas de la circunferencia. Así mismo pueden apreciar lo contrario, esto es, que la circunferencia está circunscrita al polígono, puesto que pasa por todos sus vértices.

Los alumnos, en forma práctica, han tenido la oportunidad de identificar la circunferencia y algunos de sus elementos tales como centro, diámetro, radio y cuerda.



Se pueden orientar nuevas actividades que conlleven a la medición de los segmentos que determinan los respectivos contornos de las diferentes figuras poligonales observadas. Es de advertir que los instrumentos de medida que se usan en las actividades escolares no son los más exactos y que, además, se está trabajando en el campo de los naturales; por lo tanto, las mediciones se tomarán por aproximación; así, si la medida de un segmento es igual a un determinado número de unidades enteras y otras tantas unidades fraccionarias menores que un medio, solo se tomarán en cuenta las unidades enteras, esto es, se eliminan las unidades fraccionarias. Si las unidades fraccionarias son iguales o mayores que un medio, se aproximan a la unidad inmediatamente superior.

Ejemplo: 4,1 cm = 4 cm; 3,3 cm = 3 cm; 5,5 cm = 6 cm; 7,9 cm = 8 cm.

e. Cálculo del perímetro

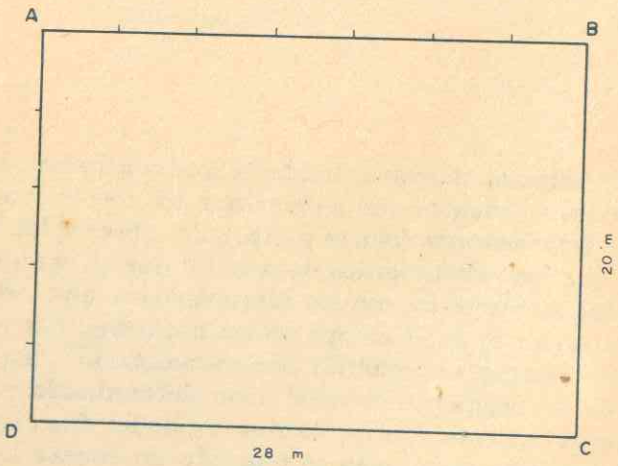
Al medir, en dm, cm, pulgadas o en cualquier otra medida unidimensional, la longitud de cada uno de los segmentos que constituyen el contorno de la mesa de trabajo, del tablero, de una puerta, de la cubierta de un libro o de cualquier otra figura poligonal, para averiguar la longitud total del respectivo contorno, los alumnos llegan a concluir que la longitud total del contorno o el PERIMETRO de cualquier figura poligonal se obtiene por la adición de la longitud de los segmentos que forman dicho contorno. Esta longitud total o perímetro se expresa en las respectivas unidades lineales utilizadas en la medición de los segmentos.

En la vida práctica son muchas las situaciones en las que es necesario hallar el perímetro de una figura poligonal.

Ejemplo: Averiguar el número de metros necesarios para cercar, con un hilo de alambre, un lote de terreno que mide 28 m. por 20 m.

Representación gráfica:

(El rectángulo ABCD representa al lote de terreno; 4 m de longitud real o sean 400 cm se representan en el dibujo con la longitud de 1 cm ya que se ha utilizado la escala 1:400).



Solución: Conviene dejar en libertad a los alumnos a fin de que apliquen diferentes propiedades de la adición:

a) Con utilización de la propiedad clausurativa.

28m + 20m + 28m + 20m = 96m

b) Con utilización de la propiedad conmutativa:

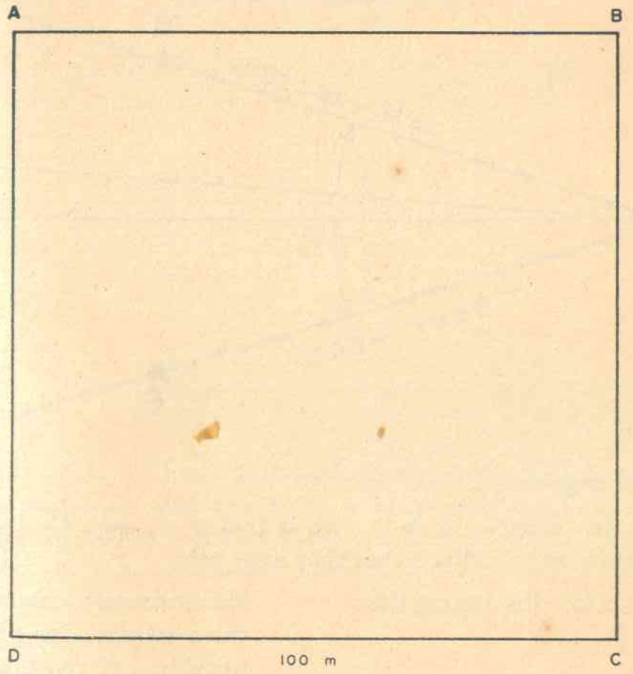
(28m + 28m) + (20m + 20m) =

56m + 40m = 96m

Respuesta: son necesarios 96m de alambre para cercar el lote.

—En el caso de precisar el perímetro de un terreno rectangular cuyo lado mide 100m, los alumnos conciben la idea de la forma cuadrada del terreno y proceden a solucionar dicho problema.

Representación gráfica:



Solución:

100m + 100m + 100m + 100m = 400m

Respuesta: El perímetro del terreno es de 400m.

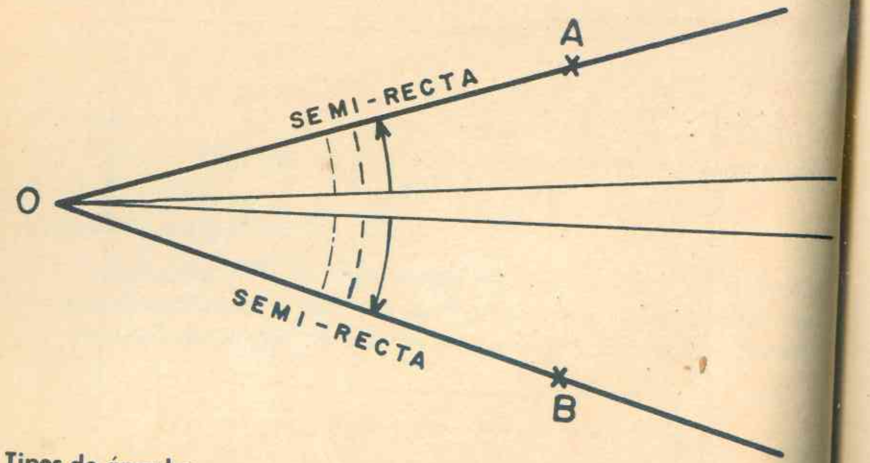
Con la realización de otros casos similares, el alumno logra afirmar la noción de perímetro, así como el procedimiento para obtenerlo.

Otro caso muy común es el de averiguar el perímetro urbano de poblaciones y ciudades, para consignarlos en los textos de Geografía, mapas, cuadros estadísticos, etc.

f. Adición de ángulos

Concepto de angulo

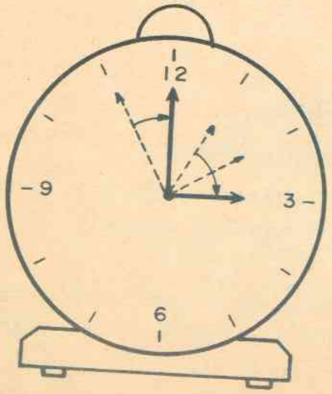
Es más fácil explicarlo con base en el conocimiento que los alumnos tienen sobre semi-recta. Se toman dos de éstas, que partan de un mismo punto de origen. Así los alumnos, al hacerlas girar en dirección contraria una de otra, apreciarán la mayor o menor amplitud comprendida entre ellas y comprenderán claramente el concepto de ángulo y su definición: amplitud entre dos semi-rectas con un origen común.



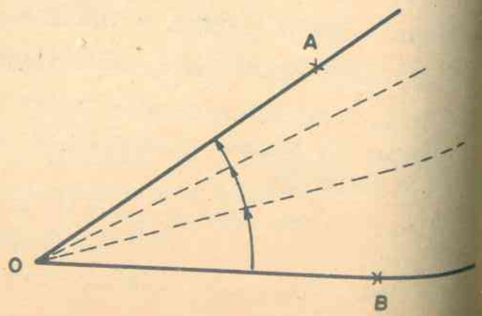
Tipos de ángulos

Todos los ángulos que se van a tratar en esta Guía se considerarán orientados en sentido anti-reloj.

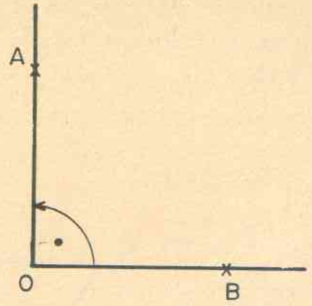
En el reloj, las manecillas giran así:



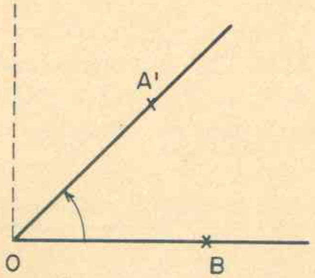
En el ángulo, las semi-rectas consideradas como manecillas del reloj, se orientan en sentido contrario:



Cuando la semi-recta AO cae perpendicularmente sobre la semi-recta OB ($AO \perp OB$), el ángulo que se forma entre ellas se llama ángulo RECTO.



Cuando la amplitud es menor que la de un ángulo recto, el ángulo así formado recibe el nombre de ángulo AGUDO:

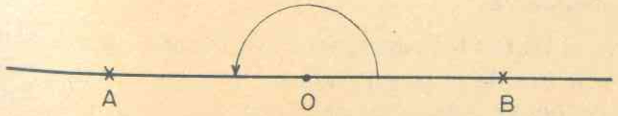


Si la semi-recta AO coincide con la semi-recta OB, la amplitud entre las dos semi-rectas es nula; de ahí que se considere el ángulo NULO, como aquel que tiene amplitud nula o también como aquel donde los lados coinciden (sin haber realizado ningún giro):

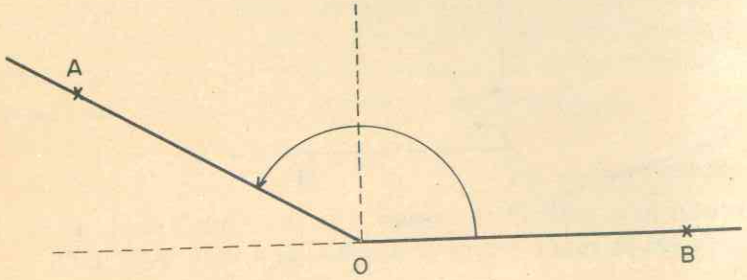
Angulo A O B

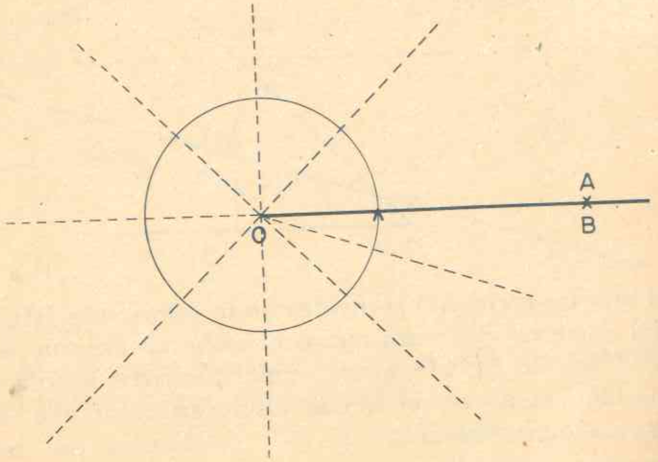
$\sphericalangle$ A O B

Si las semi-rectas se hacen girar en sentido contrario, una de otra, hasta colocarlas en forma opuesta con respecto al vértice; el ángulo allí formado se denomina ángulo LLANO o PLANO.



Ahora, al establecer cierta relación entre la amplitud del ángulo recto y la del ángulo llano o plano, se determina un nuevo ángulo comprendido entre los dos anteriores. Este nuevo ángulo, cuya amplitud es mayor que la de un ángulo recto y menor que la de un ángulo llano o plano, recibe el nombre de ángulo OBTUSO.

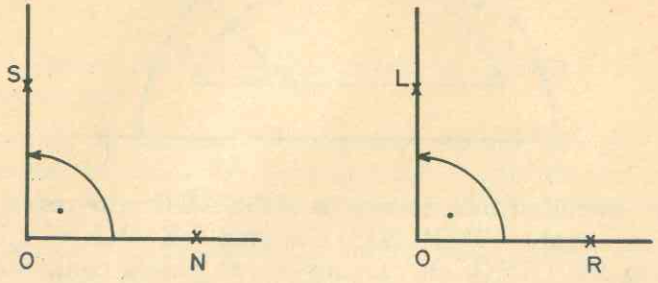




Por último, si una semi-recta se hace girar sobre su origen, en sentido anti-reloj como se dijo desde el principio, hasta dar una vuelta completa y regresar a su posición inicial, se determina una amplitud igual a la de dos ángulos planos o llanos. Este ángulo se llama ángulo COMPLETO o ángulo DE UNA VUELTA o ángulo DE GIRO.

Angulos congruentes

Así como al tratar los segmentos los alumnos apreciaron que, al coincidir dos de ellos en toda su longitud, se denominaron segmentos congruentes, ahora, con respecto a los ángulos, apreciarán también que, cuando las respectivas amplitudes de dos de ellos coinciden exactamente, estos ángulos reciben el nombre de ángulos CONGRUENTES. Por tanto, dos ángulos son congruentes cuando tienen la misma amplitud.

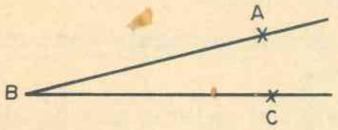


Obsérvese que los ángulos S O N y L O R son congruentes.

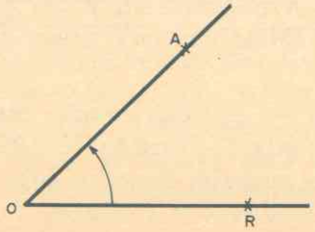
Medida de ángulos

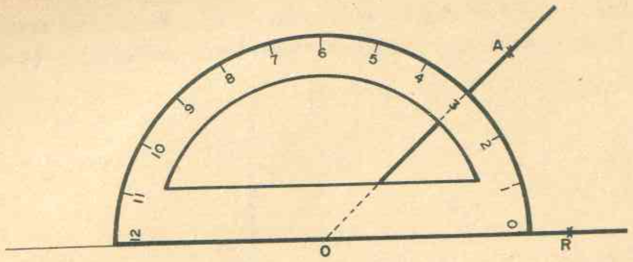
La amplitud de un ángulo puede medirse; para ello, existe un instrumento especial llamado MEDIDOR DE ANGULOS, TRANSPORTADOR o GRADUADOR. Este instrumento de medida está marcado con las unidades que se vayan a emplear.

Ejemplo: si se va a tomar el ángulo-unidad



el transportador estará marcado con las unidades respectivas y, al emplearlo, se puede ver que el ángulo AOR mide 3 unidades (3 ángulos-unidad ABC).





El ángulo-unidad más común es el GRADO, que resulta de dividir el ángulo COMPLETO o ángulo DE UNA VUELTA o ángulo DE GIRO, en un número de partes congruentes. Esta división, que se hace al ángulo COMPLETO, constituye el SISTEMA DE MEDIDA ANGULAR. Existen infinitos sistemas entre los cuales citaremos el centesimal y el sexagesimal, que reciben su nombre, respectivamente, del número de partes en las cuales se subdivide el grado.

La denominación GRADO se escribe usualmente con un pequeño cero en la parte superior derecha del número que indica la cantidad de la amplitud, a continuación de la cual hay necesidad de especificar a qué sistema se refiere o simplemente advertirlo anticipadamente. Así se expresará, por ejemplo:

1 grado centesimal = 1°c.
1 grado sexagesimal = 1°Sxg.

En el sistema centesimal, el ángulo recto mide 100 grados, y el grado, 100 minutos.

En esta Guía se usará el sistema que divide el ángulo completo en 360 partes o grados; por tanto, aquí, el grado será la trescientos sesentava parte de dicho ángulo. Como cada GRADO se divide en 60 partes llamadas MINUTOS y éstos, a su vez, en 60 partes llamadas SEGUNDOS (entiéndase minuto y segundo angular; en ningún caso, minuto o segundo de duración), se dice entonces que se trata del GRADO que pertenece al SISTEMA SEXAGESIMAL y por tanto se habla de GRADO SEXAGESIMAL que se expresa en la siguiente forma:

1 grado sexagesimal = $\frac{1}{360}$ del ángulo completo o de giro = 1° Sxg. o simplemente 1°. Para indicar MINUTOS, se usa una coma en la parte superior derecha de la cantidad que los determina: 1 minuto = $\frac{1}{60}$ grado.

$$1' = (\tfrac{1}{60})^\circ$$

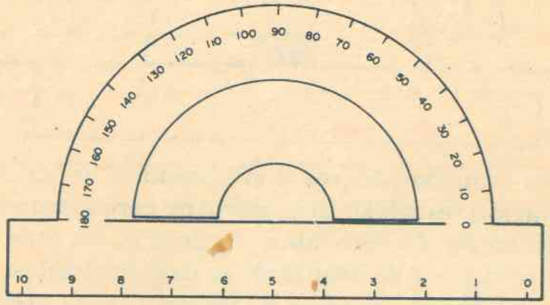
A su vez, como el minuto se divide en 60 partes llamadas SEGUNDOS, éstos se denotan con dos comas en la parte superior derecha de la cantidad que los determina:

$$1 \text{ segundo} = \tfrac{1}{60} \text{ minuto} = \tfrac{1}{3600} \text{ grado}$$
$$1'' = (\tfrac{1}{60})' = (\tfrac{1}{3600})^\circ$$

En esta forma, las siguientes expresiones se escribirán, respectivamente, así:

25 grados, 3 minutos, 8 segundos = 25° 3' 8''
49 grados, 27 minutos, 36 segundos = 49° 27' 36''
90 grados, 53 minutos, 45 segundos = 90° 53' 45''

En el sistema sexagesimal, un ángulo nulo mide 0°; un ángulo recto mide 90°; un ángulo llano o plano mide 180° y un ángulo completo o de una vuelta mide 360°. El transportador comúnmente conocido y que se encuentra en el comercio, trae divisiones en GRADOS SEXAGESIMALES de 10 en 10 hasta 180° o hasta 360°.



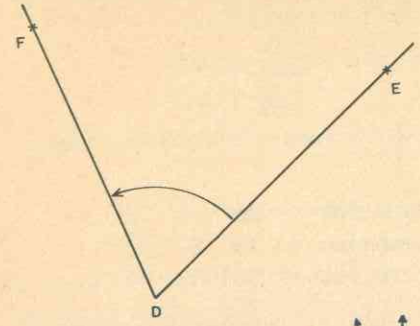
Existen instrumentos de medición angular más precisos que permiten medir amplitudes con grados, minutos y segundos. Los topógrafos tienen aparatos que miden amplitudes con aproximaciones a minutos, y los astrónomos necesitan y pueden medir ángulos con segundos de aproximación.

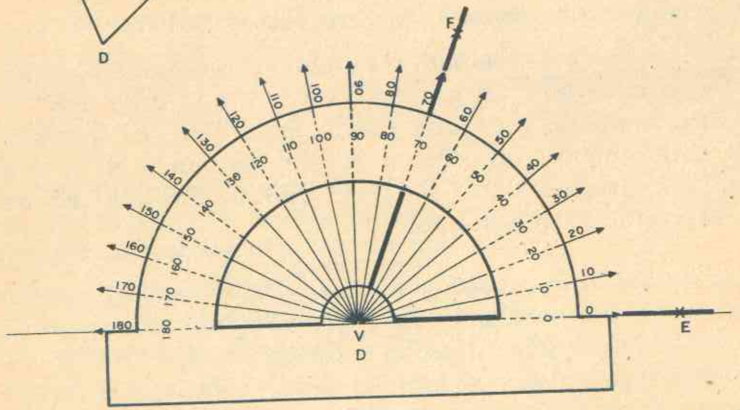
Manera de usar el graduador

Para medir un ángulo con el graduador se coloca éste sobre uno de los lados del ángulo, en tal forma que el centro del graduador coincida con el vértice del ángulo, y el cero anotado en el graduador, con un lado. Se lee el número que aparece en el graduador, en el lugar donde se intersecta el semicírculo con el otro lado del ángulo. Este número será la amplitud del ángulo, en grados sexagesimales.

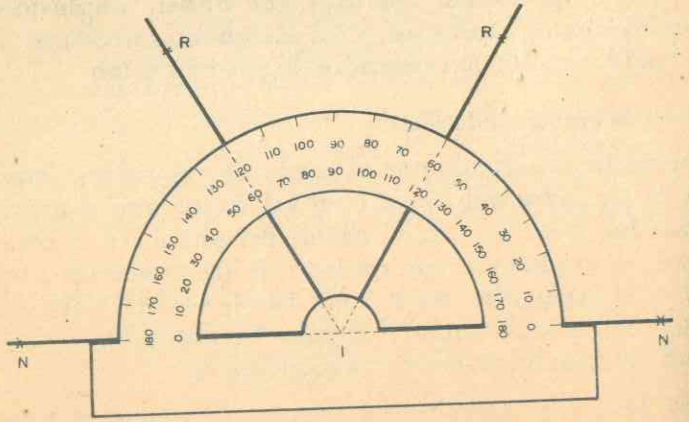
Si los lados del ángulo que se está midiendo no tienen la longitud suficiente, se prolongan cuanto sea necesario.

Ejemplo: medir el ángulo FDE





En algunos transportadores o graduadores se encuentra doble numeración (escalas): una, parte de cero y aumenta hasta 180°, de 10 en 10 (de derecha a izquierda). La otra, semejante a la anterior, va de izquierda a derecha. En estos casos, para leer o marcar la medida de un ángulo, es necesario cerciorarse de que se lee o se marca en la misma escala cuyo cero está sobre uno de los lados del ángulo:



∢ RIN = 60° ∢ RIN = 60°

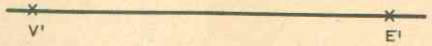
Construcción y copia de ángulos

Con uso del graduador

Ejemplos:

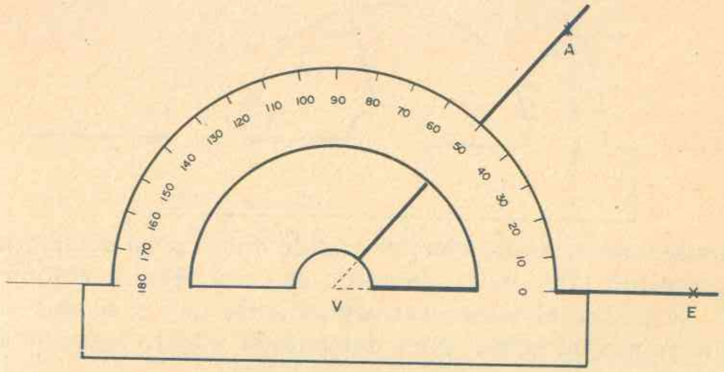
—Construir un ángulo de 50°

Primer paso



Se traza una semi-recta de origen V' que será el vértice del ángulo y en ella se hace coincidir el lado VE.

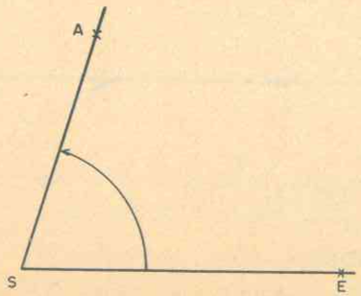
Segundo paso



∢ AVE = 50°

Se coloca el graduador en la forma ya indicada en el aparte "MANERA DE USAR EL GRADUADOR"; se marca el punto que corresponda al número de grados pedido (50°) y se traza el segmento de recta que une el vértice con el punto obtenido (A).

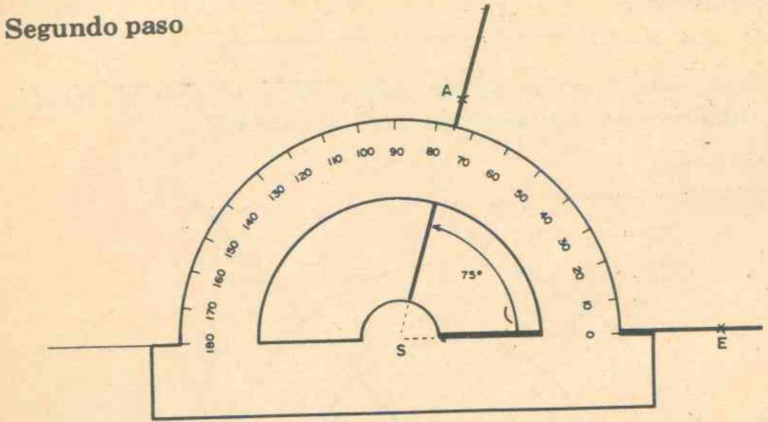
—Copiar un ángulo dado



Primer paso

Se traza una semi-recta de origen S' que será el vértice del ángulo y en ella se hace coincidir el lado SE.

Segundo paso

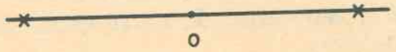


Se mide, con el graduador, el ángulo dado, para determinar su amplitud (75° en el ejemplo); se pasa ésta al segmento S'E', se marca el punto correspondiente (A') y se une éste con el punto de origen para determinar el otro lado del ángulo.

Con uso del compás

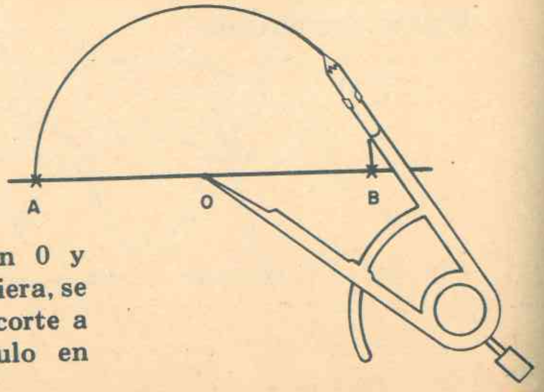
Construir un ángulo recto bisecando un ángulo plano.

Primer paso



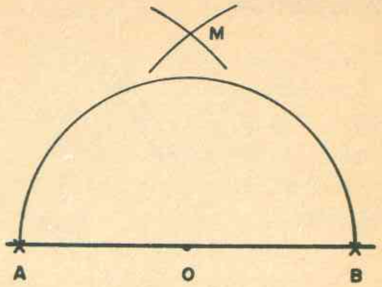
Se construye un ángulo plano de vértice O

Segundo paso



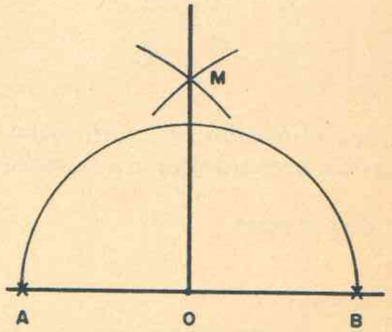
Haciendo centro en 0 y con un radio cualquiera, se traza un arco que corte a los lados del ángulo en los puntos A y B

Tercer paso



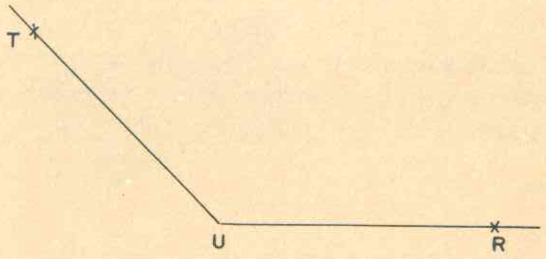
Con centro en A y en B, respectivamente, y con un radio mayor que el anterior, se describen arcos que se cortan en M

Cuarto paso

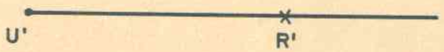


Se une O con M y se obtiene así el ángulo recto MOB

—Copiar un ángulo o construir un ángulo congruente con uno dado.



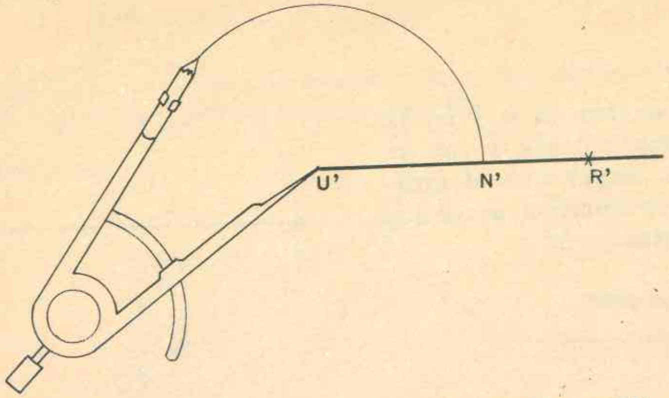
Primer paso



Se traza una semi-recta de origen U' que será el vértice del ángulo y en ella se hace coincidir el lado UR

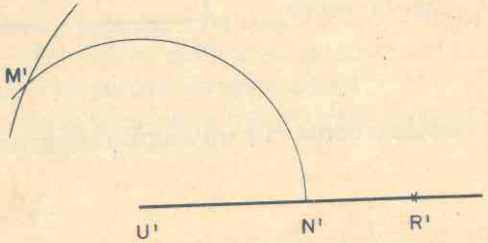
Haciendo centro en U y con un radio cualquiera, se traza un arco en el ángulo dado, que corte en los puntos M y N

Segundo paso



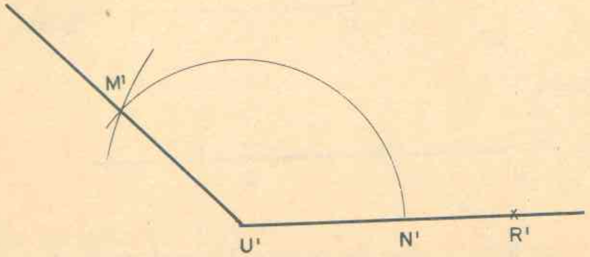
Con el mismo radio anterior y haciendo centro en U' se traza un arco que corte a la semi-recta en el punto N'.

Tercer paso



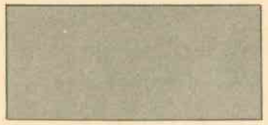
Con radio MN, tomado en la figura del ángulo dado y haciendo centro en N', se describe un arco que corte al anterior en un punto M'.

Cuarto paso

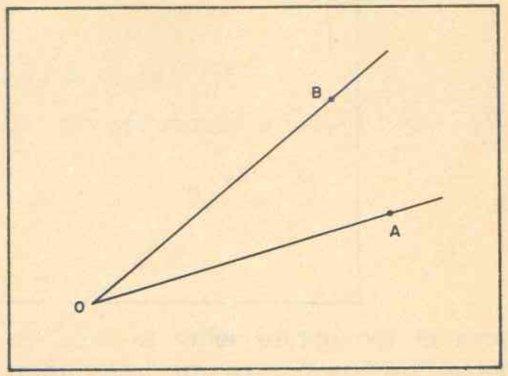


Se une M' con U' y se obtiene el ángulo M'U'N' congruente con $\sphericalangle$ TUR.

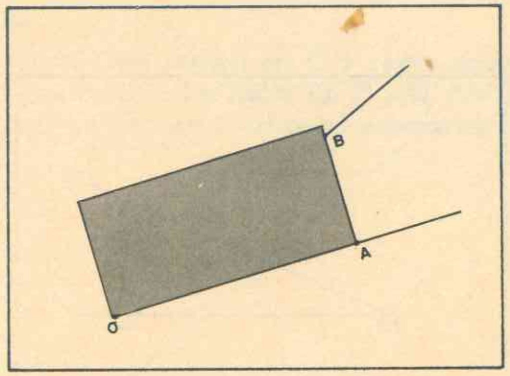
Con uso de una tira de papel de forma rectangular.

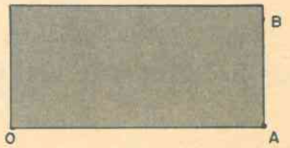


Si no se tiene graduador ni compás, se puede recurrir a una tira de papel de forma rectangular para copiar un ángulo o construir un ángulo congruente con uno dado.



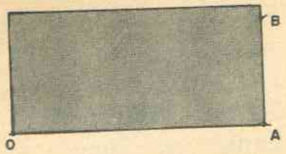
Primer paso

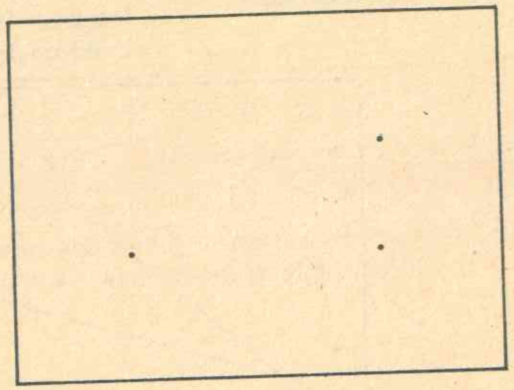




Se coloca el rectángulo sobre el ángulo dado de manera que uno de sus lados mayores coincida con uno de los lados del ángulo. Se marcan los puntos correspondientes al vértice, al extremo del lado-base y a la intersección del otro lado mayor del rectángulo, con el otro lado del ángulo.

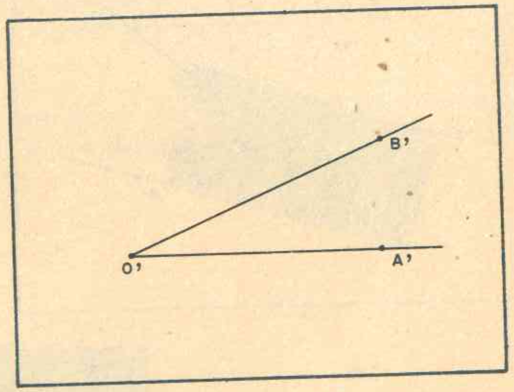
Segundo paso





Se coloca el rectángulo sobre la hoja de papel y allí se transportan los tres puntos que determinan el ángulo que se copia.

Tercer paso



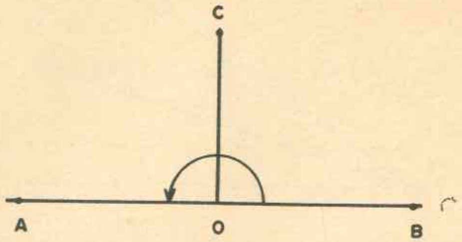
Se unen los puntos B' con O' y O' con A'

Bisectriz de un ángulo

Se denomina bisectriz de un ángulo, a la semi-recta con origen en el vértice del ángulo que lo divide en dos ángulos congruentes.

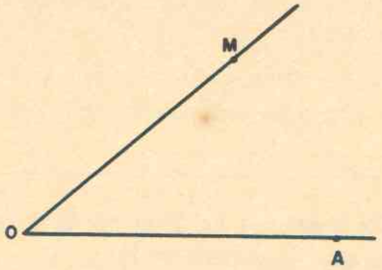
Ejemplo:

$\overline{OC}$ es la bisectriz del ángulo AOB



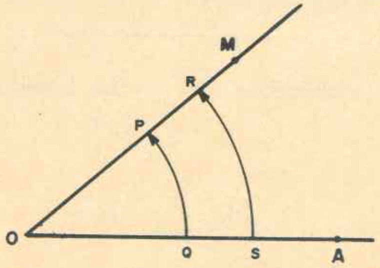
Trazado de la bisectriz de un ángulo

Sea el ángulo MOA, al cual vamos a trazarle la bisectriz.

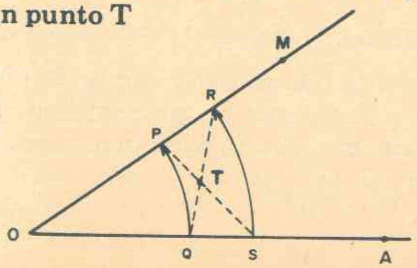


Forma A.

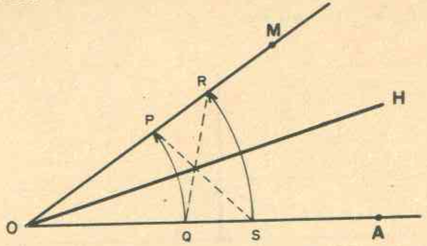
Primer paso. Con centro en O y radio arbitrario, se traza un arco que corte a los lados en P y Q. Luego, con otro radio, se traza otro arco que corte a los lados en R y S



Segundo paso. Se trazan los segmentos $\overline{PS}$ y $\overline{QR}$, los cuales se cortan en un punto T

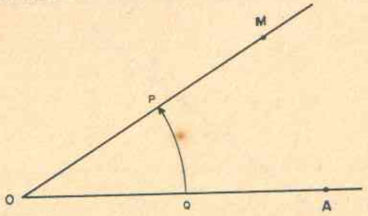


Tercer paso. La semi-recta OH es la bisectriz del ángulo MOA

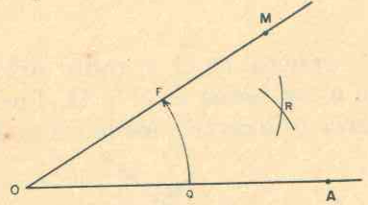


Forma B.

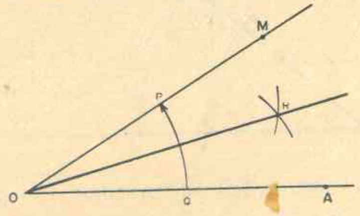
Primer paso. Con centro en O, y radio arbitrario, se traza un arco que corte a los lados en P y en Q



Segundo paso. Con centro en P y en Q y radio apropiado, se describen arcos que se cortan en R



Tercer paso. La semi-recta $\overline{OR}$ es la bisectriz del ángulo MOA



Propiedades de la adición de ángulos

Ahora están los alumnos en condiciones de efectuar la adición de ángulos y de aplicar las propiedades de ésta, ya conocidas en los naturales y en la adición de segmentos:

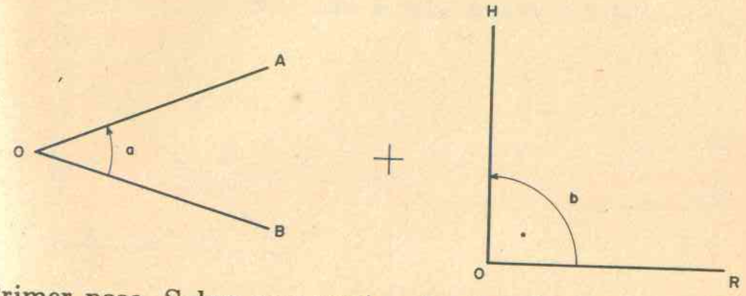
a) haciendo uso del compás;
b) con graduador;
c) con el papel rectangular, y

d) numéricamente.

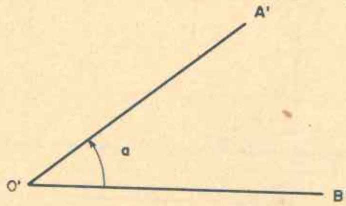
Ejemplos:

Propiedad clausurativa

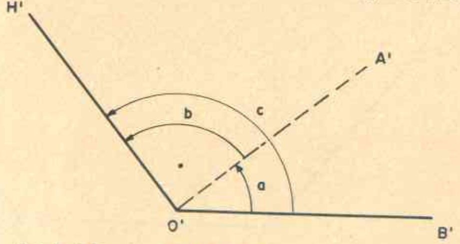
Haciendo uso del compás, adicionar los ángulos AOB (a) y HOR (b).



Primer paso. Sobre una semi-recta de origen O' se copia el ángulo AOB. (Ver parte pertinente, pág. 62).



Segundo paso. Se toma el lado A'O' como lado común entre el ángulo A'O'B' y el nuevo ángulo que se va a adicionar al anterior. Sobre el lado A'O' se copia el ángulo HOR



$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle HOR = \sphericalangle H'O'B'$$

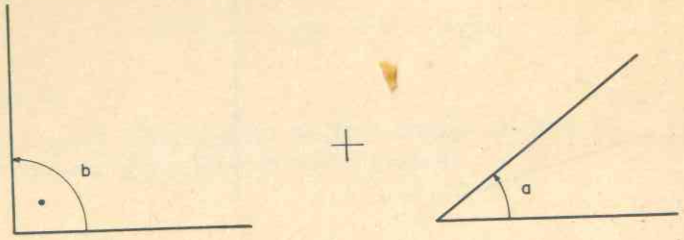
Como los ángulos también se pueden nombrar con letras minúsculas, se dirá:

$$\sphericalangle a + \sphericalangle b = \sphericalangle c.$$

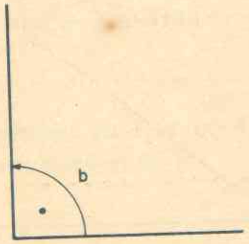
En esta forma los alumnos notan que la suma de dos ángulos es de nuevo un ángulo; por tanto aprecian que, en la suma de ángulos, también se aplica la propiedad, ya conocida por ellos, que recibe el nombre de PROPIEDAD CLAUSURATIVA.

Propiedad conmutativa

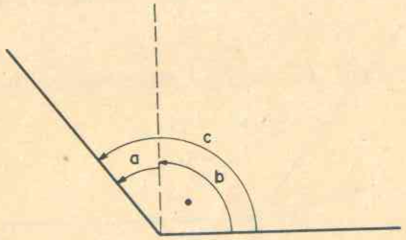
Al adicionar los ángulos anteriores en forma contraria, esto es, primero el ∢b y luego el ∢a, se tiene:



Primer paso. Se copia el ángulo b



Segundo paso. A continuación del ángulo b y siguiendo la dirección de la flecha, se copia el ángulo a

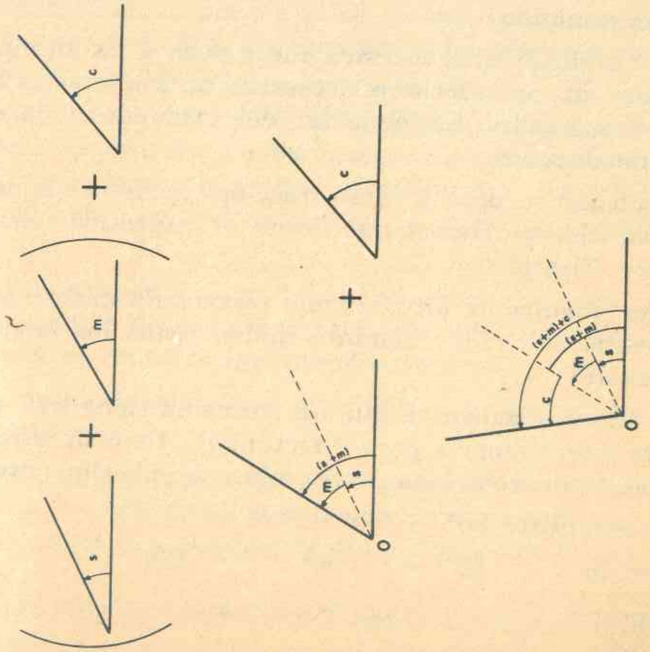


∢b + ∢a = ∢c

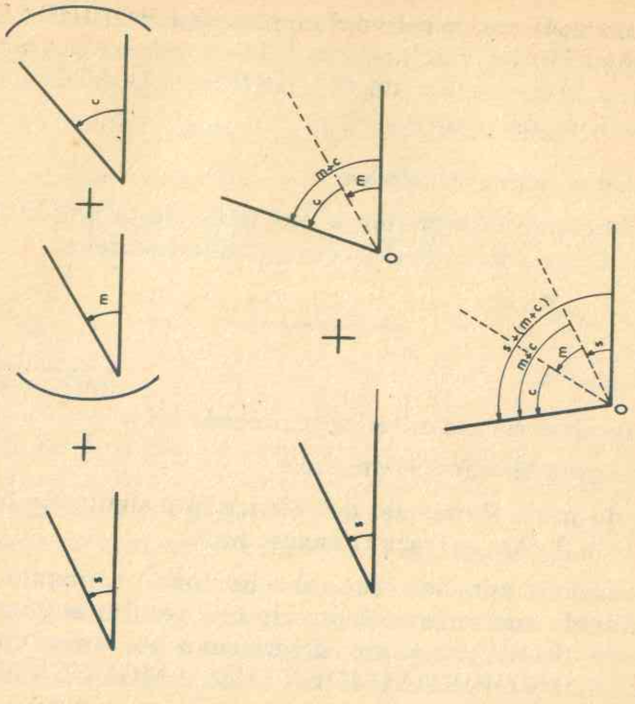
Los alumnos, al comparar los procesos y los resultados de la adición de los ángulos a y b, en los dos casos anteriores, advierten que da lo mismo adicionar ∢a + ∢b, que ∢b + ∢a; y, como ya han visto este mismo caso en la adición entre naturales así como entre segmentos, fácilmente identifican esta nueva propiedad, la cual recibe el nombre de PROPIEDAD CONMUTATIVA.

Propiedad asociativa

Si a la adición de los ángulos s y m se le suma el ángulo c, se tiene:



Al adicionar al ángulo s, la suma de los ángulos m y c, se tiene:

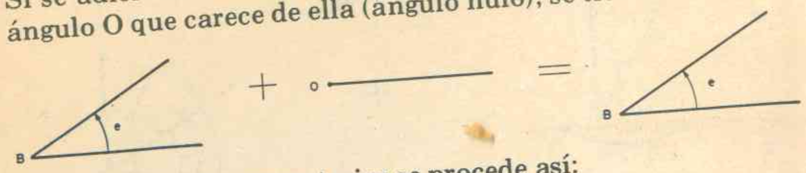


Conclusión (∢s + ∢m) + ∢c = ∢s + (∢m + ∢c)

En el análisis comparativo de los dos casos anteriores, y en la realización de muchos más casos similares, los alumnos aprecian la aplicación de la PROPIEDAD ASOCIATIVA en la adición de ángulos.

Propiedad idéntica o modulativa

Si se adiciona a un ángulo e, que tiene cierta amplitud, otro ángulo O que carece de ella (ángulo nulo), se tiene:



Para resolver el caso anterior se procede así:

Primer paso. Se copia el ángulo e

Segundo paso. Partiendo del vértice B y siguiendo la dirección de la flecha, se traza el ángulo nulo.

Los alumnos aprecian que, al adicionar un ángulo nulo a otro ángulo cualquiera, el ángulo que resulta es congruente con este último; por tanto, determinan que en este caso, se cumple la PROPIEDAD IDENTICA o MODULATIVA. El ángulo nulo, al igual que el cero en los naturales y el segmento nulo en los segmentos, es el módulo que deja idéntico al otro sumando.

Como evaluación, el maestro puede pedir a los alumnos que realicen las construcciones necesarias para demostrar las mismas propiedades, haciendo uso del graduador o de un rectángulo de papel.

Por último se pasa a la abstracción, mediante la solución de sencillos problemas que lleven al respectivo cálculo numérico. Ejemplo:

Si dos ángulos de un triángulo rectángulo miden, respectivamente, 60° y 30°, ¿cuánto miden todos los ángulos del triángulo?

Los alumnos saben ya que un triángulo tiene tres ángulos, y que este triángulo, por ser rectángulo, tiene un ángulo recto; por tanto, solucionarán el problema en la siguiente forma:

Planteamiento: 90° + (60° + 30°) =

Solución: 90° + 90° = 180°

Respuesta: Todos los ángulos del triángulo miden 180°.

Con base en los conocimientos anteriores, el maestro puede

hacer que los alumnos interpreten gráficos en los cuales se encuentran ángulos que deben medir con el graduador y realizar, con ellos, las adiciones numéricas requeridas.

El maestro puede presentar casos abstractos como:

$$41° + 17° = 58°$$
$$11° + 33° = 44°$$
$$10° 5' + 29° 32' = 39° 37'$$

g. Multiplicación

Partiendo de la unión de conjuntos y ya establecido un paralelismo entre ésta y la adición de números naturales, los alumnos están en condiciones de establecer una comparación similar para determinar el concepto de multiplicación.

No sobra repetir que uno de los objetivos de esta unidad, es hacer que el alumno adquiera o refuerce los conceptos básicos de las operaciones entre números naturales y, además, se desenvuelva con habilidad y en forma correcta en el cálculo operatorio. Es necesario, por lo tanto, que el maestro presente múltiples ejercicios, tanto de tipo práctico como teórico, ciñéndose en lo posible a los precios actuales y utilizando, en sus ejemplos, las medidas y los nombres de los productos de la región.

El alumno, desde el segundo grado, se inició en el proceso de multiplicar. Se propone a continuación un proceso formal de cómo, a través de operaciones entre conjuntos, se puede abstraer el concepto de multiplicación. Para ello se presentan dos aspectos:

—Como unión repetida (iterada) de conjuntos disyuntos equinumerosos que lleva, en forma natural, a la multiplicación como adición repetida de sumandos iguales;

—Como producto cartesiano que lleva a la multiplicación entre naturales.

El caso especial de reunir conjuntos equinumerosos disyuntos, da origen a la multiplicación entre números naturales, como puede apreciarse al matematizar situaciones como la siguiente:

Los alumnos del curso 5o. de una escuela se organizan para una actividad en clase.

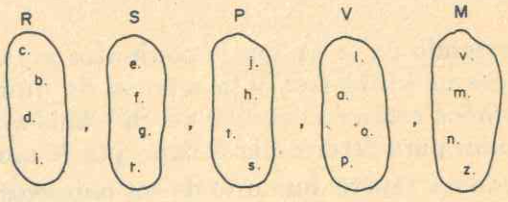
Se distribuyen en 5 mesas de 4 alumnos cada una.

Resulta muy fácil averiguar el total porque, de acuerdo a su agrupación, se forman los siguientes conjuntos:

R = { Carlos, Berta, Dora, Inés }
S = { Elías, Flor, Germán, Regina }
P = { José, Hilda, Tomás, Saray }
V = { Luis, Alberto, Olga, Patricia }
M = { Victoria, Mario, Nery, Zoila }

los cuales expresaremos abreviadamente como:

R = { c, b, d, i }
S = { e, f, g, r }
P = { j, h, t, s }
V = { l, a, o, p }
M = { v, m, n, z }



Si se designa con T al conjunto que determina el total de alumnos, se plantea:

R ∪ S ∪ P ∪ V ∪ M = T

Lo anterior muestra que:

T = { c, b, d, i, e, f, g, r, j, h, t, s, l, a, o, p, v, m, n, z }

Al considerar los números correspondientes a los conjuntos se tiene:

(R) + # (S) + # (P) + # (V) + # (M) = # (T)
4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20

Con el análisis de casos similares el alumno aprecia que esta forma de reunir conjuntos equinumerosos y de adicionar, en forma reiterada, un mismo sumando, resulta dispendioso cuando se trata de operar con números mayores; especialmente, cuando el número de veces que ha de repetirse el sumando es también mayor. Consecuentemente, en la práctica

se recurre a otro procedimiento numérico que abrevia la adición de sumandos iguales. Mediante este método, en vez de adicionar repetidamente, como en el caso anterior, 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20, se expresa así:

5 veces 4 = 20
5 por 4 = 20
5 x 4 = 20

Por transferencia, todo caso de adición repetida de un mismo sumando, puede expresarse como el cálculo de un producto.

Sea el caso 5 + 5 + 5 + 5 = 4 veces 5 = 20

Los términos 4 y 5 son los dos factores que operan en esta situación para obtener como resultado el producto 20.

La situación se expresa numéricamente así:

4 x 5 = 20

El alumno, al realizar variados casos de reunión de conjuntos equinumerosos disyuntos y de adición repetida de un mismo sumando, comprende la transferencia de *adición* a *multiplicación* porque es capaz de concebir que, en esta última operación, en vez de *suma o total* se habla de *producto* y, en vez de *sumandos*, de *factores*. Así puede generalizar que: dado un par de números naturales (a y b) si b representa el sumando que se repite y a determina el número de veces que b debe repetirse, a y b son factores que dan como resultado otro número determinado c, que es producto de los dos. Esta igualdad se expresa así:

a x b = c

factor x factor = producto

La multiplicación como expresión del producto cartesiano de dos conjuntos.

En la parte de DESARROLLO de la Guía para el maestro de tercer grado (AFIANZAMIENTO de la primera y segunda unidades en Matemática, págs. 87-88) y en las ORIENTACIONES correspondientes a la Guía para el maestro de 4o. grado (MATEMATICA, pág. 30) se han presentado casos en los cuales se busca el número total de parejas ordenadas que son posibles entre los elementos de dos conjuntos.

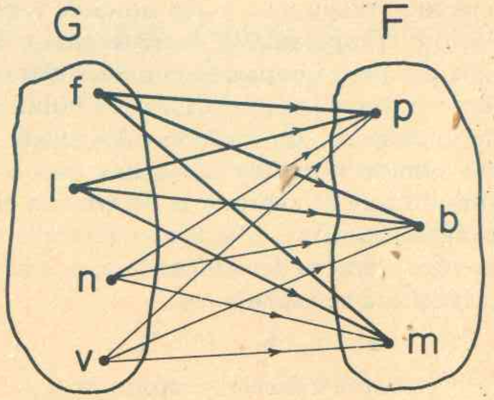
Conviene ahora ampliar el marco de comprensión; por tanto, se sugiere matematizar otras situaciones como la siguiente:

Claudia, en el día de su cumpleaños, desea agasajar a sus amiguitos. Prepara gelatina de 4 sabores diferentes y porciones de frutas de 3 clases distintas para que cada uno de los invitados elija UNA combinación de sabores y frutas de su predilección.

Para poder combinar se detallan a continuación los sabores de gelatina y las clases de fruta disponibles:

Sabores de gelatina (G)		Clases de fruta (F)	
fresa	(f)	piña	(p)
limón	(l)	banano	(b)
naranja	(n)	manzana	(m)
vainilla	(v)		

Si se determina con G el conjunto de sabores de gelatina y con F el de las clases de fruta, la situación propuesta puede describirse en un diagrama como el siguiente:



Todas las combinaciones que son posibles aparecen en el diagrama; a continuación se expresan, anotando primero la letra inicial, en minúscula, que determina el sabor de gelatina y luego la inicial, también en minúscula, que corresponde, en el segundo conjunto, a la clase de fruta elegida.

Las parejas ordenadas que resultan son las siguientes:

$$\begin{array}{ccc} (f,\ p) & (f,\ b) & (f,\ m) \\ (l,\ p) & (l,\ b) & (l,\ m) \\ (n,\ p) & (n,\ b) & (n,\ m) \\ (v,\ p) & (v,\ b) & (v,\ m) \end{array}$$

El conjunto formado por las parejas anteriores, se llama CONJUNTO PRODUCTO o PRODUCTO CARTESIANO entre los conjuntos G y F, lo cual se denota G x F. Claramente se aprecia que se han formado 12 parejas ordenadas que constituyen el producto. Esta situación, por extensión, se determina así:

$$G \times F = \left\{ \begin{array}{cccccc} (f, p), & (f, b), & (f, m), & (l, p), & (l, b), & (l, m), \\ (n, p), & (n, b), & (n, m), & (v, p), & (v, b), & (v, m) \end{array} \right\}$$

Al transferir esta expresión a números naturales queda:

$$\begin{array}{ccccc} \#(G) & \times\ \#(F) & = & \#(G \times F) \\ 4 & \times\ \ 3 & = & 12 \end{array}$$

La solución de casos similares, cada vez más abstractos, capacita al alumno para concebir la idea de producto como *el número de parejas ordenadas que resultan al combinar los elementos de dos conjuntos cualesquiera, expresados con su correspondiente número;* este concepto les permitirá, además, llegar a generalizar la multiplicación, así:

$$A \times B = P;$$

de donde, $\#(A) \times \#(B) = \#(A \times B)$

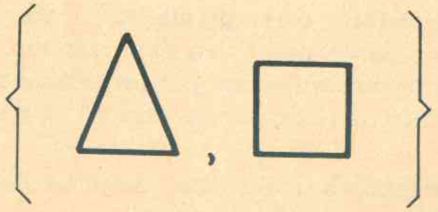
Propiedades del producto cartesiano y de la multiplicación entre naturales

Propiedad clausurativa

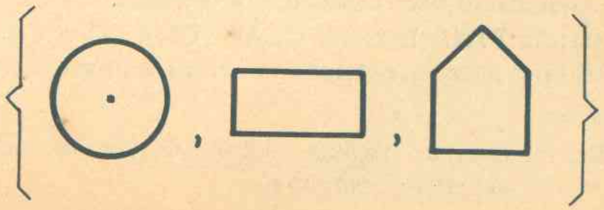
La determinación del producto cartesiano correspondiente a dos conjuntos lleva al alumno a comprobar que éste constituye un nuevo conjunto.

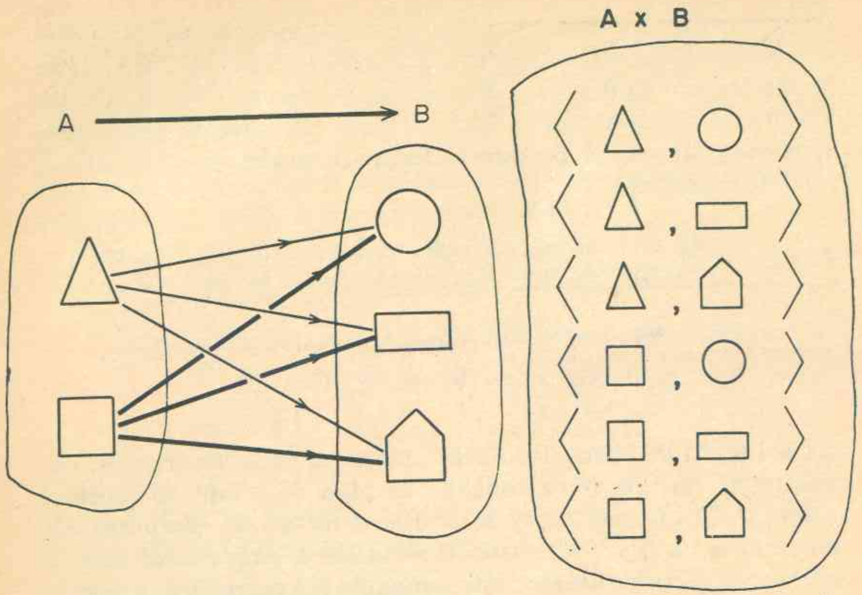
Sean los conjuntos:

A =



B =





A x B = {⟨△.○⟩.⟨△.▭⟩.⟨△.⌂⟩.⟨□.○⟩.⟨□.▭⟩.⟨□.⌂⟩}

En el ejemplo, se aprecia claramente que el producto cartesiano entre A y B es otro conjunto bien determinado, puesto que es el resultado de combinar los elementos de A con los elementos de B.

En el campo de los números naturales también se aprecia el cálculo del producto correspondiente al ejemplo, así:

$$\#(A) \text{ x } \#(B) = \#(A \text{ x } B)$$

$$2 \text{ x } 3 = 6$$

Del análisis de muchos casos semejantes se concluye que:

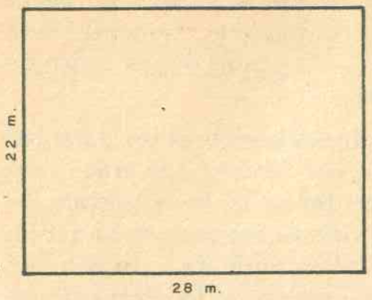
—El producto cartesiano correspondiente a dos conjuntos Z y Y es otro conjunto muy bien determinado, denotado Z x Y, y formado por todas las parejas ordenadas, donde el primer elemento de cada pareja está en Z y el segundo en Y;

—el producto correspondiente a dos números naturales es también un número natural, que es único.

Es esta la PROPIEDAD CLAUSURATIVA del producto cartesiano y de la multiplicación entre números naturales.

Ejemplos:

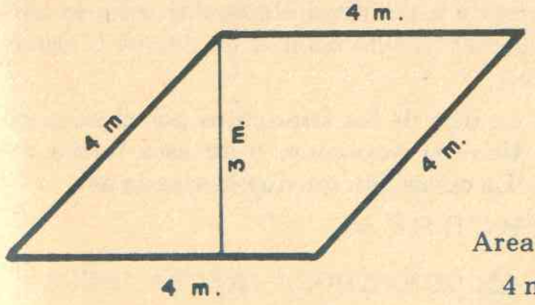
—Hallar el área de un lote rectangular cuyos lados miden 22 m y 28 m respectivamente.



Area rectángulo = b x a

22 m x 28 m = 616 m^2

—Averiguar el área de una parcela en forma de rombo cuya base mide 4 m y su altura 3 m.



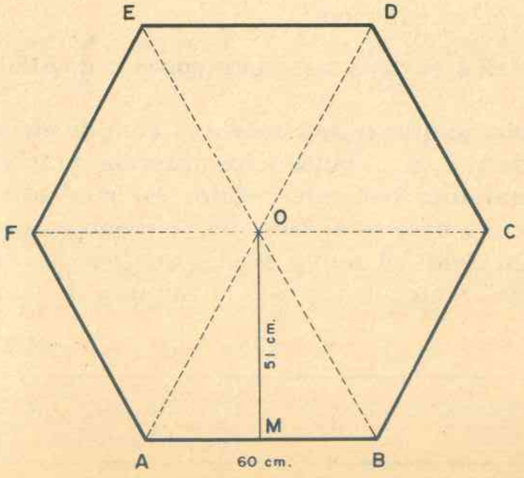
Area del rombo = b x a

4 m x 3 m = 12 m^2

Area de polígonos regulares

Averiguar el área de una mesa hexagonal cuyo lado mide 60 cm. El alumno procederá a solucionar el problema con la ayuda de una representación gráfica:

—Dibuja el hexágono y determina los triángulos que constituyen esta superficie; ésto, mediante el trazo de sus diagonales.



—Comprueba que los seis triángulos que integran la superficie del hexágono, son congruentes entre sí. Concluye que el área del hexágono será igual a la suma de las áreas de los seis triángulos que lo forman.

—Determina que la altura de cada triángulo es un dato básico para el cálculo del área de esa figura, y la traza partiendo del centro del hexágono hacia la base (mitad del lado). Comprueba que esta medida es menor que la del lado del triángulo y la expresa aproximándola a un número natural. (Matemáticamente, el cálculo de la altura de un triángulo equilátero cuyo lado se expresa por un número natural, escapa al campo de los naturales; pero, en esta Guía, por estar dirigida a un nivel elemental, sólo se utilizan números naturales, previa aclaración de que el resultado es aproximado).

—Multiplica el área de uno de los triángulos por el número de triángulos que tiene el hexágono, y en esta forma resuelve el problema. La operación queda planteada así:

Area del hexágono A B C D E F =

$$\mathcal{A}\Delta AOB + \mathcal{A}\Delta BOC + \mathcal{A}\Delta COD + \mathcal{A}\Delta DOE + \mathcal{A}\Delta EOF + \mathcal{A}\Delta FOA =$$

$$\frac{ABxOM}{2} + \frac{BCxOM}{2} + \frac{CDxOM}{2} + \frac{DExOM}{2} + \frac{EFxOM}{2} + \frac{FAxOM}{2}$$

Hay 6 triángulos congruentes; por tanto,

Area del hexágono A B C D E F = 6 x $\frac{AB\,x\,OM}{2}$

$\mathcal{A}\triangle AOB = \frac{60\text{ cm x }51\text{ cm}}{2} = 30\text{ cm x }51\text{ cm} = 1530\text{ cm}^2$; y por lo tanto, área del hexágono A B C D E F =

6 x 1530 cm^2 = 9180 cm^2.

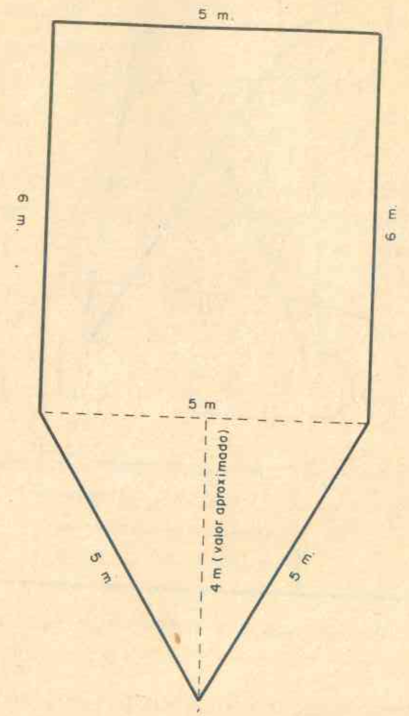
Respuesta: El área de la mesa hexagonal es de 9180 cm^2.

Con ejemplos similares se buscará el área de otros polígonos regulares de 5, 7, 8, ... lados y los alumnos concluirán que el área de cualquier polígono regular es igual al área de un triángulo cuya base es el lado del polígono y cuya altura es la distancia desde el punto medio del lado hasta el centro del polígono, multiplicada por el número de triángulos del polígono.

Area del polígono regular = Area de un △ x número de triángulos del polígono

Area de polígonos irregulares

Un lote de forma pentagonal mide 6 m en dos de sus lados, y en los otros 5 m, según la figura siguiente:



Como se aprecia, el pentágono quedó dividido en un paralelogramo y en un triángulo.

Area del rectángulo	Area del triángulo
5 m x 6 m = 30 m^2	$\frac{5\text{ m x }4\text{ m}}{2}$ =
	5 m x 2 m
	10 m^2

Area del polígono =

área del rectángulo + área del triángulo =

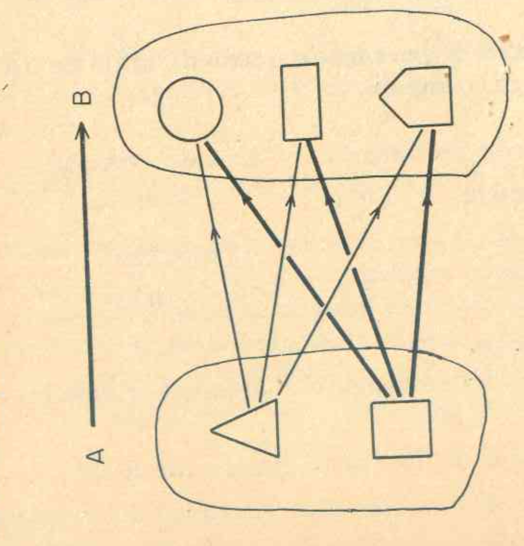
= 30 m^2 + 10 m^2 = 40 m^2

Respuesta: el área del lote pentagonal es de 40 m^2

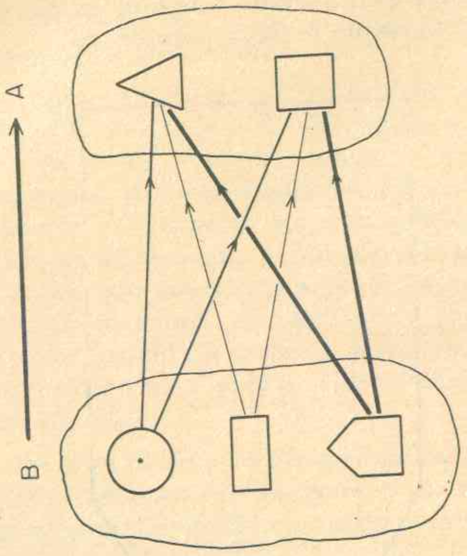
Con ejemplos similares los alumnos llegarán a comprender que *el área de cualquier polígono irregular es igual a la suma de las áreas de las figuras en que se descompone.*

Propiedad conmutativa

Al considerar los conjuntos A = {△, □} y B = {○, ▭, ⬠} se tiene



A x B = {(△, ○), (△, ▭), (△, ⬠), (□, ○), (□, ▭), (□, ⬠)}



B x A = {(○, △), (○, □), (▭, △), (▭, □), (⬠, △), (⬠, □)}

Al comparar A x B y B x A, se observa que ambos productos tienen igual número de parejas ordenadas y, por lo tanto:

$\#(A \times B) = \#(B \times A)$, y como

$\#(A \times B) = \#(A) \times \#(B)$ y

$\#(B \times A) = \#(B) \times \#(A)$,

entonces, $\#(A) \times \#(B) = \#(B) \times \#(A)$

$2 \times 3 = 3 \times 2$

El maestro y los alumnos pueden practicar con otros ejemplos, usando el producto cartesiano para mostrar casos particulares como:

2 x 4 = 4 x 2
5 x 3 = 3 x 5
1 x 4 = 4 x 1
2 x 5 = 5 x 2
3 x 4 = 4 x 3, etc.,

y llegar a la siguiente generalización: para todo par de números naturales **a** y **b** se cumple que:

$$\boxed{a \times b = b \times a}$$

Esta propiedad recibe el nombre de propiedad CONMUTATIVA de la multiplicación.

Es necesario aclarar que el producto cartesiano entre conjuntos no es conmutativo, ya que, en general, la pareja $(a, b) \neq (b, a)$. Por ejemplo:

Si A = {1, 2} y B = {3, 4}

A x B = {(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)}

y B x A = {(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)}

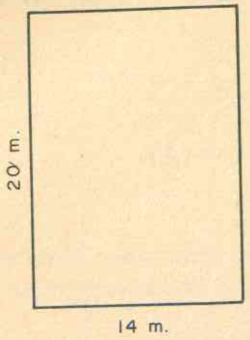
Se observa que en A x B, aparece la pareja ordenada (1, 3), la cual no está en B x A o lo que es lo mismo: $(1, 3) \in A \times B$, mientras que $(1, 3) \notin B \times A$, y por tanto los dos conjuntos (A x B) y (B x A) son diferentes.

Ejemplo:

El maestro solicita a Pedro y a Juan que resuelvan el siguiente problema:

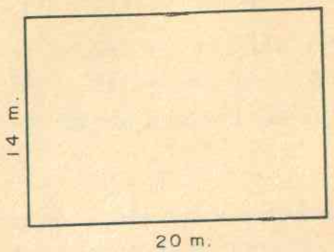
Encontrar el área de un rectángulo cuyas dimensiones son 14 m y 20 m, y representarlo gráficamente.

Solución de Pedro



20 m x 14 m =
280 m^2

Solución de Juan



14 m x 20 m
280 m^2

Propiedad asociativa

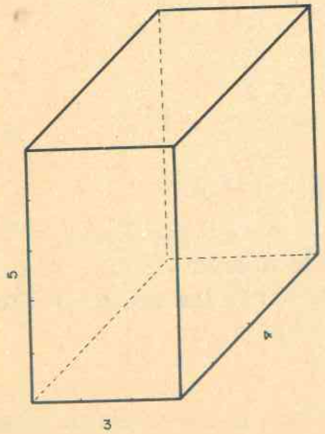
Esta propiedad puede mostrarse a través del producto cartesiano, pero creemos que los alumnos están en condiciones de comprenderla en forma abstracta.

Dados los números naturales a, b, c, siempre es cierto que:

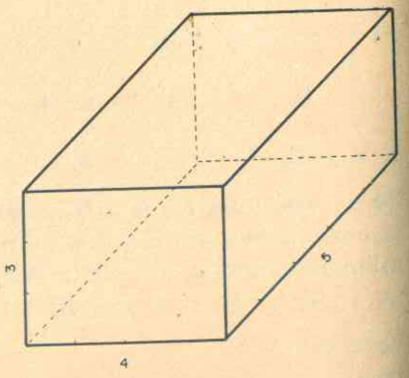
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Ejemplo:

Hallar el volumen de una caja cuyas dimensiones son: 3 dm, 4 dm y 5 dm respectivamente.



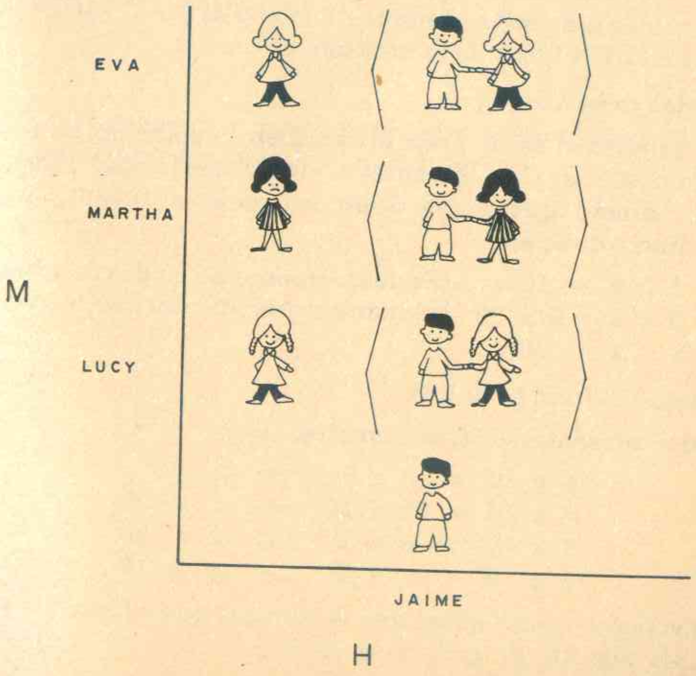
(3 dm x 4 dm) x 5 dm
= 12 dm^2 x 5 dm
= 60 dm^3



3 dm x (4 dm x 5 dm)
= 3 dm x 20 dm^2
= 60 dm^3

Propiedad idéntica o modulativa

Lucy formula una invitación a su amigo Jaime. Este llega cumplidamente a casa de Lucy, la cual le presenta a dos amigas que la acompañan, Martha y Eva. Luego de tomarse un refresco, deciden bailar un rato y Eva, quien no era muy fuerte en Matemática, pregunta: ¿cuántas parejas (normales) de baile se pueden formar, sin repetirse, con Jaime y nosotras tres? Jaime le dice: es muy fácil conocer la respuesta; acto seguido, sacó primero a Lucy y bailó con ella; después formó pareja con Martha y finalmente con Eva. Jaime preguntó entonces a Eva: ¿tienes ya una respuesta a tu pregunta? Ella contestó alegremente: claro, con Lucy formaste una pareja, otra con Martha y otra conmigo, es decir, en total se formaron tres parejas distintas, y éstas son todas, ya que cualquier otra combinación te obligaría a repetir una de las anteriores. Lucy dijo: en las clases anteriores, el maestro nos enseñó un juego muy bonito, llamado producto cartesiano entre dos conjuntos, y con esta ayuda podemos también resolver el problema planteado por Eva. Buscó entonces papel y lápiz y dibujó lo siguiente:



Todo esto puede interpretarse así:

$H = \{\text{Jaime}\}$

$M = \{\text{Lucy, Marta, Eva}\}$

Entonces, $H \times M = \{(\text{Jaime, Lucy}), (\text{Jaime, Martha}), (\text{Jaime, Eva})\}$

Tomando los números correspondientes se tiene:

$$\begin{array}{ccccc} \#(H) & \times \#(M) & = & \#(H \times M) \\ 1 & \times\ 3 & = & 3 \end{array}$$

Con la realización de muchos más ejercicios similares en los cuales se utilice el producto cartesiano para mostrar casos particulares como:

$$\begin{array}{c} 8 \times 1 = 8 \\ 1 \times 7 = 7 \\ 9 \times 1 = 9 \\ \vdots \end{array}$$

Se puede generalizar que, para todo número natural a, se cumple que: $\boxed{a \times 1 = 1 \times a = a}$

Esta propiedad recibe el nobre de PROPIEDAD MODULATIVA o IDENTICA de la multiplicación.

Propiedad cancelativa

Esta propiedad es de gran utilidad en la solución de múltiples problemas. Consideremos el siguiente ejemplo: cinco veces el dinero que posee Juan, es igual a 100$. ¿Cuánto es el dinero de Juan?

$$\begin{array}{rl} 5 \cdot x = 100 & \text{(Se descompone 100 en dos factores, de} \\ \Rightarrow \cancel{5} \cdot x = \cancel{5} \times 20 & \text{tal manera que uno de ellos sea 5)} \\ \Rightarrow x = 20 & \end{array}$$

Respuesta: Juan tiene 20$

Pueden presentarse otros ejemplos, como:

$$\begin{array}{rcll} \cancel{4} \times x & = & \cancel{4} \times 7 & \Rightarrow x = 7 \\ x \times \cancel{10} & = & 32 \times \cancel{10} & \Rightarrow x = 32 \\ \cancel{6} \times 9 & = & \cancel{6} \times x & \Rightarrow x = 9 \\ 12 \times \cancel{8} & = & x \times \cancel{8} & \Rightarrow x = 12 \end{array}$$

Es necesario hacer notar que el número que se cancela tiene que ser distinto de cero, pues de lo contrario se caería en el absurdo de que todos los números son iguales entre sí. Por ejemplo:

$$\begin{array}{rcll} 4 \times \cancel{0} & = & 7 \times \cancel{0} & \Rightarrow 4 = 7 \\ 153 \times \cancel{0} & = & 2 \times \cancel{0} & \Rightarrow 153 = 2 \end{array}$$

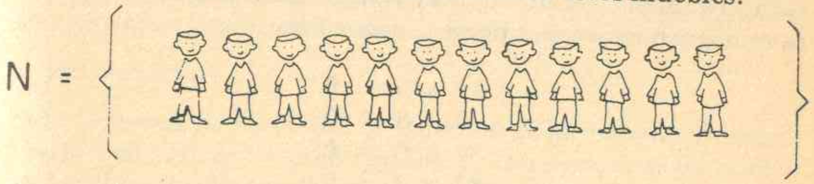
La propiedad cancelativa se enuncia en forma general abstracta, así:

Sean a, b, $c \in \mathbb{N}$, y $c \neq 0$, si $a \cdot c = b \cdot c$, entonces, se cancela c, y se tiene:

$$a = b$$

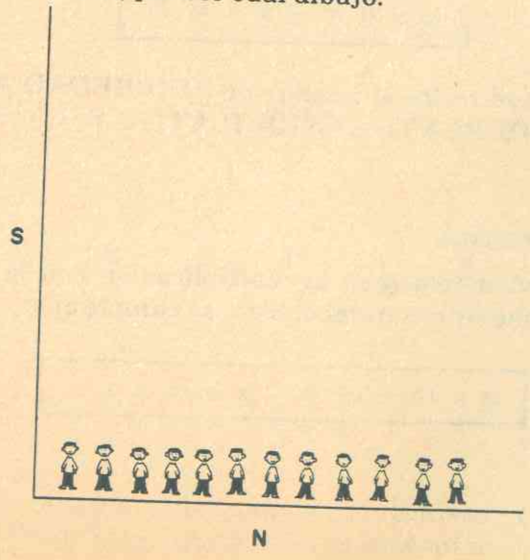
Propiedad anulativa (absorbente o aniquilativa)

En clase de gimnasia el profesor dice a sus alumnos que cada uno tome una silla de la sala contigua. Los alumnos, que son 12 en total, regresan a clase sin portar silla alguna ya que en el lugar señalado no se encontraban estos muebles.



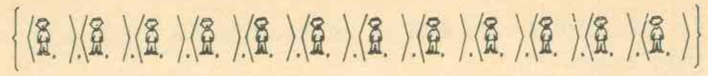
$S = \{\quad\}$

Uno de los alumnos quiso saber cómo representar por parejas, esta situación, para lo cual dibujó:



Otro alumno quiso dar solución a este planteamiento, así:

N x S =



Por consiguiente hubo quien dijera que en ningún momento se observaba la formación de las parejas solicitadas, porque el *conjunto de parejas resultante era vacío.* A esta observación, el maestro, tomando los números correspondientes a cada uno de los conjuntos iniciales, anotó en el tablero:

$$\#(N) \times \#(S) = \#(N \times S)$$
$$12 \times 0 = 0$$

Con la realización de otros ejercicios similares en los cuales se muestran más casos particulares como

$$25 \times 0 = 0$$
$$0 \times 8 = 0$$
$$34 \times 0 = 0$$
$$87 \times 0 = 0$$
$$0 \times 4 = 0$$

se puede generalizar que, para todo número natural **a** se cumple que:

$$\boxed{a \times 0 = 0 \times a = 0}$$

Esta propiedad recibe el nombre de PROPIEDAD ANULATIVA, ABSORBENTE o ANIQUILATIVA de la multiplicación.

Propiedad distributiva

Esta propiedad relaciona la multiplicación con la adición. Para los números naturales **a**, **b** y **c**, se cumple que:

$$\boxed{a \times (b + c) = a \times b + a \times c}$$

Ejemplo:

Rina tiene 2 sobrinos y 3 sobrinas. Quiere darles 4 lápices a cada uno. ¿Cuántos lápices debe obsequiar en total?

Primera forma	*Segunda forma*
Total de sobrinos y sobrinas: (2 + 3)	Los sobrinos reciben 4 x 2 lápices.
Cada uno recibe 4 lápices	Las sobrinas reciben 4 x 3 lápices.
En total reciben	En total reciben
$4 \times (2 + 3) =$ $4 \times 5 = 20$	$4 \times 2 + 4 \times 3 =$ $8 + 12 = 20$
Todos reciben 20 lápices.	Todos reciben 20 lápices.

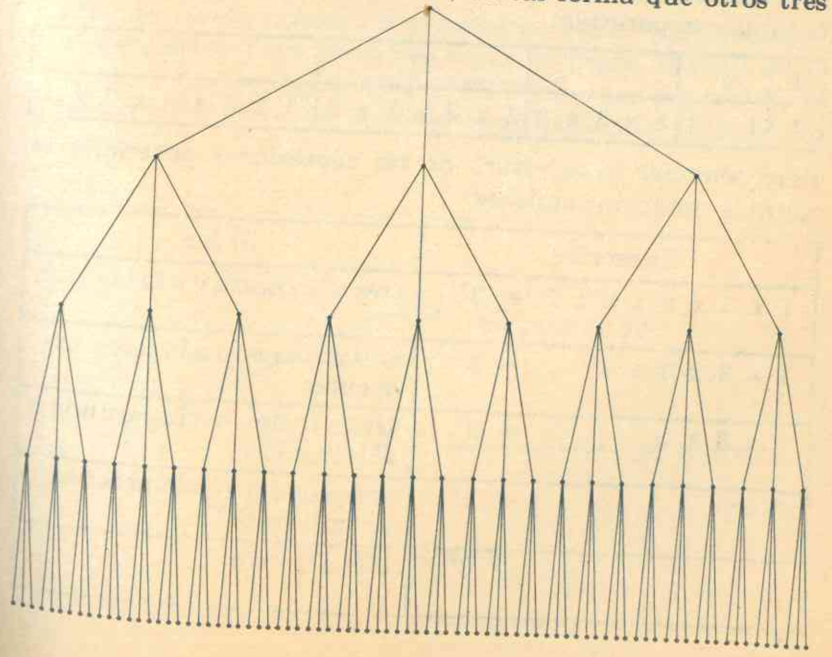
Por lo tanto, $4 \times (2 + 3) = 4 \times 2 + 4 \times 3$

(Ver más detalles en la Guía de 4o. grado, Matemática, págs. 35 a 37, sobre la aplicación de esta última propiedad).

h. Potenciación

Para la época de Navidad, el Director de la escuela "Francisco José de Caldas" recibe regalos de la asociación de padres de familia; charla con los alumnos sobre el particular y organiza el reparto.

El toma el que le corresponde y entrega sendos regalos a tres estudiantes con la condición de que cada uno de ellos ejecute la acción por una sola vez, en tal forma que otros tres



compañeros reciban también sus respectivos regalos, y así sucesivamente.

Se supone que los regalos son simbólicos. Esta situación se observa mejor en la gráfica anterior (árbol).

Con base en esta gráfica se pide a los alumnos contar, en cada entrega, el total de alumnos (y el Director) que reciben regalo y expresar la forma numérica correspondiente a fin de establecer la siguiente tabla:

1	3	9	27	81

Bajo la orientación del maestro, los alumnos observarán que a cada uno (y al director) le corresponde hacer 3 regalos. Con esta base pueden expresar, en otra forma, el número de regalos entregados en cada ocasión. Recordemos que al Director le entregaron un regalo cuya expresión numérica es 1; 3 alumnos reciben sendos regalos del Director, lo cual se expresa 1 x 3; como cada uno de los 3 alumnos que recibió regalo debe hacer el obsequio correspondiente, se observa que el segundo grupo recibe en su totalidad 1 x 3 x 3 regalos; en forma similar sucede en el tercer caso, lo cual se expresa 1 x 3 x 3 x 3 y, en el cuarto caso, la nueva expresión será 1 x 3 x 3 x 3 x 3.

Comprendida la nueva forma de expresar el número de regalos recibidos en cada ocasión, se puede establecer la siguiente tabla comparativa:

1	3	9	27	81
1	1 x 3	1 x 3 x 3	1 x 3 x 3 x 3	1 x 3 x 3 x 3 x 3

Para abreviar la escritura de las expresiones anteriores se usará la notación siguiente:

Se escribe	Se lee
1 x 3 x 3 x 3 x 3 = 3^4	tres a la cuatro o a la cuarta;
1 x 3 x 3 x 3 = 3^3	tres a la tres, o a la tercera o al cubo;
1 x 3 x 3 = 3^2	tres a la dos, o a la segunda o al cuadrado;
1 x 3 = 3^1	tres a la uno (en la práctica se omite este 1)
1 = 3^0	tres a la cero.

El análisis de las expresiones numéricas anteriores permite destacar las veces que el número 3 opera como factor en cada caso; con esta base pueden comprenderse las siguientes notaciones abreviadas:

$$3^1 \;,\; 3^2 \;,\; 3^3 \;,\; 3^4$$

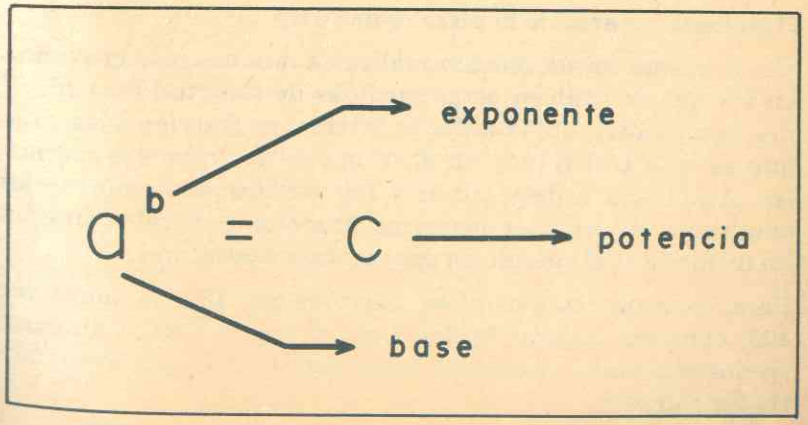
En el caso donde se aprecia que el 3 no aparece como factor, surge la expresión 3^0 que corresponde, en el ejemplo, al numeral 1 y que representa el regalo que recibió el Director de la escuela.

En esta forma no resulta difícil, para los alumnos, comprender la nueva escritura, pues observarán que hay un número que se repite como factor (3), el cual recibe el nombre de BASE; y un número pequeño, colocado en la parte superior derecha de ésta, que indica el número de veces que dicho factor se repite; éste es el indicador o EXPONENTE.

Así, al escribir expresiones como: 1 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3, los alumnos dirán 3^5 y, al escribir 3^6, lo anotarán, en forma desarrollada, 1 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3.

Se explica, entonces, que no solamente es una forma de escritura sino que constituye una nueva operación, la cual se caracteriza por el poder gigantesco de “crecimiento” y tal vez por eso se le conoce con el nombre de POTENCIACION.

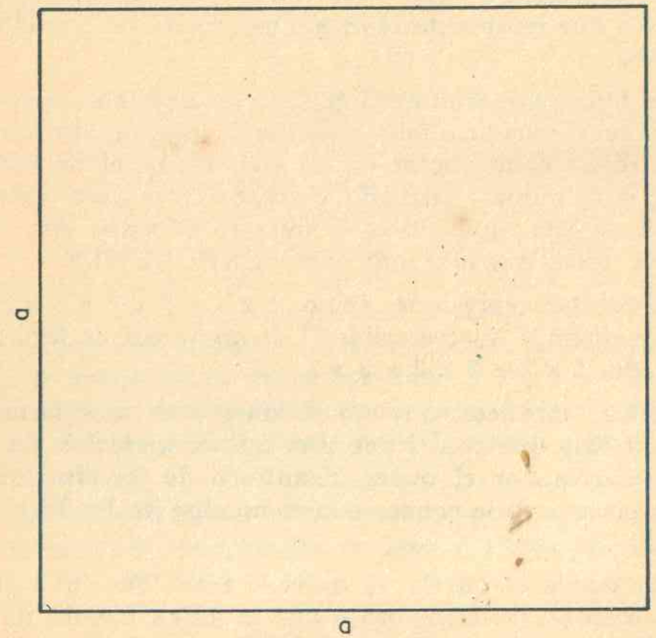
En esta nueva operación se aprecia, pues, que intervienen tres elementos: un elemento **a** que se llama BASE; un elemento **b** que se llama EXPONENTE, y un elemento **c** que se llama POTENCIA. lo anterior se simboliza en la siguiente forma:



Area del cuadrado (segunda potencia)

Los alumnos saben ya que el área de un rectángulo, con lados de longitudes **a** y **b** respectivamente, se expresa por la fórmula A = **a • b** Si el rectángulo tiene sus lados congruentes, se le llama cuadrado y entonces, la fórmula para el área será:

$$A = a \times a = a^2$$



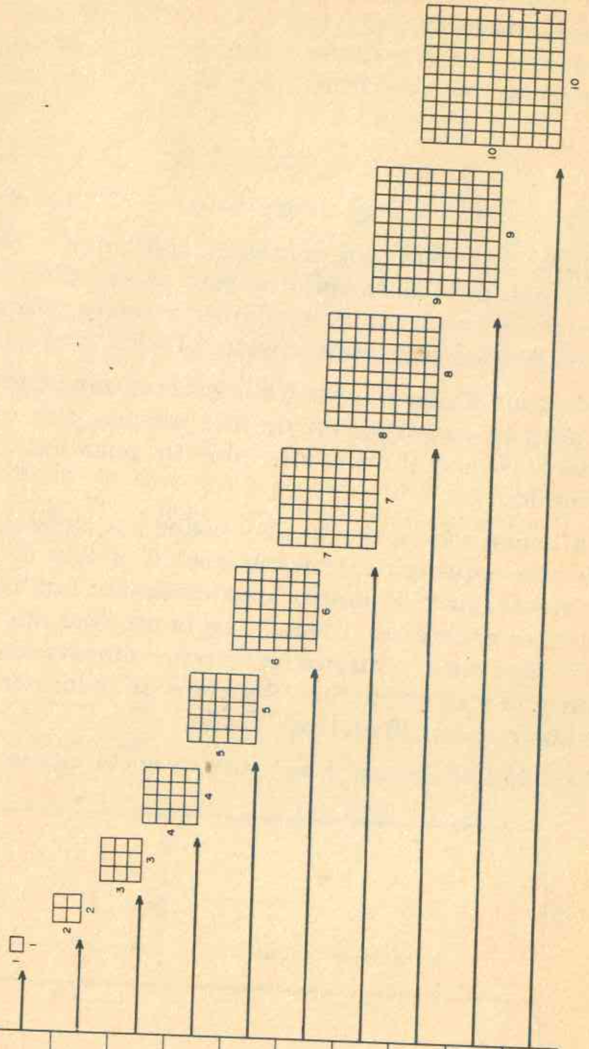
Ejemplo: Encontrar el área de una pieza cuadrada de 4 metros de lado.

$A = 4\,m \times 4\,m = 16\,m^2$

Respuesta: el área de la pieza es de 16 m^2

En la misma forma pueden realizarse muchos más ejercicios, en los que se utilicen otras medidas de longitud (la vara, el pie, la pulgada) como unidades enteras, no fraccionarias, pues aún se está trabajando en el campo de los números naturales. Así llegan a determinar y representar gráficamente los cuadrados de los diez primeros números naturales, que les ha de facilitar el cálculo en operaciones posteriores.

Para los números naturales, mayores que 10 y menores que 100, conviene aplicar la descomposición de dichos números en dos sumandos, tomando como base la decena, para facilitar los cálculos.



n	n al cuadrado		
	EXPRESION	DESARROLLO	POTENCIA
1	1^2	1 x 1	1
2	2^2	2 x 2	4
3	3^2	3 x 3	9
4	4^2	4 x 4	16
5	5^2	5 x 5	25
6	6^2	6 x 6	36
7	7^2	7 x 7	49
8	8^2	8 x 8	64
9	9^2	9 x 9	81
10	10^2	10 x 10	100

Así se forman, además, series con los mismos, los que luego se elevan al cuadrado.

$11 = 10 + 1$ $12 = 10 + 2$ $13 = 10 + 3$

$14 = 10 + 4$ $15 = 10 + 5$ $16 = 10 + 6$

. . .

. . .

. . .

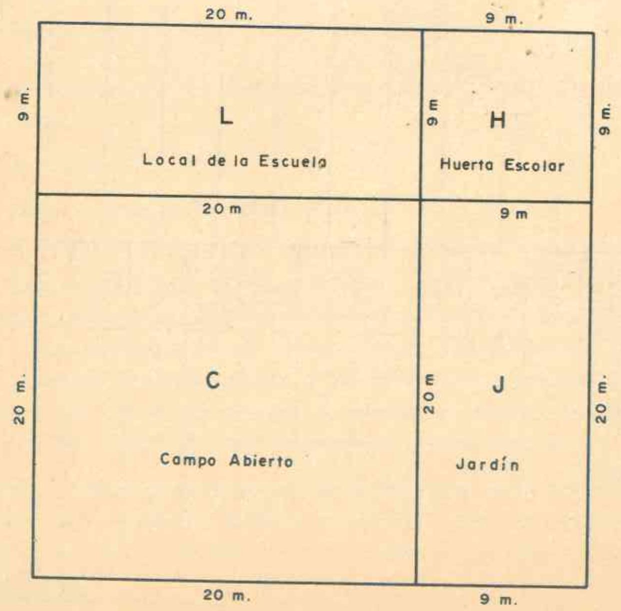
$97 = 90 + 7$ $98 = 90 + 8$ $99 = 90 + 9$

Un ejemplo concreto que ayuda a comprender, en forma clara y sencilla, el desarrollo de este nuevo planteamiento para buscar el cuadrado de cualquier número natural (especialmente de los comprendidos entre 11 y 99) es el siguiente:

En un terreno de forma cuadrada se destinan sendas extensiones para la construcción de una escuela con un jardín, una huerta escolar y un campo abierto, para múltiples usos del alumnado.

Para la construcción del local y todas sus dependencias se destina una esquina de 9 metros por 20 metros de lado, respectivamente; para el jardín, una extensión con las mismas dimensiones anteriores, ubicada en la esquina opuesta de la construcción; para la huerta, el terreno comprendido entre la construcción y el jardín, con 9 metros de lado; por último el campo abierto, con 20 metros de lado.

Tal situación se ilustra y se resuelve en la siguiente forma:



El cuadrado completo tiene lados de longitud 20 + 9, por lo tanto su área será $(20 + 9)^2$. Por otro lado se aprecia que el área total es la suma de las áreas del cuadrado C (campo), de los rectángulos L (local) y J (jardín) y del cuadrado H (huerta escolar).

Por observación directa de la figura, se tiene que:

área total = área de C + área de L + área de J + área de H, o sea, $(20 + 9)^2 = (20 \times 20) + (20 \times 9) + (20 \times 9) + (9 \times 9)$

Como hay dos rectángulos con medidas iguales, se simplifica y queda.

$(20 + 9)^2 = (20 \times 20) + 2 \times (20 \times 9) + (9 \times 9)$, entonces

$(20 + 9)^2 = (20 \times 20) + 2 \times 180 + (9 \times 9)$, es decir,

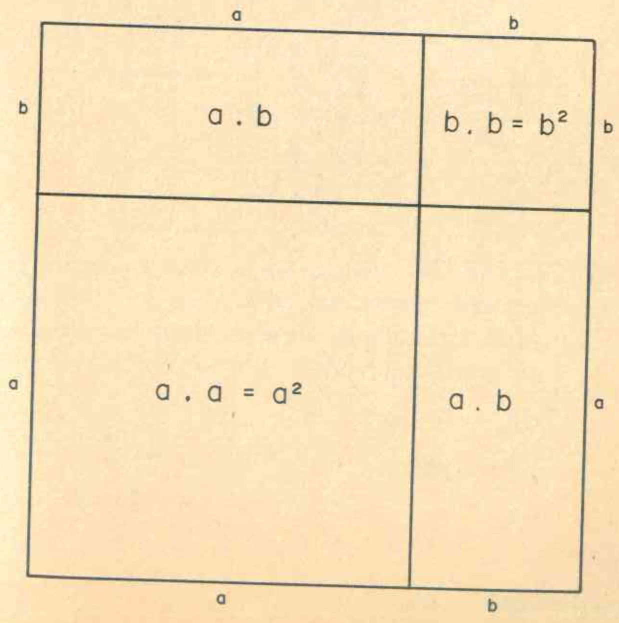
$(20 + 9)^2 = \quad 400 \quad + 360 + 81$ que da un total de 841 m².

Con la realización de muchos más casos similares y reemplazando con letras los valores respectivos, el alumno llega a generalizar la fórmula, así:

$$(a + b)^2 = a \cdot a + a \cdot b + a \cdot b + b \cdot b$$
$$= a^2 + 2\,a \cdot b + b^2$$

Entonces, $\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2\,a \cdot b + b^2}$

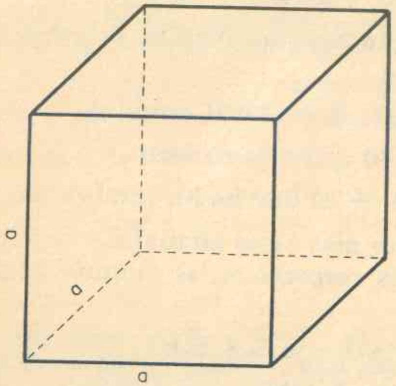
Geométricamente se tiene:



Volumen del cubo (tercera potencia)

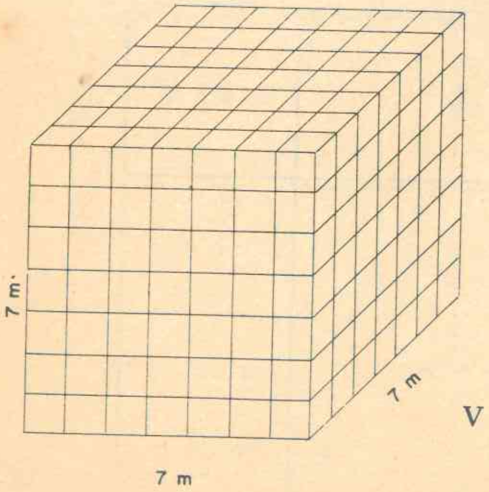
Los alumnos también saben que el volumen de un cajón (paralelípedo rectangular) se obtiene al multiplicar los valores de longitud de sus tres dimensiones (largo, ancho, altura).

Si los lados del cajón son todos congruentes, la figura se llama cubo y su volumen sería entonces:



$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

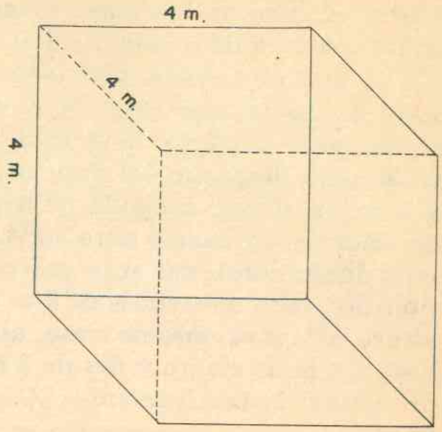
Ejemplos: ¿cuántos bloques de hielo de 1 m^3 caben en un cuarto frío de forma cúbica, si cada lado mide 7 metros?



$$\begin{aligned} V &= 7\text{ m} \times 7\text{ m} \times 7\text{ m} \\ &= 7^3\text{ m}^3 \\ &= 343\text{ m}^3 \end{aligned}$$

Respuesta: 343 bloques.

¿Cuántos metros cúbicos de aire caben en una pieza de forma cúbica, sabiendo que cada lado mide 4 m?



$$\begin{aligned} V &= 4\text{ m} \times 4\text{ m} \times 4\text{ m} = \\ & 4^3\text{ m}^3 = 64\text{ m}^3 \end{aligned}$$

Respuesta: 64 m^3

En la misma forma pueden realizarse muchos más ejercicios en los que se utilicen otras medidas de longitud, como unidades enteras, no fraccionarias, pues aún se está trabajando en el campo de los números naturales. Así llegan a determinar los cubos de los diez primeros números naturales.

n	n al cubo		
	Expresión	desarrollo	potencia
1	1^3	1 x 1 x 1	1
2	2^3	2 x 2 x 2	8
3	3^3	3 x 3 x 3	27
4	4^3	4 x 4 x 4	64
5	5^3	5 x 5 x 5	125
6	6^3	6 x 6 x 6	216
7	7^3	7 x 7 x 7	343
8	8^3	8 x 8 x 8	512
9	9^3	9 x 9 x 9	729
10	10^3	10 x 10 x 10	1000

Para los números naturales, entre 10 y 100, conviene aplicar la descomposición de dichos números, tomando como base la decena, de tal manera que quede planteada una adición, la que se eleva al cubo o a la tercera potencia.

Ejemplos: $11 = 10 + 1;\ 11^3 = (10 + 1)^3$

$25 = 20 + 5;\ 25^3 = (20 + 5)^3$

.

.

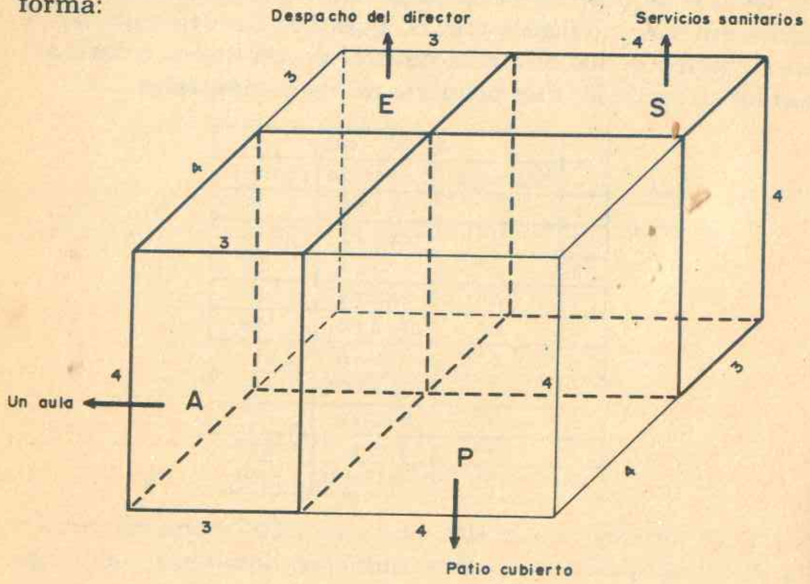
.

$x = a + b;\ x^3 = (a + b)^3$

Un ejemplo concreto que ayuda a comprender, en forma clara y sencilla, el desarrollo de este nuevo planteamiento para buscar el cubo de cualquier número natural, especialmente de los comprendidos entre 2 y 100, es el siguiente:

En un lote de terreno de 7 metros de lado se construye un local de dos plantas, para una escuela. En la primera planta un patio cubierto, de 4 m de lado y 4 m de altura; un salón para despacho del director, de 3 m de lado en la base y 4 m de altura; un aula de 3 m por 4 m de base y 4 m de altura y un cuarto para servicios sanitarios con las mismas dimensiones del aula anterior. En la segunda planta, un salón para materiales de 3 m de lado en la base y 3 m de altura, y tres salones de clase, así: uno de 4 m de lado en la base y 3 m de altura y dos de 3 m por 4 m en la base y 3 m de altura, respectivamente. ¿Cúal es el volumen total del local?

El problema anterior se ilustra y se resuelve en la siguiente forma:

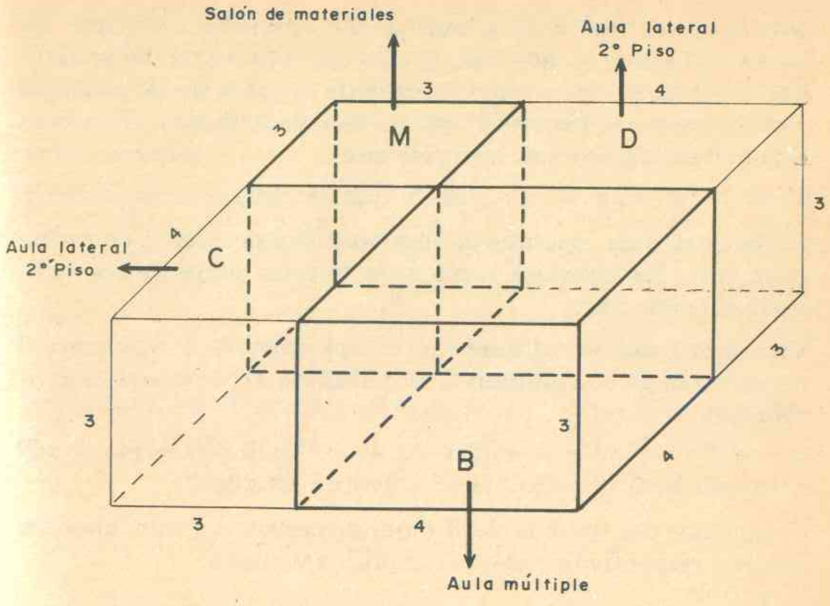


Despacho del director: (3 x 3) x 4
base x altura

Aula: (3 x 4) x 4
base x altura

Servicios sanitarios: (3 x 4) x 4
base x altura

Patio cubierto: (4 x 4) x 4
base x altura



Salón de materiales: (3 x 3) x 3
base x altura

Aula lateral D: (3 x 4) x 3
base x altura

Aula lateral C: (3 x 4) x 3
base x altura

Aula múltiple: (4 x 4) x 3
base x altura

El cubo completo tiene lados de longitud 4 + 3; por lo tanto, su volumen será $(4 + 3)^3$. Por otro lado se aprecia, en el material concreto, que el volumen total es igual a la suma de los volúmenes del cubo P (patio cubierto), de los tres cajones A (aulas del primer piso); S (servicios sanitarios) y B (aula múltiple del segundo piso), de los otros tres cajones C, D (aulas laterales del segundo piso) y E (oficina del director, en el primer piso) y del cubo M (sala de materiales) en el segundo piso.

Para resolver numéricamente el problema, dejamos en libertad al maestro ya que es él quien puede juzgar si los alumnos están en capacidad de comprender el desarrollo de $(a+b)^3$, *esto es, del cubo de la suma de dos números.* El hecho de representar este desarrollo, no obliga al maestro a enseñarlo y menos a exigir a los alumnos la memorización de la fórmula a la que se ha de llegar; simplemente lo anotamos, pues creemos que a los alumnos debe dárseles un cierto nivel de dificultad y, además, porque en esta etapa del programa, ya conocen las propiedades de la suma y de la multiplicación, particularmente la propiedad distributiva. También están en condiciones de apreciar que

$a \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a = a^3$; $x + 2x = 3x$.

El maestro debe orientar el desarrollo del problema en forma concreta y los alumnos explicarán la o las propiedades utilizadas en cada paso:

Volumen total = volumen P + volumen A + volumen S + volumen B + volumen C + volumen D + volumen E + volumen M

$(4 + 3)^3 = (4 \text{ x } 4 \text{ x } 4) + (3 \text{ x } 4 \text{ x } 4) + (3 \text{ x } 4 \text{ x } 4) + (4 \text{ x } 4 \text{ x } 3) + (3 \text{ x } 4 \text{ x } 3) + (3 \text{ x } 4 \text{ x } 3) + (3 \text{ x } 3 \text{ x } 4) + (3 \text{ x } 3 \text{ x } 3)$

Como hay dos grupos de 3 cajones cada uno, con medidas iguales, respectivamente, se simplifica y queda:

$(4 + 3)^3 =$
$(4 \text{ x } 4 \text{ x } 4) + 3 \text{ x } (3 \text{ x } 4 \text{ x } 4) + 3 \text{ x } (3 \text{ x } 4 \text{ x } 3) + (3 \text{ x } 3 \text{ x } 3)$,
por tanto,

$(4 + 3)^3 = 4^3 + 3 \text{ x } (3 \text{ x } 4^2) + 3 \text{ x } (4 \text{ x } 3^2) + 3^3$
$(4 + 3)^3 = 64 + (3 \text{ x } 48) + (3 \text{ x } 36) + 27$, entonces,
$(4 + 3)^3 = 64 + 144 + 108 + 27$,
que da un total de 343. Esto significa que el volumen total es de 343 m^3.

Con la realización de otros casos similares y reemplazando con letras los valores respectivos, el alumno llega a generalizar la fórmula, así:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a \cdot a \cdot a) + (b \cdot a \cdot a) + (b \cdot a \cdot a) + (a \cdot a \cdot b) + (b \cdot a \cdot b) \\ &\quad + (b \cdot a \cdot b) + (b \cdot b \cdot a) + (b \cdot b \cdot b) \\ &= a^3 + 3 \text{ x } (b \cdot a \cdot a) + 3 \text{ x } (b \cdot a \cdot b) + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3a \cdot b^2 + b^3, \text{ entonces}\end{aligned}$$

$$\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a \cdot b^2 + b^3}$$

i. Operaciones inversas de la potenciación

—Radicación
—Logaritmación

La operación de potenciación tiene una particularidad especial que se entrará a analizar comparativamente con la adición y la multiplicación.

Este método permite, además, tratar en forma sencilla y con miras a una iniciación, las dos operaciones inversas correspondientes.

Ejemplo: en la adición se observa que

$$\begin{aligned}5 + 4 &= 4 + 5 \\ 2 + 8 &= 8 + 2 \\ &\ \ . \\ &\ \ . \\ &\ \ .\end{aligned}$$

y en general, $a + b = b + a$

En la multiplicación:

$$\begin{aligned}5 \text{ x } 4 &= 4 \text{ x } 5 \\ 2 \text{ x } 8 &= 8 \text{ x } 2 \\ &\ \ . \\ &\ \ . \\ &\ \ .\end{aligned}$$

y en general, $a \text{ x } b = b \text{ x } a$

En la potenciación se tiene:

$5^4 = 5 \text{ x } 5 \text{ x } 5 \text{ x } 5 = 625$; $4^5 = 4 \text{ x } 4 \text{ x } 4 \text{ x } 4 \text{ x } 4 = 1.024$, es decir, $5^4 \neq 4^5$
$2^8 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 = 256$; $8^2 = 8 \text{ x } 8 = 64$, es decir, $2^8 \neq 8^2$
y en general, $a^b \neq b^a$.

En esta forma los alumnos aprecian que tanto en la adición como en la multiplicación se pueden conmutar sus términos y el resultado es el mismo, mientras que en la potenciación no sucede esto ya que, 5^4 es diferente de 4^5; 8^2 es diferente de 2^8, etc. Lo anterior se resume en el siguiente cuadro:

Adición	Multiplicación	Potenciación
$5+4 = 4+5$	$5\text{x}4 = 4\text{x}5$	$5^4 \neq 4^5$
$2+8 = 8+2$	$2\text{x}8 = 8\text{x}2$	$2^8 \neq 8^2$
$2+3 = 3+2$	$2\text{x}3 = 3\text{x}2$	$2^3 \neq 3^2$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$a+b = b+a$	$a\text{x}b = b\text{x}a$	$a^b \neq b^a$

Por la conmutación se tiene que, en la adición, $a + b = b + a$; por tanto, al desconocer uno de los términos que constituyen la suma (sumando), ejemplo: $a + x = c$; $x + a = c$

se recurre a la sustración (operación inversa) para conseguirlo, esto es, $x = c - a$. En la misma forma sucede en la multiplicación: si $a \cdot b = b \cdot a$, entonces al desconocer uno de los términos que constituyen la multiplicación (factor), esto es, $a \cdot x = c$; $x \cdot a = c$ $(a \neq 0)$, se recurre a la división (operación inversa) para conseguirlo: $x = c : a$ ó $x = \frac{c}{a}$. En la potenciación, como no se cumple la propiedad conmutativa, pues $a^b \neq b^a$, es necesario recurrir a dos operaciones inversas, diferentes una de otra, según se trate de conseguir la base o el exponente. En el primer caso, para resolver $x^2 = 81$, se recurre a la operación inversa que se llama RADICACION, lo cual se expresa: $x = \sqrt[2]{81}$ y se lee:
x es igual a la raíz segunda o cuadrada de 81.

Otros ejemplos: $x^3 = 27$, significa: $x = \sqrt[3]{27}$ y se lee:
x es igual a la raíz tercera o cúbica de 27.

$x^4 = 81$, significa: $x = \sqrt[4]{81}$ y se lee:
x es igual a la raíz cuarta de 81:

$x^5 = 1024$, significa: $x = \sqrt[5]{1024}$ y se lee:
x es igual a la raíz quinta de 1024.

Generalizando se tiene $x^a = b$; significa, $x = \sqrt[a]{b}$ y se lee:
x es igual a la raíz a de b.

El número a se llama INDICE ó EXPONENTE, el número b, CANTIDAD SUBRADICAL y el número x, RAIZ. Esta raíz constituye la base que se busca. El signo $\sqrt{\ }$ se llama RADICAL.

En el segundo caso, para resolver $2^x = 16$, se recurre a la operación inversa, la LOGARITMACION, la cual permite hallar el exponente cuando se conocen la base y la potencia. Así, $2^x = 16$ significa: $x = \text{log. de } 16 \text{ en base } 2$ y se lee:
x es igual al logaritmo de 16 en base 2.

El estudio de esta operación, que debiera llamarse exponenciación, ya que lo que se busca es el exponente, ocupa un nivel superior al de la presente Guía, por lo cual nos limitamos a mencionarla.

RESUMEN

Operación directa	Operaciones Inversas	
POTENCIACION	RADICACION	LOGARITMACION
$4^3 = x$; $x = 64$		
$x^3 =$ 64	$x = \sqrt[3]{64}$; $x = 4$	
$4^x =$ 64		$x = \log_4 64$; $x = 3$

Extracción o cálculo de raíces. Raíz cuadrada

La extracción o cálculo de raíces, es una operación bastante difícil de resolver en este grado en forma aritmética; por lo tanto en esta Guía solamente se presentará una forma intuitiva para buscar la raíz cuadrada (o segunda) de potencias constituídas hasta por cuatro cifras.

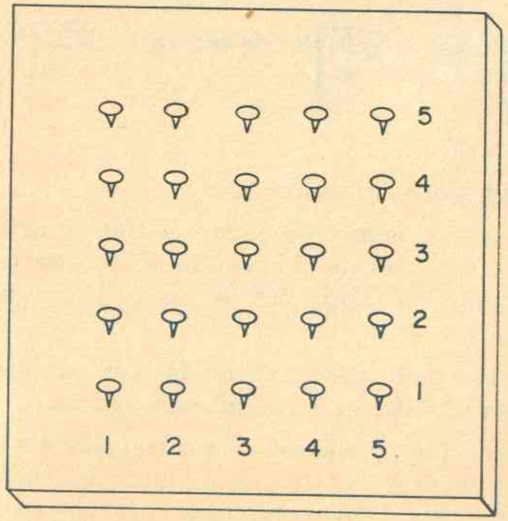
Aquí surge, como aplicación, encontrar el lado de un cuadrado, conociendo el área. Los alumnos conocen (o pueden construir) los cuadrados de los diez primeros números naturales. Así saben que el cuadrado de 5 ó 5^2 es 25; el cuadrado de 8 u 8^2 es 64; etc.

Ahora se invierte la situación: número cuyo cuadrado es 25; número cuyo cuadrado es 64; etc. Se explica entonces que tal número constituye la *raíz cuadrada* del número dado. Así, si $x^2 = 25$, entonces, el número, cuyo cuadrado es 25, se llama la raíz cuadrada de 25, o sea 5.

La expresión $x^2 = 25$, significa: $\sqrt[2]{25} = x$ o sea $\sqrt[2]{25} = 5$, ya que $5^2 = 25$.

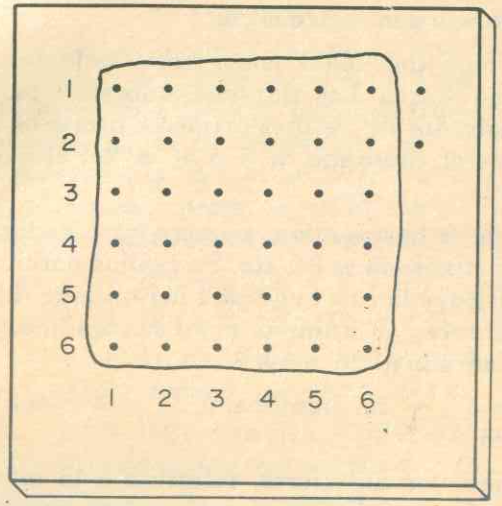
Todos los ejemplos anteriores, relativos a la extracción de raíces cuadradas, se pueden visualizar formando cuadrados (usar el geoplano).

Considérese el caso de hallar la raíz cuadrada de 25. Se forma un cuadrado con 25 clavos o tachuelas así:



Se observa que en cada lado hay 5 clavos (incluyendo el de la esquina de corte); por tanto, la raíz de 25 es 5.

Después se plantea una pregunta como la siguiente: ¿Cuál es la raíz cuadrada de 38? Los alumnos determinan que 6 es el número que más se acerca, ya que $6^2 = 36$ y queda un resto de 2, es decir, sobran 2. Esto es fácil de comprobar ya que $38 = 6^2 + 2$, como se aprecia en el siguiente gráfico:



En igual forma se plantean otras raíces cuadradas no exactas, para que los alumnos den el resultado y determinen la raíz entera y el resto.

Así:

$\sqrt[2]{18}$ 4 raíz entera
-16
2 resto

$\sqrt[2]{93}$ 9 raíz entera
-81
12 resto

$\sqrt[2]{57}$ 7 raíz entera
-49
8 resto

De todo lo anterior se concluye que:

—Si la potencia es menor de o igual a 100, su raíz cuadrada será igual a o menor de 10; para resolver estos casos, basta saber calcular los cuadrados de los 10 primeros números naturales;

—Si el número dado para extraer la raíz cuadrada es uno de los cuadrados de 1 a 10, la raíz será exacta;

—Si el número dado o potencia no corresponde a los cuadrados de los 10 primeros números naturales, la raíz estará comprendida entre dos cuadrados consecutivos y será entera o inexacta; por lo tanto, siempre queda un resto.

Cuando la potencia es mayor de 100 y menor de 10 000, su raíz cuadrada estará formada por un número de dos cifras. Para resolver estos casos, es necesario tener bien claro el proceso seguido en el *cálculo y graficación del cuadrado de la suma de dos números naturales* (Ver la pág. 95). Además, es indispensable explicar la descomposición de la potencia dada (área de un cuadrado) en sus respectivas unidades cuadradas. Ejemplo: La junta directiva de la acción comunal de una vereda consiguió un lote de terreno, para la construcción de su sede. El área del lote es de 625 m². ¿Cuánto mide de lado?

área = 625 m² = 6 Dm² 25 m²

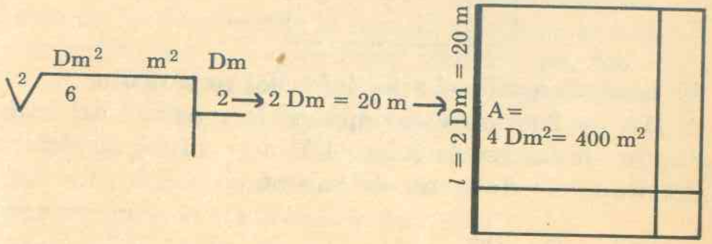
lado = $\sqrt[2]{625}$

Solución:

1er. paso. Separación en períodos de 2 cifras, de derecha a izquierda, en la cantidad subradical.

1er período	2o. período
Dm²	m²
$\sqrt[2]{6}$	25

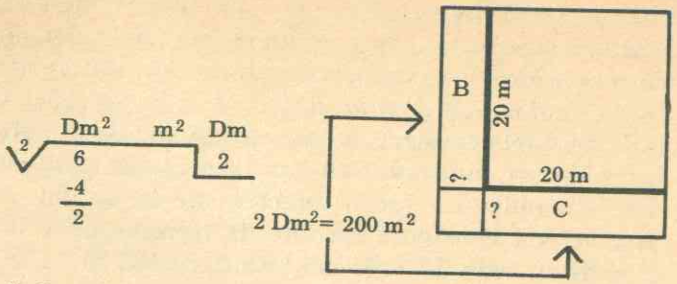
2o. paso. Determinación de la raíz cuadrada de la cifra que constituye el primer período.



3er paso. Se eleva al cuadrado la dimensión obtenida, para determinar el área del cuadrado A.

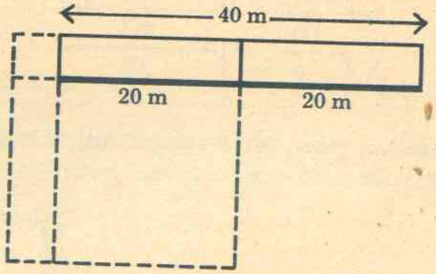
l = 2 Dm = 20 m.
a = 2 Dm x 2 Dm = 4 Dm²
20 m x 20 m = 400 m²

4o. paso. El área obtenida (4 Dm²) se resta de los 6 Dm² que se tenían. Queda un resto de 2 Dm² que corresponden al área de los dos rectángulos laterales (B y C).

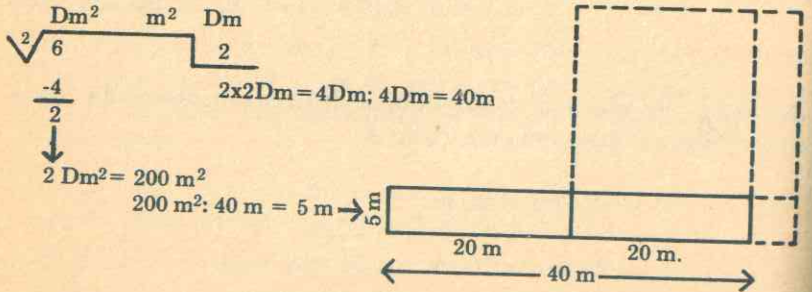


Como los lados del cuadro A son comunes a los de los rectángulos B y C, se tiene que la longitud del lado del cuadrado (2 Dm = 20 m) es la misma para el lado mayor de cada uno de los rectángulos anteriores; entonces, 2 veces la longitud del lado mayor de uno de los rectángulos es 4 Dm = 40 m.

Lo anterior ayuda a comprender el por qué, en la operación de radicación, se duplica la raíz obtenida del primer período.



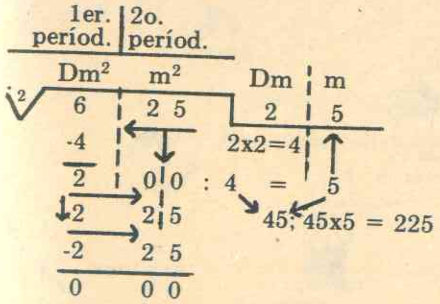
5o. paso. Conocida el área de los dos rectángulos (2 Dm² = 200 m²) y el duplo de la longitud del lado mayor de uno de los rectángulos (4 Dm = 40 m), se determina la longitud del lado menor del mismo.



El cociente que se obtiene al dividir el resto (2 Dm² = 200 m²) por la cifra que es el duplo de la raíz (4 Dm = 40 m), da la medida del lado menor del rectángulo (5 m).

Se analiza el segundo período (25 m²) y se observa que, en el gráfico, corresponde al área del cuadrado menor. Se determina la longitud del lado de dicho cuadrado y se observa que tal lado es común al cuadrado menor y a los lados menores de los rectángulos; por tanto, corresponde a la misma longitud.

6o. paso. Comprobada la exactitud de la medida del lado común al cuadrado menor y a los lados menores de los dos rectángulos, se procede a bajar el segundo período para conformar la cantidad 225 m² (área de los dos rectángulos (2 Dm² = 200 m²) más área del cuadrado menor (25 m²).



Es ahora cuando se aprecia y se justifica la separación, nuevamente en períodos de dos cifras, pero de izquierda a derecha; es decir, en sentido contrario a la primera separación. Se aplica lo comprobado en el 5o. paso y se determina así la segunda cifra para conformar la raíz cuadrada definitiva.

Se continúa normalmente la operación como si fuera una división, esto es, al determinar la segunda cifra de la raíz (5), aquélla se multiplica por el número formado por las cifras 4 y 5 que determinaron las medidas de los lados de los dos rectángulos y la del cuadrado pequeño. En esta forma 45 x 5 = 225 lo cual se resta de los 225 m² que se tenían, y no queda resto. Finalmente se observa que la raíz es 25 y, por no quedar resto, se trata de una raíz exacta.

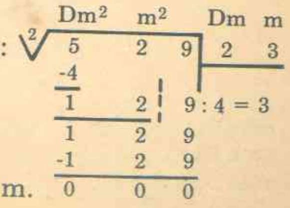
Respuesta: $\sqrt[2]{625}$ = 25. El lado del lote de terreno mide 25 m.

El siguiente ejemplo ayudará a apreciar la necesidad de bajar el 2o. período de la cantidad subradical, antes de probar la cifra que convenga para determinar la 2a. cifra de la raíz: el área de un cuadrado es de 529 m². ¿Cuánto mide un lado?

área = 529 m² = 5 Dm² 29 m²

lado = $\sqrt[2]{529}$

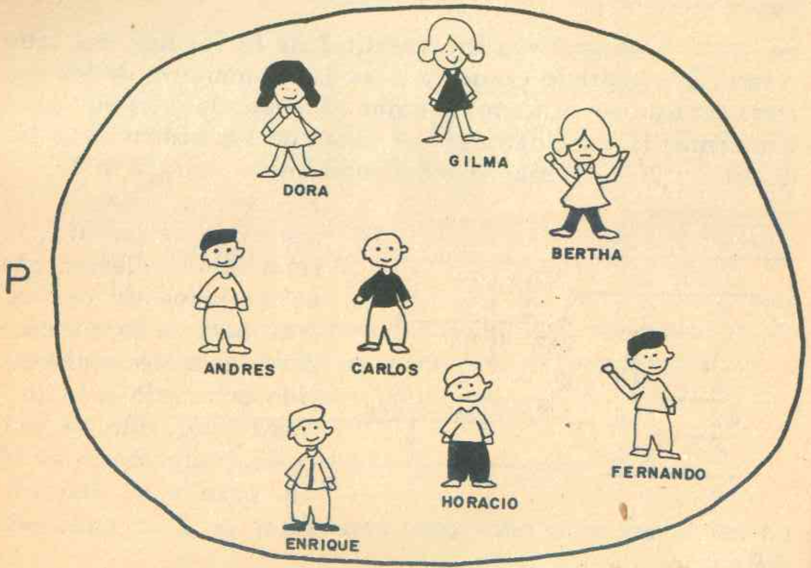
Solución:



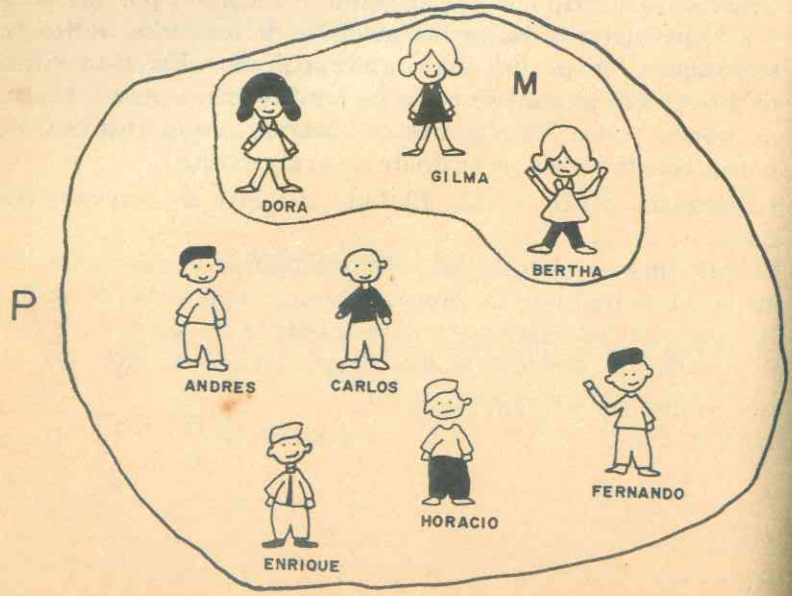
Respuesta: el lado del cuadrado es de 23 m.

j. Subconjuntos

En una reunión hay un conjunto P formado por 8 personas, a saber: Andrés, Bertha, Carlos, Dora, Enrique, Fernando, Gilma y Horacio. Utilizando un diagrama podemos expresar este conjunto en la siguiente forma:



Al considerar en P, el conjunto M de las mujeres: Dora, Bertha y Gilma, la situación gráfica es la siguiente:



Observamos que cada elemento de M es también un elemento de P. Decimos entonces, que M es un subconjunto de P y se simboliza así:

$$M \subset P$$

En general, dados dos conjuntos R y S, si todo elemento de R es también un elemento de S, decimos que R es un subconjunto de S, o que R está incluído en S, o que R está contenido en S, y escribimos:

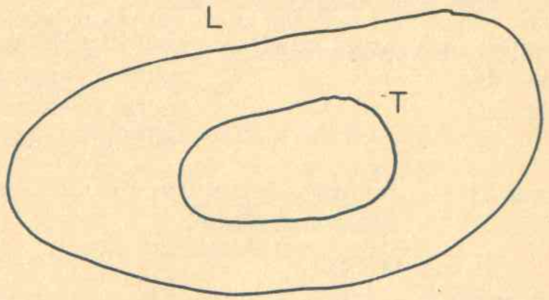
$$R \subset S$$

También podemos decir, en forma equivalente, que S incluye a R, o que S contiene a R, y escribimos:

$$S \supset R$$

Ejemplo: L = { Departamentos de Colombia }

T = { Departamentos de la costa norte de Colombia }



Partes de un conjunto

—Supongamos que en una escuela donde hay tres maestros: Jorge, Amparo y Luis, deciden nombrar un conjunto (subconjunto) de ellos para ir donde el Director a solicitarle permiso para organizar una semana cultural. Se presentan las siguientes posibilidades:

Jorge, Amparo y Luis	van donde el Director
Jorge y Amparo	van donde el Director
Jorge y Luis	van donde el Director
Amparo y Luis	van donde el Director
Jorge	va donde el Director
Amparo	va donde el Director
Luis	va donde el Director
Ninguno	va donde el Director

Si escribimos M = { Jorge, Amparo, Luis } , vemos que todas la combinaciones anteriores son subconjuntos de M, es decir:

$\{\text{Jorge, Amparo, Luis}\} = M \subset M$
$\{\text{Jorge, Amparo}\} \subset M$
$\{\text{Jorge, Luis}\} \subset M$
$\{\text{Amparo, Luis}\} \subset M$
$\{\text{Jorge}\} \subset M$
$\{\text{Amparo}\} \subset M$
$\{\text{Luis}\} \subset M$
$\{\ \} \subset M$

Podemos ahora formar un nuevo conjunto, con todos los subconjuntos de M. Tal conjunto se llama conjunto de PARTES DE M y se denota P (M). Entonces,

$$P(M) = \left\{ \{\ \}, \{\text{Jorge}\}, \{\text{Amparo}\}, \{\text{Luis}\}, \{\text{Jorge, Amparo}\}, \{\text{Jorge, Luis}\}, \{\text{Amparo, Luis}\}\ ,\ M \right\}$$

—Ivonne Alexandra y Frank Christian piensan visitar a su amigo Fernando. Las posibilidades son:

Ivonne Alexandra y Frank Christian	visitan a Fernando
Ivonne Alexandra	visitá a Fernando
Frank Christian	visita a Fernando
Ninguno	visita a Fernando

Si designamos H = {Ivonne Alexandra, Frank Christian} observamos que:

$H \subset H$
$\{\text{Ivonne Alexandra}\} \subset H$
$\{\text{Frank Christian}\} \subset H$
$\{\ \} \subset H$

Por tanto,

$$P(H) = \{ \{\ \}, \{\text{Ivonne Alexandra}\}, \{\text{Frank Christian}\}, H \}$$

—Jorge quiere ir a cine. Sus posibilidades son:

Jorge va a cine
Jorge no va a cine

Al llamar D = {Jorge}, se tiene que:

$$P(D) = \{ \emptyset, D \}$$

—Un ejercicio más difícil, que los alumnos pueden resolver, es hallar todos los subconjuntos del conjunto A ={a, b, c, d.

$$P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \\ \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \\ \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, A \end{array} \right\}$$

Relación de minorancia

Observamos en el ejemplo anterior, que cualquier subconjunto de A (incluyendo el mismo conjunto A), tiene menos o igual número de elementos que A.

$\emptyset$ tiene menos número de elementos que A
$\{a,c,d\}$ tiene menos número de elementos que A
A tiene igual número de elementos que A

Al considerar los números correspondientes a los subconjuntos de A, vemos que:

$\#(\emptyset)$ es menor que $\#(A)$, es decir, $0 < 4$
$\#(\{a\})$ es menor que $\#(A)$, es decir, $1 < 4$
$\#(\{a,c\})$ es menor que $\#(A)$, es decir, $2 < 4$
$\#(\{b,c,d\})$ es menor que $\#(A)$, es decir, $3 < 4$
$\#(A)$ es igual que $\#(A)$, es decir, $4 = 4$

El conjunto $\{0,1,2,3,4\}$ formado por todos los números naturales que son menores de o iguales a 4, recibe el nombre de minorantes de 4; es decir, minorantes de 4 = $\{0,1,2,3,4\}$
En forma similar,

minorantes de 5 = $\{0,1,2,3,4,5\}$
minorantes de 3 = $\{0,1,2,3\}$
minorantes de 1 = $\{0,1\}$
minorantes de 0 = $\{0\}$

Esta relación se indica con el símbolo $\leq$ (menor o igual, o minorante).

La relación de minorancia, entre números naturales, recibe el nombre de *relación de orden aditivo.*

Orden aditivo. Propiedades.

Propiedad reflexiva

Sabemos que para todo conjunto A, es cierto que $A \subset A$, de donde se concluye que $\#(A) \leq \#(A)$. Al tratar con números naturales se tiene que:

$$0 \leq 0$$
$$7 \leq 7$$
$$318 \leq 318$$
$$1079 \leq 1079$$
$$47 \leq 47$$

y en forma general, si a es cualquier número natural $\boxed{a \leq a}$

Esta propiedad recibe el nombre de *propiedad reflexiva.*

Propiedad anti-simétrica.

No es difícil para el alumno entender que, si dos conjuntos son subconjuntos uno del otro, entonces los dos conjuntos son iguales.

Ejemplo:

$A = \{$Países de Centro América con canal interoceánico$\}$

$B = \{$Países de Centro América cuyo nombre comienza con P$\}$

Se observa que $A \subset B$ y $B \subset A$; y por lo tanto, $A = B$.

Un ejemplo más general sería el siguiente:

$X = \{a,b,c\}$ y $Y = \{c, a, b\}$. Se observa claramente que todo elemento de X es también elemento de Y y viceversa; por lo tanto, como $X \subset Y$ y $Y \subset X$, se concluye que $X = Y$.

En igual forma, al considerar dos números naturales, **a** y **b**, donde $a \leq b$ y $b \leq a$, se aprecia inmediatamente que $a = b$. Es decir,

$$\boxed{\text{si } a \leq b \text{ y } b \leq a, \text{ entonces, } a = b}$$

Esta propiedad recibe el nombre de propiedad *anti-simétrica o antirecíproca.*

Propiedad transitiva

Finalmente, considerados tres conjuntos A, B y C, tales que $A = \{a\}$, $B = \{a,b\}$ y $C = \{a,b,c\}$; se observa que $A \subset B$ y $B \subset C$ y de aquí, se sigue que $A \subset C$.

Al considerar los números se tiene:

$\#(A) \leq \#(B)$ y $\#(B) \leq \#(C) \Rightarrow \#(A) \leq \#(C)$ es decir,
$1 \leq 2$ y $2 \leq 3 \Rightarrow 1 \leq 3$.

Considerando otros casos particulares, vemos que:

$$5 \leq 7 \text{ y } 7 \leq 8 \Rightarrow 5 \leq 8$$
$$4 \leq 4 \text{ y } 4 \leq 11 \Rightarrow 4 \leq 11$$
$$21 \leq 22 \text{ y } 22 \leq 30 \Rightarrow 21 \leq 30$$

Generalizando, para tres números naturales **a**, **b** y **c**,

$$\boxed{\text{si } a \leq b \text{ y si } b \leq c, \text{ entonces, } a \leq c}$$

Esta propiedad recibe el nombre de *propiedad transitiva.*

El maestro debe presentar ejemplos suficientes hasta lograr que los alumnos comprendan bien el concepto de "minorantes de".

Como ya los alumnos saben que la expresión $A \subset B$ es equivalente a decir que $B \supset A$, no será difícil para ellos comprender que:

Como $2 \leq 3$, entonces, 3 es mayor o igual que 2, lo cual se puede abreviar escribiendo $3 \geq 2$.

Otros ejemplos pueden ser los siguientes:

$$5 \leq 7 \Leftrightarrow 7 \geq 5$$
$$8 \leq 10 \Leftrightarrow 10 \geq 8$$
$$23 \leq 70 \Leftrightarrow 70 \geq 23$$
$$\vdots$$
$$X \leq Y \Leftrightarrow Y \geq X$$

El conjunto formado por todos los números que son mayores de o iguales a un número dado x, recibe el nombre de mayorantes de x. Así:

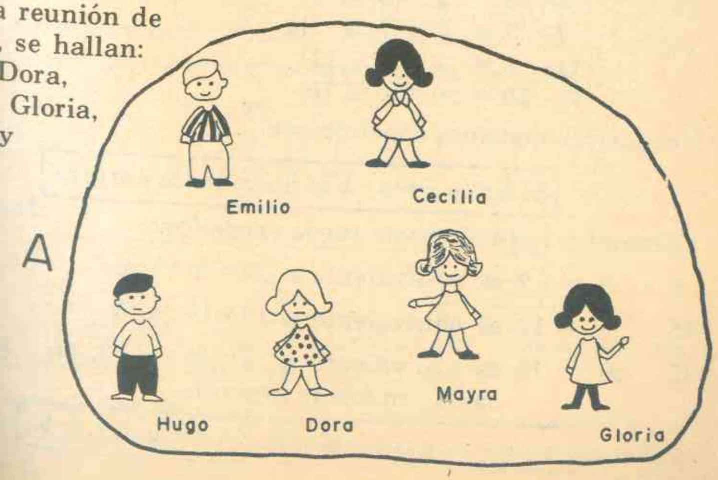
Mayorantes de 5 $= \{5,6,7,8,9,\ldots\}$
Mayorantes de 10 $= \{10,11,12,13,\ldots\}$
Mayorantes de 0 $= \{0,1,2,3,\ldots\}$

El maestro puede hacer notar que el *conjunto de minorantes de un número es finito, mientras que el conjunto de mayorantes es infinito.*

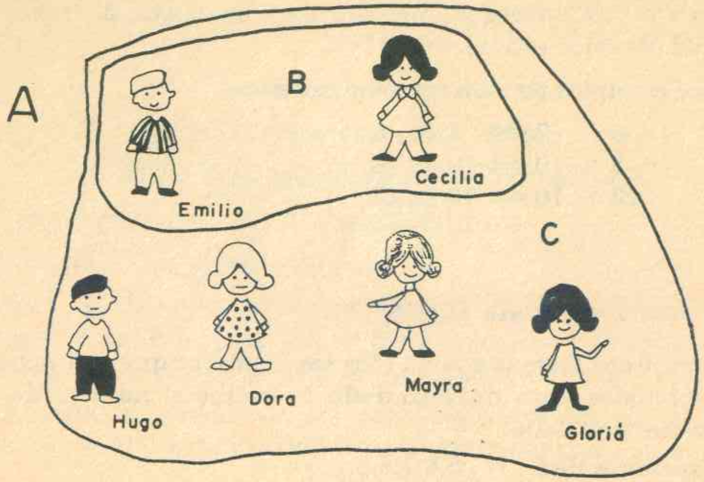
k. Sustracción

El alumno está ahora en capacidad de comprender, a través de los conjuntos, la operación de *sustracción o resta* entre dos números naturales. Para afianzar esto, vamos a considerar una nueva operación entre conjuntos, llamada *complemento.*

En una reunión de amigos, se hallan: Hugo, Dora, Mayra, Gloria, Cecilia y Emilio.



En un momento dado, Cecilia y Emilio se retiran. Quedan en la reunión: Gloria, Hugo, Dora y Mayra.



Se distinguen dos subconjuntos de A, a saber: B y C. El conjunto C se llama el complemento de B con respecto de A y se denota: A - B = C y se lee *A menos B es igual a C;* (se observa que $B \subset A$).

Si tomamos los números respectivos, tenemos ahora una situación que se llama *sustracción o resta,* o sea:

$$\#(A) - \#(B) = \#(C)$$
$$6 - 2 = 4 \quad (2 \leq 6).$$

Esto se lee: *seis menos dos es igual a cuatro.*

Otros ejemplos son los siguientes:

$$5 - 3 = 2 \quad (3 \leq 5)$$
$$7 - 7 = 0 \quad (7 \leq 7)$$
$$11 - 8 = 3 \quad (8 \leq 11)$$
$$70 - 50 = 20 \quad (50 \leq 70)$$

En general, podemos concluir que:

$$\boxed{\text{Si } b \leq a, \Rightarrow a - b \text{ es un número natural}}$$

El maestro hará observar que la expresión:

5 - 3 = 2 es equivalente a 5 = 2 + 3

16 - 6 = 10 es equivalente a 16 = 10 + 6

45 - 30 = 15 es equivalente a 45 = 15 + 30, etc., y por lo tanto, en forma general,

$$\boxed{a - b = c \text{ es equivalente a decir } a = c + b}$$

El elemento a se llama *minuendo;* b se llama *sustraendo* y c se llama *diferencia.* Es necesario afianzar estos conceptos, así como el cálculo operatorio de la sustracción, a través de múltiples ejercicios, tomados en lo posible, del medio natural y con base en datos reales.

Ejemplo: Ana le dio a Pedro cierta cantidad de dinero. Ella teńia 278$ y ahora tiene 173$. ¿Cuántos pesos le dió Ana a Pedro?

$$173\$ + x\$ = 278\$$$
$$\Rightarrow x\$ = 278\$ - 173\$$$
$$\Rightarrow x\$ = 105\$$$

Comprobación

$$\begin{array}{r} 173\$ \\ +\ 105\$ \\ \hline 278\$ \end{array}$$

Respuesta: Ana le dió a Pedro 105$

I. Orden multiplicativo

El concepto de la relación *ser un múltiplo de* o su equivalente *ser un divisor (o factor) de* es bastante conocido y trajinado por los alumnos en los años anteriores. Es fácil, por lo tanto, comprender que si a es múltiplo de b, entonces existe un número natural c, tal que $a = b \cdot c$. Ejemplos:

40 es múltiplo de 8, ya que existe 5, tal que, 40 = 8 x 5

60 es múltiplo de 10, ya que existe 6, tal que, 60 = 10 x 6

40 no es múltiplo de 12, ya que no existe un número natural x, tal que $40 = 12 \cdot x$; pues si escogemos $x = 3$, vemos que $12 \times 3 = 36$; $36 < 40$

Si tomamos $x = 4$, se observa que $12 \times 4 = 48$; $48 > 40$. Es decir, x tiene que ser un número entre 3 y 4, y tal número no existe en los naturales.

Por convención, y con el fin de abreviar, usaremos el símbolo $\llcorner$. Los ejemplos anteriores se presentan ahora como:

$$40 \llcorner 8$$
$$60 \llcorner 10$$
$$40 \not\llcorner 12$$

En general:

$$\boxed{a \llcorner b, \text{ si existe } c \in \mathbb{N}, \text{ tal que, } a = b \cdot c}$$

y se lee: *a es múltiplo de b; si existe c, que pertenece a los naturales, tal que, a es igual a b x c.*

Es fácil ver que la relación $\llcorner$, entre números naturales, es una relación de orden; es decir, se cumplen las propiedades:

Reflexiva: a ∟ a (a es múltiplo de a)

Antisimétrica: Si a ∟ b; y si b ∟ a, entonces a = b (si a es múltiplo de b y si b es múltiplo de a, entonces, a es igual a b).

Transitiva: Si a ∟ b y si b ∟ c, entonces, a ∟ c.

(Si a es múltiplo de b y si b es múltiplo de c, entonces a es múltiplo de c).

II. División

Estamos ahora en condiciones de presentar la operación de DIVISION entre dos números naturales.

El proceso puede ser explicado utilizando los conjuntos (producto cartesiano), pero consideramos que el nivel de los alumnos le permite trabajar en forma abstracta.

La división surge del problema $b \cdot x = a$; $(b \neq 0)$, donde b y a son números conocidos, y x desconocido. El número a se llama *dividendo*, y b *divisor* y x *cociente*. Esta operación se plantea en las formas siguientes:

$x = a : b$ (x es igual a a dividido por (o entre) b)

$x = a/b$

$x = \frac{a}{b}$

y en su forma operatoria aparece como:

$\begin{array}{l|l} a & b \\ \hline & x \end{array}$ o también $\begin{array}{l|l} a & b \\ \hline & x \end{array}$

Propiedad clausurativa condicionada

Se observa que a ∟ b, ya que de otra forma, el número x, o sea el cociente, no sería un número natural. Por lo tanto,

$\boxed{\text{Si } a \llcorner b\ (b \neq 0), \text{ entonces } (a : b) \in \mathbb{N}}$,

lo cual viene a constituir la propiedad clausurativa; pero, como está limitada por la condición a ∟ b, se le conoce con el nombre de propiedad *clausurativa condicionada.*

Los alumnos conocen la multiplicación y la relación *ser un múltiplo de*, por lo cual no es problemático para el maestro plantear y para los alumnos resolver problemas elementales concretos y abstractos como:

—Si $16 \cdot x = 80$; hallar el valor de x

—Pedro trabaja x días y se gana 30$ por día. Si al final tiene 150$. ¿Cuántos días trabajó en total?

Una forma sencilla de resolver divisiones, consiste en usar restas y sumas consecutivas.

A título de información presentamos el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 40 & 5 \\ \cline{2-2} -5 & 1+1+1+1+1+1+1+1\ =8 \\ \cline{1-1} 35 & \\ -5 & \\ \cline{1-1} 30 & \\ -5 & \\ \cline{1-1} 25 & \\ -5 & \\ \cline{1-1} 20 & \\ -5 & \\ \cline{1-1} 15 & \\ -5 & \\ \cline{1-1} 10 & \\ -5 & \\ \cline{1-1} 5 & \\ -5 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

o también:

40-5 = 35 | 1

35-5 = 30 | + 1

30-5+ 25 | + 1

25-5 = 20 | + 1

20-5 = 15 | + 1

15-5 = 10 | + 1

10-5 = 5 | + 1

5-5 = 0 | + 1 = 8

Aunque divisiones como 41 : 7, no tienen solución dentro de los naturales, es costumbre presentarlas, por razones de tipo práctico y como forma de efectuar un tipo especial de cálculo operatorio.

Se observa que el número mayor entre los que, multiplicados por 7, se acercan (por debajo, es decir, por defecto) a 41, es el 5; (5 x 7 = 35). La diferencia entre 41 y 35 o sea 6, se llama el *resto o residuo* de la división.

Las divisiones donde el resto es cero, o sea las VERDADERAS divisiones en IN, se llaman *divisiones exactas*, mientras que a todas las demás se las denomina *divisiones inexactas, no exactas, con residuo*, o *enteras.*

El proceso de división ya se ha planteado en guías anteriores (Anexo, Guía de 2o. grado; folleto Matemática, Guía de 4o. grado) por lo cual no lo explicaremos aquí. Solamente daremos los siguientes ejemplos:

¿Cuál es el número que multiplicado por 31, es igual a 527?

$x \cdot 31 = 527$

$\Longrightarrow \quad x = 527 : 31$

$$\begin{array}{r|l} 527 & 31 \\ \cline{2-2} -31 & 17 \\ \cline{1-1} 217 & \\ -217 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Respuesta: $x = 17$

División exacta

Efectuar la siguiente división: 593 628 : 17

$$\begin{array}{l|l} 59'3'6'2'8' & 17 \\ \cline{2-2} -51 & 34919 \\ \quad 83 & \\ \quad -68 & \\ \quad\ \ 156 & \\ \quad -153 & \\ \qquad\ \ 32 & \\ \qquad -17 & \\ \qquad\ \ 158 & \\ \qquad -153 & \\ \qquad\qquad 5 & \end{array}$$

División con residuo

La división por cero

$0 : x \qquad (x \neq 0)$

Ejemplos:

$$\begin{array}{l|l} 0 & 5 \\ \cline{2-2} -0 & 0 \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 0 & 21 \\ \cline{2-2} -0 & 0 \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 0 & 34 \\ \cline{2-2} -0 & 0 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Se observa que cuando se divide 0 por cualquier número $x \neq 0$, se obtiene como cociente, 0; 0 $\in$ IN. Por lo tanto, esta es una división verdadera en IN.

$0 : 0$

Ejemplos:

$$\begin{array}{l|l} 0 & 0 \\ \cline{2-2} -0 & 0 \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 0 & 0 \\ \cline{2-2} -0 & 1 \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 0 & 0 \\ \cline{2-2} -0 & 5 \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 0 & 0 \\ \cline{2-2} -0 & 4578 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Se observa que al dividir 0 por 0, el cociente puede ser cualquier número natural. Por tanto, es correcto decir que 0 : 0 es igual a 0, ó a 50, ó a 45783, etc. Esta situación recibe el nombre de INDETERMINACION.

$x : 0 \qquad (x \neq 0)$

Ejemplos:

$$\begin{array}{l|l} 3 & 0 \\ \cline{2-2} & ? \end{array}$$

Si recordamos que a : b = c, significa que, a = b • c,

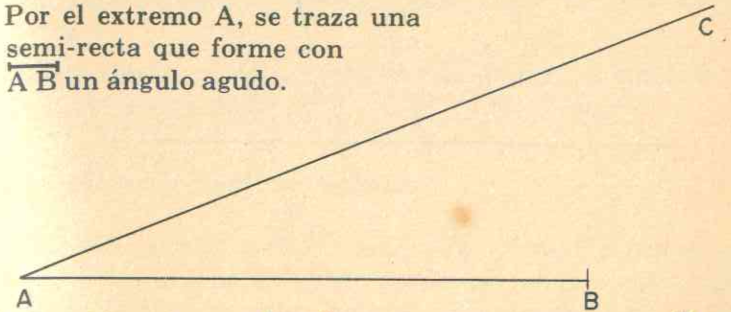
entonces, 3 : 0 = 0, significa que, 3 = 0 x 0, lo cual es falso
3 : 0 = 1, significa que, 3 = 0 x 1, lo cual es falso.
3 : 0 = 3, significa que, 3 = 0 x 3, lo cual es falso.
3 : 0 = 596, significa que, 3 = 0 x 596, lo cual es falso

De lo anterior se deduce que esta división carece de sentido y por consiguiente no se puede DIVIDIR POR CERO.

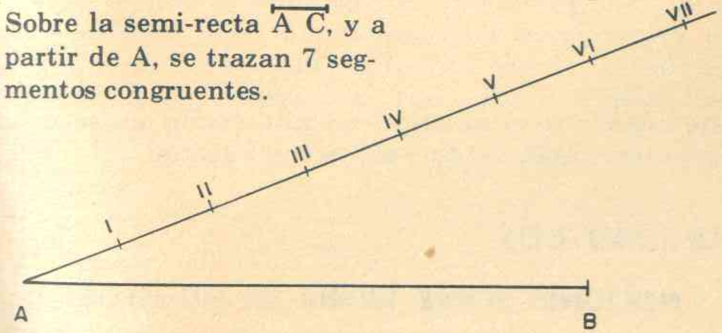
m. División de un segmento en n (n $\in$ IN, n $\geq$ 2) partes congruentes.

—En la página 49 hemos indicado la forma de dividir un segmento en 5 partes congruentes. Para enfatizar, presentamos de nuevo ese proceso, para dividir un segmento $\overline{AB}$ en 7 partes congruentes:

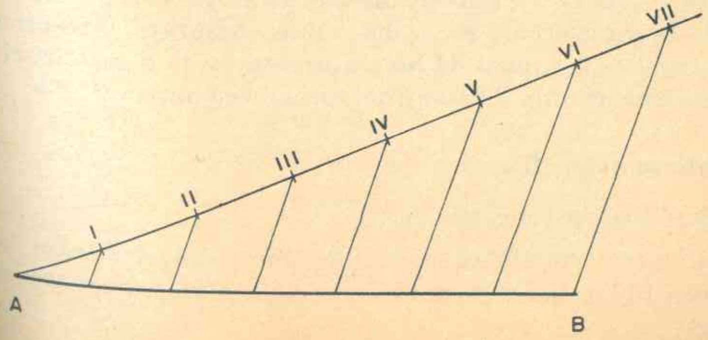
Por el extremo A, se traza una semi-recta que forme con $\overline{AB}$ un ángulo agudo.



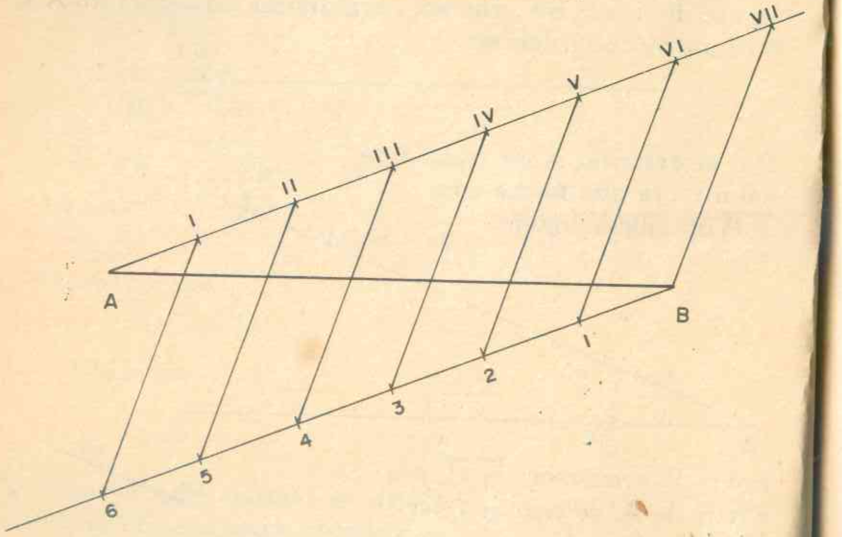
Sobre la semi-recta $\overline{AC}$, y a partir de A, se trazan 7 segmentos congruentes.



Se traza el segmento VII-B, y por los puntos I, II, III, IV, V, VI, se trazan paralelas a VII-B, quedando así el segmento $\overline{AB}$ dividido en 7 partes congruentes.



—Otra manera de efectuar esta división es la siguiente: por los extremos A y B, se trazan sendas semirrectas paralelas; señalando con la misma unidad de longitud 6 divisiones congruentes, se unen los puntos tal como se indica en el dibujo, lográndose así el resultado pedido:



Este método (o el anterior) permite dividir un segmento cualquiera (limitado) en n partes congruentes.

B. UNIDAD DOS

NOCIONES SOBRE TEORIA DE NUMEROS

Objetivo general

Orientar el proceso enseñanza-aprendizaje a fin de que el alumno adquiera habilidad para identificar, interpretar y expresar gráfica y simbólicamente los elementos que constituyen la intersección entre dos o más conjuntos, y transferir esta noción al campo de los naturales, en la determinación del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo.

Objetivos específicos

El alumno debe ser capaz de:

—Demostrar habilidad para identificar los elementos que constituyen la intersección entre dos o más conjuntos dados.

—Aplicar correctamente los diversos criterios de divisibilidad en los cálculos propuestos.

—Determinar con precisión el conjunto de los divisores de un número dado y destacar las parejas de factores que constituyen dicho número.

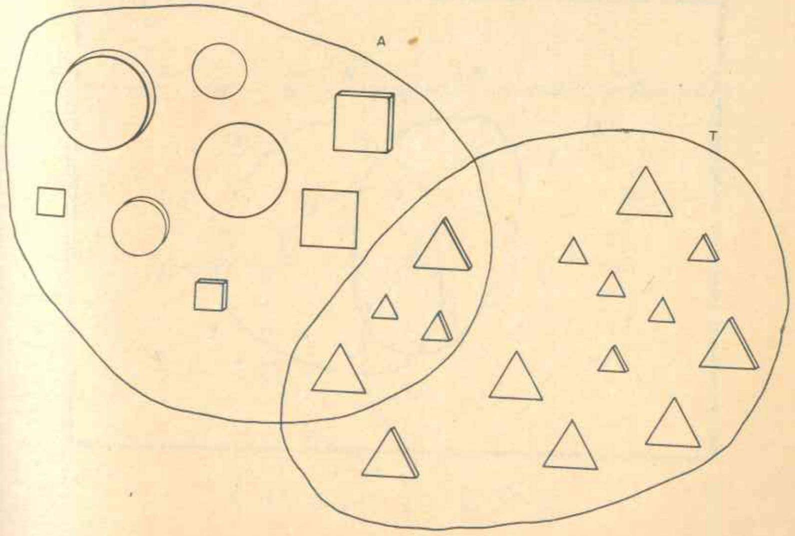
—Demostrar habilidad en la determinación de números primos y compuestos.

—Demostrar habilidad para descomponer un número en sus factores primos y expresar éstos, como factores potenciados.

—Determinar con precisión el m.c.d. y el m.c.m. de dos o más números dados.

1. Intersección entre conjuntos

Utilizando el referencial uno,como universal, el maestro pide a un alumno colocar sobre una mesa el conjunto formado por las figuras de color amarillo y encerrar con un cordón los elementos de este conjunto. Pide luego a otro, colocar sobre la mesa el conjunto de los triángulos y encerrarlos con un cordón. A continuación, promueve una discusión para



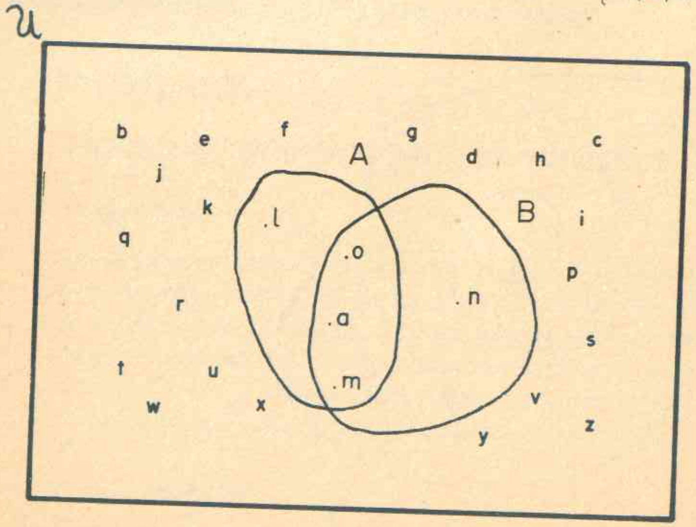
que los alumnos opinen sobre las características de los dos conjuntos y de otros posibles conjuntos que observen. Algunos hablarán probablemente de la unión, como el conjunto formado por las figuras amarillas y los triángulos. Otros dirán que no están en esos conjuntos los discos rojos, etc. Lo más importante de esta práctica es lograr que los alumnos observen el conjunto formado por los triángulos amarillos, o sea, los elementos que están simultáneamente en los dos conjuntos.

El conjunto formado por los triángulos amarillos, se llama la INTERSECCION entre el conjunto A de las figuras de color amarillo y el conjunto T de los triángulos. Esta expresión se denota:

$A \cap T$ y se lee: La intersección entre A y T o la intersección de A con T, o simplemente A intersección T.

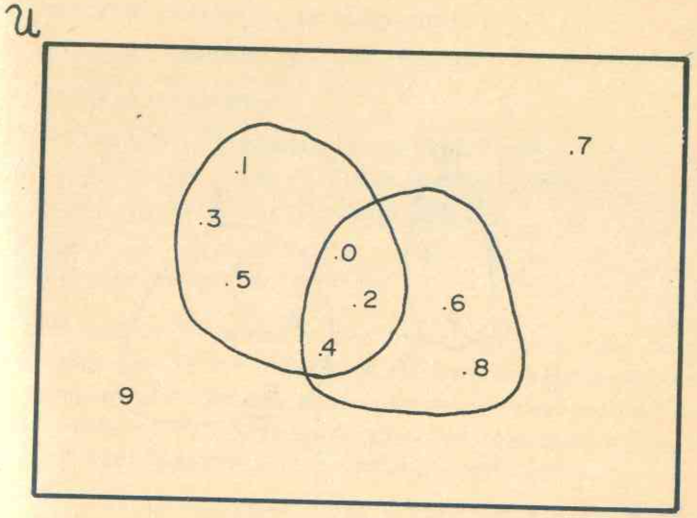
Otros ejemplos más abstractos, pero que los alumnos podrán entender sin dificultad son los siguientes:

Sea $\mathcal{U}$, el conjunto de las letras de nuestro alfabeto;
A, el conjunto de letras de la palabra loma = { l, o a, m, }
B, el conjunto de letras de la palabra mano = { n, o, m, a. }



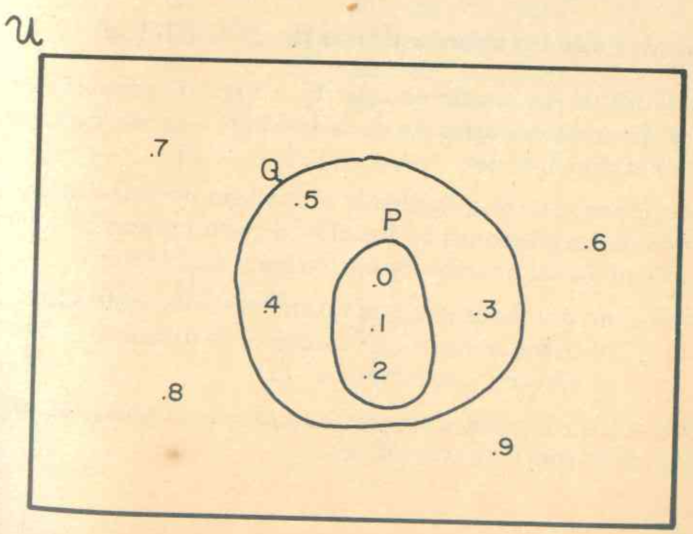
$A \cap B = \{ m, a, o \}$

Sea $\mathcal{U} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$
$M = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$
$N = \{ 0, 2, 4, 6, 8 \}$



$M \cap N = \{ 0, 2, 4 \}$

Sea $\mathcal{U} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$
$P = \{ 0, 1, 2 \}$
$Q = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$

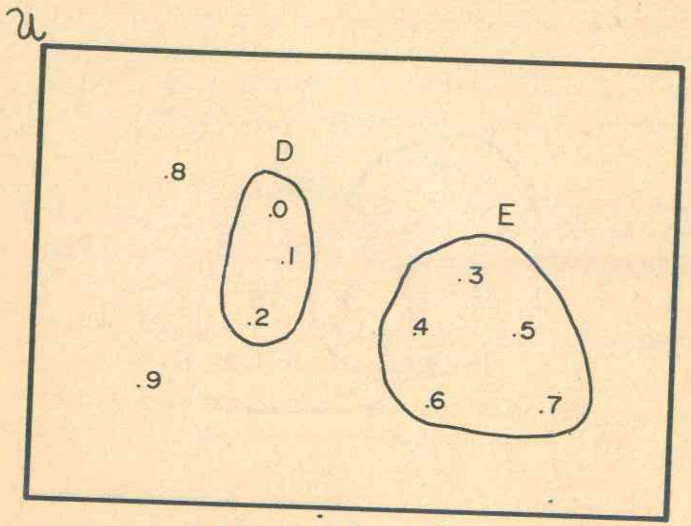


$P \cap Q = \{ 0, 1, 2 \} = P$

Sea $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$D = \{0, 1, 2\}$

$E = \{3, 4, 5, 6, 7\}$



$$D \cap E = \{\quad\} = \emptyset$$

Se puede ahora, definir la intersección entre dos conjuntos A y B de un referencial dado, como *el conjunto que posee los elementos comunes* de A y de B, y se escribe A ∩ B.

2. Afianzamiento sobre criterios de divisibilidad

En la Guía de 4o. grado se orientó acerca de cómo determinar los diversos criterios de divisibilidad, a saber: cuándo un número es divisible por: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Como dichos criterios facilitan el trabajo de esta unidad, se requiere de los alumnos la habilidad para aplicarlos adecuadamente en la realización de ejercicios y problemas.

Ejemplos: a) Analizar por qué números es divisible 41520
b) Analizar por qué numeros es divisible 2520
c) Un truco aritmético (1)

—Pedir a los alumnos que escriban en sus cuadernos, un número cualquiera de tres cifras;

---

(1) Adaptación de "El divertido juego de las matemáticas" Y. Perelmann. págs. 15, 16 y 17.

—Escribirlo nuevamente a continuación, de tal manera que se forme uno de seis cifras;

—dividir por 7 la cantidad obtenida;

—dividir por 11 el cociente obtenido;

—el resultado anterior, dividirlo por 13;

—solicitar el resultado.

Con esta base, el maestro o cualquier alumno que presente el truco, puede decir cuál fue el número (de 6 cifras) conformado inicialmente por cada alumno.

3. Múltiplos de un número

Es fácil construir tablas como las siguientes, que permiten lograr algunos de los múltiplos de un número dado, ya que este conjunto es infinito. Para eso se escriben, a partir de 1, los números en fila, siguiendo el orden natural, hasta el número del cual se necesita averiguar sus múltiplos.

La última columna constituye el conjunto de los múltiplos del citado número.

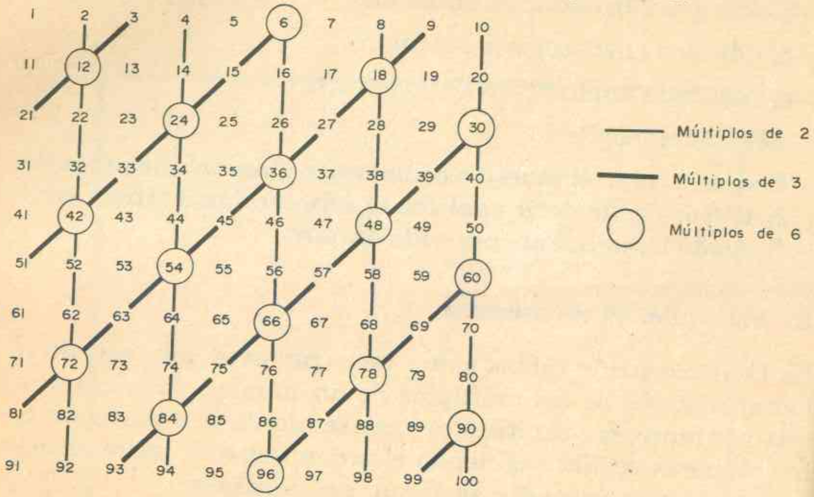
Ejemplos: múltiplos de 7

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.

Múltiplos de 3

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
.	.	.
.	.	.
.	.	

Una aplicación importante se observa en la siguiente tabla que permite, utilizando el concepto de intersección, determinar los múltiplos de 6, conociendo los de 2 y los de 3.



(múltiplos de 2) $\cap$ (múltiplos de 3) = (múltiplos de 6)

4. Números primos y compuestos

En la Guía de 4o. grado se inició el tratamiento referente a números primos y compuestos, tema que se amplía a continuación.

El maestro puede pedir a los alumnos que hallen el conjunto de los divisores de un número dado. (Dicho conjunto es finito).

Ejemplos:

divisores de 1 = $\{1\}$
divisores de 4 = $\{1, 2, 4\}$
divisores de 13 = $\{1, 13\}$
divisores de 48 = $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$
divisores de 53 = $\{1, 53\}$

Se observa que:

(divisores de 4) $\cap$ (divisores de 48) = $\{1, 2, 4\}$
(divisores de 13) $\cap$ (divisores de 48) = $\{1\}$
(divisores de 13) $\cap$ (divisores de 4) = $\{1\}$

Los números como 4 y 13; 48 y 13, que sólo poseen a 1 como divisor común, reciben el nombre de *primos relativos* o primos entre sí.

Otros ejemplos pueden aclarar mejor este concepto:

divisores de 15 = $\{1, 3, 5, 15\}$
divisores de 8 = $\{1, 2, 4, 8\}$
(divisores de 15) $\cap$ (divisores de 8) = $\{1\}$; por lo tanto, 8 y 15 son *primos relativos*.

Divisores de 7 = $\{1,7\}$
(divisores de 7) $\cap$ (divisores de 8) $\cap$ (divisores de 15) = $\{1\}$; por lo tanto 7, 8 y 15 son primos entre sí.

Divisores de 12 = $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
(divisores de 12 $\cap$ (divisores de 15) = $\{1, 3\}$; por lo tanto 12 y 15 no son primos relativos.

a. Proceso para saber si un número es primo

1) La forma universal para encontrar los primos comprendidos entre 1 y n ($n \in \mathbb{N}$) es la conocida como *criba de Eratóstenes* (ver Guía 4o. grado).

2) Por criterios de divisibilidad:

Si un número es múltiplo de 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc., entonces no es primo.

Ejemplos:

a) 453892 no es primo, ya que tiene, por lo menos, 3 divisores: $\{1 ; 453892 \text{ y } 2\}$.

b) 585735 no es primo, ya que tiene, por lo menos, 3 divisores: $\{1 ; 585735 \text{ y } 5\}$.

c) 9870630 no es primo, ya que tiene, por lo menos, 5 divisores: $\{1 ; 9870630; 2; 5; 10\}$.

3) Por extracción de la raíz cuadrada:

Se extrae la raíz cuadrada del número. Si es exacta, entonces no es primo; si no es exacta, se divide el número dado por los primos menores que la raíz. Si es divisible por alguno de ellos, no es primo; si no es divisible por ninguno de ellos, entonces es primo.

Ejemplos: a) ¿Es 121 primo?

$\sqrt{121}$ | 11 ; como su raíz es exacta,
-121 entonces 121 no es primo.
0

b) ¿Es 187 primo?

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{187} & 13 \\ \cline{2-2}
\underline{-100} & 23 \times 3 \\
87 & \\
\underline{-69} & \\
18 &
\end{array}$$

Como su raíz no es exacta, se divide 187 por los primos menores que 13, o sea: 11, 7, 5, 3, y 2.

$$\begin{array}{r|l}
187 & 11 \\ \cline{2-2}
\underline{-11} & 17 \\
77 & \\
\underline{-77} & \\
0 &
\end{array}$$

187 no es primo, pues tiene por lo menos 3 divisores: 1; 187 y 11

c) ¿Es 1027 primo?

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{1027} & 32 \\ \cline{2-2}
\underline{-900} & 62 \times 2 \\
127 & \\
\underline{-124} & \\
3 &
\end{array}$$

Su raíz no es exacta; entonces se divide 1027 por los primos menores que 32, o sea: 31, 29, 23, 19, 17, 13, 11, 7, 5, 3, 2.

$$\begin{array}{r|l}
1027 & 31 \\ \cline{2-2}
\underline{-93} & 33 \\
97 & \\
\underline{-93} & \\
4 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
1027 & 29 \\ \cline{2-2}
\underline{-87} & 35 \\
157 & \\
\underline{-145} & \\
12 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
1027 & 23 \\ \cline{2-2}
\underline{-92} & 44 \\
107 & \\
\underline{-92} & \\
15 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
1027 & 19 \\ \cline{2-2}
\underline{-95} & 54 \\
77 & \\
\underline{-76} & \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
1027 & 17 \\ \cline{2-2}
\underline{102} & 60 \\
07 & \\
\underline{-0} & \\
7 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
1027 & 13 \\ \cline{2-2}
\underline{-91} & 79 \\
117 & \\
\underline{-117} & \\
0 &
\end{array}$$

1027 no es primo, ya que tiene como mínimo tres divisores: 1; 1027 y 13.

d) ¿Es 1021 primo?

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{1021} & 31 \\ \cline{2-2}
\underline{-900} & 61 \times 1 \\
121 & \\
\underline{61} & \\
60 &
\end{array}$$

como su raíz no es exacta, se divide 1021 por los primos menores que 31, o sea: 29, 23, 19, 17, 13, 11, 7, 5, 3, 2.

$$\begin{array}{r|l}
1021 & 29 \\ \cline{2-2}
\underline{-87} & 35 \\
151 & \\
\underline{-145} & \\
6 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
1021 & 23 \\ \cline{2-2}
\underline{-92} & 44 \\
101 & \\
\underline{-92} & \\
9 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
1021 & 19 \\ \cline{2-2}
\underline{-95} & 53 \\
71 & \\
\underline{-57} & \\
14 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
1021 & 17 \\ \cline{2-2}
\underline{-102} & 60 \\
01 & \\
\underline{-0} & \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
1021 & 13 \\ \cline{2-2}
\underline{-91} & 78 \\
111 & \\
\underline{-104} & \\
7 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
1021 & 11 \\ \cline{2-2}
\underline{-99} & 92 \\
31 & \\
\underline{-22} & \\
9 &
\end{array}$$

1021 no es divisible por 7, ni por 5, ni por 3, ni por 2 (aplicar criterios de divisibilidad) y por lo tanto 1021 es un *número primo.*

4) Por la relación de minorancia:

Se empieza a dividir el número dado por los primos 2, 3, 5, 7, 11, etc., hasta encontrar un cociente que sea minorante ($\leq$) del divisor. Si esto ocurre, el número es primo. (Es claro que si en algún momento la división es exacta, el número no será primo).

Ejemplos:

a) ¿Es 1021 primo?

$$\begin{array}{r|l}
1021 & 2 \\ \cline{2-2}
\underline{-10} & 510 \\
02 & \\
\underline{-2} & \\
01 & \\
\underline{-0} & \\
1 &
\end{array}$$

$510 \nleq 2$ (510 no es minorante de 2)

$$\begin{array}{r|l} 1021 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{-92} & 340 \\ \multicolumn{1}{r}{12} & \\ \multicolumn{1}{r}{\underline{-12}} & \\ \multicolumn{1}{r}{01} & \\ \multicolumn{1}{r}{\underline{-0}} & \\ \multicolumn{1}{r}{1} & \end{array}$$

$340 \nleq 3$ (340 no es minorante de 3)

$$\begin{array}{r|l} 1021 & 5 \\ \cline{2-2} \underline{-10} & 204 \\ \multicolumn{1}{r}{02} & \\ \multicolumn{1}{r}{\underline{-0}} & \\ \multicolumn{1}{r}{21} & \\ \multicolumn{1}{r}{\underline{-20}} & \\ \multicolumn{1}{r}{1} & \end{array}$$

$204 \nleq 5$ (204 no es minorante de 5)

$$\begin{array}{r|l} 1021 & 7 \\ \cline{2-2} \underline{-7} & 145 \\ \multicolumn{1}{r}{32} & \\ \multicolumn{1}{r}{\underline{-28}} & \\ \multicolumn{1}{r}{41} & \\ \multicolumn{1}{r}{\underline{-35}} & \\ \multicolumn{1}{r}{6} & \end{array}$$

$145 \nleq 7$ (145 no es minorante de 7).

$$\begin{array}{r|l} 1021 & 11 \\ \cline{2-2} \underline{-99} & 92 \\ \multicolumn{1}{r}{31} & \\ \multicolumn{1}{r}{\underline{-22}} & \\ \multicolumn{1}{r}{9} & \end{array}$$

$92 \nleq 11$ (92 no es minorante de 11)

$$\begin{array}{r|l} 1021 & 13 \\ \cline{2-2} \underline{-91} & 78 \\ \multicolumn{1}{r}{111} & \\ \multicolumn{1}{r}{\underline{-104}} & \\ \multicolumn{1}{r}{7} & \end{array}$$

$78 \nleq 13$ (78 no es minorante de 13)

$$\begin{array}{r|l} 1021 & 17 \\ \cline{2-2} \underline{-102} & 60 \\ \multicolumn{1}{r}{01} & \\ \multicolumn{1}{r}{\underline{-0}} & \\ \multicolumn{1}{r}{1} & \end{array}$$

$60 \nleq 17$ (60 no es minorante de 17)

$$\begin{array}{r|l} 1021 & 19 \\ \cline{2-2} \underline{-95} & 53 \\ \multicolumn{1}{r}{71} & \\ \multicolumn{1}{r}{\underline{-57}} & \\ \multicolumn{1}{r}{14} & \end{array}$$

$53 \nleq 19$ (53 no es minorante de 19)

$$\begin{array}{r|l} 1021 & 23 \\ \cline{2-2} \underline{92} & 44 \\ \multicolumn{1}{r}{101} & \\ \multicolumn{1}{r}{\underline{-92}} & \\ \multicolumn{1}{r}{9} & \end{array}$$

$44 \nleq 23$ (44 no es minorante de 23)

$$\begin{array}{r|l} 1021 & 29 \\ \cline{2-2} \underline{-87} & 35 \\ \multicolumn{1}{r}{151} & \\ \multicolumn{1}{r}{\underline{-145}} & \\ \multicolumn{1}{r}{6} & \end{array}$$

$35 \nleq 29$ (35 no es minorante de 29)

$$\begin{array}{r|l} 1021 & 31 \\ \cline{2-2} \underline{-93} & 32 \\ \multicolumn{1}{r}{91} & \\ \multicolumn{1}{r}{\underline{-62}} & \\ \multicolumn{1}{r}{29} & \end{array}$$

$32 \nleq 31$ (32 no es minorante de 31)

$$\begin{array}{r|l} 1021 & 37 \\ \cline{2-2} \underline{-74} & 27 \\ \multicolumn{1}{r}{281} & \\ \multicolumn{1}{r}{\underline{-259}} & \\ \multicolumn{1}{r}{22} & \end{array}$$

$27 \leq 37$ (27 es minorante de 37)

Como aparece un cociente que es minorante del divisor, entonces 1021 es un *número primo.*

b) ¿Es 53 primo?

$$\begin{array}{r|l} 53 & 2 \\ \cline{2-2} \underline{-4} & 26 \\ \multicolumn{1}{r}{13} & \\ \multicolumn{1}{r}{\underline{-12}} & \\ \multicolumn{1}{r}{1} & \end{array}$$

; $26 \nleq 2$

$$\begin{array}{r|l} 53 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{-3} & 17 \\ \multicolumn{1}{r}{23} & \\ \multicolumn{1}{r}{\underline{-21}} & \\ \multicolumn{1}{r}{2} & \end{array}$$

; $17 \nleq 3$

$$\begin{array}{r|l} 53 & 5 \\ \cline{2-2} \underline{-5} & 10 \\ \multicolumn{1}{r}{03} & \\ \multicolumn{1}{r}{\underline{-0}} & \\ \multicolumn{1}{r}{3} & \end{array}$$

; $10 \nleq 5$

$$\begin{array}{r|l} 53 & 7 \\ \cline{2-2} \underline{-49} & 7 \\ \multicolumn{1}{r}{4} & \end{array}$$

; $7 \leq 7$ Como aparece un cociente, minorante del divisor, entonces 53 es un *número primo.*

b. Descomposición de un número en sus factores primos

Sabemos que si un número es compuesto, puede expresarse como el producto de dos factores. Ejemplos:

$$40 = 5x8$$
$$60 = 10x6$$
$$100 = 25x4$$
$$64 = 8x8$$

Si seguimos este proceso con los factores compuestos, hacemos una descomposición total de un número compuesto en sus factores primos. Al considerar los ejemplos anteriores, se tiene:

$40 = 5x8 = 5x2x4 = 5x2x2x2 = 2x2x2x5 = 2^3x5$

$60 = 10x6 = 2x5x6 = 2x5x2x3 = 2x2x3x5 = 2^2x3x5$

$100 = 25x4 = 5x5x2x2 = 2x2x5x5 = 2^2x5^2$

$64 = 8x8 = 2x4x2x4 = 2x2x2x2x2x2 = 2^6$

El proceso más conocido para descomponer un número en sus factores primos, es el de dividir el número por 2, tantas veces como sea posible; luego el cociente se divide por 3, tantas veces como se pueda, etc., hasta que quede 1 al final. Los siguientes ejemplos son más claros que cualquier explicación:

Descomponer 84 en sus factores primos:

84	2
42	2
21	3
7	7
1	

$\Rightarrow 84 = 2x2x3x7 = 2^2x3x7$

Descomponer 640 en sus factores primos:

640	2
320	2
160	2
80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

$\Rightarrow 640 = 2x2x2x2x2x2x2x5 = 2^7x5$

Descomponer 2700 en sus factores primos:

2700	2
1350	2
675	3
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

$\Rightarrow 2700 = 2x2x3x3x3x5x5 = 2^2x3^3x5^2$

5. Máximo común divisor

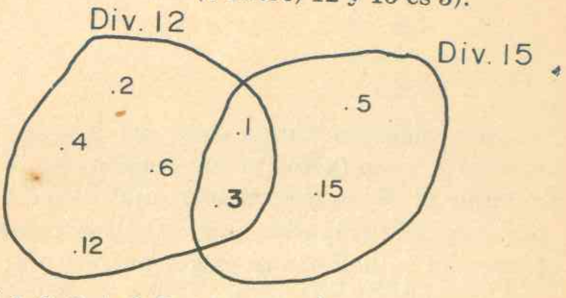
Consideremos los números 12 y 15. Sabemos que divisores de 12 = $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ y divisores de 15 = $\{1, 3, 5, 15\}$. Ahora, (divisores de 12) ∩ (divisores de 15) = $\{1, 3\}$; es decir, $\{1, 3\}$ es el conjunto de divisores comunes de 12 y 15.

Dentro de estos divisores comunes, el más grande o máximo de ellos es 3. Decimos entonces, que el divisor común máximo o el *máximo común divisor* de 12 y 15 es 3.

Así, escribiremos:

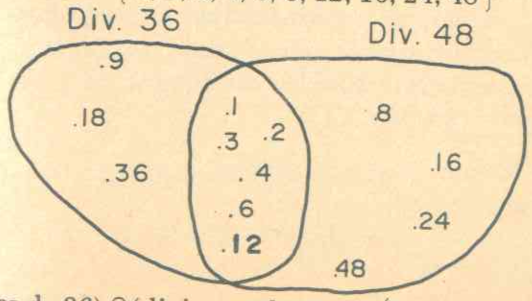
m.c.d (12, 15) = 3 (el máximo común divisor de (o entre) 12 y 15 es 3).

Gráficamente:



Divisores de 36 = $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

divisores de 48 = $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$



(divisores de 36) ∩ (divisores de 48) = $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Entonces, m. c. d. (36, 48) = 12.

Procesos para hallar el m. c. d. de varios números

Siempre es posible hallar el máximo común divisor de dos o más números por el método anterior, o sea hallando todos los divisores comunes (la intersección de los divisores) y tomando de ellos el mayor (máximo). Pero este método es un poco tedioso cuando se trata de números bastante grandes. Para resolver este problema existen dos formas conocidas: una, por descomposición factorial; y la otra, por divisiones sucesivas.

1. El m. c. d. por descomposición factorial

Ejemplos: Hallar m. c. d. (36, 48)

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \Longrightarrow 36 = 2x2x3x3 = 2^2x3^2$$

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \Longrightarrow 48 = 2x2x2x2x3 = 2^4x3$$

En este ejemplo vemos que en ambas descomposiciones, aparece 2 como factor primo común; en 36 está como 2^2 y en 48 como 2^4. Para determinar cuál de los dos factores primos comunes debe tomarse, conviene hacer que los alumnos establezcan la relación que existe entre unos y otros; así, entre 2^2 y 2^4, sabrán que 2^2 es divisor de 2^4, en tanto 2^4 no lo es ni lo puede ser, de 2^2, entre naturales.

Por tanto 2^2 es divisor común de los números dados y es el factor primo común que se selecciona. Lo mismo sucede con el 3 como factor primo común: en 36 está 3^2 y en 48 como $3 = 3^1$ por tanto se toma 3^1.

El producto de los divisores primos comunes con su menor exponente, es el m.c.d.

Así, el m. c. d. $(36, 48) = 2^2 . 3^1$

m. c. d. $(36, 48) = 4 . 3$

m. c. d. $(36, 48) = 12$

Hallar m. c. d. (60, 75).

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

m. c. d. $(60, 75) = 3 . 5$

m. c. d. $(60, 75) = 15$

Obsérvese que no consideramos el 2, porque no es factor de 75. (No es un factor común a 60 y 75).

Hallar m. c. d. (60, 80, 90)

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

m. c. d. $(60, 80, 90) = 2 . 5$

m. c. d. $(60, 80, 90) = 10$

2. El m. c. d. por divisiones sucesivas

Esta forma, presentada por Euclides en su obra "Los Elementos", consiste en dividir el número mayor por el menor. Si la división es exacta, el número menor será el m. c. d. Ejemplo: hallar el m. c. d. (225, 25).

$$\begin{array}{r|l} 225 & \underline{25} \\ \underline{-225} & 9 \\ 000 & \end{array}$$

$\Longrightarrow$ m. c. d. $(225, 25) = 25$

Si la división no es exacta, se divide el divisor por el residuo (el divisor pasa a ser dividendo y el residuo, divisor). Se continúa este proceso hasta encontrar una división exacta. El último de los divisores, será el m. c. d.

Ejemplos:

Hallar el m. c. d. (5830, 1020)

5830 | 1020
-5100 5
730

1020 | 730
-730 1
290

730 | 290
-580 2
150

290 | 150
-150 1
140

150 | 140
-140 1
10

140 | 10
-10 14
40
-40
0

⟹ m. c. d. (5830, 1020) = 10

Hallar el m. c. d. (75, 240)

240 | 75
-225 3
15

75 | 15
-75 5
0

⟹ m. c. d. (75, 240) = 15

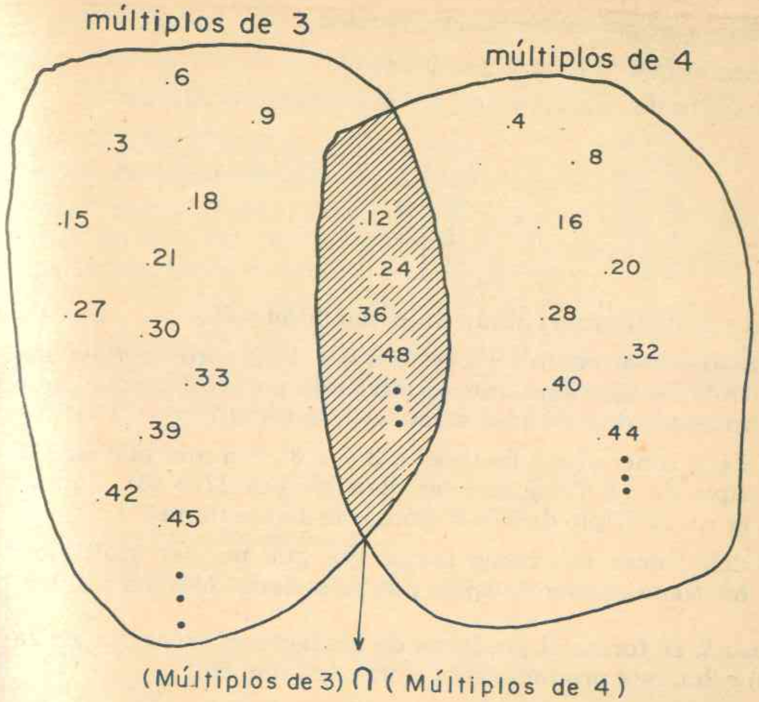
6. Mínimo común múltiplo

Los alumnos saben que el conjunto de los múltiplos de un número es un conjunto infinito.

Así: múltiplos de 3 = { 3, 6, 9, 12, 15, 18... }
múltiplos de 4 = { 4, 8, 12, 16, 20, 24...}
múltiplos de 11 = {11, 22, 33, 44, ... }

Ahora van a determinar los múltiplos comunes de dos o más números; y de ellos, el múltiplo menor. Ejemplo:

múltiplos de 3 = { 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36. ...}
múltiplos de 4 = { 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, ...}



(Múltiplos de 3) ∩ (Múltiplos de 4) = { 12, 24, 36, 48, ...}
Este es el conjunto de los múltiplos comunes, de los cuales el menor es 12.

Se dice entonces que este número (12), es el múltiplo común mínimo o el *mínimo común múltiplo* de 3 y 4. Para abreviar la escritura se escribirá:

m. c. m. (3, 4) = 12

Lógicamente se observa que el m. c. m. de dos o más números, tiene que ser mayor o igual que el más grande de ellos.

Por ejemplo:	m. c. m. (3, 4)	tiene que ser	$\geq$ 4
	m. c. m. (12,21,75)	" " "	$\geq$ 75
	m. c. m. (16, 16)	" " "	$\geq$ 16
	m. c. m. (12, 24)	" " "	$\geq$ 24
	m. c. m. (54, 60)	" " "	$\geq$ 60

Procesos para hallar el m. c. m. de varios números

Las formas más usuales para hallar el m. c. m. entre dos o más números, son: por medio del m. c. d. y por descomposición de los números en sus factores primos.

1. El m. c. m. por descomposición factorial

Ejemplo: hallar el m. c. m. (54, 60)

Paso 1: se descompone 54 y 60 en sus factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 54 = 2 \text{ x} 3^3 \\ 60 = 2^2 \text{x} 3 \text{ x} 5 \end{array} \right.$$

Paso 2: el mímimo común múltiplo de 54 y 60,

a) debe tener como factores a 2 y a 2^2 (ya que por ser múltiplo de 60, tiene que ser divisible por 4). Como 2^2 es un múltiplo de 2, (ó 2^2 contiene a 2) se toma 2^2;

b) debe tener como factores a 3 y a 3^3 (ya que por ser múltiplo de 54, tiene que ser divisible por 27 ó 33). Como 3^3 es un múltiplo de 3 (ó 3^5 contiene a 3) se toma 3^3;

c) debe tener a 5 como factor (ya que por ser múltiplo de 60, tiene que ser divisible por 5), es decir, se toma 5;

Paso 3: se forma el producto de los factores escogidos en 2a), 2b) y 2c); este producto será el m. c. m. (54, 60).

m. c. m. (54, 60) = $2^2 \text{x} 3^3 \text{x} 5 = 4 \text{x} 27 \text{x} 5 = 108 \text{x} 5 = 540$

$$\Longrightarrow \boxed{\text{m. c. m. } (54, 60) = 540}$$

Hallar el m.c.m. (50, 120, 150)

Paso 1:

$$\begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 50 & = & 2 \text{x} 5^2 \\ 120 & = & 2^3 \text{x} 3 \text{x} 5 \\ 150 & = & 2 \text{x} 3 \text{x} 5^2 \end{array} \right.$$

Paso 2: a) Se escoge 2^3

b) Se excoge 3

c) Se escoge 5^2

Paso 3:

$$\begin{aligned} \text{m.c.m. } (50, 120, 150) &= 2^3 \text{x} 3 \text{x} 5^2 \\ &= 8 \text{ x} 3 \text{x} 25 \\ &= 600 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\text{m.c.m. } (50, 120, 150) = 600}$$

Con la realización de muchos más casos similares se llega a deducir que el m. c. m. de varios números se obtiene descomponiendo éstos en productos de factores primos, y calculando el producto de los factores comunes y no comunes elevados a sus mayores exponentes:

Casos particulares

a) Cuando uno de los números es múltiplo del otro

Es fácil observar que si uno de los números es múltiplo del otro, v.gr. 60 y 20, (60 es múltiplo de 20), entonces ese número es también el mínimo común múltiplo.

$$\text{m.c.m. } (60, 20) = 60$$

b) Cuando dos números son primos entre sí (primos relativos)

También, si dos números son primos entre sí, como 8 y 9 ($8 = 2^3$ y $9 = 3^2$), el m. c. m. de ellos es igual al producto de los mismos.

$$\text{m.c.m. } (8, 9) = 2^3 \text{x} 3^2 = 8 \text{x} 9 = 72$$

2. El m.c.m. por medio del m.c.d.

Ejemplo: Hallar m. c. m. (54, 60)

Paso 1:

Se multiplican entre sí los números 54 y 60.
54x60 = 3 240

Es lógico que 3 240 es *múltiplo común* de 60 y 54;

Paso 2:

—dividimos 3 240 por 2; se obtiene 1 620 que es un *múltiplo común* de 60 y 54;

—dividimos 3 240 por 3; se obtiene 1 080 que es un *múltiplo común* de 60 y 54;

—dividimos 3 240 por 6; se obtiene 540 que es un *múltiplo común* de 60 y 54.

Obsérvese que hemos dividido 3 240 por números que son *divisores comunes* a 54 y a 60. Los resultados así obtenidos son claramente múltiplos comunes de 54 y 60.

Es lógico que al dividir el producto de 54x60, por el máximo de los divisores comunes, es decir, por el m.c.d. (54, 60), se obtiene el mínimo de los múltiplos comunes, es decir,

$$\text{m.c.m. } (54, 60) = \frac{54 \text{ x } 60}{\text{m.c.d. } (54{,}60)} = \frac{3\,240}{6} = 540$$

Con la realización de otros casos similares se llega a generalizar que, m.c.m. (a,b) = $\frac{a \,.\, b}{\text{m . c . d . } (a \,.\, b)}$

Se pueden presentar problemas interesantes donde se apliquen los conceptos de m.c.d. y m.c.m. Veamos algunos ejemplos:

tres personas desean repartir 180 libros, 240 juguetes y

$ 360 respectivamente, entre cierto número de niños, en tal forma que cada uno reciba un número exacto de libros, juguetes y pesos. ¿Cúal es el mayor número de niños que puede recibir este beneficio?

Este problema, como el maestro puede observar, se reduce a encontrar el m.c.d. (180, 240, 360).

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 240 & 2 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

m.c.d. (180, 240, 360) = 2^2x3x5 = 4x3x5 = 60
Respuesta: 60 niños.

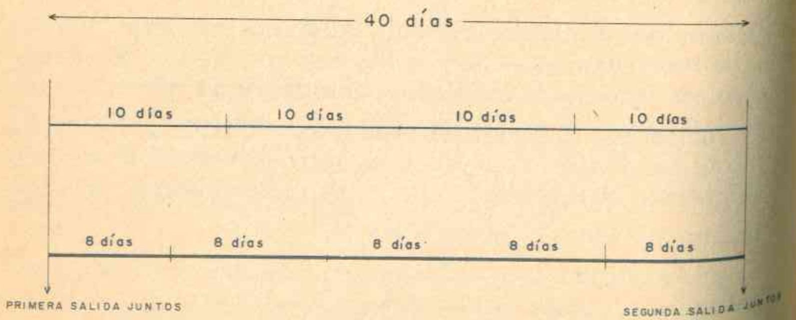
Dos barcos parten para un mismo lugar: el primero cada 10 días y el segundo cada 8. ¿Cuántos días transcurren entre dos salidas simultáneas consecutivas?

Aquí el problema se resuelve, usando m. c. m.

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

m. c. m. (8, 10) = 2^3x5 = 8x5 = 40
Respuesta: 40 días.

Es posible visualizar este problema, valiéndonos de segmentos de longitudes 10 y 8 respectivamente, así:



C. UNIDAD TRES

SISTEMAS DE NUMERACION

Objetivo general

Proporcionar experiencias que permitan al alumno comprender la estructura de diferentes sistemas de numeración y expresar correctamente cualquier número natural, en una u otra base de agrupación, atendiendo al valor posicional de sus cifras.

Objetivos específicos

El alumno debe:

—Comprender que desde tiempos primitivos el hombre, por la necesidad de contar, intuyó la idea de número, se ingenió la forma de expresarla por medio de símbolos y estructuró sistemas propios de numeración.

—Ser capaz de determinar el valor de posición de las cifras en el sistema de numeración decimal y transferirlo a sistemas que adoptan otras bases de agrupación diferentes de diez.

—Expresar un número, dado en base decimal, a otra base cualquiera.

—Expresar un número, dado en una base cualquiera, a base decimal.

1. Orígenes de los sistemas de numeración

El hombre primitivo usó en un principio objetos para representar números. Más tarde utilizó expresiones como rayas o marcas en las paredes de sus cavernas, cortes en la madera, figuras de animales y de objetos, etc. Tales marcas sirvieron simplemente para llevar la cuenta y al surgir preguntas sobre la idea de "cuántos", fácilmente podían contestarlas señalando las marcas sin recurrir a la terminología técnica: uno, dos, etc.

Con el transcurso del tiempo, el hombre inventó sonidos o nombres (fonemas) para representar los números; y, finalmente, símbolos abstractos (numerales) como los que hoy se conocen y nos son familiares.

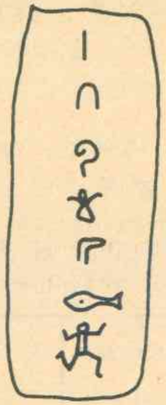
Fue un gran paso del hombre cuando empezó a agrupar sus marcas para comprenderlas con mayor facilidad pues, casi al mismo tiempo, advirtió la posibilidad de establecer un conjunto de reglas para la agrupación de aquellas. El número empleado como base para agrupar, tuvo alguna relación con un objeto físico común; así, por los 5 dedos de una mano surgió el 5 como grupo básico; en igual forma el grupo 10, por los dedos de ambas manos y el grupo 20,por los dedos de todas las extremidades. Las palabras "veintena" y "docena" indican que no sólo 5 y 10 se emplearon como base en la antigüedad. Al conjunto de símbolos y de reglas para combinar estos símbolos y poder escribir cualquier número, por grande o pequeño que este sea, se denomina SISTEMA DE NUMERACION. El número de elementos o símbolos que se utilizan, recibe el nombre de BASE del sistema. Nuestro sistema, del cual nos ocuparemos más detalladamente en otra parte de esta Unidad, recibe el nombre de SISTEMA DECIMAL o DECUPLO porque su base es 10, es decir, utiliza 10 símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) para escribir cualquier número. En nuestro sistema, y en cualquier otro, funcionan las operaciones (reglas) de adición y de multiplicación y por lo tanto, para que se cumpla la propiedad idéntica, deben existir las identidades o módulos de la adición y de la multiplicación respectivamente (0 y 1). Esto significa que en cualquier sistema de numeración, tienen que existir por lo menos dos elementos y de aquí podemos concluir que la menor de las bases es 2. Así que, cualquier mayorante de 2, puede servir de base para un sistema de numeración. Tal situación nos permite afirmar que el conjunto de sistemas de numeración es infinito.

2. Sistemas antiguos de numeración

Es interesante mencionar algunos sistemas antiguos de numeración, ya que, además del interés histórico, es posible compararlos con el nuestro y comprender mejor lo maravilloso de nuestro sistema decimal y la importancia del valor de posición y del cero.

Sistema Egipcio

Este sistema tenía los siguientes símbolos:

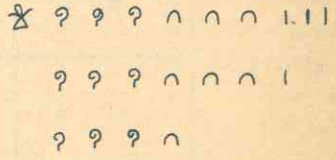


1	**Raya vertical**
10	**Hueso**
100	**Cuerda arrollada (o rollo)**
1.000	**Flor de loto**
10.000	**Dedo apuntando**
100.000	**Pez**
1.000.000	**Hombre asombrado**

Empleaban el número 10 como base para agrupar y repetían un símbolo hasta 9 veces.

Así por ejemplo:

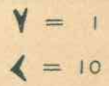
1.974 se escribía



El significado de un símbolo de este sistema no se alteraba aunque se cambiara el orden; lo esencial era que, en cada caso, el numeral representaba la suma de los números indicados por todos los símbolos utilizados. Por otra parte, en este sistema no había símbolo que representara el cero.

Comparando el numeral egipcio y el numeral decimal posicional, nos damos cuenta de que los egipcios no tenían un sistema posicional.

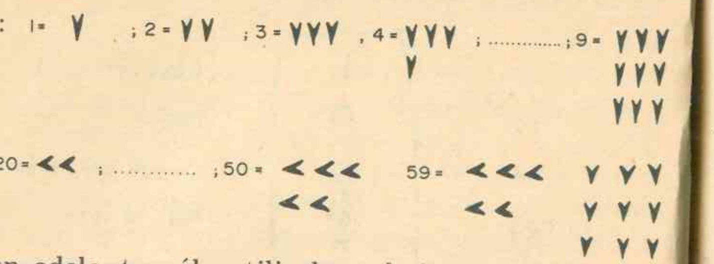
Sistema Babilónico



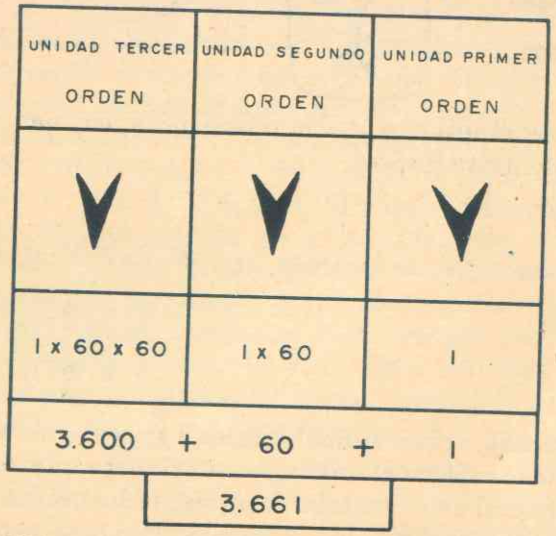
La numeración babilónica tenía rudimentos de un sistema de notación posicional, ya que el mismo símbolo se empleaba para representar diferentes grupos de distinta cantidad, según su posición en el numeral. Para escribir todos los numerales empleaban solamente dos símbolos.

El símbolo que representa la unidad simple lo repetían hasta 9 veces: no así el que representa 10 unidades simples, que sólo lo repetían 5 veces, porque el sistema era sexagesimal (base 60).

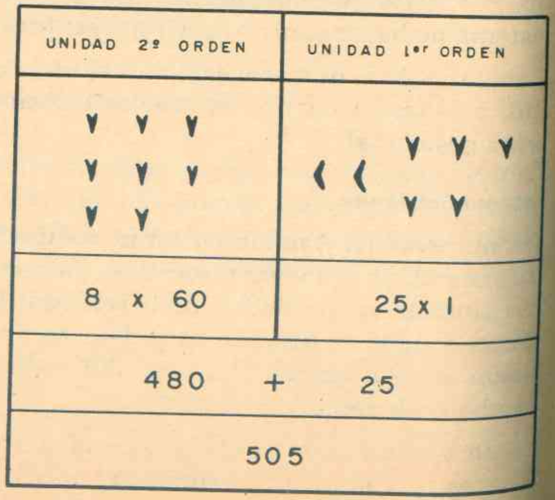
Ejemplos:



De aquí en adelante, sólo utilizaban el signo que representaba la unidad simple, para indicar valores posicionales así:



Era muy difícil entender la escritura de números grandes, debido a que no existía el cero.
Ejemplo:
505 lo escribían así:



En resumen, en este sistema se puede apreciar:

- —que el número de símbolos no coincide con la base (tenían dos símbolos y la base era 60);
- —ausencia del cero;
- —rudimentos de un sistema de notación posicional.

Sistema Romano

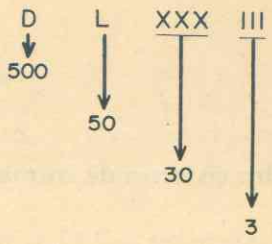
Es uno de los más raros que existe. Parece tener su origen en un sistema de numeración de base 5.

Utiliza 7 símbolos en su escritura, a saber:

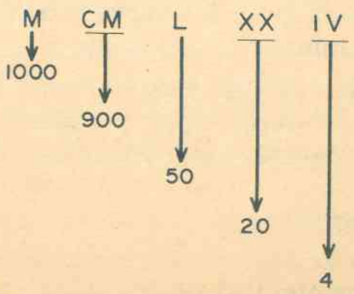
Valor	1	5	10	50	100	500	1 000
Símbolo	I	V	X	L	C	D	M

Algunos símbolos pueden repetirse hasta tres veces a la derecha y actúan como sumando. Ejemplos: VI; VII; VIII; XI; DCC, y una vez a la izquierda, donde actúan como sustraendo. Ejemplos: IV; IX; CD; XL. Este sistema carece del cero y del valor de posición; así, en el número CXXX (130) cada una de las X vale 10 a pesar de ocupar posiciones diferentes en la escritura.

583 se escribe



1.974 se escribe



Una raya horizontal colocada encima de un número aumenta mil veces su valor.

Ejemplo: $\overline{D} = 500x1\,000 = 500\,000$
$\overline{L} = 50x1\,000 = 50\,000$
$\overline{\overline{L}} = 50x1\,000 \ x \ 1\,000 = 50\,000\,000$

Sistema Maya

El sistema vigesimal o de base 20, propio de los Mayas, civilización americana originaria de Centro América (Guatemala), utilizaba el valor de posición y parece que tenía el cero. Permitía combinar solo tres símbolos para escribir los números: punto (.); guión (-); óvalo (⬭).

VALORES	SIMBOLOS
1	•
5	—
10	═
20	
60	
100	
180	

3. Nuestro sistema de numeración

Tuvo su origen en la India; más tarde los árabes lo dieron a conocer en Europa; y de ahí, a través de España, vino a nosotros.

Posee los 10 conocidos símbolos, llamados dígitos; por esta razón, también se le conoce con el nombre de sistema decimal o décuplo.

En nuestro sistema existe el cero y el valor de posición. Es utilizado universalmente porque aporta una evidente ventaja para el cálculo, tomar como base el número 10.

Valor de posición

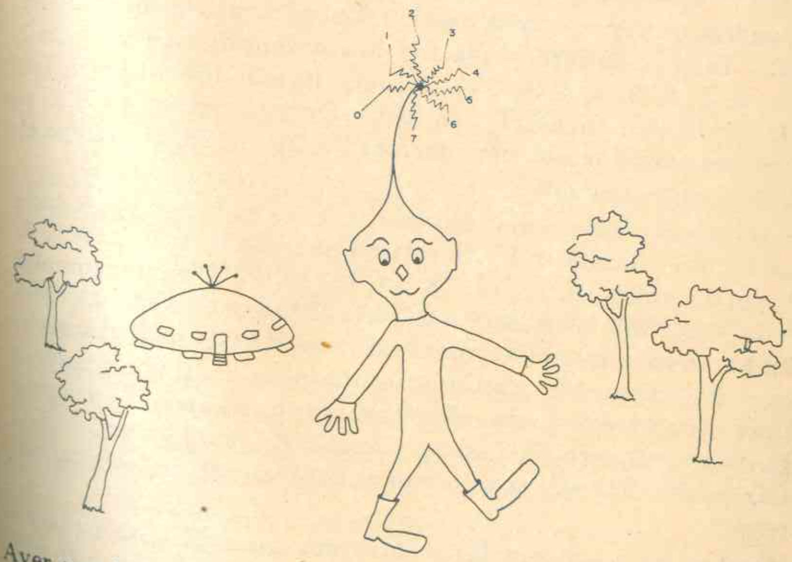
También se le conoce como VALOR RELATIVO; es fácil de comprender y se refiere al valor que una cifra tiene según el lugar que ocupa en la escritura. Le asigna un valor 10 veces mayor, a una cifra colocada inmediatamente a la izquierda de otra, y 10 veces menor, a una situada inmediatamente a la derecha de otra. Así, en el número 555, el de la derecha vale 5, el del centro 50 y el de la izquierda 500.

Ejemplo: 3 3 3 3 3

$3x10^{0} = 3x\ 1 = 3$
$3x10^{1} = 3x10 = 30$
$3x10^{2} = 3x10x10 = 300$
$3x10^{3} = 3x10x10x10 = 3\,000$
$3x10^{4} = 3x10x10x10x10 = 30\,000$

4. Sistema octal o de base 8

Para hacer amena la introducción de un sistema numérico de agrupación, distinto al decimal, presentamos a manera de ejemplo, la siguiente leyenda:



Ayer por la noche nos encontramos con un ser de otro planeta. Se parecía mucho a nosotros, y un aparato que tenía en la frente, le permitía comunicarse con los habitantes de la tierra. Nos contó sobre las bellezas de su planeta; de sus dos soles, de sus mares de agua roja, etc.

Nuestro amigo, a quien llamaremos RAGO, tenía algo muy particular que lo diferenciaba de nosotros, a saber: cuatro dedos en cada mano, pues carecía de pulgar. Le explicamos que nuestro sistema de numeración, utiliza diez elementos (debido posiblemente a que tenemos 10 dedos en las manos). El, a su vez, nos planteó que en su planeta, el sistema usado tenía 8 como base (la explicación es clara).

Al principio, nos fue difícil entendernos, pero al final pudimos establecer un paralelismo entre los dos sistemas.

Sus ocho cifras eran un poco complicadas, pero para entendernos, acordamos llamarlas: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,. Ellos tenían el cero y utilizaban el concepto de valor de posición como nosotros. Escribimos en paralelo los 16 primeros números, así:

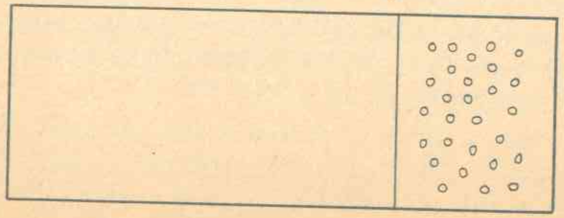
Sistema Rago	0	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15	16	17
Decimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Observamos admirados que los dos sistemas, en el fondo se comportaban igual.

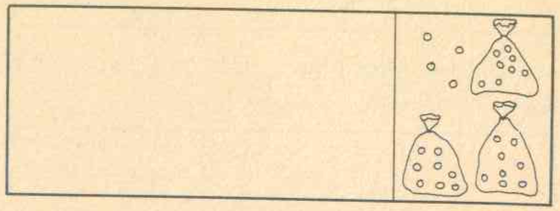
Nosotros escribimos de 0 hasta 9. Luego tomamos la primera cifra distinta de cero, o sea 1, y la combinamos en su orden, con 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, para formar los números 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, y 19. Después tomamos el 2, y otra vez combinamos para formar 20, 21, ..., 28, 29. Luego el 3, y así sucesivamente.

RAGO, en igual forma, escribía 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. A continuación tomaba el 1 y lo combinaba con 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, para formar 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17. Después tomaba el 2, y escribía los números 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27. Nos dimos cuenta inmediatamente de que RAGO podía escribir, con sus 8 símbolos, cualquier número natural, por grande o pequeño que este fuera. Pensamos entonces, cómo escribiría RAGO el número 4587 en su sistema. En igual forma, si RAGO escribe 123402, ¿cuál sería el equivalente en nuestro sistema?

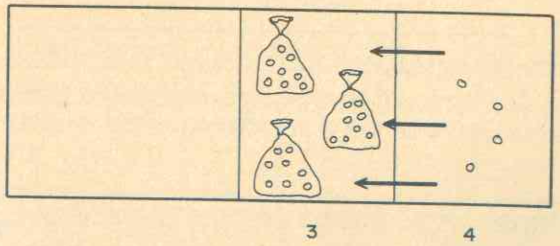
Veamos un caso sencillo y la forma como RAGO pudo resolverlo. Le dijimos: expresa 28 en tu sistema. Tomó 28 piedrecitas, tal como se observa en el dibujo:



Nos explicó que así como en nuestro sistema, cambiábamos 10 unidades de cualquier orden por una del orden siguiente (de derecha a izquierda), en su sistema (base 8) se cambiaban 8 unidades de cualquier orden por una del orden siguiente (de derecha a izquierda). Diciendo esto, formó paquetes de 8 unidades cada uno, así:



Entonces, cambió 8 unidades de primer orden, por una del segundo orden (paquetes de 8), así:

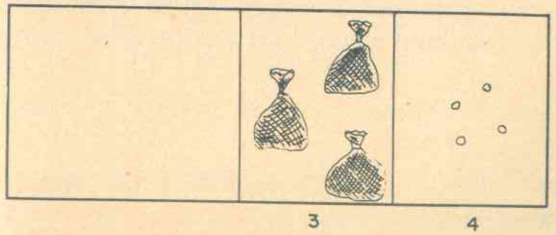


Obtuvo así 4 unidades simples, y 3 de segundo orden. Esto le permitió escribir:

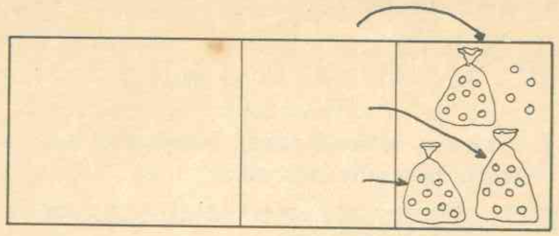
$$28_{10} = 34_8$$

(Se lee: "veintiocho en base diez, es igual a tres, cuatro, en base ocho").

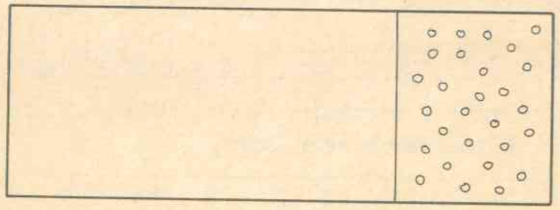
Ahora, RAGO nos pidió comprobar la anterior igualdad. Nosotros, representantes de la Tierra y del sistema decimal, emprendimos la tarea, realizando el proceso contrario. "Escribimos", usando las piedras, el número 34_8:



Usando el principio del valor relativo, sabemos que cada paquete del segundo cajón (de izquierda a derecha) se puede cambiar por un paquete de 8 en el primer cajón, o sea:



Al dejar sueltos los paquetes, contamos las piedras y, como era de esperar, había 28.



Nos planteamos entonces un ejercicio más difícil: expresar 123_8 (uno, dos, tres, en base ocho) en nuestro sistema. Recurrimos al concepto de valor relativo o valor de posición y las cosas resultaron más fáciles.

Unidades de tercer orden	Unidades de segundo orden	Unidades de primer orden	
1	2	3	base 8
1x8x8	2x8	3x1	
64	16	3	base 10
64+16+3			base 10
83			base 10

$123_8 = 83_{10}$ (uno, dos, tres, en base ocho, es igual a ochenta y tres, en base diez).

Para estar completamente seguros de nuestros cáculos, realizamos el proceso contrario, es decir, llevar el número 83_{10} a base 8.

Cambiar 8 por 1, equivale a dividir por 8. Entonces,

83 |8
03 10 — 10 unidades de segundo orden, en base 8.
3 ⟶ unidad de primer orden, en base 8.

10 |8
2 1 — 1 unidad de tercer orden, en base 8.
2 ⟶ 2 unidades de segundo orden, en base 8.

Formamos así el número:

Unid. 3er. orden	Unid. 2o. ord.	Unid. 1er. ord.	
1	2	3	base 8

Realizamos otra vez el proceso en una forma más compacta:

83 |8
019 10 |8
③ 2 1
② ①

U. de 1er. orden	U. de 2o. O.	U. de 3er. O.
3	2	1

$\Longrightarrow 83_{10} = 123_8$

Otro ejemplo:

$$4342103_8 = x_{10}$$

7o. ord.	6o. ord.	5o. ord.	4o. ord.	3er. ord.	2o. ord.	1er. ord.	
4	3	4	2	1	0	3	base 8
4x8x8x8 x8x8x8	3x8x8x8 x8x8	4x8x8x8 x8	2x8x8x8	1x8x8	0x8	3x1	
1.048.576	98.304	16.384	1.024	64	0	3	base 10
1.048.576 +98.304 + 16.384 + 1.024 + 64 + 0 + 3							
1.164.355							base 10

$4\ 342\ 103_8 = 1.164.355_{10}$

Ahora, para comprobar si el ejemplo está bien hecho, realizamos el proceso contrario:

$1.164.355_{10} = x_8$

1.164.355 |8
36 145544 |8
44 65 18193 |8
4 3 15 21 2274 |8
35 74 59 67 284 |8
35 24 33 34 44 35 |8
3 0 1 2 4 3 4

$1.164.355_{10} = 4\ 342\ 103_8$

Después de varios ejemplos pudimos concluir con RAGO que, para expresar un número dado en base 8, en nuestro sistema, se siguen los pasos siguientes:

1. Se escribe el número según el valor de posición de sus cifras.

2. Se efectúan las multiplicaciones indicadas.
3. Se suman los resultados de estas multiplicaciones y se obtiene así el número en el sistema decimal.

Ahora: para expresar un número de nuestro sistema, en el sistema de RAGO, o sea en base 8, se hace lo siguiente:

1. Se divide el número dado por 8.
2. El cociente se vuelve a dividir por 8; el siguiente cociente por 8, y así sucesivamente, hasta cuando aparezca un cociente menor que 8.
3. Este último cociente, y los residuos anteriores, se escriben de derecha a izquierda, obteniéndose así el número en la base 8.

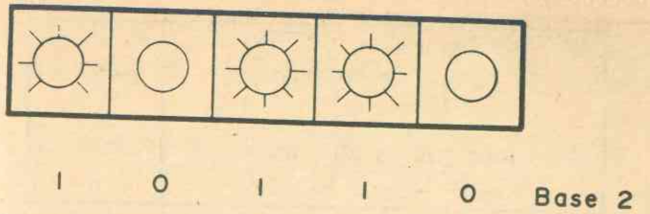
RAGO viajó a su planeta, y nosotros quedamos en la Tierra; un poco tristes por su partida, pero contentos de saber que en otros sitios del Universo existen seres con quienes —aunque escriben y tienen diferente número de símbolos para su sistema de numeración— nos podemos entender mediante el maravilloso lenguaje universal y sencillo de la matemática.

5. Sistema binario o diádico

Es el sistema de base más pequeña (2). LEIBNIZ, matemático alemán y uno de los creadores del cálculo infinitesimal, fue un apasionado del sistema binario, conocido por los chinos desde muchos años atrás.

Algún amigo de LEIBNIZ escribía: "Leibniz veía en el sistema diádico la imagen de la creación. Consideraba que la unidad representaba a Dios, y el cero, a la nada; que el Ser Supremo creaba todos los seres de la nada, del mismo modo que la unidad y el cero expresaban todos los números de su sistema de numeración".

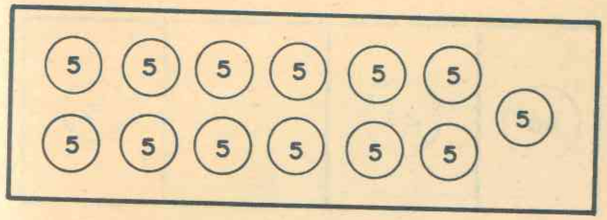
Este sistema reviste un interés especial porque, además de resultar útil en la solución de varias cuestiones matemáticas, como veremos más adelante, es el más apropiado para el funcionamiento de las calculadoras electrónicas de alta velocidad. Una llave eléctrica tiene dos posiciones: abierta (1) o cerrada (0). Así:

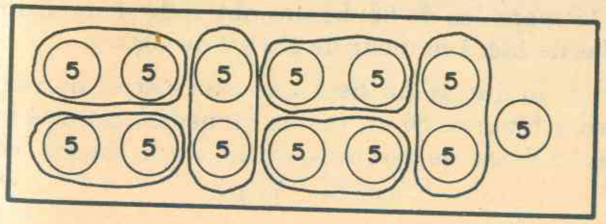


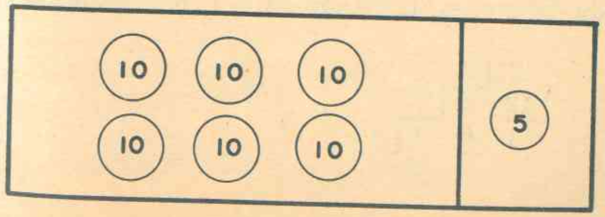
De ahí que se concreten los dos símbolos que este sistema requiere: (0 y 1). Con la ayuda de RAGO logramos establecer un paralelismo entre nuestro sistema y el sistema en base 8; por analogía, es fácil entender ahora el sistema binario.

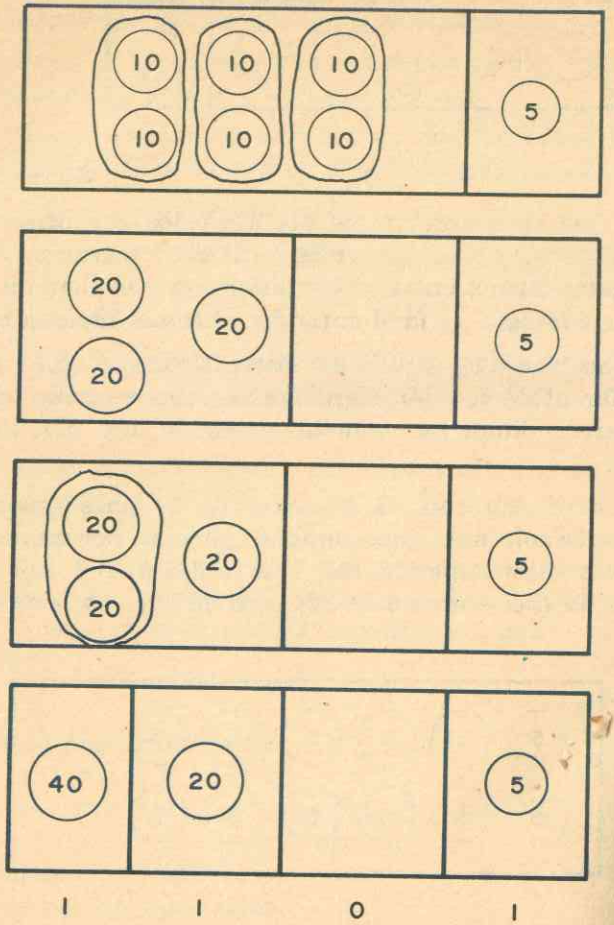
Puede motivarse el estudio del sistema binario con un cuento similar al de RAGO. Supongamos, por ejemplo, un país o un planeta donde las monedas valen: 5c, 10¢, 20¢, 40¢, 80c, 160¢, etc.

Vamos al banco con 13 monedas de 5¢ para cambiarlas. En el banco solamente nos cambian parejas, por monedas del inmediato valor superior, así: 2 monedas de 5 ¢, por una de 10¢; dos de 10¢, por una de 20¢; dos de 20¢, por una de 40¢, etc.









Con las 13 monedas de 5¢, hemos obtenido: 1 moneda de 5¢: 0 monedas de 10¢; 1 moneda de 20¢ y 1 de 40¢.

Realmente, lo que se ha hecho es expresar el número 13_{10} en la forma binaria. Si en vez de monedas, usamos piedras, o botones, o tapas de gaseosas, se llega a lo mismo, es decir,

$$13_{10} = 1101_2$$

Este mismo resultado se puede obtener por el ya conocido método de divisiones, utilizado en la explicación del sistema RAGO:

$$\begin{array}{rrrl} 13 & \underline{|\,2} & & \\ \underline{-12} & 6 & \underline{|\,2} & \\ 1 & \underline{-6} & 3 & \underline{|\,2} \\ & 0 & \underline{-2} & 1 \\ & & 1 & \end{array} \qquad 13_{10} = 1101_2$$

Para no dudar de nuestro trabajo, expresamos 1101 en nuestro sistema decimal. Nos valemos para eso, del valor de posición:

4o. orden	3er. orden	2o. orden	1er. orden	
1	1	0	1	base 2
1x2x2x2	1x2x2	0x2	1 x 1	
8	4	0	1	
8 + 4 + 0 + 1				
13				base 10

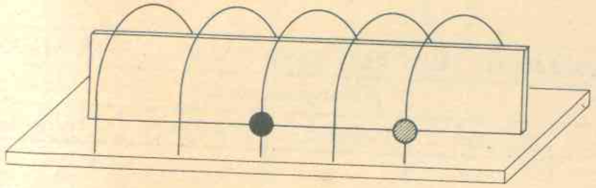
$$1101_2 = 13_{10}$$

Un ábaco, común y corriente, puede ser construido por los alumnos, para pasar números pequeños, de un sistema cualquiera a otro.

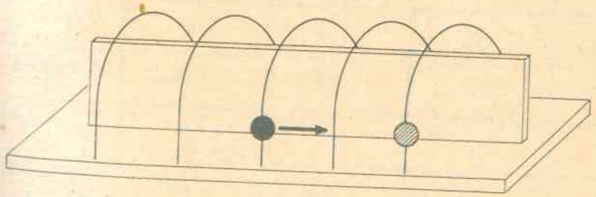
Creemos que no es necesario explicar el proceso del manejo del ábaco, ya que para esta utilización, sólo hay que aplicar el principio del valor relativo o valor de posición de las cifras.

Ejemplo: $101_2 = x_{10}$

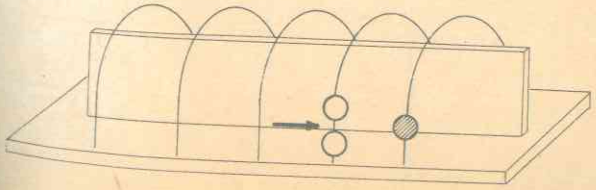
PRIMER PASO



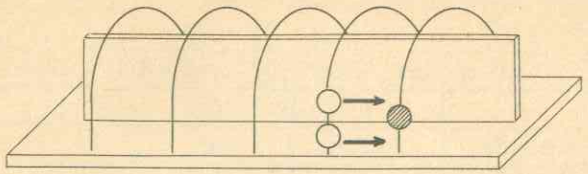
SEGUNDO PASO



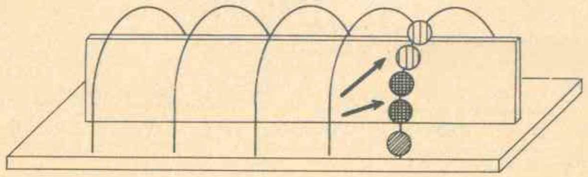
TERCER PASO



CUARTO PASO



QUINTO PASO



$$101_2 = 5_{10}$$

Como síntesis de diferentes sistemas de numeración con valor posicional y para apreciar claramente la aplicabilidad de la potenciación, se presenta el siguiente cuadro que muestra algunas características comunes para todos estos sistemas:

SISTEMAS DE NUMERACION CON VALOR POSICIONAL					
Valor posicional					
Posición 3	Posición 2	Posición 1	Posición 0	Símbolos	Base
2^3	2^2	2^1	2^0	0,1	2
3^3	3^2	3^1	3^0	0,1,2	3
4^3	4^2	4^1	4^0	0,1,2,3	4
5^3	5^2	5^1	5^0	0,1,2,3,4	5
6^3	6^2	6^1	6^0	0,1,2,3,4,5	6
7^3	7^2	7^1	7^0	0,1,2,3,4, 5,6	7
8^3	8^2	8^1	8^0	0,1,2,3,4, 5,6,7	8
9^3	9^2	9^1	9^0	0,1,2,3,4, 5,6,7,8	9
10^3	10^2	10^1	10^0	0,1,2,3,4, 5,6,7,8,9	10

Características comunes:

—Todo sistema de numeración con valor posicional tiene una base que puede ser cualquier número natural mayor que uno.

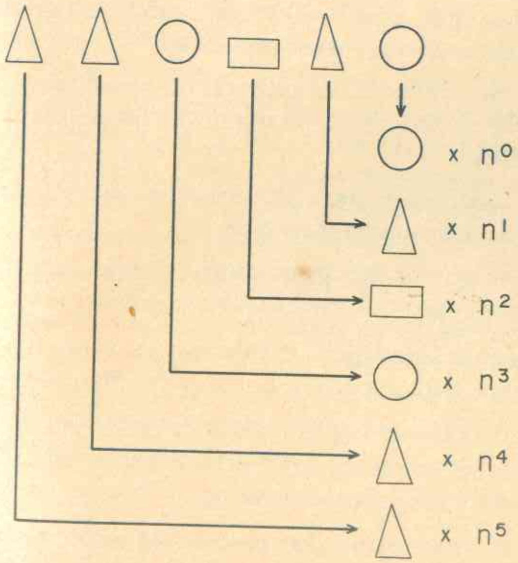
—El número de símbolos de un sistema es igual a su base (incluyendo el cero).

—A cada posición del numeral se asigna un valor posicional que es, a su vez, potencia de la base; así, el valor posicional asignado a la posición 0, es $(\text{base})^0 = 1$. El valor posicional asignado a la posición 1, es $(\text{base})^1$. El valor posicional asignado a la posición 2, es $(\text{base})^2$, etc.

En esta forma se aprecia que el exponente corresponde a la posición en el numeral.

Para los sistemas que, como el decimal, utilizan el valor posicional, cualquier número escrito en la base n ($n \geq 2$), toda cifra escrita inmediatamente a la izquierda de otra, vale n veces más, y a la derecha, n veces menos.

Ejemplo:



Para convertir un número dado en base x, a base 10, y viceversa, se siguen los pasos dados en la página 151, cambiando 8 por x.

D. UNIDAD CUATRO

LOS FRACCIONARIOS

(Racionales: positivos y cero)

Objetivo general

Orientar el proceso enseñanza-aprendizaje con base en una organización del trabajo tan adecuada que proporcione a los alumnos oportunidades de investigar, descubrir y aplicar conceptos relacionados con la interpretación, formulación y solución de problemas que impliquen operatoria entre números fraccionarios y decimales.

Objetivos específicos

El alumno debe:

—Comprender que, desde tiempos remotos, el hombre empezó a utilizar los números fraccionarios, después de muchas experiencias del mundo físico, por la necesidad de determinar medidas más precisas; y que, además, se ingenió la forma de expresarlo y operar con ellos.

—Ser capaz de traducir la imagen de cualquier expresión fraccionaria mediante la construcción intuitiva y geométrica de la misma.

—Demostrar habilidad para determinar que el conjunto de los fraccionarios es infinito y denso.

—Comprender que en los fraccionarios puede considerarse a los naturales como uno de sus subconjuntos.

—Demostrar habilidad para establecer la equivalencia entre fraccionarios y aplicarla en la solución del cálculo aditivo.

—Ser capaz de aplicar correctamente, en la solución de problemas, las propiedades fundamentales de la adición y la multiplicación entre fraccionarios.

—Ser capaz de determinar la relación de orden aditivo entre fraccionarios y aplicarla en los cálculos sustractivos.

—Demostrar habilidad para detectar y comprobar que entre cualquier pareja de fraccionarios distinta de cero, siempre es posible efectuar una división.

—Demostrar habilidad para expresar correctamente, ya sea en notación decimal o en notación fraccionaria, los resultados de los cálculos correspondientes a las diversas unidades de medida conocidas.

—Demostrar habilidad para interpretar, graficar, formular y resolver problemas sobre las operaciones fundamentales entre decimales.

1. Conceptos generales

El alumno de este grado, que ya ha recibido nociones acerca del origen de los números naturales, estará interesado en conocer también cómo surgieron los números fraccionarios.

En realidad, el origen de los fraccionarios se remonta a los primeros siglos de la humanidad. Los estudiosos de culturas antiguas (babilónica, egipcia, griega e hindú), han descubierto que estos pueblos utilizaron los fraccionarios como una respuesta para lograr mediciones más precisas y llegaron a conclusiones y procesos que aún se utilizan. En el transcurso de los siglos han existido diversas formas de expresar los fraccionarios hasta llegar al simbolismo actual.

En las guías para el Maestro (3o. y 4o. grados), se ha orientado el desarrollo del concepto de número fraccionario y su aplicación para resolver problemas prácticos. Se procuró que los alumnos intuyeran dicho concepto a través del análisis de numerosos casos en los cuales resulta imposible la división entre dos números naturales propuestos, porque comprobaron que si el dividendo no es múltiplo del divisor, el cociente no puede ser un número natural.

Ejemplos: 3 : 5; 9 : 7; 6 : 8; 14 : 10

Para expresar el cociente, en casos como los propuestos, es necesario salir del campo de los naturales. Entonces surgen los números fraccionarios. Los cocientes correspondientes a las divisiones propuestas en los ejemplos anteriores, se expresan en forma de fraccionario, así:

$$3 : 5 = \frac{3}{5};\ 9 : 7 = \frac{9}{7};\ 6 : 8 = \frac{6}{8};\ 14 : 10 = \frac{14}{10}$$

El dividendo recibe ahora el nombre de *numerador* y se escribe sobre la raya; el divisor pasa a ser *denominador* y se escribe debajo de ésta.

Los alumnos intuyeron además que, para mayor precisión, los fraccionarios son fundamentales en las mediciones, puesto que al tratar de medir determinada magnitud (longitud, capacidad, peso, área, volumen), no siempre es posible expresar su valor un número exacto de veces.

Ejemplo: $3\frac{1}{2}$ m; $2\frac{1}{4}$ lb.

En el grado quinto, es deseable que se afirme el concepto de fraccionario y las diferentes formas de representación y de expresión, con miras a lograr su concepción abstracta para facilitar la operatoria.

2. Construcción de los fraccionarios

Se sugieren diferentes formas de construcción:

a. Como subregiones congruentes de una figura unitaria

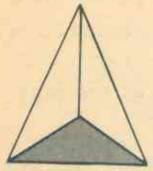


Figura — A

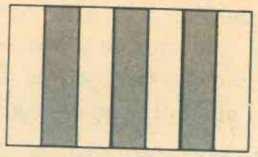


Figura — B

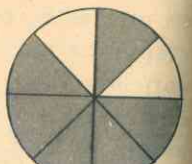


Figura — C

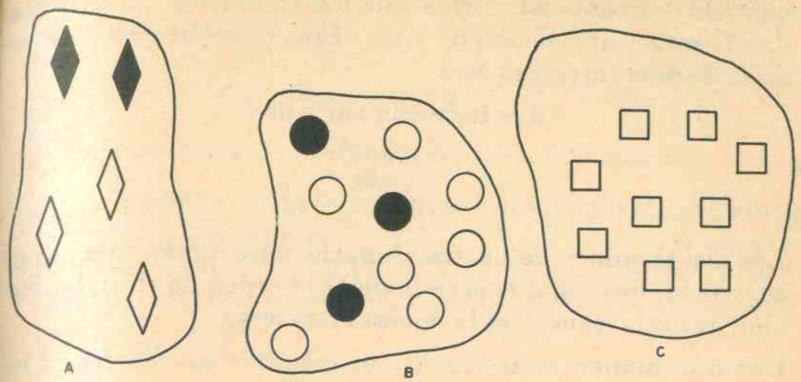
En cada figura puede apreciarse que las subregiones son congruentes entre sí.

Al describir cada figura se puede concretar el número de subregiones que la constituyen y el número de ellas que se ha coloreado, como se detalla en el siguiente cuadro:

Figuras	A	B	C
Número de subregiones sombreadas	1	3	6
Número total de subregiones	3	7	8

Al asociar el número de regiones coloreadas con el número total de ellas, se obtienen las correspondientes parejas ordenadas: (1, 3); (3, 7); (6, 8) las cuales, al ser expresadas en forma fraccionaria, corresponden a $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{6}{8}$.

b. Como elementos separados de un conjunto



Del análisis de estos conjuntos se obtienen los datos siguientes:

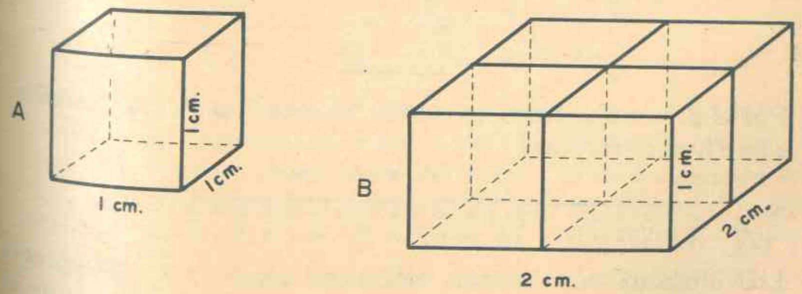
Conjuntos	A	B	C
Número de elementos coloreados	2	3	0
Total de elementos	5	10	9

Parejas ordenadas: (2, 5); (3, 10); (0,9).

Expresión fraccionaria: $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{0}{9}$

Como puede observarse en la figura C, ninguno de los nueve elementos que constituyen el conjunto, ha sido coloreado. Esto se expresa con el fraccionario $\frac{0}{9}$. El cero como numerador representa la *fracción nula,* admisible, puesto que tal número tiene la función de dividendo. Nunca se acepta el cero como denominador ya que no es posible dividir por cero.

c. Como relación entre magnitudes



El volumen de la caja A "cabe" 4 veces en el volumen de la caja B; por tanto se afirma que los volúmenes de las cajas A y B están en relación de 1 a 4. Esta relación puede expresarse de diferentes maneras:

1 es la cuarta parte de 4

1 a 4

(1, 4)

$\frac{1}{4}$

Los dos términos de un fraccionario constituyen una pareja ordenada; esto es, que si se invierte el orden de ellos, la relación que representan es la opuesta o inversa.

Como la manera más sencilla de estudiar las razones es interpretándolas en un sentido geométrico o mensurable, para expresar determinada razón o relación entre dos magnitudes, se determina la pareja ordenada que corresponda y se expresa, respetando su orden, en forma de fraccionario. Como los dos términos que constituyen un fraccionario expresan entre sí una razón o relación, se les llama también *números racionales.*

d. Como segmentos de recta, congruentes (representación lineal)

Consideremos una semirrecta de origen 0. Construyamos a partir de 0, los números naturales.

Dividamos cada *segmento unitario* o *intervalo unitario* en 4 partes congruentes entre sí:

Al comparar cada subdivisión, con respecto a un segmento unitario, observamos que están en la relación de 1 a 4.

Por el proceso natural de contar "cuartos", podemos "escribir" sobre la semirrecta:

Los alumnos no tendrán dificultad alguna, en interpretar fraccionarios mayores que la unidad o *impropios* (donde el numerador es mayor que el denominador, como $\frac{5}{4}$); menores que la unidad o *propios* (efectivos u ordinarios, donde el numerador es menor que el denominador, como $\frac{3}{4}$) y fraccionarios *aparentes* o números naturales (donde el numerador es múltiplo del denominador, como $\frac{4}{4}, \frac{8}{4}, \frac{12}{4}, \frac{16}{4}, \frac{20}{4}$).

e. Los naturales como un subconjunto de los fraccionarios

Apreciando la gráfica propuesta anteriormente, el alumno identifica a los números $\frac{0}{4}, \frac{4}{4}, \frac{8}{4}, \frac{12}{4}, \frac{16}{4}, \frac{20}{4}$, con los respectivos números naturales 0, 1, 2, 3, 4, 5, y concluye que todo número natural puede expresarse en forma de fraccionario.

Ejemplos:

$1 = \frac{4}{4}$

$2 = \frac{8}{4}$

$3 = \frac{12}{4}$

.

.

.

$7 = \frac{28}{4}$

$11 = \frac{44}{4}$

$50 = \frac{200}{4}$

.

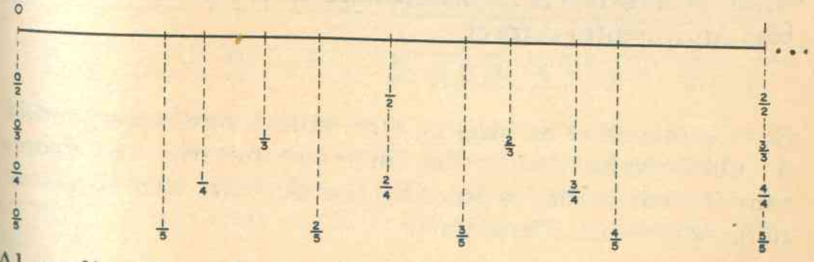
.

.

f. Infinitud de los fraccionarios

Los alumnos saben que los naturales son un conjunto infinito y que pueden considerarse como un subconjunto de los fraccionarios. Así, por lógica, pueden concluir que el conjunto de los fraccionarios es también infinito.

g. Densidad de los fraccionarios



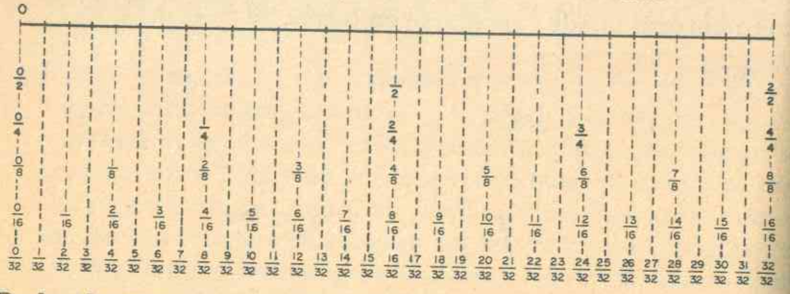
Al analizar la gráfica, se observa que siempre es posible encontrar un fraccionario entre otros dos. Este proceso puede repetirse tantas veces como se desee, lo cual significa que *entre dos fraccionarios existen infinitos fraccionarios;* propiedad que se conoce con el nombre de DENSIDAD. Por tal razón se dice que los fraccionarios constituyen o son un *conjunto denso.*

h. Imagen geométrica de los fraccionarios

Decimos que la imagen geométrica de los racionales (positivos y cero) es la SEMIRRECTA DENSA.

Parece que los racionales llenan completamente la semirrecta; pero, en cursos más avanzados, los alumnos tendrán oportunidad de comprobar que esto no es cierto, ya que existen números como $\sqrt{2}$ y π que, a pesar de "estar" en la semirrecta, no son números racionales.

i. Diferentes nombres para expresar un mismo fraccionario



De la observación y análisis de la semirrecta representada en la figura anterior, en el intervalo unitario (0,1), se destaca que al punto de origen, marcado con cero, corresponden otros fraccionarios expresados con numerales diferentes que, por expresar el mismo punto, son equivalentes entre sí ya que representan el mismo número racional:

$$0 = \frac{0}{2} = \frac{0}{4} = \frac{0}{8} = \frac{0}{16} = \frac{0}{32} = \ldots$$

En la misma forma, al punto que marca el extremo derecho donde está escrito el 1, corresponden otros fraccionarios tambien equivalentes entre sí:

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{4}{4} = \frac{8}{8} = \frac{16}{16} = \frac{32}{32} = \ldots$$

Si se continúa el análisis de otros puntos que corresponden a subintervalos dentro del intervalo unitario, se pueden también concretar los fraccionarios que expresan el mismo número racional. Ejemplos:

$$\frac{1}{16} = \frac{2}{32}$$

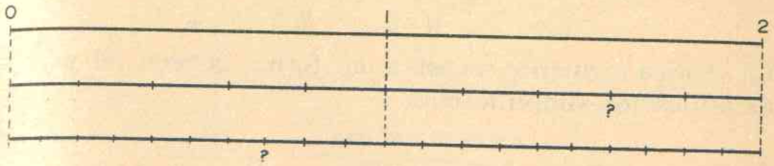
$$\frac{1}{8} = \frac{2}{16} = \frac{4}{32}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{4}{16} = \frac{8}{32}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Es conveniente que los alumnos, empleando una o varias semirrectas paralelas y de origen común, determinen los puntos correspondientes a ciertos números racionales; y también que precisen algunos números racionales que corresponden a puntos ya determinados en la semirrecta.

La figura siguiente proporciona mayor orientación al respecto.



j. Igualdad de fraccionarios

Luego de múltiples ejemplos como los anteriores, los alumnos podrán generalizar, cuándo dos racionales son equivalentes o iguales. Ven por ejemplo, que:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \text{ y } 1x\,4 = 2x2$$

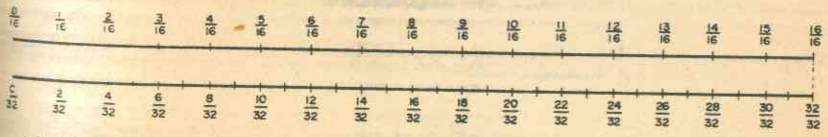
$$\frac{1}{16} = \frac{2}{32} \text{ y } 1x32 = 16x2$$

$$\frac{4}{5} = \frac{12}{15} \text{ y } 4x15 = 5x12$$

En general,

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ si } a \cdot d = b \cdot c}$$

k. Amplificación y simplificación



Al observar en la semirrecta los puntos correspondientes a $\frac{1}{16}$ y a $\frac{2}{32}$, se aprecia que coinciden. Se dividió el intervalo de $\frac{0}{16}$ a $\frac{1}{16}$ en dos partes congruentes que corresponden exactamente a $\frac{2}{32}$, lo cual se puede expresar en la siguiente forma:

$$\frac{1}{16} = \frac{1\,x\,2}{16\,x\,2} = \frac{2}{32}$$

En igual forma se tiene:

$$\frac{2}{5} = \frac{2\,x\,8}{5\,x\,8} = \frac{16}{40}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{3\,x\,31}{2\,x\,31} = \frac{93}{62}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a\,x\,n}{b\,x\,n} \quad (n \in \mathbb{N}, \text{y}, n > 1)}$$

El proceso de multiplicar por n, en el numerador y en el denominador, se llama AMPLIFICACION. El proceso contrario se llama SIMPLIFICACION y consiste en dividir por n, siempre que sea posible, el numerador y el denominador.

Ejemplo: simplificar

$$\frac{16}{12} = \frac{16:4}{12:4} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{15}{30} = \frac{15:3}{30:3} = \frac{5}{10} = \frac{5:5}{10:5} = \frac{1}{2}$$

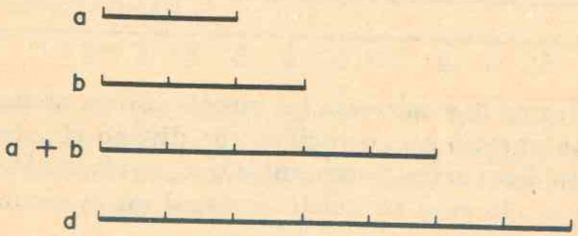
La gráfica siguiente muestra, en forma general, el proceso amplificación-simplificación.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\frac{a}{b}} \arrow[r, bend left, "\text{AMPLIFICACION}"] & \boxed{\frac{n.a}{n.b}} \arrow[l, bend left, "\text{SIMPLIFICACION}"]
\end{tikzcd}$$

3. Operatoria entre números fraccionarios

En la Guía de 4o. grado, se ha trabajado en las operaciones de ADICION, SUSTRACCION, MULTIPLICACION y DIVISION, entre números racionales, con sus propiedades fundamentales. Ahora nos detendremos únicamente, en el afianzamiento de algunos conceptos.

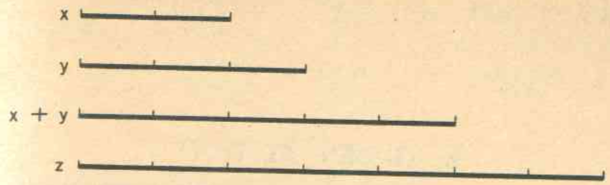
a. ADICION



Considerando los segmentos a, b, y a + b, con respecto al segmento d, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} a = \frac{2}{7}\,d \\ b = \frac{3}{7}\,d \\ a + b = \frac{5}{7}\,d \end{array}\right| \Longrightarrow \frac{2}{7}\,d + \frac{3}{7}\,d = \frac{5}{7}\,d = \frac{2+3}{7}\,d$$

Variando la longitud del segmento unitario, tenemos:



$$\left.\begin{array}{r} x = \frac{2}{7}\,z \\ y = \frac{3}{7}\,z \\ x + y = \frac{5}{7}\,z \end{array}\right| \Longrightarrow \frac{2}{7}\,z + \frac{3}{7}\,z = \frac{5}{7}\,z = \frac{2+3}{7}\,z$$

Considerando otros casos similares, veremos que:

$$\frac{2}{7}\,p + \frac{3}{7}\,p = \frac{2+3}{7}\,p$$

$$\frac{2}{7}\,m + \frac{3}{7}\,m = \frac{2+3}{7}\,m$$

De aquí es fácil concluir que:

$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7}$, y en igual forma

$$\frac{5}{23} + \frac{8}{23} = \frac{5+8}{23}$$

$$\frac{7}{2} + \frac{2}{2} = \frac{7+2}{2}$$

$$\frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4+3}{12}$$

.

.

.

$$\boxed{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}}$$

Esta es la fórmula general que nos dice lo siguiente: *para adicionar dos fraccionarios con igual denominador, se adicionan entre sí los numeradores y se coloca como denominador de la adición, el denominador común.*

Utilizando el concepto de amplificación, podemos generalizar la adición:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.d} + \frac{b.c}{b.d} = \frac{a.d + b.c}{b.d}$$

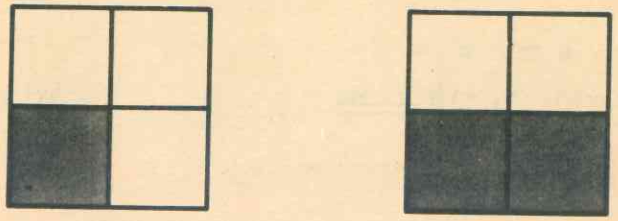
o sea, $\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + b.c}{b.d}}$

Ejemplos:

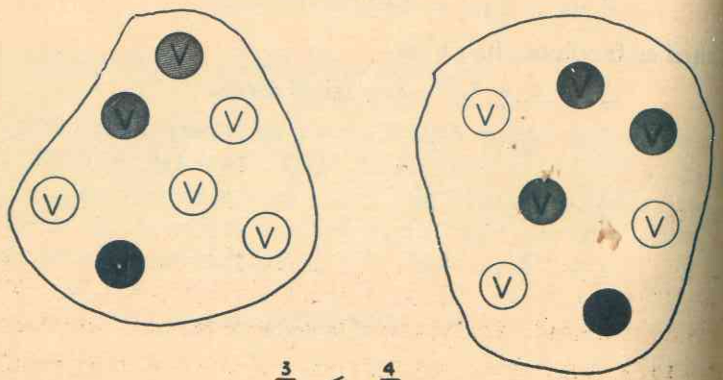
$$\frac{5}{3} + \frac{4}{7} = \frac{5 \times 7 + 3 \times 4}{3 \times 7} = \frac{35 + 12}{21} = \frac{47}{21}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{8} = \frac{2 \times 8 + 3 \times 5}{3 \times 8} = \frac{16 + 15}{24} = \frac{31}{24}$$

b. ORDEN ADITIVO



$$\frac{1}{4} \leqslant \frac{2}{4}$$



$$\frac{3}{7} \leqslant \frac{4}{7}$$

$$\frac{4}{5} \leqslant \frac{7}{5}$$

Los ejemplos anteriores muestran claramente cuando, dados dos números racionales con igual denominador, basta observar los numeradores para poder decidir cuál de los racionales es minorante del otro.

En forma general, podemos afirmar que:

$\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$, si y solamente si, $a \leq b$.

Nos preguntamos ahora lo siguiente: sean los racionales $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ ¿Cuál de ellos es minorante del otro?

Sabemos resolver el problema cuando los dos números tienen el mismo denominador. Entonces, basta convertir los dos racionales a un denominador común y compararlos. Entonces:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{3 \times 4} = \frac{9}{12}$$

Como $\frac{8}{12} \leq \frac{9}{12}$, entonces, $\frac{2}{3} \leq \frac{3}{4}$

Otro ejemplo:

$$\frac{5}{7} \text{ y } \frac{9}{11}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \times 11}{7 \times 11} = \frac{55}{77}$$

$$\frac{9}{11} = \frac{7 \times 9}{7 \times 11} = \frac{63}{77}$$

Como $\frac{55}{77} \leq \frac{63}{77}$, entonces, $\frac{5}{7} \leq \frac{9}{11}$

En general, cuando se pida comparar $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{a \,.\, d}{b \,.\, d} \\ \frac{c}{d} = \frac{b \,.\, c}{b \,.\, d} \end{array}\right| \Longrightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}, \text{ sí y solo sí, } a \cdot d \leq b \cdot c$$

El maestro puede decir, sin entrar en grandes explicaciones, que la relación $\leq$ (ser un minorante de) entre números racionales, es una relación de orden, es decir, cumple las propiedades:

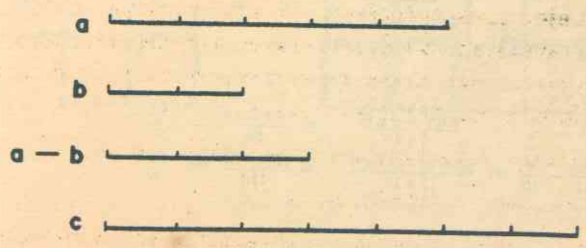
REFLEXIVA: $\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$

ANTI-SIMETRICA: Si $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, y, si $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

TRANSITIVA: Si $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, y, si $\frac{c}{d} \leq \frac{e}{f}$, entonces, $\frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$

c. SUSTRACCION

Ejemplo:



$$\left.\begin{aligned} a &= \tfrac{5}{7}\,c \\ b &= \tfrac{2}{7}\,c \\ a - b &= \tfrac{3}{7}\,c \end{aligned}\right| \Longrightarrow \tfrac{5}{7}c - \tfrac{2}{7}c = \tfrac{3}{7}c = \tfrac{5-2}{7}\,c$$

entonces, $\frac{5}{7}\,c - \frac{2}{7}\,c = \frac{5-2}{7}\,c$

En igual forma,

$$\tfrac{5}{7}l - \tfrac{2}{7}l = \tfrac{5-2}{7}\,l$$

$$\tfrac{5}{7}\text{km} - \tfrac{2}{7}\text{km} = \tfrac{5-2}{7}\,\text{km}$$

$$\tfrac{5}{7}\text{lb} - \tfrac{2}{7}\text{lb} = \tfrac{5-2}{7}\,\text{lb}$$

$$\tfrac{5}{7}\text{m} - \tfrac{2}{7}\text{m} = \tfrac{5-2}{7}\,\text{m}$$

Haciendo abstracción de la magnitud, se tiene:

$$\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5-2}{7}$$

Podemos ahora considerar varios casos particulares, y generalizar:

$$\frac{13}{25} - \frac{7}{25} = \frac{13-7}{25}$$

$$\frac{11}{9} - \frac{10}{9} = \frac{11-10}{9}$$

$$\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4-2}{3}$$

.

.

.

$$\boxed{\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}\text{, siempre que } \frac{b}{c} \leq \frac{a}{c}}$$

Es fácil mostrar en forma general, que si

$$\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}\text{, entonces, } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a.d - b.c}{b.d}$$

ya que,

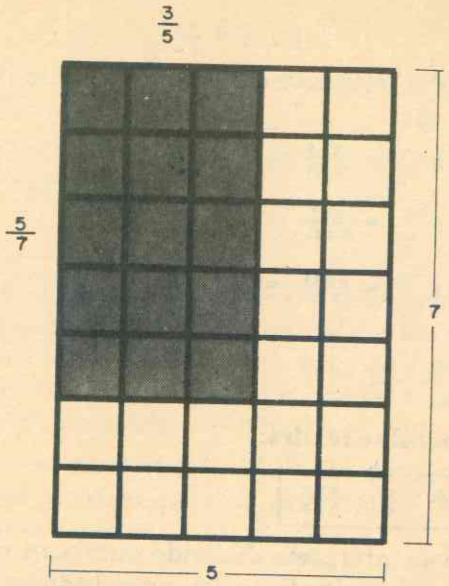
$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a.d}{b.d} \\ \frac{c}{d} &= \frac{b.c}{b.d} \end{aligned}\right| \Longrightarrow \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.d} - \frac{b.c}{b.d} = \frac{a.d - b.c}{b.d}$$

Ejemplos:

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{7} = \frac{4 \text{ x } 7 - 5 \text{ x } 3}{5 \text{ x } 7} = \frac{28-15}{35} = \frac{13}{35}$$

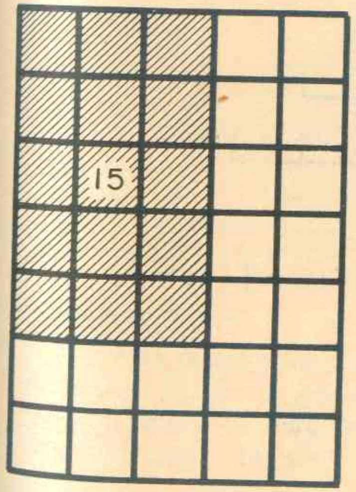
$$\frac{23}{11} - \frac{9}{10} = \frac{23 \text{ x } 10 - 11 \text{ x } 9}{11 \text{ x } 10} = \frac{230-99}{110} = \frac{131}{110}$$

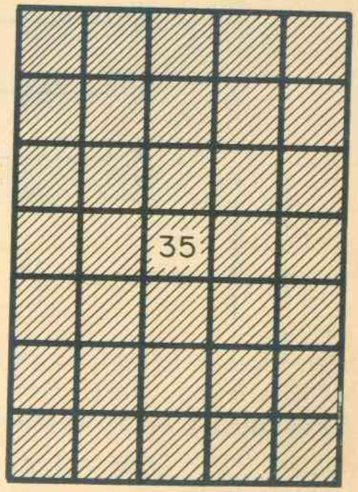
d. MULTIPLICACION



Al observar la figura vemos que:

(1) Area del rectángulo pequeño = $\frac{3}{5}$ x $\frac{5}{7}$





Por otra parte,

(2) Area del rectángulo pequeño = $\frac{15}{35}$ del área del rectángulo grande,

$$\text{y } \frac{15}{35} = \frac{3 \text{ x } 5}{5 \text{ x } 7}$$

Al establecer la comparación de las expresiones (1) y (2), vemos que

$$\frac{3}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{5 \times 7}$$

En forma similar, el maestro puede seleccionar otros ejemplos para mostrar que:

$$\frac{8}{9} \times \frac{5}{4} = \frac{8 \times 5}{9 \times 4} = \frac{40}{36} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$$

$$\frac{4}{3} \times \frac{7}{11} = \frac{4 \times 7}{3 \times 11} = \frac{28}{33}$$

$$\frac{5}{12} \times \frac{11}{3} = \frac{5 \times 11}{12 \times 3} = \frac{55}{36}$$

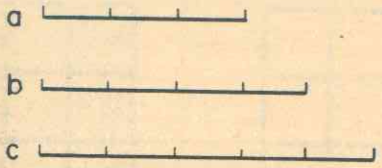
$$\vdots$$

En forma general se tendrá:

$$\boxed{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}}$$

Esta fórmula se interpreta diciendo que: ***para multiplicar dos fraccionarios, se multiplican los numeradores y los denominadores entre sí.***

Otra forma de mostrar la multiplicación es la siguiente:



$$\left.\begin{array}{l} a = \frac{3}{4} b \\ b = \frac{4}{5} c \\ a = \frac{3}{5} c \end{array}\right| \Longrightarrow a = \frac{3}{4} b = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} c \Longrightarrow a = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} c = \frac{3}{5} c$$

En la misma forma se puede mostrar que:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} m = \frac{3}{5} m$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} g = \frac{3}{5} g$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} kg = \frac{3}{5} kg$$

Y de aquí, haciendo omisión de la magnitud, se puede escribir:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

Y así:

$$\frac{7}{9} \cdot \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{8}{12} \cdot \frac{12}{13} = \frac{8}{13}$$

$$\frac{40}{117} \cdot \frac{117}{7} = \frac{40}{7}$$

Generalizando se tiene:

$$\boxed{\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b}}$$

Obsérvese que hemos multiplicado dos fraccionarios con las siguientes características: *el denominador del primer fraccionario es igual al numerador del segundo fraccionario, y el producto está conformado por el numerador del primero y el denominador del segundo.*

Ahora, ¿cómo se resuelve $\frac{4}{5} \times \frac{7}{3}$? Si podemos tener el denominador del primero, igual al numerador del segundo, podemos aplicar la regla anterior. Veamos:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{4}{5} = \frac{4 \times 7}{5 \times 7} \\ \frac{7}{3} = \frac{5 \times 7}{5 \times 3} \end{array}\right| \Longrightarrow \frac{4}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{4 \times 7}{5 \times 7} \times \frac{5 \times 7}{5 \times 3} = \frac{4 \times 7}{5 \times 3}$$

$$\frac{8}{9} \times \frac{11}{13} = \frac{8 \times 11}{9 \times 11} \cdot \frac{9 \times 11}{9 \times 13} = \frac{8 \times 11}{9 \times 13}$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{3 \times 8}{4 \times 8} \cdot \frac{4 \times 8}{4 \times 5} = \frac{3 \times 8}{4 \times 5}$$

Ahora, en forma general,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times c} \cdot \frac{b \times c}{b \times d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}}$$

Propiedad invertiva

En los fraccionarios existe una propiedad que no opera entre naturales. Dado un fraccionario $\frac{a}{b} \neq 0$, existe otro fraccionario $\frac{b}{a}$, llamado el RECIPROCO o INVERSO MULTIPLICATIVO de $\frac{a}{b}$, y tal que: $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Esta propiedad recibe el nombre de propiedad INVERTIVA.

Propiedad distributiva

Esta propiedad, ya conocida por los alumnos, se cumple también entre fraccionarios.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} \cdot (\frac{4}{5} + \frac{7}{8}) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{7}{8}$$

$$\frac{2}{3} \cdot (\frac{32 + 35}{40}) = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} + \frac{2 \times 7}{3 \times 8}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{67}{40} = \frac{8}{15} + \frac{14}{24}$$

$$\frac{\overset{1}{\cancel{2}} \times 67}{3 \times \underset{20}{\cancel{40}}} = \frac{192 + 210}{360} = \frac{402}{360}$$

$$\frac{67}{60} = \frac{402}{360} = \frac{201}{180} = \frac{67}{60}$$

e. NO EXISTE ORDEN MULTIPLICATIVO

Debe recordarse que si $a \llcorner b$, entonces existe c, tal que,

$$a = b \cdot c$$

Supongamos que en el conjunto de los racionales existe orden multiplicativo. Entonces, debe cumplirse la propiedad antisimétrica, es decir,

$$\text{si } \frac{a}{b} \llcorner \frac{c}{d} \text{ y, si } \frac{c}{d} \llcorner \frac{a}{b}, \text{ entonces, } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Consideremos el siguiente caso:

Tomemos al azar dos fraccionarios cualesquiera, por ejemplo $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{7}$.

Nos preguntamos:

1. ¿Es $\frac{2}{3} \llcorner \frac{5}{7}$?
2. ¿Es $\frac{5}{7} \llcorner \frac{2}{3}$?

Si $\frac{2}{3} \llcorner \frac{5}{7}$, entonces existe x, tal que

$$\frac{2}{3} = \frac{5}{7} \cdot x$$

Multiplicamos en ambos lados por $\frac{7}{5}$

$$\frac{7}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{5} \times (\frac{5}{7} \cdot x)$$

Asociando tenemos:

$$\frac{7}{5} \times \frac{2}{3} = \boxed{(\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7})} \cdot x \quad \text{(Aplicación de la propiedad invertiva de la multiplicación).}$$

$$\frac{14}{15} = 1 \cdot x$$

$$\frac{14}{15} = x$$

Esto nos permite afirmar que $\frac{2}{3} \llcorner \frac{5}{7}$, ya que $\frac{2}{3} = \frac{5}{7} \times \frac{14}{15}$ como se puede comprobar sin ninguna dificultad.

Ahora, nos planteamos de nuevo la misma pregunta: ¿es $\frac{5}{7} \llcorner \frac{2}{3}$?

Haciendo un proceso semejante al anterior llegamos a concluir que:

$$\frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{15}{14} \text{ y por lo tanto } \frac{5}{7} \llcorner \frac{2}{3}$$

Como $\frac{2}{3} \llcorner \frac{5}{7}$ y a su vez, $\frac{5}{7} \llcorner \frac{2}{3}$, se debería concluir que $\frac{2}{3} = \frac{5}{7}$, lo cual no es cierto. (Ver Igualdad de Fraccionarios, en esta misma unidad).

Esta contradicción surge debido a que partimos de algo falso: la suposición de que existía orden multiplicativo en los racionales.

Además, como todo fraccionario distinto de cero es múltiplo de otro (distinto de cero), siempre es posible dividir un fraccionario por otro.

f. DIVISION

El concepto de división en forma general nos dice que $a : b = c$; esto significa que $a = b \cdot c$;

entonces, (1) $\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = x}$ significa que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot x \text{, o sea, } \frac{a}{b} = x \cdot \frac{c}{d}$$

Recordando ahora lo que sobre este tema se explicó en la Guía de 4o. grado y utilizando la propiedad invertiva de la multiplicación, procedemos a multiplicar ambos miembros de la igualdad anterior por $\frac{d}{c}$, (inverso de $\frac{c}{d}$):

$$\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = (x \cdot \frac{c}{d}) \cdot \frac{d}{c}$$

Asociando tenemos, $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = x \cdot (\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c})$

$$\Longrightarrow \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = x \cdot 1$$

(2) $\boxed{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = x}$

Comparando las expresiones (1) y (2) se concluye que: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$, fórmula que se interpreta diciendo:

Para dividir un fraccionario por otro, se invierte el fraccionario divisor y se efectúa una multiplicación.

Ejemplos: $\frac{4}{5} : \frac{7}{3} = \frac{4}{5} \text{ x } \frac{3}{7} = \frac{4 \text{ x } 3}{5 \text{ x } 7} = \frac{12}{35}$

$\frac{11}{13} : \frac{8}{5} = \frac{11}{13} \text{ x } \frac{5}{8} = \frac{11 \text{ x } 5}{13 \text{ x } 8} = \frac{55}{104}$

$\frac{7}{5} : 3 = \frac{7}{5} : \frac{3}{1} = \frac{7}{5} \text{ x } \frac{1}{3} = \frac{7 \text{ x } 1}{5 \text{ x } 3} = \frac{7}{15}$

$8 : \frac{4}{3} = \frac{8}{1} : \frac{4}{3} = \frac{8}{1} \text{ x } \frac{3}{4} = \frac{8 \text{ x } 3}{1 \text{ x } 4} = \frac{24}{4} = \frac{6}{1} = 6$

Hemos visto que las operaciones entre racionales no ofrecen dificultad para entenderse y que existen múltiples recursos para introducirlas.

Aquí se amplía el mundo operatorio ya que por ejemplo siempre se puede efectuar la división (salvo el caso de división por cero).

Solo nos resta recordarle al maestro, que es necesario realizar muchos ejemplos prácticos con los alumnos para el afianzamiento total de estos conceptos.

4. Los decimales

Expresiones de la forma: 4,257; 0,00153; 2,3333 ...; 0, 5, se denominan NUMEROS DECIMALES. Estos números son familiares, por su enorme frecuencia de utilización en la solución de los problemas prácticos, de la vida diaria: compras, ventas, medidas, etc... Algunas de estas expresiones decimales corresponden realmente a números racionales; es decir, pueden transformarse usando operaciones aritméticas, en números de la forma $\frac{a}{b}$. Otras, en cambio, no pueden expresarse como un número racional. En esta guía trabajaremos únicamente con expresiones decimales racionales.

Ya en las guías anteriores, especialmente en la de 4o. grado, se ha dado una explicación de los números decimales y las operaciones que se realizan entre ellos (adición, sustracción, multiplicación y división); por lo tanto, aquí nos limitaremos a considerar aspectos no contemplados anteriormente.

Consideramos que lo más importante de este trabajo es mostrar cómo expresar un racional en forma decimal y viceversa.

La primera situación es ya conocida por el alumno, pues para expresar un número de la forma $\frac{a}{b}$ en forma decimal, basta dividir **a** por **b** .

Antes de entrar a resolver algunos ejemplos, conviene recordar alguna terminología relativa a las expresiones decimales.

En un número decimal cualquiera, la expresión a la izquierda de la coma recibe el nombre de PARTE ENTERA y la de la derecha PARTE DECIMAL.

Así, en: 43,721; 43 es parte entera y 721 parte decimal.
0,19 ; 0 es parte entera y 19 parte decimal.
0,001; 0 es parte entera y 001 parte decimal.

En todo número decimal (racional) siempre aparece en la parte decimal, un cierto número de dígitos que se repite. El número que siempre se repite recibe el nombre de PERIODO.

Ejemplos:	a)	$4, \underbrace{17}\underbrace{17}\underbrace{17}\underbrace{17} \ldots$	período: 17
	b)	$0, 5\underbrace{0}\underbrace{0}\underbrace{0}\underbrace{0}\underbrace{0} \ldots$	período: 0
	c)	$0, 21\underbrace{318}\underbrace{318}\underbrace{318} \ldots$	período: 318
	d)	$0, 453221\underbrace{10}\underbrace{10}\underbrace{10} \ldots$	período: 10
	e)	$385, \underbrace{1973}\underbrace{1973}\underbrace{1973} \ldots$	período: 1973

En los ejemplos a) y e) el período comienza inmediatamente después de la coma. Expresiones de este tipo, reciben el nombre de DECIMALES PERIODICOS PUROS. Por otra parte, los ejemplos b), c), y d) y todas las expresiones similares, donde el período no empieza inmediatamente después de la coma, se llaman DECIMALES PERIODICOS MIXTOS.

Es costumbre escribir una sola vez el período, colocándole encima una barra.

$4, \underbrace{17}\underbrace{17}\underbrace{17}\underbrace{17} \ldots = 4,\overline{17}$

$0, 5\underbrace{0}\underbrace{0}\underbrace{0}\underbrace{0} \ldots = 0,5\overline{0}$

$0, 21\underbrace{318}\underbrace{318}\underbrace{318} \ldots = 0,21\overline{318}$

$0, 453221\underbrace{10}\underbrace{10}\underbrace{10} \ldots = 0,453221\overline{10}$

$385, \underbrace{1973}\underbrace{1973}\underbrace{1973} \ldots = 385,\overline{1973}$

.
.
.

a. PASO DE FORMA FRACCIONARIA A DECIMAL

Ejemplos:

Expresar en forma decimal $\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{l|l} 1 & 2 \\ \hline \underline{-0} & 0{,}500\ldots \\ 10 & \\ \underline{-10} & \\ 00 & \\ \underline{-0} & \\ 00\ldots & \end{array} \qquad \frac{1}{2} = 0{,}5\overline{0}$$

Expresar $\frac{1}{3}$ en forma decimal

$$\begin{array}{l|l} 1 & 3 \\ \hline \underline{-0} & 0{,}333\ldots \\ 10 & \\ \underline{-9} & \\ 10 & \\ \underline{-9} & \\ 1\ldots & \end{array} \qquad \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$$

Expresar $\frac{153}{5}$ en forma decimal

$$\begin{array}{r|l}
153 & 5 \\ \cline{2-2}
\underline{-15} & 30{,}600\ldots \qquad \frac{153}{5} = 30{,}6\overline{0} \\
03 & \\
\underline{-0} & \\
30 & \\
\underline{-30} & \\
00 & \\
\underline{-0} & \\
00 & \\
\underline{-0} & \\
0\ldots &
\end{array}$$

Expresar $\frac{5}{7}$en forma decimal

$$\begin{array}{r|l}
5 & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{-0} & 0{,}714285714285\ldots \qquad \frac{5}{7} = 0{,}\overline{714285} \\
50 & \\
\underline{-49} & \\
10 & \\
\underline{-7} & \\
30 & \\
\underline{-28} & \\
20 & \\
\underline{-14} & \\
60 & \\
\underline{-56} & \\
40 & \\
\underline{-35} & \\
50 & \\
\underline{-49} & \\
10 & \\
\underline{-7} & \\
30 & \\
\underline{-28} & \\
20 & \\
\underline{-14} & \\
60 & \\
\underline{-56} & \\
40 & \\
\underline{-35} & \\
5\ldots &
\end{array}$$

Obsérvese que al efectuar la anterior división, luego de un número finito de pasos, se repite el dividendo. De ahí en adelante, como es natural, las cifras del cociente también se repiten en forma periódica, es decir, aparece el período. Por lo tanto, al efectuar el proceso de división, apenas se nota que el período comienza a repetirse (en el momento en que se repite un dividendo) se suspende la división.

Expresar en forma decimal $\frac{5}{17}$

$$\begin{array}{r|l}
5 & 17 \\ \cline{2-2}
\underline{-0} & 0{,}2941176470588235\ldots \qquad \frac{5}{17} = 0{,}\overline{2941176470588235} \\
50 & \\
\underline{-34} & \\
160 & \\
\underline{-153} & \\
70 & \\
\underline{-68} & \\
20 & \\
\underline{-17} & \\
30 & \\
\underline{-17} & \\
130 & \\
\underline{-119} & \\
110 & \\
\underline{-102} & \\
80 & \\
\underline{-68} & \\
120 & \\
\underline{-119} & \\
100 & \\
\underline{-85} & \\
150 & \\
\underline{-136} & \\
140 & \\
\underline{-136} & \\
40 & \\
\underline{-34} & \\
60 & \\
\underline{-51} & \\
90 & \\
\underline{-85} & \\
5 \longrightarrow & \text{aquí se inicia la repetición;} \\
 & \text{se suspende la operación.}
\end{array}$$

Expresar $\frac{11}{12}$ en forma decimal.

$$\begin{array}{r|l}
11 & 12 \\ \cline{2-2}
\underline{-00} & 0{,}916\ldots \qquad \frac{11}{12} = 0{,}91\overline{6} \\
110 & \\
\underline{-108} & \\
20 & \\
\underline{-12} & \\
\textcircled{80} & \\
\underline{-72} \downarrow & \\
8 \longrightarrow &
\end{array}$$

se repite un dividendo. Se suspende la operación.

b. PASO DE FORMA DECIMAL A FRACCIONARIA

Para pasar una expresión decimal a fraccionaria es necesario saber primero si se trata de una expresión decimal exacta periódica pura o periódica mixta:

Sean las expresiones decimales: 0,3; $0,\overline{3}$; $0,0\overline{3}$

En el primer caso, el alumno sabe que cualquier expresión de los tipos 0,3; 0,03;... (decimal exacto) corresponde a un fraccionario que tiene por numerador la cifra significativa y por denominador la unidad, seguida de tantos ceros como puestos decimales tenga la expresión.

Ejemplo: $0{,}3 \;=\; \frac{3}{10}$

$0{,}03 \;=\; \frac{3}{100}$

$0{,}003 \;=\; \frac{3}{1000}$

.

.

.

La dificultad radica en saber expresar decimales periódicos puros o periódicos mixtos en forma fraccionaria. En esta guía sólo nos referiremos al caso de los periódicos puros, como un paso más de dificultad que deben vencer los alumnos y dejar para cursos más avanzados lo relacionado con los periódicos mixtos.

Al considerar la expresión decimal $0,\overline{3}$ se escribe: $\square = 0,\overline{3}$, donde $\square$ será la forma fraccionaria respectiva.

Se recuerda ahora que $0,\overline{3} = 0{,}3333\ldots$;
por tanto, $\square = 0,\overline{3} = 0{,}3333\ldots$

Como cada período está compuesto por una sola cifra, se multiplica por 10 ambos miembros de la igualdad y se tiene:

$$10 \times \square = 10 \times 0{,}\overline{3}$$
$$10\,\square = 3{,}\overline{3}$$

Si de esta igualdad se resta en cada miembro la igualdad inicial, se tiene:

$$\begin{array}{r}
10\,\square = 3{,}\overline{3} \\
\underline{\square = 0{,}\overline{3}} \\
9\,\square = 3{,}0
\end{array} \text{ (desaparece el período)}$$

Para despejar la incógnita, se divide por nueve cada uno de los miembros de la última igualdad y queda:

$$\frac{9}{9}\square = \frac{3}{9} \Longrightarrow \square = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \Longrightarrow \square = \frac{1}{3}$$

Por tanto, $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$

Veamos otros ejemplos: expresar $0,\overline{45}$ en forma fraccionaria. Siguiendo los pasos anteriores, se tiene: $x = 0,\overline{45} = 0{,}4545\ldots$

Como cada período está compuesto por dos cifras, se multiplica por 100 ambos miembros de la igualdad y se tiene: $100\,x = 45,\overline{45}$

Si de esta igualdad se resta en cada miembro la igualdad inicial, se tiene:

$$\begin{array}{r}
100\,x = 45{,}\overline{45} \\
\underline{x = \;\; 0{,}\overline{45}} \\
99\,x = 45{,}00
\end{array} \text{ (desaparece el período)}$$

Para despejar la incógnita, se divide por 99 ambos miembros de la última igualdad y queda:

$$\frac{99}{99}\,x = \frac{45}{99} \Longrightarrow x = \frac{\overset{5}{\cancel{45}}}{\underset{11}{\cancel{99}}} \Longrightarrow \boxed{x = \frac{5}{11}}$$

Por tanto, $0,\overline{45} = \frac{5}{11}$

Expresar $0,\overline{123}$ en forma fraccionaria.

Por el proceso anterior: $x = 0,\overline{123} = 0{,}\underbrace{123}\underbrace{123}\ldots$

Como cada período está compuesto por tres cifras, se multiplica por 1 000 ambos miembros de la igualdad y se tiene: $1000\;x = 123,\overline{123}$

Restando la igualdad inicial:

$$\begin{array}{r}
1000\,x = 123{,}\overline{123} \\
\underline{x = \;\;\; 0{,}\overline{123}} \\
999x = 123{,}000
\end{array} \text{ (desaparece el período)}$$

Se despeja la incógnita:

$$\frac{999}{999}\ x = \frac{123}{999} \Longrightarrow x = \frac{\overset{41}{\cancel{123}}}{\underset{333}{\cancel{999}}} \Longrightarrow \boxed{x = \frac{41}{333}}$$

Por tanto, $0,\overline{123} = \frac{41}{333}$

Expresar $0,\overline{1896}$ en forma fraccionaria.

Primer paso: $x = 0,\overline{1896} = 0,\underbrace{1896}\underbrace{1896}...$

Segundo paso: $10000\ x = 1896,\overline{1896}$ (el período está formado por cuatro cifras)

Tercer paso:

$$\begin{array}{rcl} 10000\ x & = & 1896,\overline{1896} \\ x & = & 0,\overline{1896} \\ \hline 9999\ x & = & 1896,0000 \end{array}$$

(desaparece el período)

Cuarto paso: $\frac{9\,999}{9\,999}\ x = \frac{1\,896}{9\,999} \Longrightarrow x = \frac{\overset{632}{\cancel{1\,896}}}{\underset{3\,333}{\cancel{9\,999}}} \Longrightarrow x = \boxed{\frac{632}{3\,333}}$

Por tanto, $0,\overline{1896} = \frac{632}{3\,333}$

Expresar $3,\overline{571428}$ en forma fraccionaria.

Primer paso: $M = 3,\overline{571428} = 3,\underbrace{571428}\underbrace{571428}...$

Segundo paso: $1'000.000\ M = 3571428,\overline{571428}$ (el período está compuesto por seis cifras).

Tercer paso:

$$\begin{array}{rcl} 1'000.000\ M & = & 3571428,\cancel{571428} \\ M & = & 3,\cancel{571428} \\ \hline 999.999\ M & = & 3571428 \end{array}$$

(desaparece el período).

Cuarto paso: $\frac{999\,999}{999\,999}\ M = \frac{3\,571\,428}{999\,999}$

Quinto paso: (proceso de simplificación)

$$M = \frac{3\,571\,428:9}{999\,999:9} = \frac{396\,825:3}{111\,111:3} = \frac{132\,275:11}{37\,037:11} = \frac{12\,025:13}{3\,367:13} = \frac{925:37}{259:37} = \frac{25}{7}$$

$$\Longrightarrow M = \frac{25}{7}$$

Por tanto, $3,\overline{571428} = \frac{25}{7}$

Ahora los alumnos están en condiciones de pasar decimales periódicos puros a forma fraccionaria, cumpliendo el siguiente proceso:

1. Se establece la igualdad entre la incógnita y la expresión decimal propuesta.

2. Se multiplica a cada lado de la igualdad, por la unidad seguida de tantos ceros, cuantas cifras tenga el período.
3. Se sustrae, de la igualdad anterior, la establecida inicialmente. Desaparece el período.
4. Se despeja la incógnita mediante la división de ambos miembros de la última igualdad obtenida, por el número que multiplica a la incógnita.
5. Se simplifica hasta donde sea posible el fraccionario que se obtiene de la división y se determina así la expresión fraccionaria buscada, o sea el valor de la incógnita.

El maestro debe presentar ejemplos sencillos, de acuerdo con el grado de conocimiento de los alumnos y el interés que demuestren por este tópico.

Para la parte de las operaciones y sus propiedades, el maestro debe consultar la Guía de 4o., donde se hace un tratamiento de ellas en forma completa.

E. UNIDAD CINCO

RAZONES Y PROPORCIONES

Objetivo general

Orientar el proceso enseñanza-aprendizaje en tal forma, que se proporcione a los alumnos oportunidades para investigar, interpretar y organizar datos, así como para llegar a la solución gráfica y numérica de situaciones matemáticas que permitan afirmar especialmente el conocimiento sobre razones y proporciones y proyectar estos conceptos a diferentes aspectos de la vida diaria.

Objetivos específicos

El alumno debe ser capaz de:

–Precisar la razón que corresponda a la comparación entre dos conjuntos o entre dos magnitudes, y establecer proporciones.

–Determinar la equivalencia entre las razones y los números racionales, así como la que existe entre proporciones y la igualdad de fraccionarios.

—Aplicar las propiedades básicas de las proporciones en la solución de nuevas situaciones cuantitativas y prácticas.

—Precisar la razón que liga a dos magnitudes, con base en datos expresados gráfica o simbólicamente.

—Distinguir con claridad la clase de proporcionalidad (directa o inversa) entre parejas de magnitudes que se relacionen en una situación cuantitativa.

—Demostrar comprensión al determinar el recíproco o inverso de una razón.

—Relacionar la razón y la proporción con el concepto de semejanza, empleado en Geometría.

—Determinar y aplicar correctamente la equivalencia entre las unidades más usuales de los sistemas métrico-decimal y cronométrico, en la interpretación, formulación y solución de problemas sencillos y prácticos.

Demostrar

—Habilidad para interpretar la razón entre dos magnitudes y expresar dicha relación en los dibujos a escala.

—Comprensión en el cálculo de porcentajes.

—Creatividad en el manejo de los datos y en las representaciones gráficas.

—Habilidad para formular y solucionar problemas que conlleven al cálculo razonado de interés y descuento.

—Sentido de proporción, seguridad y orden en los trabajos presentados.

—Interés por conocer e investigar sobre el sistema monetario de otros países y ser capaz de realizar sencillas operaciones de cambio.

1. Conceptos generales

La proporcionalidad, que juega papel tan importante en la solución de variadas situaciones cuantitativas, es una noción que se ha venido desarrollando en las guías para 3o. y 4o. grados. En ésta se presentan otras aplicaciones que han de proporcionar al alumno oportunidad para que afirme sus ideas y amplíe conocimientos que pueda transferir para la solución de problemas que atañen tanto a la matemática en sí, como a otras áreas.

Por lo visto en 3o. y 4o. grados, los alumnos saben que la expresión $\frac{40}{5} = 40 : 5 = 8$; esto constituye una razón geométrica que se lee "40 es a 5", y que los términos 40 y 5 se llaman *antecedente* y *consecuente*, respectivamente.

Cuando se tienen las razones $40 : 5 = \frac{40}{5}$ y $80 : 10 = \frac{80}{10}$, ambas iguales a 8, es lícito escribir:

$$\frac{40}{5} = \frac{80}{10} \text{ ó } 40:5 = 80:10;$$

esta igualdad entre las dos razones, recibe el nombre de *proporción*. En forma general se tiene:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ó } a:b = c:d}$$

Los elementos **a, b, c, d** se llaman *términos de la proporción;* **a** y **d** se llaman *extremos;* **b** y **c** se llaman *medios.*

a. Propiedad fundamental de las proporciones

Por igualdad de fracciones se cumple que

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow a \cdot d = b \cdot c;}$$

esto viene a convertirse en la *propiedad fundamental* de las proporciones y se enuncia diciendo: *en toda proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.*

b. Formas de representar una proporción

Partiendo de la propiedad fundamental, es posible lograr 8 formas diferentes de escribir o expresar una proporción. El maestro puede presentar esta parte, utilizando casos abstractos particulares como:

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10}\ ;\ \frac{10}{5} = \frac{8}{4};\ \frac{4}{8} = \frac{5}{10}\ , \ldots$$

No se pide que el alumno pueda resolver los 8 casos, pero el maestro orientará el trabajo, en tal forma que se agoten todas las posibilidades. Aquí exponemos los casos:

1. $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$ ⟵ **forma inicial** ⟶ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
2. $\frac{10}{5} = \frac{8}{4}$ ⟵ **intercambiando extremos** ⟶ $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$
3. $\frac{4}{8} = \frac{5}{10}$ ⟵ **intercambiando medios** ⟶ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
4. $\frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ ⟵ **intercambiando medios y extremos** ⟶ $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$
5. $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ ⟵ **por simetría de la igualdad** ⟶ $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

6. $\frac{5}{10} = \frac{4}{8} \longleftarrow$ intercambiando extremos en 5. $\longrightarrow \frac{b}{d} = \frac{a}{c}$

7. $\frac{8}{4} = \frac{10}{5} \longleftarrow$ intercambiando medios en 5. $\longrightarrow \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$

8. $\frac{5}{4} = \frac{10}{8} \longleftarrow$ intercambiando medios y extremos en 5. $\longrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

Obsérvese que:

$4 \times 10 = 5 \times 8 \longleftarrow$ en cada uno de los 8 casos $\longrightarrow a \times d = b \times c$

c. Cálculo de los elementos de una proporción

Supongamos que se tiene la proporción: $\frac{5}{7} = \frac{45}{x}$. El problema consiste en hallar el valor de x. Sabemos, por la propiedad fundamental, que:

$$5 \cdot x = 7 \times 45$$

Para despejar la incógnita, multiplicamos en ambos lados de la igualdad por el inverso multiplicativo de 5, o sea, por $\frac{1}{5}$.

$$\frac{1}{5} \cdot (5 \cdot x) = \frac{1}{5} \cdot 7 \cdot 45$$

$$\left(\frac{1}{5} \cdot 5\right) \cdot x = \frac{7 \cdot 45}{5}$$

$$1 \cdot x = \frac{7 \cdot 45}{5}$$

$$x = \frac{7 \cdot \overset{9}{\cancel{45}}}{\underset{1}{\cancel{5}}}$$

$$x = 7 \cdot 9$$

$$\boxed{x = 63}$$

Ahora, para probar si nuestro resultado es correcto, se sustituye x por 63, así:

$$5 \cdot 63 = 7 \cdot 45, \text{ o sea,}$$
$$315 = 315,$$

por lo tanto, 63 es la respuesta buscada.

Al plantearnos el siguiente problema: hallar x en la proporción $\frac{7}{11} = \frac{21}{x}$, podemos analizar el ejemplo anterior y, sin necesidad de efectuar todos los pasos, concluimos que:

$$x = \frac{11 \cdot \overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{1}{\cancel{7}}}$$

$$\boxed{x = 33}$$

Resolvemos las situaciones siguientes:

a) $\frac{m}{2} = \frac{20}{8}$

$$m = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{5}{\cancel{20}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{8}}}$$

$$\boxed{m = 5}$$

b) $\frac{t}{21} = \frac{10}{7}$

$$t = \frac{\overset{3}{\cancel{21}} \cdot 10}{\underset{1}{\cancel{7}}}$$

$$\boxed{t = 30}$$

Resumiendo y generalizando tenemos: (**a**, **b**, **c** son conocidos):

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{x}{a} = \frac{b}{c} \Longrightarrow x = \frac{a \cdot b}{c} \\ \hline \frac{c}{a} = \frac{b}{x} \Longrightarrow x = \frac{a \cdot b}{c} \end{array}}$$

Estas fórmulas se enuncian así: *para encontrar un extremo desconocido en una proporción, se multiplican los medios entre sí, y el resultado se divide por el extremo conocido.*

No es difícil para el maestro mostrar que para **a**, **b**, **c**, conocidos y x desconocido,

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \frac{a}{x} = \frac{b}{c}\text{, entonces, } x = \frac{a \cdot c}{b} \\ \text{Si } \frac{a}{b} = \frac{x}{c}\text{, entonces, } x = \frac{a \cdot c}{b} \end{array}}$$

Es decir, *para encontrar un medio desconocido, se multiplican los extremos entre sí, y el resultado se divide por el medio conocido.*

Ejemplos: hallar S,en: $\frac{4}{S} = \frac{12}{6}$

$$S = \frac{\overset{1}{\cancel{4}} \cdot \overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{12}}}$$

$$\boxed{S = 2}$$

Hallar F,en: $\frac{5}{8} = \frac{F}{24}$

$$F = \frac{5 \cdot \overset{\overset{3}{\cancel{6}}}{\cancel{24}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{8}}}$$

$$\boxed{F = 15}$$

d. Cuarta, tercera y media proporcional

En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, cada uno de los términos recibe el nombre de *cuarta* o *cuarto proporcional.*

Ejemplo: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$; 2 es la cuarta proporcional de 3, 4 y 6; 3 es la cuarta proporcional de 2, 4 y 6; 4 es la cuarta proporcional de 2, 3 y 6; 6 es la cuarta proporcional de 2, 3 y 4.

Supongamos que se pide hallar una cuarta proporcional de los números 10, 8 y 4. Como no se ha determinado la posi-

ción en que deben figurar los términos de la proporción, se hará notar a los alumnos que hay muchas formas para escribirla. Algunas de ellas son:

$$\frac{x}{10} = \frac{8}{4};\ \frac{x}{4} = \frac{10}{8};\ \frac{10}{4} = \frac{x}{8};\ \frac{10}{8} = \frac{x}{4};\ \frac{8}{x} = \frac{4}{10};\ \frac{4}{8} = \frac{10}{x}$$

Es conveniente que el maestro oriente esta actividad hasta lograr que los alumnos obtengan todas las 24 formas posibles y clasifiquen los tres grupos que dan para x los valores respectivos de: 5; 20 y 3,2.

Una proporción, cuyos medios o cuyos extremos son iguales, recibe el nombre de *proporción continua*. Así, por ejemplo: $\frac{3}{6} = \frac{6}{12}$ es una proporción continua. Uno de los dos términos iguales se llama *media* o *medio proporcional* o *geométrico* y cada uno de los otros dos términos recibe el nombre de *tercera* o *tercero proporcional*. Así, en el ejemplo anterior, 6 es media proporcional de 3 y 12, mientras que 3 y 12 son terceras proporcionales.

Ahora, si se tiene $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, donde a y b son conocidos, entonces $x = \sqrt{a.b}$

Ejemplos: Hallar la media proporcional entre 4 y 16:

$$\frac{4}{x} = \frac{x}{16} \Longrightarrow x = \sqrt{4x16} = \sqrt{64} = 8 \Longrightarrow x = 8$$

$\Longrightarrow x^2 = 4x16$ **(producto de medios = producto de extremos)**

$\Longrightarrow x^2 = 64$ **(multiplicación)**

$\Longrightarrow x = \sqrt{64}$ **(ver unidad 1, radicación)**

$\Longrightarrow x = 8$ **($\sqrt{64} = 8$)**

Comprobación: $\frac{4}{8} = \frac{8}{16} \Longrightarrow 4 . 16 = 8 . 8 \Longrightarrow 64 = 64$

Hallar la media proporcional entre 4 y 25

$$\frac{x}{4} = \frac{25}{x}$$

$$\Longrightarrow x^2 = 4 . 25$$

$$\Longrightarrow x^2 = 100$$

$$\Longrightarrow x = \sqrt{100}$$

$$\Longrightarrow x = 10$$

Sabiendo que 8 es media proporcional y 2 es tercera proporcional, hallar la otra tercera proporcional.

$$\frac{2}{8} = \frac{8}{t} \Longrightarrow t = \frac{8.8}{2} = \frac{64}{2} = 32 \Longrightarrow t = 32$$

2. Aplicaciones de las proporciones

a. Regla de tres simple,directa e inversa

Antes de entrar a considerar algunas de las múltiples aplicaciones de la proporcionalidad, vamos a recordar lo referente a variación directa e inversa entre magnitudes (tema tratado en la Guía de 4o. grado).

Consideremos el siguiente ejemplo: Un metro de dacrón cuesta 40$. ¿Cuántos metros pueden comprarse con 280$?

El problema puede visualizarse construyendo una tabla, donde aparecen las magnitudes dinero y longitud.

Dinero en pesos	40	80	120	160	200	240	280
Longitud en metros	1	2	3	4	5	6	⑦

Se observa que con más dinero se compran más metros, y con menos dinero, se compran menos metros de dacrón. Cuando esto ocurre, decimos que las dos magnitudes son *directamente proporcionales*.

Es también fácil comprobar que al dividir cada par de elementos, correspondientes en la tabla, siempre se obtiene el mismo cociente: 40.

Así por ejemplo: $\frac{40}{1} = 40;\ \frac{80}{2} = 40;\ \frac{120}{3} = 40.$

Entonces, como estas razones son todas iguales, es lícito escribir:

$$\frac{80}{2} = \frac{120}{3};\ \frac{40}{1} = \frac{240}{6};\ \frac{120}{3} = \frac{240}{6};\ \ldots$$

Entonces, es muy fácil resolver el problema, estableciendo la proporción siguiente:

$$\frac{40}{1} = \frac{280}{x} \Longrightarrow x = \frac{1 . 28\cancel{0}}{4\cancel{0}} = \frac{28}{4} = 7 \Longrightarrow x = 7$$

Respuesta: Con 280$ pueden comprarse 7 metros de dacrón.

Un obrero gana 42$ por 7 horas de trabajo. ¿Cuánto ganará si trabaja 18 horas?

El análisis de este problema nos dice que las magnitudes dinero y tiempo son directamente proporcionales, ya que a mayor tiempo trabajado por el obrero, corresponde más dinero.

Horas	$
7	42
18	x

Entonces, $\frac{7}{42} = \frac{18}{x} \Longrightarrow x = \frac{18 \times \overset{6}{\cancel{42}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} = 18x6 = 108 \Longrightarrow x = 108$

Respuesta: Por las 18 horas de trabajo, el obrero recibe 108$.

La gravedad en la luna es tal, que un objeto que pesa en la tierra 1 kg. tiene allá $\frac{4}{25}$ kg. Si un hombre pesa 70 kg. en la tierra, ¿cuál será su peso en la luna?

Gravedad tierra	Gravedad luna
1 kg	$\frac{4}{25}$ kg
70 kg	x

$$\frac{1\text{ kg}}{70\text{ kg}} = \frac{4/25\text{ kg}}{x} \Longrightarrow x = \frac{70\text{ kg} \times 4/25\text{ kg}}{1\text{ kg}} = \frac{280}{25}\text{ kg} = 11{,}2\text{ kg}$$

Respuesta: Pesará en la luna 11,2 kg.

No siempre cuando se comparan dos magnitudes, éstas varían en forma directa. Veamos el siguiente caso:

Un obrero emplea 90 días para realizar una construcción. ¿Cuántos días gastarán 10 obreros igualmente calificados para efectuar la misma obra?

He aquí la solución por medio de una tabla:

Número de obreros	1	2	3	4	5	...	9	10
Número de días	90	45	30	22,5	18	...	10	9

Se observa que al aumentar el número de obreros, disminuye el número de días y viceversa. Se dice entonces que las dos magnitudes son *inversamente proporcionales.*

Al efectuar, como antes, la división entre las parejas respectivas, se observa que no aparece el mismo cociente es decir, las razones no son iguales. Pero si multiplicamos los componentes de las parejas respectivas, se obtiene siempre el mismo resultado: 90.

1x90 = 90
2x45 = 90
3x30 = 90
4x22,5 = 90
5x18 = 90
. .
. .
. .
9x10 = 90
10x 9 = 90

Por lo tanto, es permitido escribir:

2x45 = 4x22,5
9x10 = 5x18
1x90 = 2x45
.
.
.

Entonces, resulta sencillo resolver el problema en forma aritmética.

$1 \cdot 90 = 10 \cdot x \Longrightarrow x = \frac{1 . 9\cancel{0}}{1\cancel{0}} = 9 \Longrightarrow x = 9$

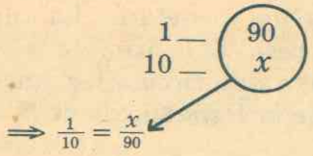
Respuesta: 10 obreros gastarán 9 días.

Basándose en la propiedad fundamental de las proporciones, podemos considerar los términos 1 y 90 como extremos de una proporción y 10 y x como medios de la misma.

Es decir,

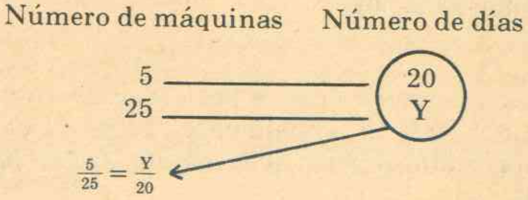
$1 \cdot 90 = 10 \cdot x \Longrightarrow \frac{1}{10} = \frac{x}{90}$

Al observar la situación en una tabla, vemos que es necesario invertir una de las dos razones:



Ejemplo:

Con 5 máquinas perforadoras se emplean 20 días para abrir una mina. Si trabajan 25 perforadoras, ¿cuántos días se necesitan para realizar el mismo trabajo?



$\Longrightarrow Y = \frac{5 \times 20}{25} = \frac{100}{25} = 4 \Longrightarrow Y = 4$

Respuesta: 25 perforadoras harán el trabajo en 4 días.

Los problemas anteriores, donde se dan 3 datos y se pide hallar el cuarto (cuarta proporcional), reciben el nombre de problemas de *regla de tres simple.* Cuando las magnitudes varían directamente, se habla de *regla de tres simple directa;*

y cuando varían inversamente, se habla de *regla de tres simple inversa.*

Ejemplo:

Para empapelar las paredes de un salón se requieren 108 metros^2 de papel de 1 metro de ancho. ¿Cuánto papel de 1,50 metros de ancho se necesita para empapelar el mismo salón?

Número de metros^2 de papel	Anchura del papel
108	1 m.
x	1,50 m.

La variación es inversa, es decir, este es un problema de regla de tres simple inversa.

$$\frac{108}{x} = \frac{1{,}50}{1} \Longrightarrow x = \frac{1 \times 108}{1{,}50} = 72 \Longrightarrow x = 72$$

Respuesta: se necesitan 72 m^2 de papel de 1,50 m de ancho.

b. Sistema monetario

La utilización de la moneda hace posible cuantificar las ganancias o ingresos provenientes de determinada actividad. Cada país tiene su sistema monetario. La unidad de la moneda colombiana es el peso. El control de la compra y venta de la moneda extranjera que circula legalmente en el país, se hace en el Banco de la República y se le denomina sencillamente *cambio.*

El tipo de cambio, en términos generales, expresa el valor de la moneda de un país con relación a la moneda de otro.

Cuando se afirma que en Colombia el tipo de cambio con relación al dólar está al 25,5 significa que a un dólar corresponde un valor de 25,50$.

Ejemplos:

Julián necesita adquirir dólares para realizar un viaje de estudio fuera del país. Si actualmente el tipo de cambio está al 26, calcula ¿cuántos pesos debe invertir Julián para adquirir 135 $US?

26$	1 $US
x	135 $US

Respuesta: Debe invertir 3.510$ para obtener 135 $US

Otro compañero de excursión dispone de 5 018,00$ para adquirir dólares al tipo de cambio ya enunciado. ¿Cuántos dólares puede comprar?

26$	1 $US
5 018$	x

$$\frac{26\,\$}{5\,018\,\$} = \frac{1\,\$US}{x} \Longrightarrow x = \frac{1\,\$US \times 5\,018\,\$}{26\,\$} = 193\,\$US$$

Respuesta: Puede comprar 193 $US.

Es conveniente que se estimule el interés del alumno, para que investigue lo relativo al tipo de cambio de nuestra moneda, con relación a otros países con los cuales tiene Colombia intercambio comercial, hasta que pueda realizar diferentes cálculos de este tipo.

c. Porcentaje

Los problemas de *tanto por ciento* o *porcentaje,* tan frecuentes en la vida diaria, son un caso particular de regla de 3 simple directa.

El *tanto por ciento* se indica con el signo % que es sencillamente una forma de representar fracciones cuyo denonimador es 100; por tanto, $5\% = \frac{5}{100}$.

Ejemplos de situaciones para analizar:

—El 7% de los alumnos de un curso son repitentes, significa 7 de cada 100 = $\frac{7}{100} = 0{,}07$.

—El 75% de la superficie terrestre (75 de 100 = $\frac{75}{100} = 0{,}75$) está cubierta de agua.

—En el aire que respiramos hay la siguiente proporción de gases:

78% de nitrógeno (78 de 100 = $\frac{78}{100} = 0{,}78$)
21% de oxígeno (21 de 100 = $\frac{21}{100} = 0{,}21$) y
1% de otros gases (1 de 100 = $\frac{1}{100} = 0{,}01$)

—Brasil produce el 50% ($\frac{50}{100}$) del total del café mundial y Colombia el 10% ($\frac{10}{100}$) ¿Qué proporción corresponde a los demás países?

Para mayor comprensión del concepto *por ciento* se sugiere variada ejercitación.

Ejemplos:

1) Precisar la equivalencia entre los siguientes vocablos:
   a) Fraccionario común (en su mínima expresión).
   b) Fraccionario decimal.
   c) Notación decimal o número decimal.
   d) Porcentaje.

A continuación se presenta un ejemplo de trabajo individual que consiste en anotar la expresión que falta para llenar el cuadro de equivalencias:

Expresiones equivalentes			
Tanto por ciento	Notación decimal	Fraccionarios	
		Decimal	Común
12%	0,12	$\frac{12}{100}$	$\frac{3}{25}$
			$\frac{1}{4}$
	0,20		
18%			
	0,03		
$12\frac{1}{2}$%			
		$\frac{50}{100}$	
70%			
			$\frac{2}{5}$
	0,01		

2) Analizar situaciones cuantitativas de ocurrencia frecuente y expresar las conclusiones:

   a) De 7 docenas de cuadernos, se vendió el 100%. ¿Qué porcentaje se vendió? ¿Cuántos cuadernos?

   b) De 25 ejercicios de matemática uno resultó incorrecto. ¿Qué porcentaje de ejercicios es correcto? ¿Qué porcentaje es incorrecto?

   c) El cuerpo humano contiene $\frac{2}{3}$ de agua. ¿Cuál es el porcentaje de agua que contiene?
   Si una persona pesa 75 kg. ¿Cuánta agua contiene?

   d) Un agente vendedor de pólizas gana el 5% del valor que corresponde a la venta efectuada. Por 8 250$, ¿cuánto gana?

d. Descuento

En el comercio se presenta con frecuencia el cálculo de un determinado porcentaje que se rebaja o se descuenta al valor total de la venta. Esto sigue siendo una aplicación de la regla de tres simple directa.

Ejemplo:

Un radio tiene un valor inicial de 1 500$. En el almacén

descuentan el 12% de su valor. ¿Cuál es el precio real del radio?

Capital	Descuento
100	12
1.500	x

$$\Longrightarrow \frac{100}{1\,500} = \frac{12}{x} \Longrightarrow x = \frac{1\,5\cancel{0}\cancel{0} \text{ x } 12}{1\cancel{0}\cancel{0}} = 15\text{x}12 = 180 \Longrightarrow x = 180$$

Valor inicial o nominal — descuento = valor real

1.500$ — 180$ = 1320$

Respuesta: El valor real del radio es de 1 320$

e. Regla de tres compuesta

Con respecto a la REGLA DE TRES COMPUESTA, consideramos que este tópico corresponde al primer año de enseñanza media. Si el maestro considera necesario, debido al interés de los alumnos o a las necesidades prácticas, puede tratar problemas sobre cálculo de interés, utilizando el método de reducción a la unidad. Por ejemplo:

Un negociante presta 15.000$ al 10% de interés anual. ¿Cuánto se ganará (interés) en 3 años?

Capital	Interés	Tiempo (en años)
100	10	1 año
15.000	x	3 años

Análisis:

Si por 100$ de capital se gana 10$ de interés, en 1$ se ganará 100 veces menos de interés y en 15.000$ se ganará 15.000 veces más de interés; esto en 1 año; en 3 años, se ganará 3 veces más de interés.

Solución: $\frac{1\cancel{0} \text{ x } 15\,\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} \text{ x } 3}{1\cancel{0}\cancel{0} \text{ x } 1} = 4500$

Respuesta: En 3 años se ganará 4.500$.

f. Figuras semejantes

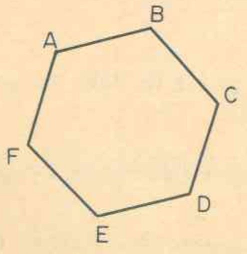


Fig. I

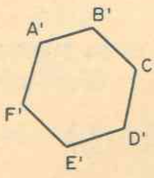


Fig. II

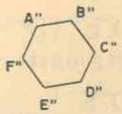


Fig. III

Al observar las anteriores figuras vemos que no son congruentes, ni equivalentes en superficie (y por tanto, tampoco en área). Pero su FORMA sí es la misma; por tanto se dice que son SEMEJANTES.

Las tres figuras guardan cierta relación o proporción entre sus elementos: así por ejemplo, cada punto de la figura I tiene su correspondiente u homólogo en la figura II y en la figura III. Al punto A (Fig. I) le corresponde el punto A' (figura II), y el punto A" (figura III); a B le corresponden B' y B", etc.

$$\text{ángulo } FAB \equiv \text{ángulo } F'A'B' \equiv \text{ángulo } F''A''B''.$$

$$\text{ángulo } ABC \equiv \text{ángulo } A'B'C' \equiv \text{ángulo } A''B''C''.$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Esto significa que los ángulos correspondientes u homólogos son congruentes entre sí, ya que de no serlo, las figuras no tendrían la misma forma.

Si el segmento AB mide 2 cm. y el segmento A'B' mide 1 cm, entonces AB = 2A'B'.

Es claro que BC = 2B'C'; CD = 2C'D', etc. Si esto no fuera cierto, se perdería la igualdad de forma.

De las anteriores igualdades se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} AB = 2A'B' \\ BC = 2B'C' \end{array}\right| \Longrightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{\cancel{2}A'B'}{\cancel{2}B'C'} \Longrightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \Longrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{array}{l} DE = 2D'E' \\ EF = 2E'F' \end{array}\right| \Longrightarrow \frac{DE}{EF} = \frac{\cancel{2}D'E'}{\cancel{2}E'F'} \Longrightarrow \frac{DE}{EF} = \frac{D'E'}{E'F'} \Longrightarrow \frac{DE}{D'E'} = \frac{EF}{E'F'}$$

En igual forma, si en la figura III, A"B" mide 0,5 cm, entonces B"C" mide 0,5 cm.

Por lo tanto,

DE = 4D"E" (D"E" es la cuarta parte de DE, ya que 0,5 $=\frac{1}{2}$ es la cuarta parte de 2). Entonces,

$$\left.\begin{array}{l} DE = 4D''E'' \\ EF = 4E''F'' \end{array}\right| \Longrightarrow \frac{DE}{EF} = \frac{\cancel{4}D''E''}{\cancel{4}E''F''} \Longrightarrow \frac{DE}{EF} = \frac{D''E''}{E''F''} \Longrightarrow \frac{DE}{D''E''} = \frac{EF}{E''F''}$$

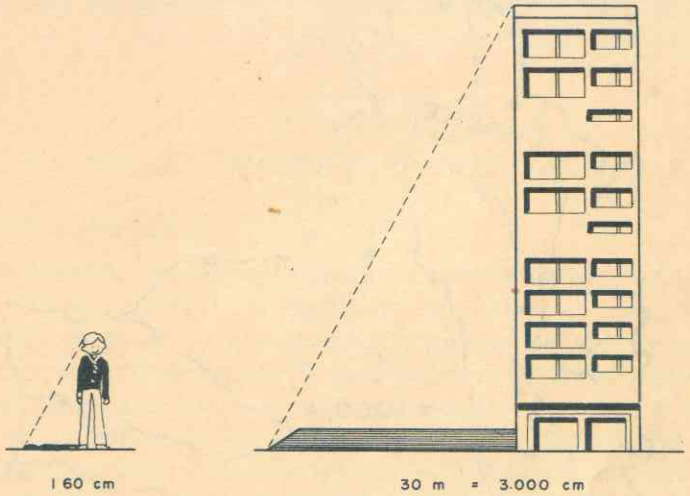
De lo anterior se deduce que los segmentos (lados) homólogos son proporcionales.

Ahora ya podemos definir formalmente el concepto de figuras semejantes, así:

Dos figuras son semejantes cuando sus ángulos homólogos o correspondientes son congruentes y sus lados homólogos son proporcionales.

Con esta base es fácil resolver problemas prácticos, como el siguiente:

A cierta hora del día, la sombra de una torre mide 30 m. Un hombre que mide 160 cm proyecta una sombra de 50 cm. ¿Cuál es la altura de la torre?



Se forman dos triángulos rectángulos semejantes. Por lo tanto se tiene:

$$\frac{\text{Sombra del hombre}}{\text{Sombra de la torre}} = \frac{\text{Altura del hombre}}{\text{Altura de la torre}}$$

$$\frac{50 \text{ cm}}{3\,000 \text{ cm}} = \frac{160 \text{ cm}}{x}$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{16\cancel{0} \text{ cm} \,.\, \overset{600}{\cancel{3000}}}{\underset{1}{\cancel{50}}}$$

$$\Longrightarrow \quad x = 16 \text{ cm} \cdot 600$$

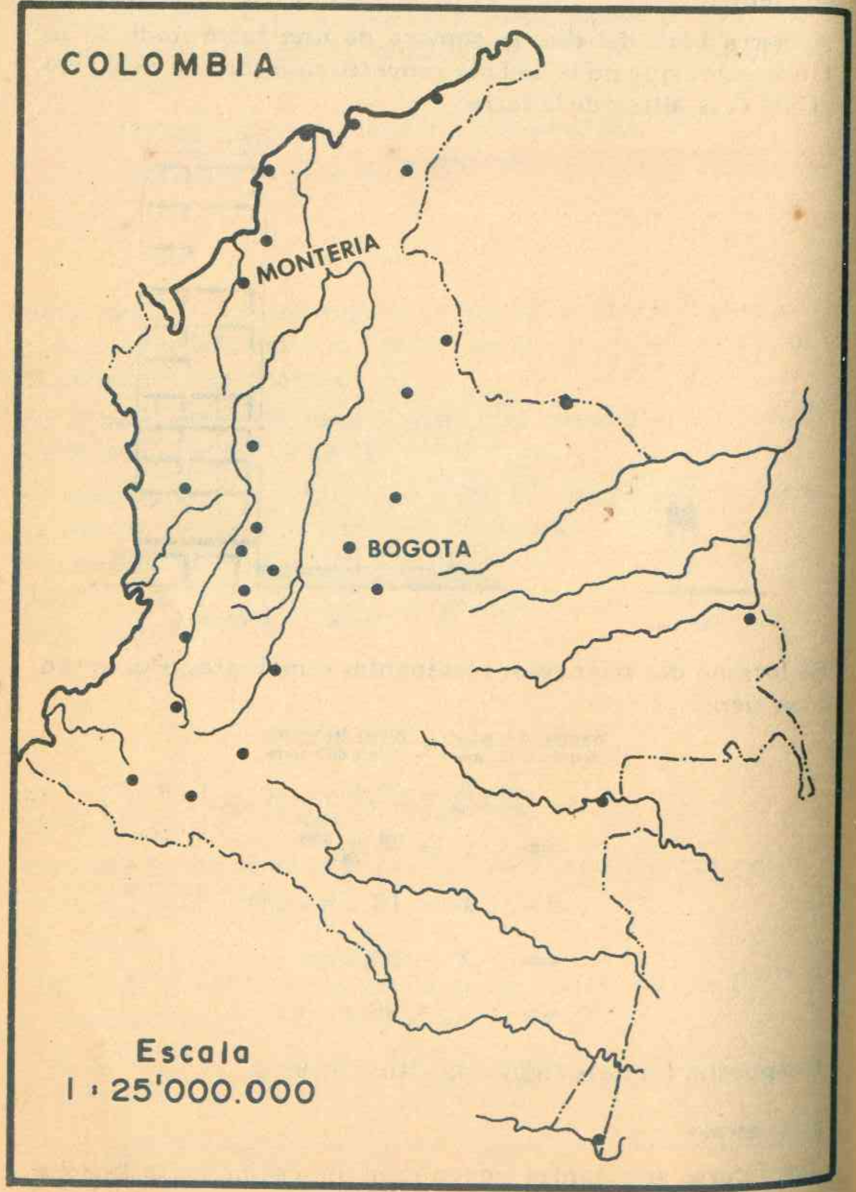
$$\Longrightarrow \quad x = 9600 \text{ cm}$$

$$\Longrightarrow \quad x = 96 \text{ m}$$

Respuesta: La torre tiene una altura de 96 m.

g. La escala

Las figuras semejantes tienen gran aplicación en la Ingeniería, Arquitectura, Geografía y otras ramas de las Ciencias. Los planos de un terreno o de una construcción, las maquetas de un edificio, las fotografías, los mapas, etc., son representaciones reducidas o ampliadas de la realidad y conservan siempre una proporción con ella. La razón de semejanza existente entre los modelos y la realidad recibe el nombre de ESCALA.



Así por ejemplo, si en un plano la escala es $1 : 500 = \frac{1}{500}$, significa que una unidad en el modelo, representa 500 unidades de la misma longitud en la realidad.

Presentamos a continuación algunos ejemplos ilustrativos:

En el mapa anterior aparece la escala 1 : 25'000.000, lo cual significa que por cada cm en el mapa, corresponderán 25'000.000 de centímetros en la realidad.

Si queremos conocer la distancia real (en línea recta, desde luego) entre BOGOTA y MONTERIA, medimos con una regla en nuestro mapa y obtenemos 3,8 cm. Entonces, multiplicando 3,8 por 25'000.000 se logra la distancia real en cm.

$$\begin{array}{r} 25'000.000 \\ \times\ 3{,}8 \\ \hline 95'000.000{,}0 \end{array}$$

Distancia BOGOTA-MONTERIA = 95'000.000 cm = 950 km.

h. Gráficas estadísticas

Consideramos conveniente plantear cuestiones que los alumnos deberán resolver por medio de una investigación o recopilación de datos, ya que en informaciones radiales, revistas, periódicos y otros medios de información, se aprecia que las cifras numéricas son utilizadas con mucha frecuencia, para informar acerca de diferentes situaciones relacionadas con aspectos sociales, económicos y otros. Muchas informaciones se suministran a base de gráficas significativas, en las cuales se destaca la proporción entre los datos que son motivo de comparación.

Los ejemplos que se analizan en esta guía tienen como objetivo, orientar acerca de la forma de obtener, agrupar, presentar e interpretar datos para descubrir nuevas relaciones cuantitativas y sacar las conclusiones correspondientes.

Sea el tema: Extensión territorial de los departamentos de Colombia.

1er. paso:

Recolección de datos: Se recurre a la consulta de diferentes fuentes de información: textos de Geografía, boletines del DANE, etc. Se elabora una lista con la extensión territorial de cada departamento.

Es fácil obtener la totalidad de los datos por cuanto es bien limitado el número de departamentos de Colombia. Cuando se trata de otros tipos de investigación donde se contemplan muchos datos, no es factible tomarlos en su totalidad sino en una parte o *muestra* de ellos. En Estadística, una *muestra es un grupo de datos seleccionados dentro de un conjunto mayor.* Hay que tener en cuenta que la información tomada mediante *muestras*, es relativa; por tanto para tomar decisiones a base de una muestra, es necesario analizar cómo, cuándo, dónde se hizo el muestreo, cómo se seleccionó y de qué número se partió.

2o. paso:

Agrupación de datos: Los datos presentados en orden alfabético (cuadro No. 1) no tienen mayor significado para la comparación cuantitativa de los mismos, por lo cual es necesario organizarlos en orden creciente o decreciente, de menor o mayor extensión territorial, o viceversa, con base en intervalos de 5 000 km². Frente a cada intervalo aparece el nombre de los departamentos que corresponden. Como se aprecia, los datos tabulados en intervalos no dan la información precisa; en este caso, no se contempla la extensión que realmente tiene cada departamento sino la comprendida dentro del intervalo, como se aprecia en el cuadro No. 2.

La observación del diagrama de barras (cuadro No. 3) permite determinar conclusiones como las siguientes:

—Los departamentos de menor extensión territorial son: Atlántico, Quindío y Risaralda.

—El departamento de Mayor extensión es Meta.

—La extensión territorial de 7 departamentos oscila entre 20 001 y 25 000 km².

3er. paso:

CUADRO No. 1

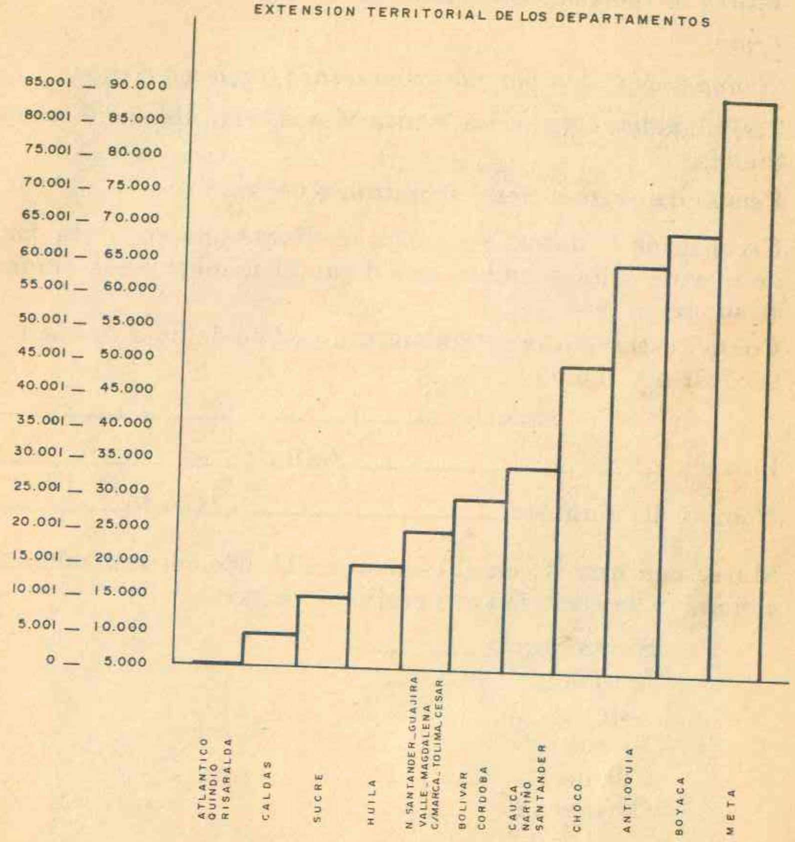
Departamentos	Extensión km²	Población
Antioquia	62.900	2'477.300
Atlántico	3.300	717.000
Bolívar	26.400	694.000
Boyacá	67.800	1'058.000
Caldas	7.200	690.000
Cauca	30.500	607.000
Cesar	24.400	261.000
Córdoba	25.200	586.000
Cundinamarca	24.000	2'818.000
Chocó	47.200	182.000
Guajira	22.200	147.000
Huila	20.000	416.500
Magdalena	22.300	530.000
Meta	86.000	166.000
Nariño	31.000	706.600
N. de Santander	21.000	535.000
Santander	31.000	1'000.000
Sucre	10.500	313.000
Tolima	23.300	841.000
Valle	21.300	1'733.000
Quindío	1.800	306.000
Risaralda	4.000	462.000
TOTALES	613.300	17'246.401

CUADRO No. 2

Intervalo Extensión territorial	Nombre de los Dptos.	No. de Dptos.
De 0 a 5.000	Quindío, Risaralda, Atlántico	3
De 5.001 a 10.000	Caldas	1
De 10.001 a 15.000	Sucre	1
De 15.001 a 20.000	Huila	1
De 20.001 a 25.000	N. de Santander, Guajira, Cundinamarca, Magdalena, Tolima, Valle, Cesar	7
De 25.001 a 30.000	Bolívar, Córdoba	2
De 30.001 a 35.000	Cauca, Nariño, Santander	3
De 35.001 a 40.000		
De 40.001 a 45.000		
De 45.001 a 50.000	Chocó	1
De 50.001 a 55.000		
De 55.001 a 60.000		
De 60.001 a 65.000	Antioquia	1
De 65.001 a 70.000	Boyacá (incluyendo a Casanare)	1
De 70.001 a 75.000		
De 75.001 a 80.000		
De 80.001 a 85.000		
De 85.001 a 90.000	Meta	1
	Total efectivos:	22

CUADRO No.3

GRAFICA (DE BARRAS) COMPARATIVA DE LA EXTENSION TERRITORIAL DE LOS DEPARTAMENTOS



El ejemplo que se presenta a continuación, amplía las orientaciones anteriores y muestra otras formas de recolección de datos y de representación gráfica.

Tema:

Ciudades de Colombia que los alumnos prefieren visitar.

Posibilidades: Cartagena, Santa Marta, Cali, Ibagué, Leticia, Cúcuta.

Personal que interviene: 40 alumnos del grado 5o.

Recolección de datos: Se realiza mediante una encuesta donde se pide a los alumnos que digan el nombre de la ciudad de su preferencia.

Como ilustración presentamos un modelo de hoja de encuesta alusiva al tema.

Escuela: ______________________________

Lugar: ____________________ Fecha: ______________

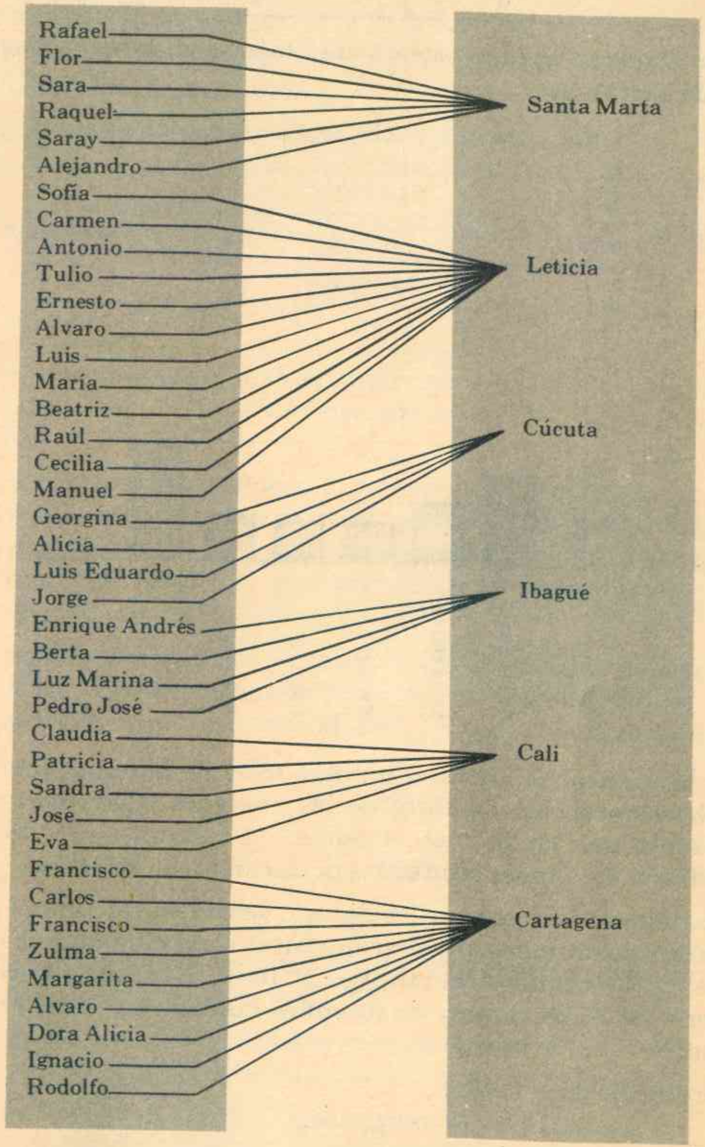
Nombre del alumno: ____________________ Grado: ________

Marca con una X, en el espacio en blanco correspondiente. el nombre de la ciudad que prefieras visitar:

Santa Marta ______
Leticia ______
Cali ______
Ibagué ______
Cúcuta ______
Cartagena ______

Agrupamiento de los datos: En una primera etapa puede hacerse un diagrama como el siguiente, en el cual se determina la relación: "... prefiere visitar a ..."

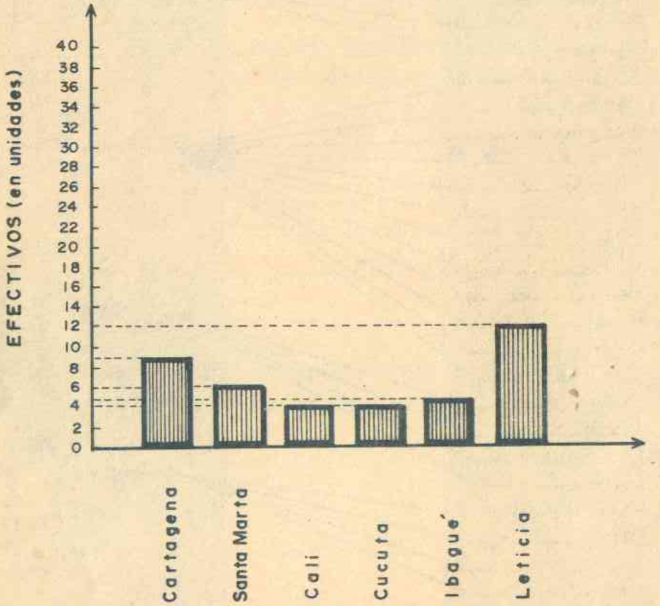
"PREFIERE VISITAR A ..."



El número de alumnos que desea visitar determinada ciudad se puede concretar en un cuadro como el siguiente:

Cartagena	Santa Marta	Cali	Cúcuta	Ibagué	Leticia
9	6	4	4	5	12

Lo anterior se puede presentar también mediante un diagrama de barras, así:



En la vertical se anota el número total de alumnos (40); en la horizontal, los nombres de las ciudades. Cada barra representa una ciudad con el número de alumnos que desean visitarla. Las líneas punteadas destacan dicha relación.

Otra forma de organizar los datos consiste en calcular el porcentaje de alumnos que desean visitar cada ciudad. Sabemos que los 40 alumnos constituyen el 100%. Es fácil, por tanto, averiguar el porcentaje de alumnos que corresponde a cada ciudad.

Porcentaje para Leticia:

$$\begin{matrix} 40 & 100 \\ 12 & x \end{matrix}$$

$$\Longrightarrow \frac{40}{12} = \frac{100}{x} \Longrightarrow x = \frac{1\overset{3}{\cancel{2}} \,.\, 10\cancel{0}}{\underset{1}{\cancel{4}\cancel{0}}} \Longrightarrow x = 30$$

Respuesta: El porcentaje para Leticia es 30.

Porcentaje para Ibagué:

$$\begin{matrix} 40 & 100 \\ 5 & x \end{matrix}$$

$$\Longrightarrow \frac{40}{5} = \frac{100}{x} \Longrightarrow x = \frac{5 \,.\, 10\cancel{0}}{4\cancel{0}} = \frac{50}{4} = 12{,}5 \Longrightarrow x = 12{,}5$$

Respuesta: El porcentaje para Ibagué es 12,5.

En igual forma pueden obtenerse los porcentajes correspondientes a las otras ciudades.

Tal situación la sintetizamos en el siguiente cuadro:

Ciudad					
Cartagena	Santa Marta	Cali	Cúcuta	Ibagué	Leticia
Porcentaje					
22,5%	15%	10%	10%	12,5%	30%

Otra representación de lo anterior puede hacerse en un círculo, en el cual el 100% corresponde a los 360° del ángulo de giro.

Para calcular los grados que corresponden a cada sector circular, se establece una relación entre los grados del ángulo de giro (360) y el porcentaje total (100); así como entre la apertura del ángulo X y el porcentaje de alumnos que prefieren visitar cada ciudad.

Ejemplo: para calcular la apertura del ángulo que determina el sector circular correspondiente a la ciudad de Leticia, cuyo porcentaje corresponde al 30%, la proporción se expresa así:

$$\begin{matrix} 360 & 100 \\ x & 30 \end{matrix} \qquad \frac{360}{x} = \frac{100}{30}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{36\cancel{0} \,.\, 3\cancel{0}}{1\cancel{0}\cancel{0}}$$

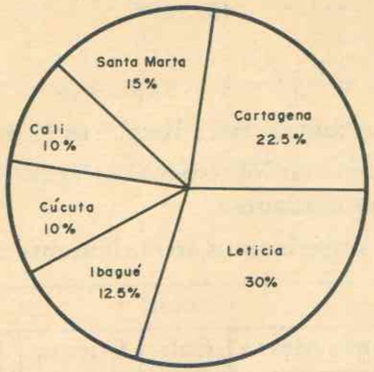
$$\Longrightarrow x = 108$$

Respuesta: la amplitud del ángulo para el sector circular correspondiente a Leticia, es de 108°.

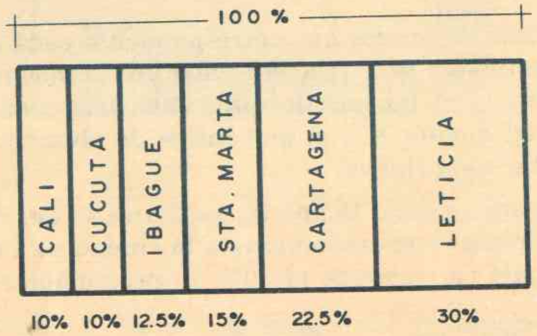
Efectuadas las operaciones correspondientes a los respectivos porcentajes, se determina la abertura de cada sector, así:

A Cartagena,	con 22,5%	le corresponden 81°
A Santa Marta,	con 15%,	le corresponden 54°
A Cali,	con 10%,	le corresponden 36°
A Cúcuta,	con 10%,	le corresponden 36°
A Ibagué,	con 12,5%	le corresponden 45°

La representación quedaría así:



También se utilizan los diagramas rectangulares para este tipo de representaciones. Para lograr esto, se divide el lado mayor de un rectángulo en 100 partes congruentes, trazando a continuación verticales por los puntos que corresponden a los porcentajes respectivos.



Los datos que se anotan a continuación pueden servir para realizar otros ejercicios, utilizando variadas representaciones gráficas: circulares, rectangulares, barras y otros, que los alumnos de este grado deben estar en capacidad de interpretar y elaborar, aplicando cálculos de porcentaje, proporciones y otros conceptos matemáticos.

Censo de 1964

Población total de Colombia: 17'484.508

	Población	%
Departamentos	17'096.390	97,78%
Intendencias	291.737	1,67%
Comisarías	96.381	0,55%
TOTAL	17'484.508	100,00%

	Urbana		Rural	
Departamentos	9'123.360	52,179%	7'973.030	45,600%
Intendencias	104.144	0,596%	191.593	1,096%
Comisarías	16.122	0,092%	82.259	0,470%
TOTALES	9'243.626	52,867%	8'246.882	47,166%

Extensión territorial de Colombia

	km^2	
Departamentos	590.545	51,85%
Intendencias	133.899	11,76%
Comisarías	414.470	36,39%
TOTAL	1'138.914	100,00%

III GLOSARIO

Símbolo	Significado
$\in$	pertenencia
$\notin$	no pertenencia
$\mathcal{U}$	conjunto universal
$\emptyset$	conjunto vacío
$\{\ \}$	llaves para agrupar conjuntos
$\cup$	unión
$\cap$	intersección
$\Leftrightarrow$	equivalente a
$\Rightarrow$	entonces
$\equiv$	congruencia
$=$	igualdad
$\neq$	diferente, no es igual
$\subset$	subconjunto. Inclusión. Está contenido en
$\supset$	contiene a
$<$	menor que
$\leq$	menor o igual, minorante
$>$	mayor que
$\geq$	mayor o igual, mayorante
$\not\leq$	no es minorante
$^\circ$	grado
$'$	minuto

"	segundo
∢	ángulo
$x^{\bullet}x$	segmento nulo
ℕ	números naturales
∟	ser múltiplo de
𝒜	área
△	triángulo
#	número

BIBLIOGRAFIA

ALARCON de Garzón, Leonor y CONTRERAS de Delgado, Julia. *Aritmética y Geometría.* Primer año de enseñanza media. Edit. Bedout, Medellín, Colombia, 1967.

BALDOR, Aurelio. *Aritmética teórico-práctica.* 2a. edición. Cultural Centroamericana S.A., Guatemala, 1962.

BARRERA, W.A. *Matemática Moderna.* Primer año de Bachillerato. Colección La Salle. Edit. Norma, Cali.

CARDONA O., Rafael y CASTRILLO G., Leonor. *Matemática I,* 2a. edición, Edit. Villegas, Bogotá, Colombia, 1969.

CLAUS G. y HIEBSCH H. *Psicología del niño escolar.* Versión española de H. Boehcher. Edit. Grijalbo S.A., México, D.F., 1966.

COLERUS, Egmont. *De la tabla de multiplicar a la integral.* Versión española por David Soler Carreras. Reimpresión Edit. Labor, S.A. Barcelona.

CONTRERAS de Delgado, Julia y ALARCON de Garzón, Leonor. *Aritmética y Geometría.* Segundo año de enseñanza media. Edit. Bedout, Medellín, Colombia.

DEPARTAMENTO ADMINISTRATIVO NACIONAL DE ESTADISTICA. *Resumen general del censo.* Imprenta Nacional. Bogotá D.E., 1967.

DOLCIANI, Mary P. y otros. *Matemáticas Modernas para escuelas secundarias.* Libro I. 1a. Ed. en español. Cultural S.A., México, D.F., 1968.

EICHOLZ, Robert E., O'DAFFER, PHARES G. y otros. *Serie matemática para la Educación Primaria.* (MEP). Edic. en español realizada con la colaboración y asesoría de Alfonso C., Hernando, Anzola Gómez, Gabriel y otros. Edit. Norma, Bogotá, 1968.

FLETCHER, T. J. *Didáctica de la Matemática Moderna en la enseñanza media.* Traducción de J. Tortella 2a. edición Edit. Teide, Barcelona, 1971.

FRANCO, Ramón y OCAMPO L., Javier. *Geografía Superior de Colombia.* 2a. edición. Edit. Bedout, Medellín, Colombia, 1968.

GARCIA G., José. *Matemáticas 2o. curso.* 7a. edición, Edit. Marfil S.A., Alcoy, 1967.

GESELL, Arnold, Ilg F.L. y AMES, L.B. *El adolescente dè 10 a 16 años.* Edit. Paidos, Biblioteca de Psicología Educativa.

GESELL, Arnold y otros. *El niño de 11 y 12 años.* Edit. Paidos, Buenos Aires.

GRUPO DE ESTUDIO DE LA MATEMATICA ESCOLAR. *Matemática para el primer ciclo secundario.* Volumen I. (Parte I) Traducción preliminar de la edición inglesa revisada. Edit. Norma, Cali, Colombia, 1962.

INSTITUTO COLOMBIANO DE PEDAGOGIA, ICOLPE, Departamento de Matemática. *Parte VI del Programa experimental para el 6o. grado.* Probabilidades y Estadística, 1972.

JOHNSON, Donovan; GLEN, William y otro. *Explorando la Matemática.* Tomo III. Traducción del inglés, bajo la dirección de Mariano García. Ediciones McGraw-Hill, 1963.

KEMPE F., Albert. *Modernas matemáticas simplificadas.* 3a. edición, Edit. Minerva. México 5, D.F., 1969.

LONDOÑO L., Samuel y FLOREZ M., Fanny. *Nociones de Aritmética, Geometría y Contabilidad.* Curso Segundo de enseñanza media. Edit. Bedout, Medellín, Colombia, 1967.

MARRERO, Levi. *La tierra y sus recursos.* Colección Geografía Visualizada. 3a. edición, Cultural S.A., 1957.

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL, Centro Nacional de documentación. *Informe del grupo de asesores en el área de Matemática para el curriculum de Educación Básica.* Documento 80/1E-53, III-72. Circulación General. Bogotá D.E., 1972.

MINISTERIO DE EDUCACION PUBLICA, DEPARTAMENTO DE TEXTOS ESCOLARES; Matemática. *Guía Didáctica para el libro "A jugar con los números".* Quito, Ecuador, 1970.

MORTON LEE, Robert y otros. *Matemática Moderna.* Libro 6o. Traducción Pablo Roca. Compañía Silver Burdett. Morristown, New Jersey, 1966.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Colección Temas de Matemática.* Edit. Trillas. México, 1972.

OUBIÑA Lía. *Introducción a la teoría de conjuntos.* Edit. Universitaria de Buenos Aires.

PAPY, Georges. *Mathématique Moderne.* Premier volume. Edit. Marcel Didier Bruxelles - París, 1964.

PERELMANN, Y. *El divertido juego de las matemáticas.* Círculo de Lectores, Ed. Martínez Roca, S.A., Valencia, 1968.

REPETTO, Celina; LINSKENS, Marcela y FESQUET, Hilda. *Aritmética. Primer año ciclo básico común a bachillerato y magisterio.* 7a. edición. Edit. Kapelusz, Buenos Aires, 1960.

VIEDMA, Juan A. *Lecciones de Aritmética.* 7a. edición, Edit. Norma, Cali, Colombia, 1957.

COMENTARIOS A LA GUIA DE MATEMATICA

5o. GRADO

Solicitamos la colaboración de los maestros, respondiendo este formulario de manera concreta. Sus sugerencias permitirán el mejoramiento de la presente Guía y la planeación de los seminarios por realizarse.

1. ¿Considera usted que los objetivos presentados para cada unidad brindan una orientación adecuada, para elaborar los objetivos de semana y de clase? ______. En caso negativo ¿qué sugiere usted, para solucionar esta situación? ______
2. ¿Cree usted que las orientaciones metodológicas presentadas en esta Guía ayudan al desarrollo del programa en forma suficiente? ______. En caso negativo, anote usted sus inquietudes al respecto. ______
3. ¿Cuáles temas presentaron para sus alumnos mayor dificultad? ______
   ¿Por qué? ______
4. ¿Cómo solucionó o sugiere deben solucionarse los problemas que afrontó, con respecto a los temas indicados en el punto anterior? ______
5. ¿Qué temas llamaron más la atención de sus alumnos? ______
6. ¿En qué temas el tiempo de desarrollo que se calcula fue insuficiente? ______
   ¿Por qué? ______
7. ¿Qué temas no pudo desarrollar, o no resultaron de acuerdo con lo planeado? ______
   ¿Por qué? ______
8. De los materiales que en la Guía se sugieren hacer, ¿cuáles presentan mayor dificultad para su elaboración? ______
   ¿Por qué? ______
9. De los trabajos realizados por los alumnos como actividades complementarias, ¿cuál o cuáles le llamaron más la atención? ______
   ¿Por qué? ______
10. ¿Qué sugerencias presentaría usted para el mejoramiento de la Guía? ______

(Si el espacio no es suficiente, favor utilizar otras hojas).

Enviar sus respuestas a:

Misión Pedagógica Alemana
Ministerio de Educación Nacional
Oficina 510
CAN - Bogotá, D. E.

Fecha ______ Nombre ______

Nombre y dirección de la Escuela ______

Lugar ______ Departamento ______

3600 | 15
060 240
00
0
2

Impreso en Italgraf - Bogotá