G-M. BRUÑO

# Nociones elementales DE GEOMETRÍA aplicadas al Dibujo lineal

PARÍS. PROCURADURÍA GENERAL
78, Rue de Sèvres, 78.

Nº477

Pertenece a

Evelina Inés Abuchaibe

NOCIONES ELEMENTALES

DE

# GEOMETRIA

NOCIONES ELEMENTALES
DE

# GEOMETRIA

APLICADAS AL DIBUJO LINEAL

POR

G. M. BRUÑO

21ª EDICION



PARIS
PROCURADURIA GENERAL
78, Rue de Sèvres, 78

NOCIONES ELEMENTALES
DE
# GEOMETRIA

## DEFINICIONES PRELIMINARES

**1.** *¿Qué es Geometría?*

GEOMETRIA es la ciencia que trata de la extensión y de sus medidas.

**2.** *¿Qué es extensión de un cuerpo?*

EXTENSION de un cuerpo es la parte del espacio ocupada por él; v. g.: el vacío que queda en una pared, al sacar un ladrillo o un adobe, representa el espacio o extensión del adobe o del ladrillo.

**3.** *¿Cuántas dimensiones se consideran en la extensión de un cuerpo?*

En la extensión de un cuerpo se consideran ordinariamente tres dimensiones, a saber: *longitud o largo, latitud o ancho,* y *altura, espesor o profundidad.*

**4.** *¿Qué se llama sólido, volumen o cuerpo geométrico?*

Llámase SOLIDO, VOLUMEN O CUERPO GEOMETRICO, la extensión considerada en sus tres dimensiones; por ejemplo, un ladrillo, una piedra.

**5.** *¿Qué es superficie?*

SUPERFICIE es la extensión en que sólo se consideran dos dimensiones: longitud y latitud, sin profundidad. Así, en una pared, por ejemplo, lo que se blanquea es la superficie de la pared.

**6.** *¿Qué es línea?*

LINEA es una de las tres dimensiones considerada aisladamente, y tiene sólo longitud; v. g.: la longitud de una cuerda, el ancho de un camino, la altura de una pared.

**7.** *¿Qué es punto?*

PUNTO es la intersección o corte de dos líneas.

**8.** *¿De qué otro modo puede definirse la línea?*

También puede decirse que la línea es *la intersección de dos superficies.*

**9.** *¿Qué se llama figura geométrica?*

Llámase FIGURA GEOMETRICA toda representación de puntos, líneas, superficies o volúmenes.

---

LIBRO PRIMERO

# LINEAS Y ANGULOS

---

## CAPITULO I

### División de las líneas

**10.** *¿Cuántas especies de líneas hay?*

Hay dos especies de líneas: la *recta* y la *curva.*

**11.** *¿Qué es línea recta?*


Fig. 1.

Línea RECTA es el camino más corto de un punto a otro.

Un hilo bien tendido nos representa un línea recta.

**12.** *¿Cómo se designa una línea recta?*

Una línea recta se designa con dos letras puestas en sus extremos; v. g.: la recta AB (Fig. 1).

**13.** *¿Qué es línea curva?*

Llámase línea CURVA la que no es recta en ninguna de sus partes; por ejemplo, la línea EFGH (Fig. 2). Un hilo no tendido representa una línea curva.

Fig. 2.

**14.** *¿Qué otras líneas se conocen a más de la recta y curva?*

A más de las líneas recta y curva también se conocen las siguientes: la *angulosa,* la *cóncava* y la *convexa;* las tres pueden ser o curvas, o composición de rectas.

**15.** *¿Qué es línea angulosa?*

Línea ANGULOSA O POLIGONAL es la que se compone de varias rectas, y encontrándose en un mismo plano puede ser cortada en más de dos puntos por otra (ABCDE, Fig. 3).

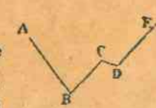



Fig. 3.

**16.** *¿Qué es línea convexa?*

Línea CONVEXA es la que encontrándose en un mismo plano

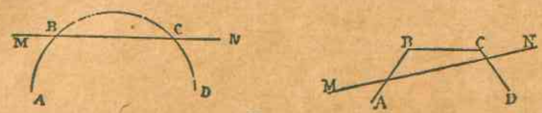



Fig. 4.

no puede ser cortada en más de dos puntos por una recta (ABCD, Fig 4).

**17.** *¿Qué otro nombre puede tomar la línea convexa?*

La misma línea convexa puede llamarse CONCAVA, según el lado por donde se considere.


Fig. 5.

**18.** *¿Qué línea resulta de la unión de rectas y curvas?*

De la unión de rectas y curvas resulta la línea mixta (ABCD, Fig. 5).

## CAPITULO II

### Diversas especies de líneas rectas

**19.** *¿Qué nombres toma la línea recta con respecto a su posición?*

La línea recta con respecto a su posición toma los nombres de *perpendicular, oblicua, horizontal* y *vertical.*

**20.** *¿Qué es línea perpendicular?*

Línea PERPENDICULAR es la que cae sobre otra línea sin inclinarse más a una parte que a otra (BA, Fig. 6).


Fig. 6.

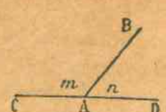



Fig. 7.



**21.** *¿Qué es línea oblicua?*

Línea OBLICUA es la que cae sobre otra línea inclinándose más a una parte que a otra (AB, Fig 7).

**22.** *¿Qué es línea horizontal?*

Línea HORIZONTAL es aquella que sin inclinarse hacia arriba ni hacia abajo, sigue el nivel del agua tranquila (CD, Fig. 6).

**23.** *¿Qué es línea vertical?*

Línea VERTICAL es la que sigue la dirección de la plomada; es perpendicular a la horizontal (AB, Fig. 6).

## CAPITULO III

### De los ángulos

**24.** *¿Qué es ángulo?*

ANGULO es la abertura comprendida entre dos líneas que concurren en un mismo punto (CAB, Fig 8).

**25.** *¿Cómo se forma un ángulo?*

Un ángulo se forma por medio de dos líneas que se encuentran en un punto.

**26.** *¿Qué se llaman lados de un ángulo?*

Llámanse LADOS de un ángulo las dos líneas que encontrándose lo forman (AC y AB, Fig. 8).

**27.** *¿Qué es vértice de un ángulo?*

VERTICE de un ángulo es el punto en que se cortan las dos líneas que lo forman (A, Fig. 8).

**28.** *¿Cómo se designa un ángulo?*

Un ángulo se designa, nombrando la letra del vértice o las tres letras, en cuyo caso ha de ir en segundo lugar la del vértice; v. g.: el ángulo A o el ángulo BAC (Fig. 8).

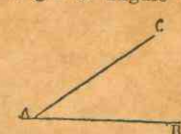



Fig. 8.


Fig. 9.

A menudo también se designa un ángulo, con una letra minúscula puesta en lo interior del ángulo, hacia el vértice; v. g.: el ángulo *m* (fig. 9).

**29.** *¿Cuándo son iguales dos ángulos?*

Dos ángulos son iguales cuando puesto el uno sobre el otro, coinciden perfectamente.

**30.** *¿De qué depende la magnitud o valor de un ángulo?*

Fig. 10.

La magnitud o valor de un ángulo depende únicamente de la abertura comprendida entre los lados, y no de la longitud de éstos, pues siempre se consideran indefinidos.

Así, el ángulo D (Fig. 10), más abierto que el ángulo E, es mayor que éste, aunque tiene lados más pequeños.

**31.** *¿Qué son ángulos adyacentes?*

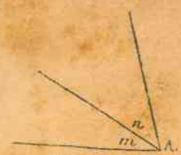


Fig. 11.

Angulos ADYACENTES o CONTIGUOS son los que tienen un mismo vértice y un lado común; v. g.: los ángulos *m* y *n* (Fig. 11).

Los lados exteriores pueden estar en línea recta.

**32.** *¿Cómo se dividen los ángulos con respecto a su magnitud?*

Los ángulos con respecto a su magnitud o valor, se dividen en *rectos, obtusos* y *agudos.*

**33.** *¿Qué es ángulo recto?*

Angulo RECTO es aquel cuyos lados son perpendiculares entre sí; v. g.: los ángulos *m* y *n* (Fig. 6).

**34.** *¿Qué es ángulo obtuso, ángulo agudo?*

Llámase OBTUSO el ángulo más abierto que un recto; v. g.: el ángulo *m* (Fig. 7), y AGUDO el que es menos abierto, como el ángulo *n* (Fig. 7).

**35.** *¿Con qué líneas se forman los ángulos obtusos o los agudos?*

Los ángulos obtusos o los agudos se forman con líneas que no son perpendiculares entre sí.

**36.** *¿Cuántos grados vale el ángulo recto?*

El ángulo recto vale 90 grados, o la cuarta parte de la circunferencia.



**37.** *¿Cuánto vale el ángulo de un grado?*

El ángulo de un grado vale la 90ª (nonagésima) parte de un ángulo recto.

**38.** *¿Cómo se dividen los ángulos por la relación que tienen entre sí?*

Los ángulos, por la relación que tienen entre sí, se dividen en *complementarios* y *suplementarios.*

**39.** *¿Cuándo son complementarios dos ángulos?*

Dos ángulos son COMPLEMENTARIOS cuando la suma de ellos es igual a un recto (DAB y BAC, Fig. 12).

**40.** *¿Cuándo son suplementarios dos ángulos?*

Dos ángulos son SUPLEMENTARIOS cuando la suma de ellos es igual a dos rectos (CAE y EAD, Fig. 13).

**41.** *¿Qué es complemento de un ángulo agudo?*

COMPLEMENTO de un ángulo agudo es otro ángulo agudo que, agregado al primero, da por suma un recto.

**42.** *¿Cómo se encuentra el complemento de un ángulo?*

**Para encontrar** el complemento de un ángulo, se levanta desde el vértice una perpendicular a uno cualquiera de sus lados.

Así, el complemento del ángulo BAC es el ángulo BAD (Fig. 12).

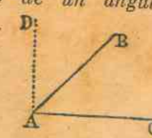


Fig. 12.

**43.** *¿Qué es suplemento de un ángulo?*

SUPLEMENTO de cualquier ángulo es otro ángulo que, agregado al primero, da por suma dos rectos.

**44.** *¿Cómo se encuentra el suplemento de un ángulo?*

Para encontrar el suplemento de un ángulo, basta prolongar cualquiera de sus lados por el vértice.

Así, el suplemento del ángulo EAD es el ángulo EAC (Fig. 13).

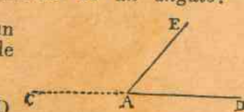


Fig. 13.

**45.** *¿Qué son ángulos opuestos al vértice?*

Llámanse ángulos OPUESTOS AL VERTICE los que resultan de la prolongación de los lados del uno sobre el vértice, o los que son formados por dos líneas que se cortan; así, los ángulos *m* y *n* (Fig. 14), son opuestos al vértice.

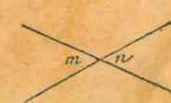


Fig. 14.

**46.** *¿Qué es bisectriz de un ángulo?*

BISECTRIZ de un ángulo es la recta que lo divide en dos partes iguales.

---

## CAPITULO IV

### Perpendiculares y oblicuas

**47.** *De dos líneas poligonales convexas que terminan en unos mismos puntos, ¿cuál es la mayor?*

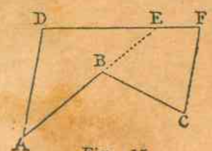


Fig. 15

De dos líneas poligonales convexas que terminan en unos mismos puntos, la mayor es la que envuelve a la otra; así, la línea poligonal ADFC es mayor que ABC (Fig. 15).

**48.** *Si de un punto tomado fuera de una recta, se trazan a ella una perpendicular y varias oblicuas, ¿qué relaciones existen entre estas líneas, tocante a su longitud?*

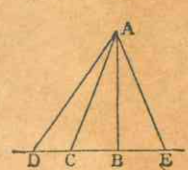


Fig. 16.

1º La perpendicular es más corta que cualquiera oblicua (Fig. 16);

2º Dos oblicuas cuyos pies están igualmente apartados del pie de la perpendicular, son iguales;

3º La más larga de dos oblicuas es aquella cuyo pie se aparta más del pie de la perpendicular.

**49.** *¿Cuál es el camino más corto de un punto a una recta?*

El camino más corto de un punto a una recta es la perpendicular bajada de dicho punto a la recta.

**50.** *¿Qué se llama distancia de un punto a una recta?*

La distancia de un punto a una recta es la longitud de la perpendicular bajada del punto dado a la recta.



## CAPITULO V

### De las paralelas

**51.** *¿Qué líneas se llaman paralelas?*

Llámanse PARALELAS las líneas rectas o curvas que están en un mismo plano, y que, aunque se prolonguen indefinidamente nunca pueden tocarse.

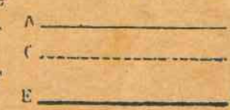


Fig. 17.

Tales son las rectas AB, CD, EF (Fig. 17).

Las paralelas están entre sí a igual distancia en todos sus puntos.

**52.** *¿Qué línea se llama secante o transversal?*

Llámase SECANTE o TRANSVERSAL la recta que corta cualquier línea o figura; v. g.: EF (Fig. 18).

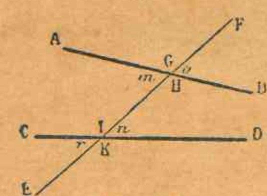


Fig. 18.

**53.** *¿Cuántos ángulos forman dos rectas cortadas por una secante?*

Dos rectas cortadas por una secante forman ocho ángulos que, tomados de dos en dos, reciben diferentes denominaciones, según sus posiciones relativas.

**54.** *¿Qué ángulos se llaman internos?*

Llámanse ángulos INTERNOS o INTERIORES los que se encuentran dentro de las rectas (*m*, H, I, *n*, Fig. 18).

**55.** *¿Cuáles son los ángulos externos?*

Angulos EXTERNOS o EXTERIORES son los que se encuentran fuera de las rectas (G, *o*, *r*, K, Fig. 18).

**56.** *¿Qué son ángulos alternos internos?*

ALTERNOS INTERNOS son los ángulos que, estando dentro de las rectas, se encuentran a distinto lado de la secante (*m*, *n*, y H, I, Fig. 18).

**57.** *¿Qué son ángulos correspondientes?*

Angulos CORRESPONDIENTES son los que se encuentran a un mismo lado de la secante, el uno interior y el otro exterior; pero que no son adyacentes (*o*, *n*; H, K; G, I; *m*, *r*, Fig. 18).

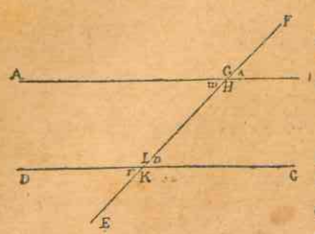


Fig. 19.

**58.** *Si las rectas son paralelas, ¿qué relación hay entre los ángulos formados por la secante que las corta?*

Si las rectas son paralelas, cuatro de los ángulos son agudos iguales entre sí, y los otros cuatro son obtusos, también iguales entre sí; así pues, en este caso los ángulos *alternos internos* son iguales, y los ángulos *correspondientes* son iguales (Fig. 19).

---

## CAPITULO VI

### De los polígonos en general

**59.** *¿Qué se llama polígono?*

Llámase POLIGONO cualquier figura plana limitada por líneas rectas.

**60.** *¿Qué nombre toman los polígonos según el número de sus lados?*

Los polígonos toman nombres particulares, según el número de sus lados.

El polígono de tres lados se llama *triángulo*
" " " cuatro " " " *cuadrilátero*
" " " cinco " " " *pentágono*
" " " seis " " " *hexágono*
" " " ocho " " " *octógono*
" " " diez " " " *decágono*

**61.** *¿Cómo se designan los demás polígonos?*

Los demás polígonos se designan por el número de sus lados; v. g.: polígono de 13 lados, de 17 lados, etc.



**62.** *¿Qué cosas deben considerarse en un polígono?*

En un polígono deben considerarse los *lados*, los *ángulos*, el *perímetro* y las *diagonales*.

**63.** *¿Qué se llaman lados de un polígono?*

Llámanse LADOS de un polígono las diversas líneas que lo limitan, las cuales no pueden ser menos de tres.

**64.** *¿Qué son ángulos de un polígono?*

ANGULOS de un polígono son los ángulos formados por los lados, en su punto de intersección.

**65.** *¿Cuántos ángulos tiene un polígono?*

Un polígono tiene tantos ángulos como lados.

**66.** *¿Qué es ángulo exterior de un polígono?*

Angulo EXTERIOR de un polígono es el que se halla formado por cualquier lado y la prolongación del lado adyacente.

Cada ángulo exterior de un polígono es el suplemento del ángulo interior adyacente.

**67.** *¿Qué es perímetro de un polígono?*

PERIMETRO de un polígono es la suma de todos sus lados.

**68.** *¿Qué se llama diagonal de un polígono?*

Llámase DIAGONAL de un polígono la recta que va de un ángulo a otro que no sea su adyacente o inmediato.

**69.** *¿Cuál polígono se llama equilátero?*

El polígono que tiene sus lados iguales se llama EQUILATERO.

**70.** *¿Cómo se llama el polígono que tiene sus ángulos iguales?*

El polígono que tiene sus ángulos iguales se llama EQUIANGULO.

**71.** *¿Cómo se dividen los polígonos con respecto a sus lados y ángulos?*

Los polígonos, con respecto a sus lados y ángulos, se dividen en *regulares* e *irregulares*.

**72.** *¿Qué es polígono regular?*

Polígono REGULAR es aquel cuyos lados y ángulos son iguales.

**73.** *¿Qué es polígono irregular?*

Polígono IRREGULAR es aquel cuyos lados y ángulos son desiguales.

---

## CAPITULO VII

### De los triángulos

**74.** *¿Qué es triángulo?*

TRIÁNGULO es una figura plana de tres ángulos y tres lados.

**75.** *¿Cuántos elementos se consideran en todo triángulo?*

En todo triángulo se consideran seis elementos, a saber: *tres ángulos* y *tres lados.*

**76.** *¿Qué es perímetro de un triángulo?*

PERÍMETRO de un triángulo es la suma de sus tres lados.

**77.** *¿Cómo se designan los lados y ángulos de un triángulo?*

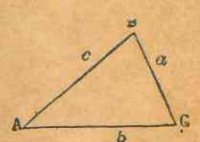


Fig. 20.

Los tres ángulos de un triángulo se designan ordinariamente por medio de tres letras mayúsculas, A, B, C, por ejemplo; y los lados opuestos a los ángulos por medio de las mismas letras minúsculas (*a, b, c,* Fig. 20).

**78.** *¿Cómo se dividen los triángulos con relación a sus lados?*

Con relación a sus lados, los triángulos se dividen en *equilátero, isósceles* y *escaleno.*

**79.** *¿Qué es triángulo equilátero?*

Triángulo EQUILATERO es el que tiene los tres lados iguales también se llama EQUIÁNGULO, porque sus ángulos son iguales.



**80.** *¿Qué es triángulo isósceles?*

Triángulo ISOSCELES es el que tiene dos lados iguales.

**81.** *¿Qué es triángulo escaleno?*

Triángulo ESCALENO es el que tiene los tres lados desiguales.

**82.** *¿Cómo se dividen los triángulos con relación a sus ángulos?*

Con relación a sus ángulos, los triángulos se dividen en *rectángulo, obtusángulo* y *acutángulo.*

**83.** *¿Qué es triángulo rectángulo?*

Triángulo RECTANGULO es el que tiene un ángulo recto.

**84.** *¿Qué es triángulo obtusángulo?*

Triángulo OBTUSANGULO es el que tiene un ángulo obtuso.

**85.** *¿Qué es triángulo acutángulo?*

Triángulo ACUTANGULO es el que tiene los tres ángulos agudos.

**86.** *¿Qué se llama hipotenusa?*

Llámase HIPOTENUSA el lado opuesto al ángulo recto en un triángulo rectángulo.

**87.** *¿Qué son catetos?*

CATETOS son los lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo.

**88.** *¿Qué es base de un triángulo o de cualquier polígono?*

BASE de un triángulo o de cualquier polígono es la línea en que se supone descansa la figura.

**89.** *¿Qué es vértice de un triángulo?*

VÉRTICE de un triángulo es la intersección de dos de sus lados.

**90.** *¿Qué lado de un triángulo puede tomarse por base?*

Se puede tomar por base de un triángulo cualquiera de sus lados.

**91.** *¿Qué se llama especialmente vértice y base en un triángulo isósceles?*

En un triángulo isósceles se llama especialmente VERTICE el punto de encuentro de los dos lados iguales; y BASE, el lado opuesto al vértice.

**92.** *¿Qué se llama altura de un triángulo?*

Llámase ALTURA de un triángulo la perpendicular bajada de uno de los vértices al lado opuesto, o a su prolongación.

En el triángulo rectángulo, se llama especialmente ALTURA la perpendicular bajada desde el vértice del ángulo recto a la hipotenusa. Si se toma un cateto como base, el otro cateto es la altura.

**93.** *¿Qué es mediana?*

MEDIANA es la recta que une uno de los vértices de un triángulo con el punto medio del lado opuesto.

**94.** *¿Qué líneas se consideran en un triángulo?*

En un triángulo hay tres *alturas*, tres *medianas* y tres *bisectrices.*

## Valor de los ángulos en los triángulos

**95.** *¿Cuál es el valor total de los tres ángulos de cualquier triángulo?*

El valor total de los tres ángulos de cualquier triángulo es de 180°, o dos ángulos rectos.

**96.** *¿Cuánto valen juntos los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo?*

Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo valen juntos 90° o un ángulo recto.

**97.** *Si un triángulo rectángulo es isósceles, ¿cuánto vale cada ángulo agudo?*

Como los ángulos agudos de un triángulo rectángulo isósceles son iguales, cada uno de ellos vale la mitad de 90°, esto es, 45°.

**98.** *¿Cuánto vale cada ángulo de un triángulo equilátero?*

Como el triángulo equilátero es también equiángulo, cada uno de sus ángulos vale la tercera parte de 180° esto es, 60°.



## Casos de congruencia o igualdad de los triángulos

**99.** *¿Cuándo son congruentes o iguales dos triángulos?*
Dos triángulos son CONGRUENTES o IGUALES cuando pueden coincidir.

Hay TRES CASOS DE IGUALDAD de los triángulos:

1° Dos triángulos son iguales, cuando tienen un ángulo igual comprendido entre lados respectivamente iguales.


Fig. 21.

Sean los triángulos T y T', que tienen el ángulo A = A' comprendido entre los lados AB = A'B' y AC = A'B' (Fig. 21).

2° Dos triángulos son iguales cuando tienen un lado igual adyacente a ángulos respectivamente iguales.

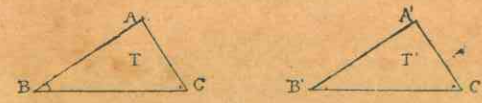



Fig. 22.

Sean los triángulos T y T', que tienen el lado BC = B'C', adyacentes a los ángulos B = B' y C = C' (Fig. 22).

3° Dos ángulos son iguales cuando tienen los tres lados respectivamente iguales.

**100.** *¿Cuándo son iguales dos triángulos rectángulos?*
Dos triángulos rectángulos son iguales:


Fig. 23.

1° Cuando tienen iguales la hipotenusa y un ángulo agudo (Fig. 23).

2° Cuando tienen iguales la hipotenusa y un cateto.

**101.** *¿Que propiedad tienen los ángulos de un triángulo isósceles?*

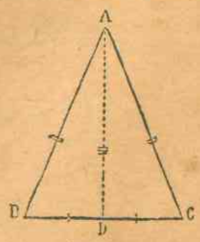



Fig. 24.

En un triángulo isósceles, los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales.

Así el ángulo B, opuesto al lado AC (Fig. 24), es igual al ángulo C, opuesto al lado BA.

**102.** *¿Qué propiedad tiene la bisectriz del ángulo del vértice en un triángulo isósceles?*

La bisectriz del ángulo del vértice, en un triángulo isósceles, es a un tiempo:

1º *Perpendicular* a la base;

2º *Mediana,* porque cae en la mitad de la base.

---

## CAPITULO VIII

### De los cuadriláteros

**103.** *¿Qué se llama cuadrilátero?*

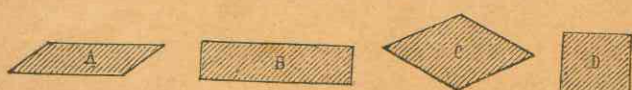
Llámase CUADRILATERO cualquier figura limitada por cuatro lados, y que tiene por consiguiente cuatro ángulos.

**104.** *¿Qué se llama paralelogramo?*

Llámase PARALELOGRAMO todo cuadrilátero que tiene paralelos los lados opuestos (Fig. A).

**105.** *¿Qué es rectángulo?*

RECTANGULO es un paralelogramo cuyos ángulos son rectos y sus lados iguales de dos en dos (Fig. B).




**106.** *¿Qué es rombo?*

ROMBO es un paralelogramo cuyos lados son iguales pero no perpendiculares; tiene dos ángulos agudos iguales entre sí, y dos obtusos iguales entre sí. (Fig. C).

**107.** *¿Qué es cuadrado?*

CUADRADO es un paralelogramo de cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos (Fig. D).



Este es el cuadrilátero regular, y es a un tiempo rombo y rectángulo.

**108.** *¿Qué es trapecio?*

TRAPECIO es un cuadrilátero que solamente tiene dos lados opuestos paralelos (Fig. E).


**109.** *¿Qué es trapecio rectángulo?*

Trapecio RECTANGULO es el que tiene dos ángulos **rectos** (Fig. F).

**110.** *¿Cuándo es isósceles un trapecio?*

Un trapecio es ISOSCELES o SIMETRICO cuando son **iguales** sus lados opuestos no paralelos (Fig. G).

**111.** *¿Cuántas bases hay en todo paralelogramo?*

En todo paralelogramo, así como en el trapecio, hay **dos** bases, la inferior y la superior.

**112.** *¿Qué es base inferior?*

BASE INFERIOR es el lado sobre que se supone **descansa la** figura.

**113.** *¿Qué es base superior?*

BASE SUPERIOR es el lado paralelo a la base inferior.

**114.** *¿Qué es altura de un paralelogramo o de un trapecio?*

ALTURA de un paralelogramo o de un trapecio es la **perpendicular** bajada desde cualquier punto de la base **superior a** la base inferior, o a su prolongación.

**115.** *¿Cómo son entre sí los lados opuestos de un paralelogramo?*

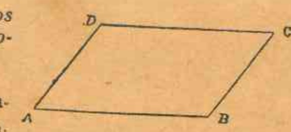



Fig. 25.

Los lados opuestos de un paralelogramo son paralelos e iguales; los ángulos opuestos son iguales, y los ángulos adyacentes son suplementarios.

Así, el lado DC es igual y paralelo al lado AB; y el ángulo $A = C$ y $D = B$. $A + B = 180^{\circ}$ (Fig. 25).

**116.** *¿Qué propiedad tiene la diagonal de un paralelogramo?*

La diagonal de un paralelogramo lo divide en dos **triángulos** iguales.

**117.** *¿Cómo se cortan las dos diagonales de un paralelogramo?*

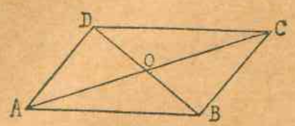


Fig. 26.

Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

Así, las diagonales AC y DB se cortan en el punto O, que indica la mitad de cada una de ellas (Fig. 26).

**118.** *¿Cómo se cortan las diagonales de un rombo?*

Las diagonales de un rombo se cortan en su punto medio y forman cuatro ángulos rectos.

Las diagonales DB y AC forman cuatro ángulos rectos en el punto O (Fig. 27).

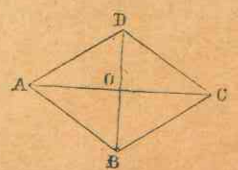


Fig. 27.

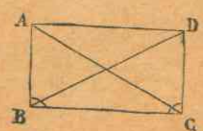


Fig. 28.

**119.** *¿Qué relación hay entre las diagonales de un rectángulo?*

Las diagonales de un rectángulo son iguales.
Así: AC = BD (Fig. 28).

**120.** *¿Qué se observa acerca de las diagonales de un cuadrado?*

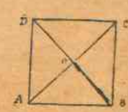


Fig. 29.

Las diagonales de un cuadrado: 1º son iguales; 2º se cortan en sus mitades; 3º forman cuatro ángulos rectos.

Así, AC = DB, y se cortan en el punto O, formando cuatro ángulos rectos (Fig. 29).

NOTA: Uniendo los puntos medios de los lados consecutivos: 1º de un cuadrado, resulta otro cuadrado; 2º de un rectángulo, resulta un rombo; 3º de un rombo, resulta un rectángulo; 4º de un cuadrilátero cualquiera, resulta un paralelogramo.

# Aplicaciones geométricas

## SOBRE EL LIBRO PRIMERO

### LINEAS Y ANGULOS

**121.** Los principales instrumentos empleados para el trazo de las figuras geométricas son: la *regla*, el *compás*, la *escuadra* y el *transportador*.

**122.** La REGLA sirve para trazar líneas rectas; el *compás*, para trazar circunferencias o arcos; la *escuadra* para construír ángulos rectos o trazar perpendiculares; el *transportador*, para medir y construír ángulos.

**123.** El TRANSPORTADOR es un instrumento de cobre, cuerno o madera de forma semicircular, cuyo borde circular llamado *limbo* está dividido en 180º, numerados de diez en diez o de cinco en cinco (Fig. 30).

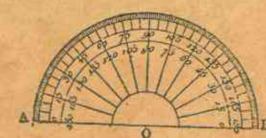


Fig. 30.

El diámetro de este semicírculo se llama *línea de fe*.

#### Angulos

**124.** PROBLEMA.—*En un punto dado D de una recta DE* (Fig. 31), *constrúyase un ángulo igual a otro ángulo dado A.*

**1er.** MODO, *con el compás.*—Desde los puntos A y D como centros, y con un mismo radio, se describen los arcos BC y EF;

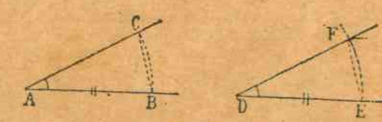


Fig. 31.

en seguida, desde el punto E, con una abertura de compás igual a la distancia BC, se corta el arco EF, y se traza la recta DF. El ángulo D es igual al ángulo A.

2º Modo, *con la escuadra.*— Por medio de una regla dividida o de una tira de papel, se señalan longitudes iguales, como AB

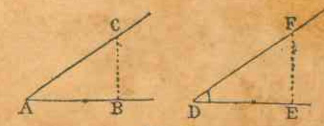


Fig. 32.

y DE, y con la escuadra se levantan las perpendiculares BC y EF (Fig. 32); se señala la longitud BC sobre EF, y se traza el lado DF, lo que da en D un ángulo igual a A.

3er. Modo, *con el transportador.*—Se coloca el transportador sobre el ángulo A, para medirlo; en seguida se lo coloca en el

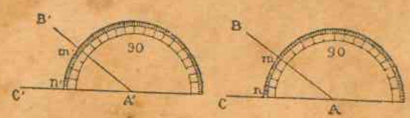


Fig. 33.

punto A', para señalar un ángulo del mismo número de grados, y se traza el lado B'A' (Fig. 33).

**125.** Problema.—*Constrúyase un ángulo igual a la suma de dos ángulos dados.*

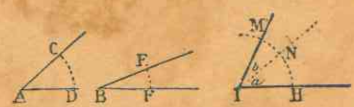


Fig. 34.

Para construír un ángulo igual a la suma de los ángulos A y B (Fig. 34) se procede como en el Nº 124, 1º, haciendo el ángulo $a$ = A, y el ángulo $b$ = B. El ángulo total MNH será igual a la suma de los ángulos dados A y B.

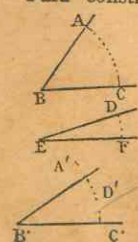


Fig. 35.

**126.** Problema.—*Constrúyase un ángulo igual a la diferencia de dos ángulos dados.*

Para construír un ángulo igual a la diferencia de los ángulos E y B (Fig. 35), se procede como en el Nº 124, 1º, y desde el punto C' se señala el arco C'A' igual a AC, y desde el punto A', el arco A'D' igual a DF. El ángulo D'B'C' es igual a la diferencia de los ángulos B y E.



**127.** Problema.—*Constrúyase un ángulo triple de otro ángulo dado.*

Para construír un ángulo triple del ángulo A (Fig. 36), se

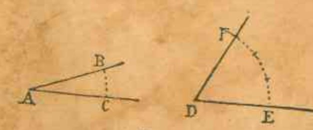


Fig. 36.

procede como en el número 124 y se señala tres veces el arco CB desde E hasta F. El ángulo EDF es el triple del ángulo A.

## EJERCICIOS NUMERICOS

1. ¿Cuál es la suma de los ángulos de 24º 37', 19º 13' y 27º 43'?
2. ¿Cuánto suman los ángulos de 17º 25', 16º 46' y 19º 38'?
3. ¿Cuánto suman los ángulos de 5º 12', 8º 39' y 21º 53'?
4. ¿Cuál es la diferencia de los de 54º 27' y 19º 13'?
5. ¿Cuál es la diferencia de los ángulos de 45º 52' y 31º 57'?
6. ¿Qué ángulo vale el triple de uno de 18º 13'?
7. ¿Qué ángulo vale el cuádruplo de otro de 23º 24'?
8. ¿Qué ángulo vale la quinta parte de uno de 89º?
9. ¿Qué ángulo vale la cuarta parte de otro de 107º 25'?
10. ¿Qué ángulo vale la tercera parte de otro de 147º 14' 22"?
11. ¿Cuál es el complemento de un ángulo de 27º?
12. ¿Cuál es el complemento de un ángulo de 37º 44'?
13. ¿Cuál es el complemento de un ángulo de 75º 35'?
14. ¿Cuál es el suplemento de un ángulo de 43º?
15. ¿Cuál es el suplemento de un ángulo de 125º 47'?
16. ¿Cuál es el suplemento de la suma de dos ángulos de 22º 35' el uno y de 98º 45' 5" el otro?
17. ¿La suma de dos ángulos es de 8º 47' 23", su diferencia de 1º 1' 1", ¿cuáles son estos ángulos?

### Perpendiculares y oblicuas

**128.** Constantemente se emplean las perpendiculares en la industria y en las artes. El cantero necesita la escuadra para labrar en ángulo recto las aristas de las piedras. A cada momento el carpintero corta tablas u otras maderas en ángulo recto. La construcción de una ventana, de una puerta, de un mueble, exige a menudo el empleo de la escuadra. El dibujante, el arquitecto, el agrimensor usan continuamente las perpendiculares.

**129.** La *escuadra* tiene diversas formas.

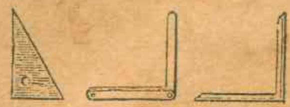


Fig. 37. Fig. 38. Fig. 39.

La *escuadra del dibujante* es una tablilla delgada en forma de triángulo rectángulo (Fig. 37).

La *escuadra de carpintero* se halla formada ordinariamente de dos reglas de madera, fijadas en ángulo recto (Fig. 38).

La *escuadra de cantero* se halla formada de dos reglas de hierro, fijadas en ángulo recto. (Fig. 39).

## § I.—TRAZO DE PERPENDICULARES POR MEDIO DE LA ESCUADRA

**130.** Problema.—*Desde un punto O tomado en una recta, levántese una perpendicular a ella.*

Se aplica la regla a lo largo de la línea AB, y se apoya en ella el cateto inferior de la escuadra (Fig. 40), de modo que el vértice del ángulo recto caiga en el punto O; se traza en seguida la recta OM por el otro cateto de la escuadra. Esta recta OM es perpendicular a AB, si la escuadra es buena.

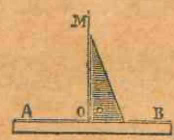



Fig. 40.

**131.** Problema.—*De un punto A tomado fuera de una recta, bájese una perpendicular a ella por medio de la escuadra.*

Se aplica la regla sobre la recta dada DC, y se corre la escuadra sobre la regla hasta que toque en el punto dado A; se traza en seguida la recta AB, siguiendo la dirección de la escuadra; AB es la perpendicular pedida.

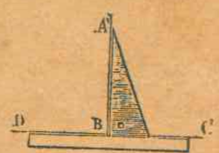



Fig. 41.

## § II.—TRAZO DE LAS PERPENDICULARES POR MEDIO DE LA REGLA Y EL COMPAS

**132.** Problema preparatorio.—*Búsquese un punto equidistante de los extremos de una recta dada.*


Fig. 42.

Para buscar un punto equidistante de los extremos A y B de la recta AB, con una abertura de compás mayor que la mitad de la recta AB, se describen desde los puntos A y B, tomados como centros, dos arcos que se cortan en O, que es el punto equidistante de A y de B.



**133.** Problema.—*Levántese una perpendicular en la mitad de una recta.*

Para levantar una perpendicular en la mitad de AB (Fig. 43), desde los extremos A y B de la recta dada, y con una

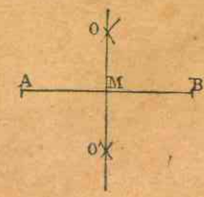



Fig. 43.

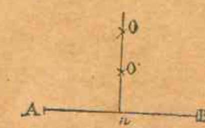



Fig. 44.

misma abertura de compás, mayor que la mitad de AB, se describen arcos que se cortan en O y en O'; luégo se traza la recta OO' que es perpendicular a AB; el punto M está en medio de AB.

NOTA. Cuando no hay espacio a ambos lados de la recta para el trazo de los arcos, se buscan a un mismo lado de ella, con dos radios diferentes, dos puntos O y O' equidistantes de los extremos de la línea AB (Fig. 44).

**134.** Problema.—*Levántese una perpendicular en cualquier punto de una recta.*

Para levantar una perpendicular en el punto D de la recta AB (Fig. 45), se señalan a cada lado del punto D las longitudes iguales DE, DF. Desde los puntos F y E como centros, se describen con un mismo radio, arcos que se cortan en C. Se traza en seguida la línea CD, que es la perpendicular pedida.

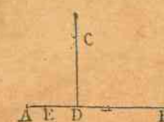



Fig. 45.

**135.** Problema.—*Desde un punto tomado fuera de una recta bájese una perpendicular a ella.*

Para bajar desde el punto C una perpendicular a la recta AB (Fig. 46), desde el punto C como centro, se describe un arco que corta a la recta en dos puntos M y N. Desde estos puntos también como centros, y con un mismo radio, se describen arcos que se cortan en el punto D. Se traza la línea CD, que es perpendicular a AB.

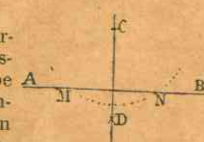



Fig. 46.

He aquí otros tres modos de levantar una perpendicular sobre una recta.

**136.** 1º Desde el punto dado A, como centro (Fig. 47), se describe un arco con cualquier radio. Se señala la misma medida desde B hasta C, luégo desde C hasta D y E, y por fin desde D se corta el arco en E. Se traza en seguida la recta AE, que es la perpendicular pedida.

**137.** 2º Para levantar una perpendicular en el punto A (Fig. 48), se describe desde un punto cualquiera O, tomado

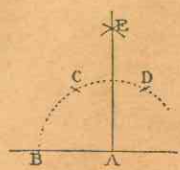



Fig. 47.

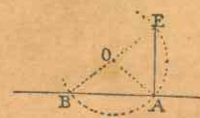



Fig. 48.

como centro, y con un radio igual a OA, un arco mayor que una semicircunferencia, que corte a la línea dada en un punto B. Se traza el diámetro BOE que corta el arco en el punto E; uniendo este punto con A, tenemos la perpendicular AE.


Fig. 49.

**138.** 3º Para levantar una perpendicular en el extremo A de una recta (Fig. 49), se describe desde este punto como centro, el arco BD con un radio cualquiera, y se señala la misma medida desde B hasta D, y desde D hasta E. Se traza después la recta BDE que corta al arquito en E; juntando este punto con A, resulta la perpendicular pedida EA.

## Triángulos

**139.** Problema.—*Constrúyase un triángulo conociendo dos lados a y b, y el ángulo comprendido entre ellos C.*

Primero se construye un ángulo C igual al ángulo dado; en los lados de este ángulo se señala la longitud CB igual

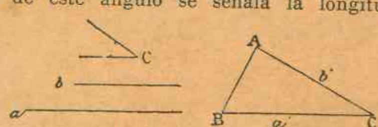



Fig. 50.

a *a*, y CA igual a *b*, y trazando la línea AB se termina el triángulo pedido. (Fig. 50).

**140.**—Problema.—*Constrúyase un triángulo conociendo el lado* a *y los dos ángulos adyacentes* B y C (Fig. 51).

Se traza una recta B'C' igual al lado dado *a;* se construye



el ángulo B' igual a B, y C' igual a C, y resulta el triángulo pedido.

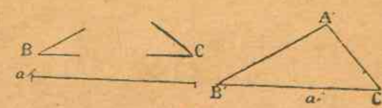



Fig. 51.

NOTA.—La suma de los dos ángulos dados debe ser menor que dos ángulos rectos.

**141.** Problema.—*Constrúyase un triángulo, siendo conocidos los tres lados* a, b, c, (fig .52).

Se traza una recta BC igual a uno de los lados dados, *a,*

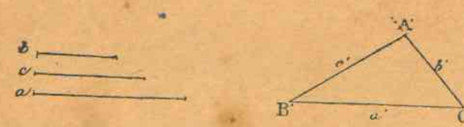



Fig. 52

por ejemplo; y desde los puntos B y C, con radios iguales a *b* y a *c* respectivamente, se describen arcos que se cortan en A, que es el tercer vértice del triángulo.

**142.** Problema.—*Constrúyase un triángulo rectángulo, dada la hipotenusa y uno de los catetos* (Fig. 53).


Fig. 53.

Dada la hipotenusa *d'* y el cateto *f'*, para construír el triángulo rectángulo pedido, se traza un ángulo recto en D, y en cualquiera de los lados de este ángulo se señala la longitud DE igual al cateto dado *f'*. Desde el punto E como centro, y con un radio igual a la longitud dada como hipotenusa, se corta el otro cateto en el punto F. Se traza después el lado EF, y resulta el triángulo pedido DEF.

**143.** Problema.—*Constrúyase un triángulo rectángulo, dada la hipotenusa y uno de los ángulos agudos* (Fig. 54).

Sea *a* la longitud de la hipotenusa, y C' uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo. Para construír este triángulo se hace el ángulo C igual al ángulo dado. En uno de los lados del ángulo, se señala la longitud BC=a, y desde el punto B se baja la perpendicular BA al otro lado. Así queda terminado el triángulo pedido ABC.

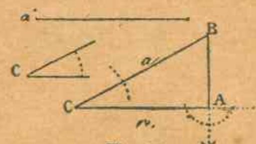



Fig. 54.

## EJERCICIOS NUMERICOS

18. Dos ángulos de un triángulo miden respectivamente 47° 58' y 56° 49'; ¿cuál es el valor del tercero?
19. Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo vale 51° 17' 25"; ¿cuánto vale el otro ángulo agudo?
20. ¿Cuál es el valor de uno de los ángulos de la base de un triángulo isósceles, si el del vértice tiene 32° 18'?
21. Uno de los ángulos de un triángulo tiene 24° 25' y otro 96° 8' ¿cuánto vale el ángulo exterior al tercero?
22. El ángulo del vértice de un triángulo isósceles vale 22° 22'; ¿cuánto vale el ángulo exterior formado por uno de los lados iguales y la base prolongada?
23. ¿Cuál es el valor de uno de los ángulos de la base de un triángulo isósceles, sabiendo que el del vértice mide 24° 16'?
24. ¿Cuál es el valor del ángulo del vértice de un triángulo isósceles, sabiendo que uno de los de la base mide 72° 24'?
25. ¿Cuál es el valor de cada uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo isósceles?

### Bisectriz de un ángulo

**144.** PROBLEMA.—*Trácese la bisectriz de un ángulo dado* (Fig. 55).


Fig. 55.

Desde el vértice del ángulo se traza con cualquier radio el arco DC. Luégo desde los puntos D y C con un mismo radio, se describen arcos que se corten en M, y se traza la línea AM, que es bisectriz del ángulo A.

**145.** PROBLEMA.—*Trácese la bisectriz de un ángulo cuyo vértice no se conoce* (Fig. 56).

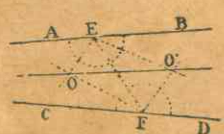



Fig. 56.

Sea el ángulo formado por las dos líneas convergentes AB y CD; se traza una secante cualquiera EF; en seguida se determinan las bisectrices de los cuatro ángulos que tienen sus vértices en E y en F. Estas bisectrices se cortan en O y en O'. La recta OO' es la bisectriz pedida.



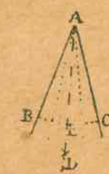



Fig. 57.

**146.** PROBLEMA.—*Divídase un ángulo en 2, 4, 8, 16 partes iguales* (Fig. 57).

Trazando con el compás la bisectriz AD, como en el N° 144, queda dividido el ángulo en dos partes iguales. Trazando en seguida la bisectriz de estas mitades, queda dividido el ángulo en cuatro partes iguales, y así en adelante.

### Paralelas

**147.** Las rectas paralelas se emplean muy a menudo en la práctica: las puertas, las ventanas, tienen sus marcos paralelos; los lados opuestos de una hoja de papel, de una tabla, son también paralelos; los rieles del ferrocarril, el pentagrama de la música, los barrotes de las escaleras de mano, las rayas de los cuadernos de escritura, etc., etc., son paralelos.

### Construcción de las paralelas

**148.** PROBLEMA.—*Por un punto dado trácese una paralela a una recta dada.*

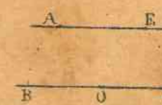



Fig. 58

1er. MODO.—Para trazar por el punto A (Fig. 58) una paralela a BC, se describe desde cualquier punto, O por ejemplo, con un radio igual a AO. Luégo se toma de la recta BC, una semicircunferencia con el compás la distancia AB, que se señala desde C hasta E, y se traza la recta AE, que es la paralela pedida.

**149.** 2° MODO.—Para trazar por el punto M una paralela a la recta EF (Fig. 59), desde un punto cualquiera F tomado en la recta dada y con la distancia FM como radio, se describe el arco ME. Con el mismo radio, y desde el punto M como centro, se describe el arco FN, sobre el cual se señala la distancia FN igual a EM. Se traza después la recta MN, que es la paralela pedida.

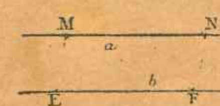



Fig. 59.

**150.** PROBLEMA.—*Trácese una paralela a una distancia dada de una recta.*

1er. MODO.—Sea AB la recta dada (Fig. 60); para trazar una paralela a ella, a 7 milímetros por ejemplo, se levanta la perpendicular DE en cualquier punto de la recta AB. Se señala la distancia de 7 milímetros en la perpendicular, desde el punto D hasta E; y en este último se levanta, sobre la línea DE, la perpendicular EF.

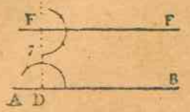



Fig. 60.

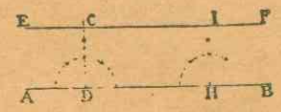



Fig. 61.

**151.** NOTA.—Este primer modo puede variarse como sigue: se levantan las perpendiculares DC, HI (Fig. 61), en dos puntos cualesquiera de AB; se señalan longitudes iguales en estas perpendiculares, y se traza la línea EF, que es paralela a AB, hallándose sus diferentes puntos a una misma distancia de AB.


Fig. 62.

**152.** 2º MODO.—Se toma una abertura de compás igual a la distancia entre las dos paralelas, y, desde los dos puntos *m* y *n* (Fig. 62), tomados a voluntad sobre AB, se describen los arcos C y D. Manteniendo la regla tangente a estos arcos, se traza la recta CD, que es la paralela pedida.

**153.** PROBLEMA.—*Por un punto dado fuera de una recta, trácese otra que encuentre a la primera, formando un ángulo dado.*

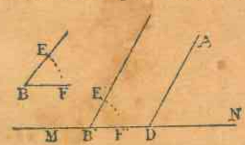



Fig. 63.

Se trata de trazar desde el punto A una recta AD que forme con la línea dada MN, un ángulo igual al ángulo B (Fig. 63).

En un punto cualquiera B' de la recta MN, se construye un ángulo E' B' F' igual al ángulo dado B. Por el punto dado A, se traza la línea AD paralela a E' B': el ángulo ADN = E'B'F' = EBF.

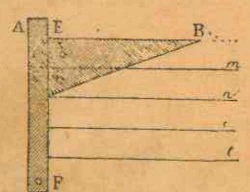



Fig. 64.

**154.** *Trazo de paralelas por medio de la escuadra*: Para trazar paralelas a AB por medio de la escuadra (Fig. 64), se coloca un cateto de la escuadra sobre la línea AB, y se aplica la regla al otro cateto; se corre la escuadra a lo largo de la regla, y se trazan sucesivamente las líneas m, n, s, t, que son paralelas a AB.

**155.** PROBLEMA.—*Uso de la escuadra TE para el trazo de paralelas.*—La escuadra *te* es un instrumento compuesto de dos reglas ensambladas en ángulo recto en forma de T, que



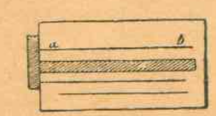



Fig. 65.

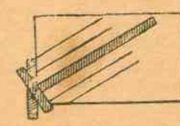


Fig. 66.

sirve para trazar paralelas. *Cuando los bordes del tablero se hallan en ángulo recto, fácilmente se pueden trazar perpendiculares por medio de la escuadra TE.*

Con este fin (Fig. 65) se aplica la cabeza de la escuadra al borde del tablero, y corriendo el instrumento, se trazan a lo largo de la regla las diferentes paralelas requeridas.

A menudo tiene la escuadra *te* una pieza movible alrededor de un eje A (Fig. 66). Esta pieza puede ir ajustada con un tornillo, y sirve para variar la dirección de la escuadra en el trazo de las paralelas.

## Polígonos

### § 1.—CONSTRUCCION DE LOS CUADRILATEROS

**156.** PROBLEMA I.—*Constrúyase un cuadrado, conociendo el lado.*

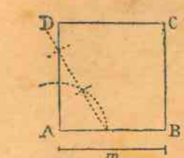



Fig. 67.

Se traza una recta AB igual al lado conocido *m* (Fig. 67); en el punto A se levanta una perpendicular AD igual a *m*. Desde los puntos D y B, con una abertura de compás igual también a *m*, se describen arcos que se cortan en C. Se trazan las rectas DC y BC, y resulta el cuadrado pedido ABCD.

**157.** PROBLEMA II.—*Constrúyase un cuadrado, siendo conocida la diagonal.*

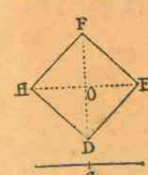



Fig. 68.

Sea *a* la diagonal dada (Fig. 68). Para construír el cuadrado, se trazan dos perpendiculares indefinidas HE, FD. Desde el punto O en que se cortan ambas, se señalan las longitudes OE, OF, OD, OH, iguales a la mitad de la diagonal dada. Uniendo los puntos D, E, F, H, resulta el cuadrado pedido.

**158.** PROBLEMA III.—*Constrúyase un rectángulo, siendo conocidas sus dimensiones.*

Sean B y S la base y la altura del rectángulo (Fig. 69). Para construírlo, se hace en el punto A un ángulo recto, y se señala la distancia AB = B y AD = S. Desde el punto B. como centro, y con un radio igual a S, y desde el punto D con un radio igual a B, se describen dos arcos que se cortan en el punto C; y uniendo estos puntos resulta el rectángulo ABCD.

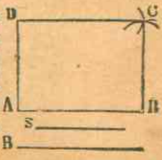


Fig. 69.

**159.** PROBLEMA IV.—*Constrúyase un rectángulo del que se conocen la diagonal y un lado.*

Sea *d* la diagonal y *a* el lado del rectángulo (Fig. 70). Para construírlo se forma primero el triángulo rectángulo ABC, del que se conoce la hipotenusa AC = d y el cateto AB = a.

(Nº 142). En seguida se determina el punto D por medio de dos arcos descritos desde el punto C el uno, con un radio igual a AB, y desde el punto A el otro, con un radio igual a BC; se unen los puntos A y C con D, y queda construído el rectángulo.

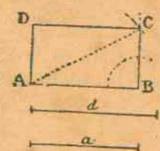


Fig. 70.

**160.** PROBLEMA V.—*Constrúyase un paralelogramo, conociendo las dos diagonales, y el ángulo que forman entre sí.*

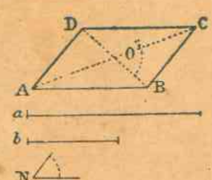


Fig. 71.

Sea N el ángulo formado por las dos diagonales dadas *a* y *b* (Fig. 71). Para construír este paralelogramo, se trazan dos rectas indefinidas que se cortan en el punto O formando un ángulo igual al ángulo dado N. Se toma en seguida la mitad de la diagonal *a* se la señala desde O hasta C y hasta A; del propio modo se señala la mitad de la diagonal *b* desde O hasta B y hasta D; uniendo los puntos señalados, queda construído el paralelogramo pedido.

**161** PROBLEMA VI.—*Constrúyase un rombo dadas sus diagonales.*

Para construír un rombo cuyas diagonales son *a* y *b* (Fig. 72), se trazan dos perpendiculares indefinidas AC y BD, y desde el punto O, en que se cortan, se señalan las longitudes OB y OD, que son cada una la mitad de *b*, las longitudes OA y OC, que son cada una la mitad de *a*; uniendo los puntos señalados, resulta el rombo pedido.

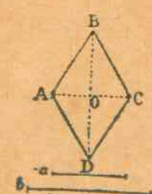


Fig. 72.



**132.** PROBLEMA VII.—*Constrúyase un trapecio isósceles, siendo conocidas sus dos bases y la altura.*

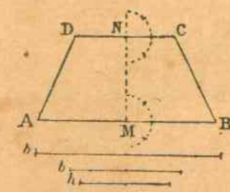


Fig. 73.

Sean *b* y *b'* las bases dadas y *h* la altura (Fig. 73). Para construír el trapecio isósceles, se traza la línea MN = *h*, en sus extremos se levantan las perpendiculares AB y DC; luégo de cada lado de M se lleva la mitad de *b*, y de cada lado de N, la mitad de *b'*; y se trazan los lados AD y BC.

## § II.—DIVERSOS MODOS DE COPIAR UN POLIGONO CUALQUIERA

**163.** 1er. MODO.—*Descomponiéndolo en triángulos.*—Para reproducir el polígono P (Fig. 74), se lo descompone en trián-

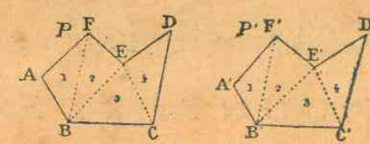


Fig. 74.

gulos 1, 2, 3, 4, y se construye sucesivamente y en el mismo orden cada uno de estos triángulos, cuyos tres lados se conocen; y resulta el polígono P' igual al polígono dado.

**164.** 2º MODO.—*Por medio de trapecios y triángulos rectángulos.*—Se unen con una recta AE (Fig. 75) dos vértices

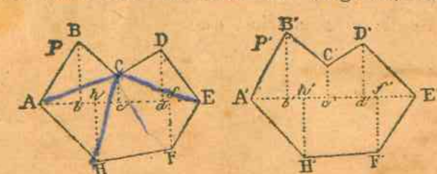


Fig. 75.

opuestos y de cada uno de los demás vértices se bajan perpendiculares a esta línea.

Luego se traza una recta A'E' = AE, sobre la que se señalan las longitudes A'*b'* = A*b*, *b'h'* = *bh*, etc. En los puntos *b' h', c', d', f'*, se levantan perpendiculares respectivamente iguales a las perpendiculares correspondientes del polígono P.

Se unen los extremos de dichas perpendiculares, y resulta el polígono P' igual al primero.

### EJERCICIOS NUMERICOS

26. ¿Cuál es el lado de un cuadrado que tiene 20 metros de perímetro?
27. ¿Cuántos metros de lado tiene un rombo cuyo perímetro es igual al de un triángulo equilátero de 12 metros de lado?
28. Calcúlese la base y la altura de un rectángulo que tiene 60 metros de perímetro, sabiendo que la altura es igual a los ⅔ de la base.
29. ¿Cuánto mide el lado de un rombo cuyo perímetro es igual al de un triángulo equilátero de 15 metros de lado?

---

# LIBRO SEGUNDO

# CIRCUNFERENCIA

## CAPITULO I

### De la circunferencia en general

**165.** *¿Qué es circunferencia?*

CIRCUNFERENCIA es una curva cerrada cuyos puntos distan igualmente de otro interior, que se llama centro (Fig. 76).

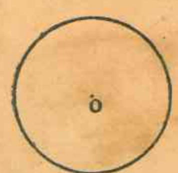



Fig. 76.

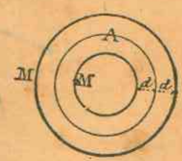



Fig. 77.

**166.** *¿Qué se llaman circunferencias concéntricas?*

Llámanse circunferencias CONCENTRICAS varias circunferencias que tienen un mismo centro (Fig. 77).



**167.** *¿Qué son circunferencias excéntricas?*

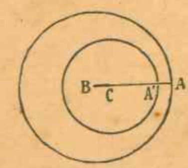



Fig. 78.

Circunferencias EXCENTRICAS son las que no tienen un mismo centro (Fig. 78).

**168.** *¿En cuántas partes se divide la circunferencia?*

La circunferencia, sea grande o pequeña, se divide en 360 partes, llamadas *grados;* el grado, en 60 *minutos,* y el minuto en 60 *segundos.*

**169.** *¿Cómo se indican los grados, minutos y segundos?*

Los grados se indican con un *cerito* puesto a la derecha y en la parte superior del número que los expresa; los minutos con una comilla ('); los segundos, con dos (").

Así, la cantidad: setenta grados, veinticinco minutos, doce segundos, se escribe 70º 25' 12".

**170.** *¿Qué es arco?*

ARCO es cualquier parte de la circunferencia considerada separadamente.

**171.** *¿Cuándo toma el arco el nombre de semicircunferencia?*

Cuando el arco es la mitad de la circunferencia, toma el nombre de SEMICIRCUNFERENCIA, y tiene por medida 180º.

**172.** *¿Cuándo toma el arco el nombre de cuadrante?*

Cuando el arco es la cuarta parte de la circunferencia, se llama CUADRANTE, y tiene por medida 90º.

---

## CAPITULO II

### De las líneas consideradas con relación a la circunferencia

**173.** *¿Cuáles son las principales líneas consideradas con respecto a la circunferencia?*

Las principales líneas consideradas con respecto a la circunferencia son: *radio, diámetro, cuerda, sagita, secante y tangente.*

**174.** *¿Qué se llama radio?*

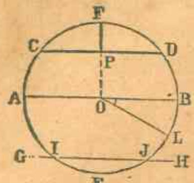



Fig. 79.

Llámase RADIO la línea recta trazada desde el centro del círculo a la circunferencia (OL, Fig. 79).

**175.** *¿Qué es diámetro?*

DIÁMETRO es la línea recta que, pasando por el centro del círculo y terminando en la circunferencia, la divide en dos partes iguales (AOB, Fig. 79).

**176.** *¿Cómo se llaman las dos partes en que el diámetro divide a la circunferencia?*

Las dos partes en que el diámetro divide a la circunferencia se llaman SEMICIRCUNFERENCIAS.

**177.** *¿Qué es el diámetro con respecto al radio?*

El diámetro es siempre doble del radio.

**178.** *¿Qué es cuerda?*

CUERDA es la línea recta trazada de un punto a otro de un arco de círculo (CD, Fig. 79).

**179.** *¿Cuál es la mayor cuerda que puede trazarse en un círculo?*

La mayor cuerda que puede tirarse en un círculo es el diámetro.

**180.** *¿Qué se llama sagita?*

Llámase SAGITA la recta que une la mitad del arco con la de la cuerda que lo subtiende (FP, Fig. 79).

**181.** *¿Qué es secante?*

Secante es toda recta que corta un círculo; no es sino una cuerda prolongada (GH, Fig. 79).

**182.** *¿Qué relación hay entre las cuerdas y los arcos que ellas subtienden?*

1º Dos arcos iguales tienen cuerdas iguales;

2º De dos arcos desiguales, el mayor está subtendido por una cuerda mayor.

**183.** *¿Qué relación hay entre las cuerdas y el centro de la circunferencia?*



1º Dos cuerdas iguales están a igual distancia del centro.

Así, en las cuerdas iguales AB y CD, la distancia OF de la una es igual a la distancia OE de la otra (Fig. 80).

2º De dos cuerdas desiguales, la mayor está más próxima al centro.

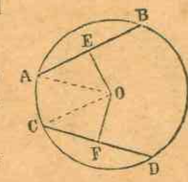



Fig. 80.

**184.** *¿Qué propiedad tiene la perpendicular bajada desde el centro a una cuerda?*

La perpendicular bajada desde el centro a una cuerda, divide a ésta y al arco subtendido en dos partes iguales.

**185.** *¿Cómo se divide un arco en dos partes iguales?*

Para dividir un arco en dos partes iguales, basta levantar una perpendicular en la mitad de la cuerda que lo subtiende.

---

## CAPITULO III

### Del círculo

**186.** *¿Qué es círculo?*

CÍRCULO es la superficie plana contenida dentro de la circunferencia. Comúnmente suele darse el nombre de *círculo* a la misma circunferencia.

**187.** *¿Qué superficies parciales pueden considerarse en el círculo?*

Pueden considerarse *el sector, el segmento* y *la corona.*

**188.** *Qué es sector de círculo?*

SECTOR es la parte del círculo limitada por dos radios y el arco comprendido entre sus extremidades (AOC, Fig. 81).

**189.** *¿A qué se da el nombre de segmento de círculo?*

Se da el nombre de SEGMENTO a la parte de un círculo comprendida entre un arco y su cuerda (DEF, Fig. 81).

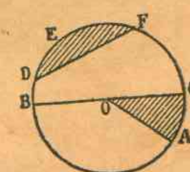



Fig. 81

**190.** *¿Cómo divide al círculo toda cuerda que no sea diámetro?*

Toda cuerda que no sea diámetro divide al círculo en dos segmentos desiguales, llamados *mayor* y *menor.*

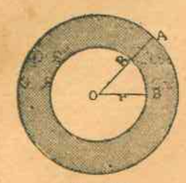


Fig. 82.

**191.** *¿Cuál es el segmento mayor, y cuál es el menor?*

Segmento MAYOR es el que contiene al centro del círculo, y MENOR, el que no lo contiene.

**192.** *Qué es corona?*

CORONA circular es la porción de círculo comprendida entre dos circunferencias concéntricas (Fig. 82).

---

## CAPITULO IV

### De las tangentes

**193.** *¿Qué se llama tangente?*

Llámase TANGENTE una recta indefinida que no tiene más que un punto común con la circunferencia. Este punto común se llama *punto de tangencia o de contacto.*

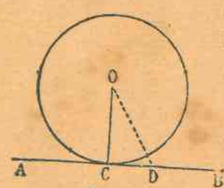


Fig. 83.

**194.** *¿Qué sucede cuando una recta es tangente a una circunferencia?*

Cuando una recta es tangente a una circunferencia, la tangente es perpendicular al radio que llega al punto de contacto.

**195.** *¿Qué son circunferencias tangentes?*

Circunferencias TANGENTES son las que se tocan interior o exteriormente en un punto sin cortarse.

**196.** *¿Qué son circunferencias secantes?*

Circunferencias SECANTES son las que se cortan entre sí.

**197.** *¿Qué se observa acerca de los arcos comprendidos entre dos paralelas?*

Los arcos comprendidos entre dos paralelas son iguales.

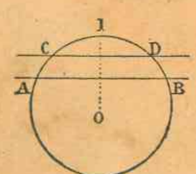


Fig. 84.

Así los arcos AC y DB comprendidos entre las paralelas CD y AB son iguales (Fig. 84).

**198.** *¿Qué sucede cuando dos circunferencias se cortan?*



Cuando dos circunferencias se cortan, la recta que une los centros es perpendicular a la mitad de la cuerda común.

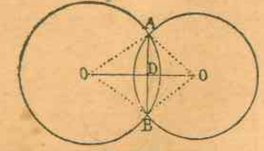


Fig. 85.

Así, la recta OO' (Fig. 85), que une los centros de estas dos circunferencias que se cortan, es perpendicular a la mitad de la cuerda común AB.

**199.** *¿Qué sucede cuando dos circunferencias son tangentes?*

Cuando dos circunferencias son tangentes, el punto de contacto se halla sobre la línea que une los centros (Figs. 86 y 87).

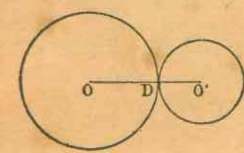


Fig. 86.

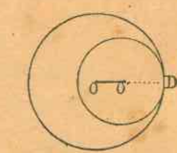


Fig. 87.

**200.** *¿A qué es igual la distancia de los centros en dos circunferencias tangentes exteriores?*

La distancia de los centros en dos circunferencias tangentes exteriores es igual a la suma de los radios.

Así, OO' = OD + DO' (Fig. 86).

**201** *¿A qué es igual la distancia de los centros en dos circunferencias tangentes interiores?*

La distancia de los centros en dos circunferencias tangentes interiores es iguai a la diferencia de los radios.

Así, en la Fig. 87, OO' = OD — O'D.

---

## CAPITULO V

### Medición de los ángulos

**202.** *¿Qué es medir un ángulo?*

MEDIR UN ANGULO es compararlo con oiro tomado como unidad.

**203.** *¿Qué unidades se emplean en la medición de los ángulos?*

En la medición de los ángulos se emplean dos unidades principales a saber: el *ángulo recto* y el *ángulo de un grado.*

**204.** *¿Qué es medir un arco?*

MEDIR UN ARCO es compararlo con otro arco tomado como unidad.

**205.** *¿Qué unidades se emplean en la medición de los arcos?*

En la medición de los arcos se emplean como unidades el arco de 90º o cuadrante y el arco de un grado.

**206.** *¿Cuáles son los principales ángulos considerados con respecto al círculo?*

Los principales ángulos considerados con respecto al círculo son: el ángulo *central, el inscrito, el semi-inscrito, el interior y el exterior.*

**207.** *¿Qué es ángulo central?*

Llámase ANGULO CENTRAL, el que está formado por dos radios (BOC. Fig. 88).

**208.** *¿Qué es ángulo inscrito?*

ANGULO INSCRITO es el que, formado por dos cuerdas, tiene su vértice en la circunferencia (BAC, Fig. 88).

**209.** *¿Qué es ángulo semi-inscrito o del segmento?*

ANGULO SEMI-INSCRITO es el que, teniendo su vértice en la circunferencia, se halla formado por una cuerda y una tangente (BAC, Fig. 89).

**210.** *¿Qué es ángulo interior?*

ANGULO INTERIOR es aquel cuyo vértice está dentro del círculo (BOC, Fig 90).

**211.** *¿Qué es ángulo exterior?*

ANGULO EXTERIOR es aquel cuyo vértice está fuera del círculo y sus lados sean dos secantes (ABC, Fig 91).

**212.** *Cuál es la medida del ángulo central?*

El ángulo central tiene por medida el arco comprendido entre sus lados.



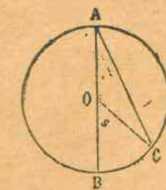


Fig. 88.

Esto significa que el ángulo tiene el mismo número de grados que el arco. Así, la medida del ángulo BOC, es la misma que la del arco BC (Fig. 88).

**213.** *¿Qué medida tiene el ángulo inscrito?*

El ángulo inscrito tiene por medida la mitad del arco comprendido entre las dos cuerdas que son sus lados.

V. g.: la medida del ángulo inscrito BAC es la mitad del arco BC (Fig. 88).

**214.** *¿Qué medida tiene el ángulo semi-inscrito?*

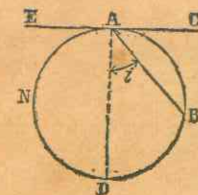


Fig. 89.

El ángulo semi-inscrito tiene por medida la mitad del arco comprendido entre la cuerda y la tangente que son sus lados.

V. g.: la medida del ángulo semi-inscrito BAC es igual a la mitad del arco AB (Fig. 89).

**215.** *¿Qué medida tiene el ángulo interior?*

El ángulo interior tiene por medida la mitad de la suma de los arcos comprendidos entre sus lados y entre la prolongación de éstos.

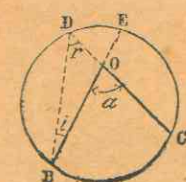


Fig. 90.

Así, la medida del ángulo interior BOC es igual a la mitad del arco BC, más la mitad del arco DE, formado por la prolongación de los lados BO y CO;

$$\text{medida ángulo BOC} = \frac{BC + DE}{2}$$

(Fig. 90).

**216.** *¿Qué medida tiene el ángulo exterior?*

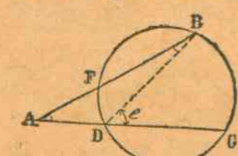


Fig. 91.

El ángulo exterior tiene por medida la mitad de la diferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.

Así, la medida del ángulo

$$BAC = \frac{CB - DF}{2}.$$

## CAPITULO VI

### De los polígonos regulares en particular

**217.** *¿Cuándo es inscrito un polígono?*

Un polígono es INSCRITO cuando todos sus vértices se hallan sobre una misma circunferencia.

**218.** *¿Cuándo es circunscrito un polígono?*

Un polígono es CIRCUNSCRITO cuando todos sus lados son tangentes a la circunferencia.

**219.** *¿Cuándo es inscrita una circunferencia?*

Una circunferencia es INSCRITA cuando es tangente a todos los lados del polígono.

**220.** *¿Cuándo es circunscrita una circunferencia?*

Una circunferencia es CIRCUNSCRITA a un polígono cuando pasa por todos sus vértices.

**221.** *¿Qué es centro de un polígono regular?*

CENTRO de un polígono regular es el punto equidistante de sus vértices (O, Fig. 92).

**222.** *¿Cuál es el centro del círculo inscrito y del circunscrito?*

El centro de un polígono regular es también centro del círculo inscrito y del circunscrito.

**223.** *¿Qué líneas importantes parten del centro de un polígono regular?*

Del centro de un polígono regular parten la *apotema* y el *radio*.

**224.** *¿Qué es apotema?*

APOTEMA es la línea bajada perpendicularmente desde el centro a los lados del polígono (OH, Fig. 92); es el radio del círculo inscrito en el polígono.

**225.** *¿Qué es radio del polígono?*

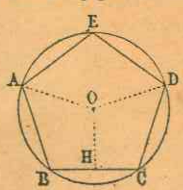



Fig. 92.

RADIO del polígono es la línea que va del centro a los vértices del polígono (OA, OD, Fig. 92).

**226.** *¿Qué figura se obtiene al unir los puntos de división de una circunferencia dividida en partes iguales?*

Las cuerdas que unen los puntos de división de una circunferencia dividida en partes iguales, forman un polígono regular inscrito, como el pentágono de la Fig. 92.



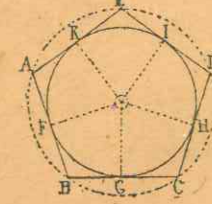



Fig. 93.

**227.** *¿Qué especie de figura se obtiene trazando tangentes por los puntos de división de una circunferencia dividida en partes iguales?*

Las tangentes trazadas por los puntos de división de una circunferencia dividida en partes iguales, forman un polígono regular circunscrito como el pentágono de la Fig. 93.

**228.** *¿Qué propiedad tiene el lado del hexágono regular?*

El lado del hexágono regular es igual al radio del círculo circunscrito.

**229.** *¿Qué se llama ángulo central de un polígono regular?*

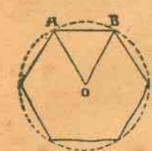



Fig. 94.

Se llama ANGULO CENTRAL de un polígono regular, el que está formado por dos radios trazados desde las extremidades de uno de los lados (AOB, Fig. 94).

**230.** *¿Cuál es el valor del ángulo central de un polígono regular?*

Como el valor de todos los ángulos centrales de un mismo polígono es de 4 rectos o 360º, el de uno solo será igual a 360º divididos por el número de lados del polígono.

**231.** *¿Cómo está formado cada ángulo de un polígono?*

Cada ángulo de un polígono está formado por dos lados consecutivos.

**232.** *¿Cuál es el valor de todos los ángulos interiores de un polígono regular?*

El valor de todos los ángulos interiores de un polígono regular es igual a tantas veces dos rectos, como lados tiene, menos 2; así en el pentágono es de 3 veces 2 rectos o 540º.

**233.** *¿Cuál es el valor de cada ángulo interior de un polígono regular?*

El valor de cada ángulo interior de un polígono regular es igual al de todos sus ángulos, dividido por el número de lados; el ángulo del pentágono regular mide $540 : 5 = 108^{\circ}$

---

## CAPITULO VII

### Relaciones que existen entre las figuras geométricas

**234.** *¿Qué nombre toman las figuras geométricas según las relaciones que guardan entre sí?*

Las figuras geométricas, según las relaciones que guardan entre sí, toman los nombres de *iguales, equivalentes, semejantes* y *simétricas.*

**235.** *¿Cuándo son iguales dos figuras?*

Dos figuras son IGUALES cuando tienen una misma forma y magnitud, o cuando puestas la una sobre la otra coinciden perfectamente, por tener sus elementos dispuestos en el mismo orden.

**236.** *¿Cómo se llaman los lados y ángulos de las figuras que coinciden?*

Los lados y ángulos de las figuras que coinciden se llaman *lados* y *ángulos homólogos.*

**237.** *¿Cuándo son equivalentes dos figuras?*

Dos figuras son EQUIVALENTES cuando tienen una misma magnitud sin tener la misma forma.

Por ejemplo, si un triángulo tiene la misma área que un cuadrado, las dos figuras son equivalentes.

**238.** *¿Qué son figuras semejantes?*

Figuras SEMEJANTES son las que tienen una misma forma, aunque no tengan una misma magnitud.

Por ejemplo, un círculo pequeño y otro grande son figuras semejantes.

**239.** *¿Cuándo son simétricas dos figuras?*

Dos figuras son SIMETRICAS cuando tienen sus elementos respectivamente iguales, pero dispuestos en orden inverso.

Por ejemplo, un cuerpo y su imagen en un espejo plano.

**240.** *¿Cuándo es determinada una figura?*

Una figura es DETERMINADA cuando se conoce su forma, magnitud o valor, y posición.

# Aplicaciones geométricas

## SOBRE EL LIBRO SEGUNDO

## ARCOS, CUERDAS Y TANGENTES

### § I.—ARCOS Y CUERDAS

**241.** *Para dividir un arco en dos partes iguales,* basta levantar una perpendicular en la mitad de la cuerda que lo subtiende.

**242** PROBLEMA.—*Hágase pasar una circunferencia por tres puntos que no están en la línea recta.*

Sean los tres puntos A, B, C, (Fig. 95) que no están en línea recta. Se unen primero estos puntos, trazando las líneas AB y BC; en seguida se levanta en la mitad de AB la perpendicular FG, y en la mitad de BC la perpendicular DE. El punto O, en que se cortan ambas perpendiculares, es el centro de la circunferencia, que se traza con un radio igual a la distancia que hay del centro a cualquiera de los tres puntos señalados; por ejem.: OA.

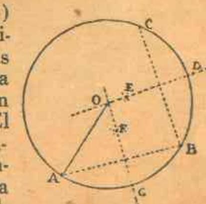


Fig. 95.

**243.** *Para encontrar el centro de un arco dado* ABC (Fig. 95), basta trazar dos cuerdas cualesquiera AB y BC, y levantar una perpendicular en la mitad de cada una. El punto en que se corten éstas será el centro del arco.

### § II.—TANGENTES

**244.** PROBLEMA I.—*Trácese una tangente a una circunferencia en un punto dado de dicha circunferencia.*

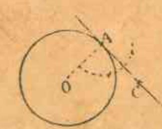


Fig. 96.

Para trazar una tangente en el punto A (Fig. 96), se traza el radio AO, y se levanta la perpendicular AC en la extremidad del radio; esta perpendicular será la tangente pedida.

**245.** PROBLEMA II.—*Trácese una tangente a una circunferencia, en dirección paralela a una recta dada.*

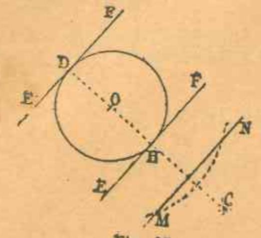


Fig. 97.

Para trazar una tangente a la circunferencia O (Fig. 97) en dirección paralela a la recta MN, se baja desde el centro la perpendicular DC a esta recta. Por los puntos H y D, en que la perpendicular corta a la cinrcunferencia, se trazan las rectas EF y E'F' perpendiculares a D. C., las cuales son tangentes a la circunferencia.

**246.** PROBLEMA III.—*Descríbase una circunferencia tangente a dos rectas dadas, que se cortan* (F. 98).

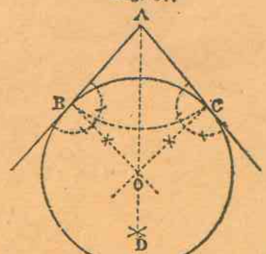


Fig. 98.

Se traza primero la bisectriz AD (Nº 144). En los puntos B y C, en que el arco BC corta a los lados del ángulo, se levantan perpendiculares que se cortan en el punto O; desde este punto, como centro, y con un radio igual a OB, se describe la circunferencia pedida.

**247.** PROBLEMA IV.—*Descríbase una circunferencia tangente a tres rectas dadas, que forman dos ángulos* (Fig. 99).

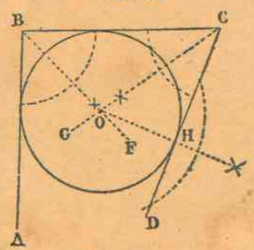


Fig. 99.

Se trazan primero las bisectrices BF y CG de los ángulos B y C; el punto en que ambas se cortan será el centro de la circunferencia pedida. Para determinar el radio, se baja una perpendicular desde el centro a cualquiera de los lados, por ejemplo, OH, y con este radio se describe la circunferencia tangente a las tres rectas dadas.

**248.** PROBLEMA V. — *Trácense dos tangentes a una circunferencia por un punto dado fuera de ella* (Fig. 100).

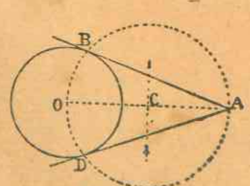


Fig. 100.

Para trazar desde el punto A dos tangentes a la circunferencia O, se une el punto A con el centro de la circunferencia; haciendo centro en C, punto medio de OA, y con un radio igual a CO, se describe una circunferencia que corta a la primera en B y en D. Desde el punto A se trazan las rectas AB, y AD, que son las tangentes pedidas.



**249.** PROBLEMA VI.—*Trácense dos tangentes comunes a dos circunferencias.*

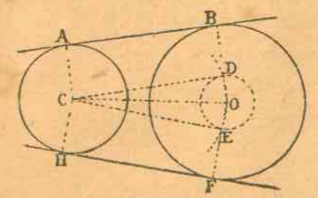


Fig. 101.

Desde el centro O de la circunferencia mayor, y con un radio igual a la diferencia de los radios de las circunferencias dadas se describe una circunferencia auxiliar (Fig. 101). a la cual se trazan desde el centro C las tangentes también auxiliares CD y CE (Nº 248).

Se traza el radio OD prolongado hasta B, y OE prolongado hasta F; y después el radio AC paralelo a OB, y CH paralelo a OF; por fin se trazan las rectas AB y FH, que son las tangentes pedidas.

## § III.— ENLACE DE LAS LINEAS

**250.** *El enlace de las líneas* tiene por objeto unir líneas rectas con curvas, o curvas entre sí de modo que no formen ángulo en los puntos de unión.

Para que dos líneas se enlacen, es menester que sean tangentes entre sí en el punto de unión.

El enlace de líneas se funda en los principios siguientes:

1º *Un arco se enlaza con una línea recta, cuando el centro del arco se halla en la perpendicular levantada sobre la recta en el punto de contacto* (Fig. 102).

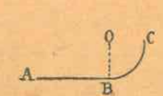


Fig. 102.

Fig. 103.

2º *Dos arcos de círculo se enlazan entre sí cuando sus centros y el punto de contacto se hallan sobre una misma recta* (Fig. 103).

**251.** PROBLEMA I.—*Enlácense uno o más arcos con una recta dada.*

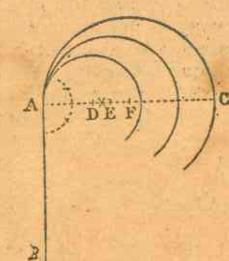


Fig. 104.

Sea la recta AB (Fig. 104). En el punto A se levanta la perpendicular AC; luego haciendo centro en puntos cualesquiera D, E, F, tomados en la perpendicular, se trazan arcos que toquen en el punto A, y de este modo se enlazan con la recta AB.

**252.** PROBLEMA II.—*Con una recta dada enlazar un arco que pase por un punto dado.*

Sea CD la recta dada (Fig 105). Levántese la perpendicular OD en el punto D, y únase éste con el punto dado A. En la mitad de AD levántese una perpendicular. Desde el punto O en

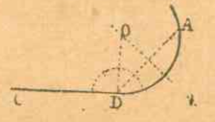



Fig. 105.

que se cortan ambas perpendiculares, y con un radio igual a OD, se describe el arco pedido de enlace DA.

**253.** Problema iii.—*Enlazar una recta con un arco dado.* En el punto A, de contacto (Fig. 106), trácese el radio CA, y en la extremidad A de este radio levántese la perpendicular AB, que sera la línea pedida de enlace.

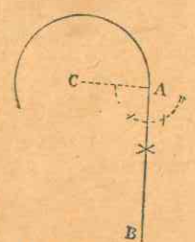



Fig. 106.

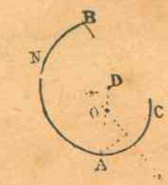



Fig. 107.

**254.** Problema iv.—*Con un arco dado enlácese otro que vaya en el mismo sentido, y que pase por un punto dado.*

Sea ANB el arco dado (Fig. 107), con el que debe unirse otro que pase por el punto C. Unase el centro D con la extremidad A del arco dado; únase igualmente este punto A con C; levantando una perpendicular en la mitad de AC; el punto O en que ésta corta al radio DA será el centro del arco de enlace.

**255.** Problema v.—*Con un arco dado enlazar otro que vaya en sentido contrario, y que pase por un punto dado.*

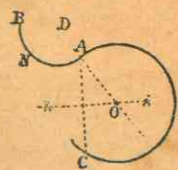



Fig. 108.

Sea el arco ANB (Fig. 108) con el cual se quiere juntar otro que pase por el punto C. Unase el centro D con la extremidad A del arco dado, prolongando indefinidamente la recta DA; únase igualmente el punto A con C; levántese una perpendicular en la mitad de AC, y el punto O en que la perpendicular corta el radio prolongado DA, será el centro del arco de enlace.



**256.** Problema vi.—*Enlácense dos rectas paralelas de igual longitud, trazando un arco de medio punto.*

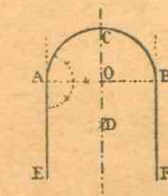



Fig. 109.

Unanse con una recta las extremidades A y B (Fig. 109); el punto O, situado en medio de AB, será el centro del arco de enlace, cuyo radio es OA.

**257.** Problema vii.— *Enlácense dos rectas convergentes por medio de un arco, siendo dado uno de los puntos de enlace.*

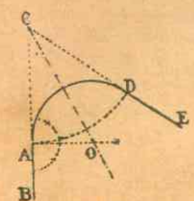



Fig. 110.

Sea A el punto dado (Fig. 110), desde donde se ha de trazar el arco de enlace de las dos rectas. Prolónguense ambas hasta que se corten en C; desde este punto como centro, y con un radio igual a CA, se traza el arco AD. En las extremidades A y D levántense sobre las rectas las perpendiculares AO y DO. Desde el punto O en que se cortan, y con un radio igual a OA, trácese el arco de enlace.

## § IV.—ENLACE POR MEDIO DE VARIOS ARCOS

**258.** Problema viii.—*Enlácense dos rectas paralelas de longitud desigual, por medio de dos cuadrantes de circunferencia, siendo la diferencia de ellas menor que la distancia a que se encuentran.*

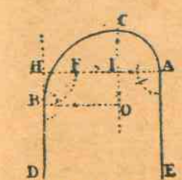



Fig. 111.

Sean las paralelas AE y BD (Fig. 111); levántense las perpendiculares AH y BO en sus extremidades; prolónguese BD hasta cortar a AH; señálese de H a F, la distancia HB, y en la mitad de FA levántese la perpendicular CO. El punto I será el centro del primer cuadrante, y O el del segundo.

Esta figura se conoce en arquitectura con el nombre de *arco por tranquil*, porque tiene sus arranques a distinta altura uno de otro.

**259.** Problema ix.—*Enlácense dos rectas paralelas desiguales en longitud siendo la diferencia de ellas mayor que la distancia a que se encuentran.*

Sean DC y AB las dos paralelas (Fig. 112); levántense en sus extremidades las perpendiculares BE y DF. Señálese sobre la recta BE un punto cualquiera G no muy lejos de B, para centro del primer arco BM. (La longitud BG nunca debe igualar a la mitad de la distancia entre las dos paralelas). Señálese la distancia BG desde el punto D hasta H, y únase G con H. Levántese una perpendicular en la mitad de GH. El punto F es el centro del segundo arco; y la recta FG prolongada señala el punto de tangencia M.

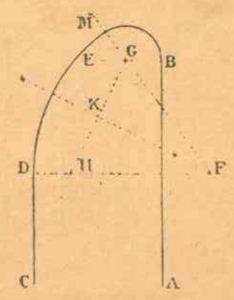


Fig 112.

## § V.—MOLDURAS DE ARQUITECTURA

**260.** Las MOLDURAS son figuras de arte sobresalientes, hechas de varios modos, para hermosear la arquitectura con diversidad de labores.

**261.** Hay dos clases de molduras: las rectas y las circulares.

**262.** Las molduras rectas son: el *filete*, el *plafón*, el *salidizo*, el *plinto* y la *ceja*.

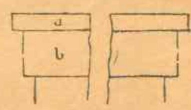


Fig. 113.

**263.** FILETE, LISTEL O CINTA es un miembro de moldura, el más delicado, como una lista larga y angosta (*a*, Fig. 113).

Fig. 114.

**264.** PLAFON es una moldura ancha de poco resalto (*b*, Fig. 113).

**265.** SALIDIZO es una moldura ancha y de mucho resalto o vuelo, que tiene en el plano inferior una canalita destinada a preservar el edificio del agua de las lluvias (*c*, Fig. 114).

**266.** PLINTO, ORLO O LATASTRO es el cuadrado sobre que asienta la basa de la columna (*e*, Fig. 115).

Fig. 115.

**267.** CEJA es una moldura semejante al salidizo, que sólo se encuentra en los capiteles (*f*, Fig. 116).

**268.** Las principales molduras circulares son: el *cuarto bocel*, el *esgucio*, el *junquillo*, el *toro*, el *sumóscapo*, el *imóscapo*, el *talón*, la *gola*, el *troquillo* y la *escocia*.

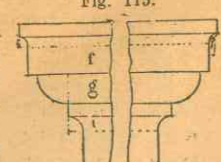


Fig. 116.

**269.** CUARTO BOCEL U OVOLO es una moldura de superficie convexa, formada de una cuarta parte de círculo.



**270.** El cuarto bocel es RECTO cuando el resalto ocupa la parte superior de la figura (*g*, Fig. 116); es INVERSO O REVERSO, cuando el resalto ocupa la parte inferior (*d*, Fig. 115).

**271.** El centro del cuarto bocel se halla determinado por el resalto del filete inferior, y se encuentra siempre sobre la misma línea que este último.

**272.** ESGUCIO O ANTEQUINO es una moldura cóncava cuyo perfil es la cuarta parte de un círculo.

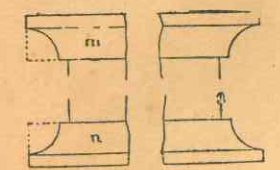


Fig. 117.

**273.** El esgucio es RECTO cuando el resalto ocupa la parte superior (*m*, Fig. 117); INVERSO, cuando ocupa la parte inferior (*n*, Fig. 117).

**274.** El centro del esgucio se encuentra en la prolongación de la línea vertical del filete.

**275.** JUNQUILLO es una moldura redonda, sobresaliente y muy delgada, cuyo resalto es por lo regular igual a la mitad de su altura (*p*, Fig. 118).

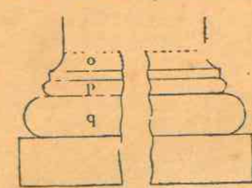


Fig. 118.

**276.** TORO O BOCEL es una moldura circular y convexa, cuyo resalto es por lo regular igual a la mitad de su altura; se encuentra en la parte inferior de todas las columnas (*q*, Fig. 118).

**277.** El junquillo y el toro se trazan describiendo una semicircunferencia, cuyo centro se halla en la mitad de la perpendicular que representa la altura de la moldura.

**278.** SUMÓSCAPO se llama la moldura curva en que remata la columna por la parte superior (*i*, Fig. 116).

**279.** IMÓSCAPO es la moldura curva con que empieza el fuste de una columna por la parte inferior (*o*, Fig. 118).

**280.** El centro del sumóscapo y del imóscapo se halla determinado por el resalto del filete, y se encuentra siempre en la misma línea que este último.

**281.** TALÓN es una moldura formada de dos arcos de círculo, cuyo perfil tiene una convexidad en la parte más sobresaliente, y una concavidad en la otra.

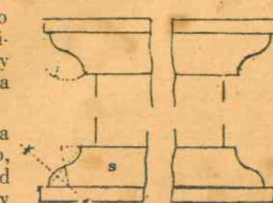


Fig. 119.

**282.** El talón es RECTO cuando

el resalto ocupa la parte superior (*r*, Fig. 119); INVERSO, cuando ocupa la parte inferior (*s*, Fig. 119).

**283.** GOLA o CIMACIO es una moldura en forma de S, compuesta de dos porciones de círculo como el talón, pero dispuestas en sentido contrario; porque en el cimacio la parte sobresaliente es siempre cóncava.

**284.** La gola es RECTA cuando el resalto ocupa la parte superior (*t*, Fig. 120), INVERSA, cuando ocupa la parte inferior (*u*, Fig. 120).

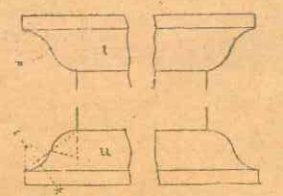


Fig. 120

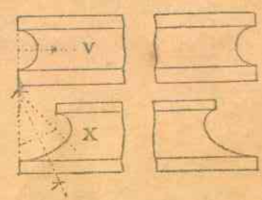


Fig. 121.

**285.** TROQUILO es una moldura cóncava, a manera de media caña, y cuya profundidad es igual a la mitad de la altura (*v*, Fig 121).

**286.** ESCOCIA o NACELA es una moldura cóncava formada de varios arcos, que se pone ordinariamente en las basas de las columnas (*x*, Fig. 121).

NOTA. Para trazar la *escocia*, se procede como para el enlace de dos paralelas desiguales en longitud, números 258-259.

## § VI.—FIGURAS CURVILINEAS

**287.** Las principales figuras curvilíneas son: el *ovoide*, el *óvalo*, la *ojiva* y la *elipse*.

**288.** OVOIDE es una curva cerrada, más ancha en un extremo que en otro, y que tiene figura muy parecida a un huevo de ave.

**289.** PROBLEMA.—*Sobre una recta dada* AB (Fig. 122) *como diámetro, constrúyase un ovoide.*

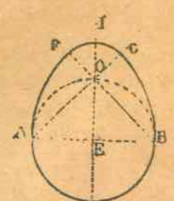


Fig. 122.

Se levanta la perpendicular indefinida EO en la mitad de AB, y del punto E como centro se describe una circunferencia; luégo se trazan las rectas AOG y BOF. Desde los puntos A y B como centros, y con AB por radio, se describen los arcos AF y BG. Por fin del punto O se describe el arco FG.



**290.** ÓVALO o FALSA ELIPSE es una figura curvilínea cerrada con cuatro porciones de círculos, trazadas de dos en dos con radios diferentes.

**291.** PROBLEMA.—*Sobre una recta dada AB como eje mayor* (Fig. 123), *trácese un óvalo.*

Se describen dos circunferencias que tengan por radio la tercera parte de la línea dada AB, y cuyos centros se hallen en los puntos C y D, que dividen a AB en tres partes iguales. Se trazan después las rectas ECP, FDP, GCI, HDI, que señalan los puntos de contacto de los arcos EAG, FBH, EF, GH, cuyos centros están en los puntos C, D, P, I.

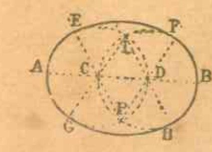


Fig. 123.

Claramente se ve que los arcos se enlazan, porque los centros y los puntos de contacto se hallan en línea recta.

**292.** PROBLEMA.—*Trácese un óvalo tangente a los lados de un rombo.*

Se levantan perpendiculares en la mitad de los lados del rombo (Fig. 124). Estas perpendiculares se cortan en las diagonales del rombo. Los puntos de encuentro son los centros de los arcos y la mitad de los lados, los puntos en que se juntan dichos arcos.

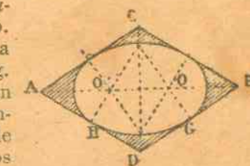


Fig. 124.

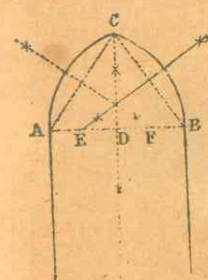


Fig. 125

**293.** OJIVA o ARCO APUNTADO es una figura formada de dos arcos de círculo simétricos, que se cortan en un punto llamado vértice de la ojiva.

**294.** PROBLEMA.—*Trácese una ojiva, o arco apuntado, siendo conocidos el ancho y el alto.*

Para trazar la ojiva, se juntan los puntos A y B (Fig. 125) por medio de una recta; se levanta una perpendicular en la mitad de AB, y en ella se señala la altura DC, que debe ser siempre mayor que la mitad de AB; se trazan después las rectas AC y CB, en medio de las cuales se levanta una perpendicular: los puntos E y F, en que cortan las perpendiculares a la recta AB, son los centros de los arcos de la ojiva.

NOTA. Los centros de la ojiva pueden encontrarse entre los puntos A y B, o exactamente en ellos mismos, o en la prolongación de la recta AB. El arco apuntado se llama *de* *todo punto* cuando sus dos centros están en los puntos de arranque.

**295.** Elipse *es una curva plana, tal que la suma de las* distancias de cada uno de sus puntos a dos puntos fijos situados en su plano es siempre invariable.

Los puntos fijos F y F' se llaman *focos* (Figs. 126 y 127).

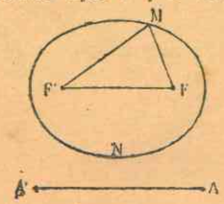



Fig. 126.

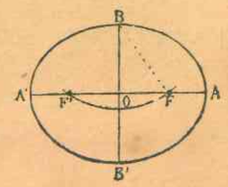



Fig. 127.

La recta AA', que pasa por los focos y termina en la curva se llama *eje mayor* de la elipse (Fig. 127); la línea BB' perpendicular a la mitad del eje mayor, y que termina en la elipse, se llama *eje menor.*

**296.** Cuando se conocen los dos ejes AA' y BB' de una elipse, para determinar los focos, se describe desde uno de los extremos del eje menor con un radio igual a la mitad del mayor, un arco de círculo que corte a dicho eje mayor en dos puntos, los cuales son los focos de la elipse.

**297.** Elipse del jardinero.—Para trazar la elipse, procede el jardinero como sigue:

Fig. 128.

Toma un cordel, igual en longitud al eje mayor; clava las extremidades del cordel en los puntos que ha escogido como focos de la elipse.



Hace correr en seguida, por el cordel horizontalmennte tendido, una estaca o púa, trazando en el suelo la elipse con movimiento continuo.

De un modo análogo pueden trazarse elipses en madera, papel, etc.

**298.** Problema.—*Búsquese el centro de un polígono regular.*

1º Si el polígono tiene número par de lados, se juntan primero con una recta dos vértices opuestos y con otra recta otros dos vértices también opuestos; el punto de intersección de las dos rectas es el centro del polígono (Fig. 129).

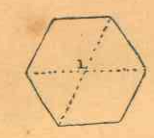



Fig. 129.

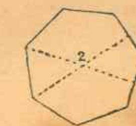



Fig. 130.

2º Si el polígono tiene número impar de lados, se une, por medio de una recta, el vértice de un ángulo con la mitad del lado opuesto; y después otro vértice con la mitad del lado opuesto; la intersección de las dos rectas es el centro del polígono (Fig. 130).

3º Que sea par o impar el número de lados, también se pueden levantar perpendiculares en la mitad de dos lados no paralelos; el punto en que se cortan es el centro del polígono.

## División de la circunferencia en partes iguales y construcción de polígonos regulares

**299.** Para construír un polígono regular, basta dividir la circunferencia en partes iguales, y unir consecutivamente los puntos de división de dos en dos.

**300.** Problema.—*Divídase un ángulo recto en tres partes iguales.*

Sea el ángulo AOB (Fig. 131); desde el vértice O, y con un radio cualquiera describo el arco AB; desde el punto B, y con el mismo radio, corto el arco en C, y desde el punto A, también con el mismo radio, corto el arco en D. Uniendo el vértice con los puntos C y D quedará dividido el ángulo recto en tres partes iguales. En efecto, el arco BC vale 60º, luego AC vale 30º, lo mismo que BD.

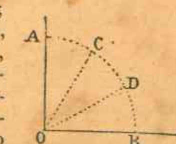



Fig. 131.

**301.** Problema.—*Divídase una circunferencia en 2, 4, 8, 16.. partes iguales, y constrúyase un cuadrado, un octógono regular*, etc.

Para dividir una circunferencia en 2 partes iguales, basta trazar un diámetro. Para dividirla en 4, se trazan dos diámetros perpendiculares AC y BD (Fig. 132). Se unen consecutivamente de dos en dos en los puntos de división, y el polígono ABCD que resulta es un cuadrado. Dividiendo cada cuadrante en 2 partes iguales, la circunferencia queda dividida en 8 partes, y el polígono que resulta uniendo los puntos de división será el octógono regular, etc. etc.

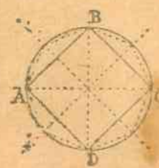


Fig. 132.

**302.** Problema.—*Divídase una circunferencia en 6, 12, 24 partes iguales, y constrúyase un hexágono regular, un dodecágono*, etc.

Se señala seis veces consecutivamente el radio sobre la circunferencia (Fig. 133); porque el lado del hexágono regular inscrito es igual al radio del círculo circunscrito. Dos de estas divisiones señalarán la tercera parte de la circunferencia. Si se dividen los arcos AB, BC.., en dos partes iguales, la circunferencia quedará dividida en 12 partes iguales, y uniendo los puntos de dos en dos se construirá el dodecágono regular y así en adelante.

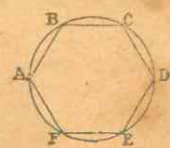


Fig. 133.

Para construír el triángulo equilátero inscrito se unen de dos en dos los vértices del hexágono regular inscrito.

**303.** Problema.—*Divídase la circunferencia en 5 y en 10 partes iguales, y constrúyase un pentágono y un decágono regulares inscritos.*

Se trazan dos diámetros perpendiculares AB y EF (Fig. 134); luégo haciendo centro en S, punto medio del radio OE, y con AS por radio, se describe el arco AC, y se traza la recta AC; resulta así un triángulo rectángulo ACO, en el que AC es el lado del pentágono regular inscrito, y CO el lado del decágono regular inscrito.

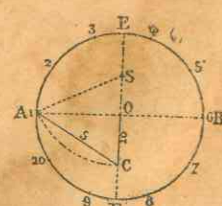


Fig. 134.

**304.** Problema.—*Divídase una circunferencia en 15, en 12 y en 7 partes iguales.*

Se determina la distancia OC (Fig. 135), lado del decágono regular, como en el problema anterior. Se lleva esta distancia OC desde A hasta N, y en seguida el



radio del círculo, desde A hasta M; el arco NM será la 15ª parte de la circunferencia.

Porque el arco NM = AM — AN, o también NM = 1/6 — 1/10 = 1/15 de la circunferencia.

Del propio modo, el arco MF será la 12ª parte de la circunferencia.

Por que MF = AF — AM, o 1/4 — 1/6 = 1/12 de la circunferencia.

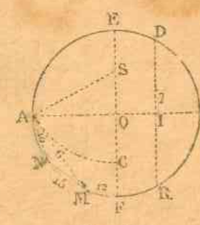


Fig. 135.

Si desde el punto B, con el radio BO, se corta la circunferencia en D y en R, y se unen los puntos D y R, la línea DI será el lado del heptágono regular.

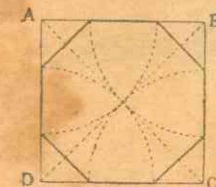


Fig. 136.

**305.** *Construír un octógono regular por medio de un cuadrado.*

Sea el cuadrado ABCD.

Trácense las diagonales AC y BD. Luégo haciendo centro sucesivamente en cada vértice del cuadrado y con un radio igual a la diagonal se describen arcos de círculo, los cuales al cortar los lados del cuadrado determinan los vértices del octógono regular (Fig. 136).

## EJERCICIOS NUMERICOS

30. La suma de los ángulos de un polígono regular es de 68 ángulos rectos; ¿cuánto vale el ángulo central de dicho polígono?
31. ¿Cuál es en el dodecágono regular; 1º el valor de un ángulo central; 2º el valor del ángulo inscrito; 3º el valor de un ángulo exterior?
32. ¿Cuánto vale el ángulo central y el ángulo inscrito de un pentágono regular?
33. Un polígono regular tiene 36 lados; ¿cuánto vale cada ángulo de este polígono?
34. El ángulo exterior de un polígono tiene 12º; ¿cuántos lados tiene el polígono?
35. ¿Cuánto valen todos los ángulos de un octógono regular? —cada ángulo del mismo? —el ángulo central?
36. ¿Cuánto vale cada ángulo de un hexágono regular?
37. La suma de los ángulos centrales, de los exteriores y de los inscritos de un polígono regular es de 1260º; ¿qué polígono es este?
38. ¿Cuánto vale el ángulo exterior de un polígono regular de 9 lados? Dedúzcase el valor de cada ángulo del polígono.

# LIBRO TERCERO

# SUPERFICIES

## CAPITULO I

### MEDICION DE LAS SUPERFICIES

**306.** *¿Qué es superficie?*

SUPERFICIE es la extensión en que sólo se consideran dos dimensiones: longitud y latitud, sin profundidad.

**307.** *¿Qué se llama plano?*

Llámase PLANO o SUPERFICIE PLANA la superficie que contiene enteramente a la recta trazada entre dos puntos suyos cualesquiera, como la de un espejo.

**308.** *¿Qué es medir una superficie?*

MEDIR UNA SUPERFICIE es compararla con otra superficie conocida que se toma como unidad.

**309.** *¿Cuál es la unidad de superficie?*

La unidad de superficie es el *metro cuadrado*, la *vara cuadrada* o el *pie cuadrado*, según los países.

**310.** *¿Qué se toma como unidad para medir las superficies considerables?*

Para medir superficies considerables, se toma como unidad un múltiplo de las medidas ordinarias.

**311.** *¿Qué se toma como unidad para medir las superficies menores que la unidad?*

Cuando se trata de medir superficies menores que la unidad ordinaria, se toma como unidad un submúltiplo de aquélla.

**312.** *¿Qué se llama área de una figura?*

Llámase AREA de una figura el número que expresa la relación que existe entre ella y la unidad de superficie.



## CAPITULO II

### AREA DE LAS FIGURAS RECTILINEAS

**313.** El área del RECTANGULO es igual al producto de su base por su altura.

Fórmula: $Rect. = b \times a$

Sea el rectángulo ABCD (Fig. 137) que tiene 7 metros de base y 4 de altura. Esta figura puede descomponerse en 4 rectángulos de 7 metros de largo por un metro de ancho, y cada rectángulo parcial puede ser dividido en 7 partes iguales, de un metro cuadrado cada una. El rectángulo contiene pues 4 veces 7 metros cuadrados o 28 metros cuadrados.

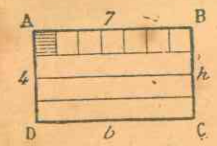



Fig. 137.

**314.** Dada el área y uno de los lados de un rectángulo, se encuentra el otro dividiendo el área por el lado conocido:

$$a = \frac{A}{b}.$$

**315.** El área del CUADRADO es igual al producto del lado multiplicado por sí mismo; porque el cuadrado es un rectángulo cuyas dos dimensiones son iguales: $C = a \times a = a^2$ (*a* cuadrada). De aquí viene el uso de llamar CUADRADO DE UN NUMERO al producto de este número por sí mismo.

**316.** Dada el área de un cuadrado, para encontrar el lado, se extrae la raíz cuadrada del área, y el resultado será el lado pedido: $a = \sqrt{A}$

**317.** El área del PARALELOGRAMO (ABEC, Fig. 139) es igual al producto de su base por su altura, como la del rectángulo: $P = b \times a$.

**318.** El área del ROMBO es igual a la mitad del producto de sus diagonales: $Rombo = \dfrac{d \times d'}{2}$.

Porque el rombo ABCD (Fig. 138) es la mitad del rectángulo EFGI; y como el área del rectángulo se expresa por BD $\times$ AC el área del rombo se expresará por ½ BD $\times$ AC, que es lo mismo que $\dfrac{d \times d'}{2}$.

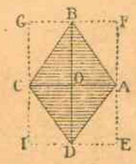


Fig. 138.

Si no se conocen las diagonales, se busca el área del rombo como la del paralelogramo.

**319.** El área del triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura: $T = \dfrac{b \times a}{2}$.

Porque el triángulo ABC (Fig. 139) es la mitad del paralelogramo ABEC, que tiene la misma base AC y la misma altura BD.

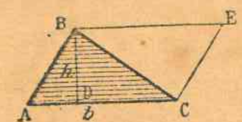


Fig. 139.

**320.** Dados los tres lados de un triángulo, para encontrar su área:

1º Se suman los tres lados, y se toma la mitad de la suma, la cual se llama semiperímetro;

2º Se resta separadamente del semiperímetro cada uno de los tres lados;

3º Se multiplican entre sí el semiperímetro y los tres restos;

4º Se extrae la raíz cuadrada del último producto, y el resultado será el área pedida.

$$T = \sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)}.$$

**321.** Cuando se conoce el lado de un triángulo equilátero, para encontrar el área puede hacerse como queda dicho en el número anterior, o también:

1º Cuadrar el lado;

2º Multiplicar este producto por la raíz cuadrada de 3, o sea 1.732;

3º Dividir este último producto por 4, y el cociente será el área pedida: $T.\ eq = \dfrac{a^2 \sqrt{3}}{4}$



**322.** Cuando se conocen el área y altura de un triángulo, para encontrar su base, se divide el área por la altura del triángulo, se multiplica el cociente por 2, y el producto será la base pedida: $b = \dfrac{A \times 2}{a}$.

**323.** Cuando se conocen el área y la base de un triángulo, para encontrar su altura, se divide el área por la base del triángulo, se multiplica el cociente por 2, y el producto será la altura pedida: $a = \dfrac{A \times 2}{b}$.

**324.** El área del TRAPECIO es igual al producto de la semisuma de sus bases por la altura: $\text{Trap.} = \dfrac{(b + b')\ a}{2}$.

**325.** El área de un CUADRILATERO cualquiera es igual al producto de una diagonal multiplicada por la semisuma de las perpendiculares bajadas desde los otros dos vértices a esta diagonal.

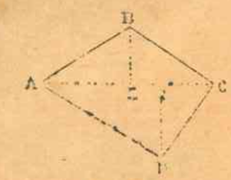


Fig. 140.

Así el área del cuadrilátero ABCD (Fig. 140) se expresará:

$$AC \times \frac{BE + FD}{2}.$$

**326.** Para encontrar el área de un POLIGONO CUALQUIERA, puede procederse de varios modos.

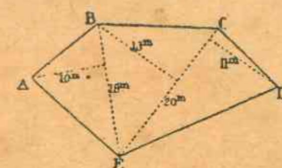


Fig. 141.

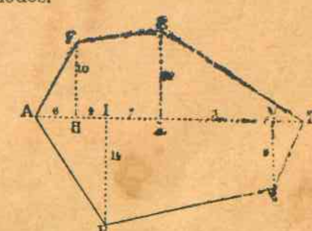


Fig. 142.

1er. MODO (Fig. 141). Se descompone el polígono en triángulos, se busca separadamente el área de cada uno de ellos, y se suman las áreas parciales.

Tri. ABE = ½ (10 × 18) = 90
" BCE = ½ (20 × 13) = 130
" DCE = ½ (20 × 11) = 110

Polígono total = 330 metros cuadrados

2º MODO (Fig. 142). Se descompone el polígono en triángulos rectángulos y en trapecios rectángulos.

Para esto se traza una diagonal en el polígono, y de los demás vértices se bajan perpendiculares a esta recta. Se busca separadamente el área de cada triángulo y trapecio, y luégo se suman estas áreas parciales.

Triáng. AFH = ½ ( 6 × 10) = 30
" ABI = ½ (10 × 14) = 70
" ELD = ½ (19 × 12) = 114
" DNC = ½ ( 9 × 4) = 18

Total de los triángulos 232 = 232 m. c.

$$\text{Trap. ELHF} = 11\left(\frac{10+12}{2}\right) = 121$$

$$\text{" INCB} = 22\left(\frac{14+9}{2}\right) = 253$$

Total de los trapecios 374 = 374 m. c.

Area del polígono 606 m. c.

**327.** El área de un polígono REGULAR es igual al producto del perímetro por la mitad de su apotema.

$$\text{Pol. reg.} = \frac{a \times p}{2}.$$

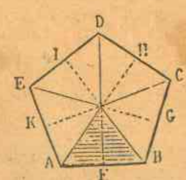


Fig. 143.

Sea por ejemplo, el pentágono regular ABCDE (Fig. 143), y OF la apotema. El polígono se descompone en 5 triángulos iguales al tr. AOB; el área de un triángulo es $\frac{AB \times OF}{2}$



El área del polígono será pues igual 5 veces $\frac{AB \times OF}{2}$, lo que es lo mismo que $\frac{5AB \times OF}{2}$.

## CAPITULO III

### AREA DE LAS FIGURAS CURVILINEAS

**328.** La circunferencia del círculo es igual al diámetro multiplicado por 3.1416 o por $\pi$: circ. $= 2\ \pi r$.

NOTA. Cuando se divide cualquier circunferencia por su diámetro, siempre resulta un mismo cociente; este cociente, o *relación* es de 3.1416 con aproximación de una diezmilésima, y se representa con la letra griega $\pi$, que se pronuncia *pi*.

**329.** El diámetro es igual a la circunferencia dividida por $\pi$: $D = \frac{c}{\pi}$.

**330.** La longitud de un arco de $n$ grados se encuentra por medio de la fórmula $l = \pi r \times \frac{n}{180}$.

**331.** El área del CIRCULO es igual al producto de la circunferencia por la mitad del radio: $C = \frac{c \times r}{2}$.

**332.** Cuando sólo se conoce el radio, el área del círculo es igual al cuadrado del radio multiplicado por $\pi$: $C = \pi \times r^2$.

**333.** Cuando sólo se conoce la circunferencia, el área del círculo es igual al cuadrado de la circunferencia dividido por 4 $\pi$: $C = \frac{c^2}{4\pi}$.

**334.** Para encontrar el radio del círculo cuando se conoce el área de éste, se divide el área por $\pi$, se extrae la raíz cuadrada del cociente, y el resultado será el radio pedido:

$$r = \sqrt{\frac{C}{\pi}}.$$

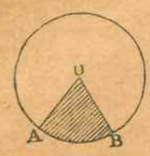



Fig. 144.

**335.** El área del SECTOR de círculo (ABO, Fig. 144) es igual al área del círculo multiplicada por la relación entre el ángulo central y 360º.

Sea $n$ el número de grados de un sector; como el área del círculo es de $\pi r^2$ el área del sector de un grado es de $\frac{\pi r^2}{360}$, y el área del sector dado será $\frac{\pi r^2}{360} \times n$.

Luego, el área del sector es igual al producto de la superficie del círculo por la relación del número de grados del sector a 360º.

**336.** Para encontrar el área del SEGMENTO circular ABC (Fig. 145), se valúa el área del sector AOBC, y de ella se resta el área del triángulo AOB.

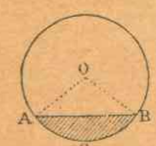



Fig. 145.

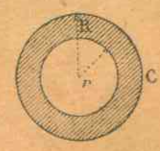



Fig. 146.

**337.** La corona circular es la diferencia de los dos círculos concéntricos.

El área de la corona C (Fig. 146), es

$$(\pi R^2 - \pi r^2) = \pi \ (R^2 - r^2).$$

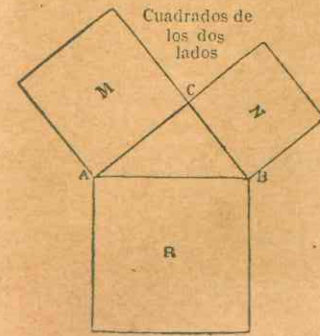
Luego el área de una corona circular es igual a la diferencia de los cuadrados de los radios multiplicada por $\pi$.

## CAPITULO IV

### PROPIEDADES DE LA HIPOTENUSA Y DE LOS CATETOS

**338.** En todo triángulo rectángulo el cuadrado construído sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos.






Cuadrado de la hipotenusa
R = M + N
Fig. 147.

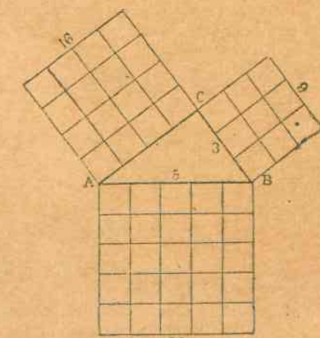



Fig. 148.

Así, en el triángulo rectángulo ABC (Fig. 147), el cuadrado R, construído sobre la hipotenusa, es igual a la suma de los cuadrados M y N construídos sobre los catetos.

Tenemos pues: R = H + N, o $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$.

NUMERICAMENTE. Sean los números 5, 4 y 3, cuyos cuadrados son respectivamente 25, 16 y 9.

Como $25 = 16 + 9$, se deduce de esto, conforme a la propiedad anterior, que se puede construír un triángulo rectángulo con tres líneas que son entre sí como los números 5, 4 y 3 (Fig. 148).

**339.** Dados los dos catetos de un triángulo rectángulo, para encontrar la hipotenusa:

1º Se cuadra separadamente cada cateto, y se suman los cuadrados;

2º Se extrae la raíz cuadrada de la suma, y el resultado será la hipotenusa pedida: Hip. $= \sqrt{c^2 + b^2}$.

**340.** Dada la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo, para encontrar el otro cateto:

1º Se cuadra separadamente la hipotenusa y el cateto conocido, y se restan los cuadrados;

2º Se extrae la raíz cuadrada de la diferencia; y el resultado será el cateto pedido: Cat. c. $= \sqrt{a^2 - b^2}$.

# Aplicaciones geométricas

## SOBRE EL LIBRO TERCERO

## SUPERFICIES

---

### EJERCICIOS NUMERICOS

#### § I.—Rectángulos y paralelogramos

39. Calcúlese el área de los siguientes rectángulos, cuyas bases y alturas son: 1º B = 25 met., A = 12 met.; 2º B = 46 met. 70, A = 15 met. 45; 3º B = 146 met. 26, A = 75 met. 20; 4º B = 206 met. 75, A = 147 met. 24; 5º B =467 met. 35, A =250 met. 75.
40. ¿Cuál es el área de una sala que tiene 15 met. 60 de largo y 7 met. 80 de ancho?
41. ¿Cuál es el área de un rectángulo que tiene 12 met. 60 de base, y 9 met. 30 de altura?
42. ¿Cuál es la altura de un rectángulo que tiene 7 met. de base y 35 met. cuadrados de área?
43. ¿Cuántos met. de base tienen los rectángulos siguientes, que miden 19208 met. cuad. de superficie, sabiendo que las alturas son: 1º 100 met.; 2º 224 met.; 3º 352,80 met.; 4º 705,60 met.; 5º 940,80 met.?
44. Calcúlese el área de los cuadrados siguientes, cuyo lado mide 1º 25 met.; 2º 45 met.; 3º 55 met.; 4º 139 met. 15; 5º 245 met. 85.
45. ¿Cuál es el área de los cuadrados siguientes, cuyo lado tiene: 1º 8 met.; 2º 27 met.; 3º 214 met.; 4º 839 met.?
46. ¿Cuál es el área de los cuadrados que tienen: 1º 7 met. 90; 2º 0 met. 15; 3º 4 met. 769 de lado?
47. ¿Cuál es el área de los cuadrados que tienen: 1º 35 met. 25; 2º 8 met. 45; 3º 46,3 de met. de lado?
48. ¿Cuántos met. de lado tienen los cuadrados siguientes que miden: 1º 7225 met. cuad.; 2º 169 met. cuad.; 3º 576 met. cuad.; 4º 1225 met. cuad. de área?
49. ¿Cuántos centím. de lado tienen los cuadrados siguientes que miden: 1º 24,01 met. cuad.; 2º 32,49 met. cuad.; 3º 40,96 met. cuad.; 4º 53,29 met. cuad.?
50. Calcúlese la superficie de los paralelogramos cuyas bases y alturas miden: 1º B = 40 met. 22, A = 32 met. 75; 2º B = 105 metros 75, A = 86 met. 95; 3º B = 145 met. 20, A = 127 met. 54; 4º B = 235 met. 15, A = 180 met. 35; 5º B = 375 met. 75, A = 295 met. 58.



51. ¿Cuál es el área de los rombos que tienen por lados y alturas: 1º Lado = 12 met., A = 6 met.; 2º L = 20 met., A = 15 met.; 3º L = 49 met. 24, A = 32 met. 15; 4º L = 59 met. 70, A = 41 met. 15; 5º L = 75 met. 25, A = 56 met. 78?
52. ¿Cuál es el área de los rombos cuyas diagonales miden: 1º 12 met. y 7 met.; 2º 24 met. y 16 met.; 3º 47 met. 25 y 17 metros 32; 4º 73 met. 15 y 42 met. 20; 5º 80 met. 90 y 66 met. 70?

#### § II.—Triángulos

53. Calcúlese el área de los triángulos cuyas bases y alturas miden: 1º B = 14 met.; A = 26 met.; 3º B = 66 met. 20, A = 74 met. 24; 2º B = 94 met. 70, A = 137 met. 09; 4º B = 109 met. 21, A = 75 met. 75; 5º B = 245 met. 67, A = 123 met. 45.
54. ¿Cuántos metros cuadrados de área tienen los triángulos siguientes que miden:
    1º 4 met. de base y 6 met. de altura?
    2º 5,50 met. de base y 5 met. de altura?
    3º 18,25 met. de base y 10,15 met. de altura?
    4º 20 met. de base, y 10,25 met. de altura?
55. ¿Cuántos metros de superficie tiene un terreno descompuesto en tres triángulos, de los cuales el 1º tiene 15 met. 25 de base, por 12 met. 15 de altura; el 2º 25 met. 10 de base, por 14 met. 60 de altura, y el 3º 18 met. 45 de base, por 8 met. 40 de altura?
56. Calcúlese la superficie de los triángulos siguientes, cuyos lados tienen: 1º 20, 15 y 7 metros; 2º 30, 40 y 50 met.; 3º 48, 50 y 26 met.
57. Calcúlese la superficie de los triángulos siguientes cuyos lados tienen: 1º 26 m., 28 m. y 30 m.; 2º 15 m., 20 m. y 25 m.; 3º un triángulo isósceles de 30 metros de base, y cada uno de los otros dos lados de 24 metros
58. ¿Cuántos metros de área tiene un jardín en forma de triángulo isósceles, cuya base mide 28 met. y cada uno de los otros lados 50 metros?
59. Un triángulo equilátero tiene 8 metros de lado, ¿cuál es su superficie?
60. ¿Cuál es la superficie de los triángulos equiláteros siguientes, que tienen: 1º 35 met.; 2º 81 met.; 3º 51 met.; 4º 17 met, 30 de lado?
61. ¿Cuántos metros cuadrados tiene un triángulo equilátero que mide 1 metro ¾ de lado?
62. Si la superficie de un triángulo es de 20 metros cuadrados y su altura de 4 metros, ¿cuánto mide la base?
63. ¿Cuántos metros de base tiene un triángulo que mide 16 metros cuadrados de superficie y 6 de altura?

64. Un terreno triangular tiene 70 metros cuadrados de superficie y 20 metros de altura, ¿cuánto mide la base?

65. Si la superficie de un triángulo es de 24 metros cuadrados y su base de 8 metros, calcúlese la altura.

66. ¿Cuántos metros de altura tiene un triángulo que mide 24 metros de base y 168 metros cuadrados de superficie?

### § III.—Trapecios y cuadrilateros cualesquiera

67. En el cuadrilátero ABCD (Fig. 149), el lado AB = 12 met. el lado BC = 16 met., el lado CD = 10 met., el lado AD = 14 met., y la diagonal AC = 20 met. Hállese el área.

68. La diagonal de un trapecio mide 125 m.; las perpendiculares bajadas a esta diagonal desde los vértices opuestos miden respectivamente 50 m. y 37 m. ¿Cuál es el área del trapecio?

69. ¿Cuál es la superficie de un cuadrilátero cuya diagonal mide 42 m. y las perpendiculares a ella desde los vértices opuestos, 18 met. y 16 met.?

70. ¿Cuál es el área de los trapecios siguientes, cuyas alturas y bases son: 1º A = 16 m., B = 24 m. y 36 m.; 2º A = 20,15 m., B = 34,25 m. y 62,49 m.; 3º A = 36,20 m., B = 75,70 m. y 85,80 m.; 4º A = 55,50 m., B = 106,50 m. y 134,45 m.; 5º A = 70,25 m., B = 145,75 m. y 109,25 m.?

71. Calcúlese el área de los siguientes cuadriláteros, cuyas dimensiones son:
1º Diagonal 65 met., alturas 28 met. y 33 met. 50 cent.
2º Diagonal 42 met., alturas 18 met. y 16 metros.
3º Diagonal 100 met., alturas 35 met. y 30 metros.

72. Si en el cuadrilátero ABCD (Fig. 149), AB = 40 met., DC = 36 met., DF = 34 met., BE = 35 met. y FE = 10 met. ¿Cuál es la superficie?

73. Supongamos que en el cuadrilátero ABCD (Fig. 149), a causa de algunos obstáculos, no se haya podido medir sino AB = 25 met., DC = 22 met., BE = 20 met., DF = 18 met., y FE = 8 met. Calcúlese el área.

74. Un terreno en forma de trapecio, cuya base inferior mide 75 metros, la superior 60 metros y la altura 46 metros, ha sido vendido en $ 1868; ¿cuánto costará otro terreno de la misma calidad, que tiene forma de rectángulo con 115 metros de base y 75 metros de altura?

### § IV.—Polígonos regulares e irregulares

75. Calcúlese el área de los siguientes hexágonos, cuyas dimensiones son; 1º Lado = 20 met., Apotema = 15 met.: 2º L = 18 met., A = 12 met.; 3º L = 36 met., A = 27 met.



76. ¿Cuál es el área de los polígonos siguientes, cuyas dimensiones son: 1º pentágono, L = 30 met., A = 24 met.; 2º heptágono, L = 16 met., A = 12 met. 25; 3º octógono, L = 22 met. A = 20 met.; 4º pentágono, L = 5 met., A = 4 met. 25; 5º hexágono, L = 14 met. 60, A = 12 met. 64?

77. Calcúlese el área de los polígonos siguientes, según las dimensiones señaladas en cada uno:

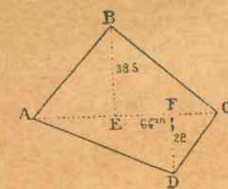


Fig. 149.

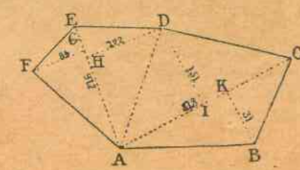


Fig. 150.

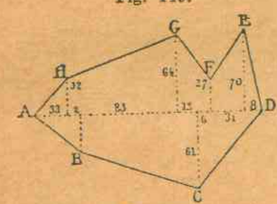


Fig. 151.

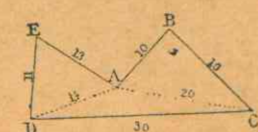


Fig. 152.

### § V.—Area de las figuras curvilineas (*)

78. ¿Cuál es la longitud de las circunferencias cuyos diámetros miden: 1º 26 met.; 2º 46 met. 25; 3º 59 met. 75; 4º 67 met. 75; 5º 224 met. 50?

79. ¿Cuál es la longitud de las circunferencias cuyos radios tienen: 1º 42 met. 25; 2º 67 met. 24; 3º 117 met. 70; 4º 149 met. 70; 5º 160 met. 70?

80. ¿Cuál es el diámetro de las circunferencias que tienen de longitud: 1º 37 met. 70; 2º 59 met. 69; 3º 76 met. 34; 4º 126 metros 45; 5º 206 met. 25?

81. ¿Cuál es el radio de las circunferencias que miden de longitud: 1º 69 met. 25; 2º 152 met. 12; 3º 227 met. 20; 4º 380 metros 17; 5º 45 metros 20?

---

(*) Aunque la longitud de la circunferencia, la del diámetro o del radio no pertenecen a las superficies, ponemos aquí estos problemas, para que esté junto cuanto se refiere al círculo.

**82.** En una circunferencia de 35 metros de radio, ¿cuál es la longitud de los arcos que miden: 1º 36°; 2º 72°; 3º 80° 15'; 4º 115° 22'; 5º 276° 40'?

**83.** En una circunferencia de 45 met. 75 de radio, se pregunta cuántos grados miden los arcos que tienen: 1º 25 met.; 2º 39 metros 75; 3º 45 met. 15; 4º 82 met. 09; 5º 195 met. 90.

**84.** ¿Cuál es la circunferencia de una moneda que tiene 37 milímetros de diámetro?

**85.** ¿Cuál es el diámetro de un pozo circular, cuya circunferencia mide 75 met. 82?

**86.** El diámetro de las dos ruedas mayores de una locomotora mide 1 met. 75, el de las otras cuatro, 1 met. 10; pregúntase cuántas vueltas da cada una de estas ruedas en un trayecto de 122 kilómetros?

**87.** El diámetro del Ecuador tiene 12754 kilómetros, ¿cuál es la circunferencia de este círculo?

**88.** ¿Cuál es la longitud de una circunferencia que mide 7 metros de radio?

**89.** ¿Cuál es la superficie de un círculo cuya circunferencia mide 37 metros 70, y el radio 6?

**90.** ¿Cuál es la superficie de los círculos siguientes, cuyas dimensiones son: 1º Circunferencia = 21 met. 90, Radio = 3 met. 50; 2º C = 47 met. 15, Diámetro = 15 met; 3º C = 157 met. 08, R = 25 met.; 4º C = 32 met. 98, D = 19 met. 50; 5º C = 6 met. 28, D = 2 met.?

**91.** ¿Cuál es el área de un círculo cuyo radio tiene 8 metros?

**92.** ¿Cuál es la superficie de los círculos siguientes cuyos diámetros miden: 1º 7 met.; 2º 13,27 met.; 3º 24 met. 45; 4º 129 met. 75; 5º 180 met. 40?

**93.** ¿Cuál es la superficie de los círculos siguientes cuyos radios miden: 1º 9 met.; 2º 17 met. 22; 3º 27 met. 50; 4º 36 met. 45; 5º 64 met. 32?

**94.** ¿Cuál es el área de un círculo cuya circunferencia mide 12 metros?

**95.** ¿Cuál es la superficie de los círculos siguientes cuyas circunferencias tienen: 1º 10 met. 75; 2º 5 met. 49; 3º 3½ met. 4º 45 met. 10; 5º 35 ½ met.; 6º 25 ¼ met.; 7º 4 ⅙ met.?

**96.** ¿Cuál es el radio de un círculo cuya superficie es de 452 metros cuadrados 3904?

**97.** ¿Cuál es el radio de los círculos siguientes que miden de superficie: 1º 42 met. cuad.; 2º 68 met. cuad.; 3º 242 ½ met. cuad.; 4º 356 met. cuad.; 5º 757 ⅓ met. cuad.; 6º 110 ½ met. cuad.; 7º 315 ⅙ met. cuad.; 8º 25 ¼ metros cuadrados?

**98.** ¿Cuál es el área de un sector: 1º de 30° en un círculo de 6 met. 40 de radio; 2º de 36° en un círculo de 6 met. 40 de radio; 3º de 75° y 4º de 140° 36', ambos también en un círculo de 6 metros 40 de radio?



**99.** En un círculo de 25 met. de radio, ¿cuál es: 1º el ángulo del sector de 3 met. cuad. 60; 2º de 8 met. cuad. 60; 3º de 4 met. cuad. 76; 4º de 16 met. cuad. 57?

**100.** En un segmento se ha medido lo siguiente:
1º El arco que es de 52°;
2º El radio del círculo que mide 66 centímetros;
3º La cuerda del segmento que es de 59 centímetros 1;
4º La altura del triángulo formado por la cuerda y los dos radios, que es de 29 centímetros 4.
Pregúntase:
1º Cuál es la superficie del sector correspondiente;
2º La superficie del triángulo;
3º La superficie del segmento.

**101.** ¿Cuál es el área de un sector cuyo ángulo central mide 60°, y el radio del círculo 2 met. 5?

**102.** La superficie de un sector es de 60 met. cuad.; ¿cuál es su ángulo central, si el arco mide 10 metros?

**103.** ¿Cuál es la superficie de una corona si los dos radios tienen 10 y 4 metros?

**104.** Una corona cuyo radio menor mide 9 metros, tiene 361 met. cuadrados 284 de superficie, ¿cuál es el radio mayor?

**105.** ¿Cuál es el área de las coronas cuyos radios tienen: 1º 12 y 15 metros; 2º 18 y 26 metros; 3º 30 y 45 metros; 4º 57 y 75 metros; 5º 89 y 145 metros?

**106.** Se pregunta cuál es el radio mayor de las coronas que tienen 115 ¼ met. cuad., si los radios menores miden: 1º 7 metros; 2 9 metros 25; 3º 13 ¾ metros; 4º 15 metros 50; 5º 20 metros.

**107.** ¿Cuál es el espacio comprendido entre dos circunferencias concéntricas cuyos diámetros miden: 1º 15 y 10 metros; 2º 9 y 5 metros; 3º 21 ¼ y 9 ¾ metros; 4º 30 y 2½ metros; 5º 15 y 16 metros?

§ VI.—Ejercicios varios

**108.** ¿Cuántas tablas de 3 met. 9 de largo por 0 met. 32 de ancho se necesitan para el piso de una sala de 16 met. por 8?

**109.** Un aposento tiene 120 met. cuad. de superficie; los rollos con que ha de empapelarse tienen 12 met. por 0.50, y cuestan $ 3,50 cada uno. Pregúntase cuántos rollos se necesitan, y cuál es su importe.

**110.** Se han pintado las cuatro paredes de un salón de 18 met. de largo por 9 met. 50 de ancho y 4 met. 50 de alto; hay en el salón seis ventanas de 2 met. de alto por 1 met. 40 de ancho, cuya superficie debe restarse de la total; ¿cuánto se le debe al pintor, a razón de $ 1,50 por met. cuad.?

111. Si se añaden 20 met. a un hilo que rodea un cuadrado, el cuadrado que puede rodear después tienen 225 met. cuad. más que el primero; ¿cuál era la longitud primitiva del hilo?
112. Si se quitan 4 met. al lado de un cuadrado, el cuadrado que resulta después tiene 128 met. cuad. menos que el primero: ¿cuál era la longitud de su lado?
113. La suma de dos cuadrados es de 1525 met. cuad., su diferencia de 275 met. cuad.; ¿cuál es el lado de cada uno de ellos?
114. Se trata de construír un cuadrado de una superficie 3 veces ½ mayor que otro que tiene 5 metros de lado; ¿qué longitud debe darse al lado del nuevo?
115. Un rectángulo tiene 60 metros de largo y 40 de ancho. Se disminuye el largo de 5 metros; ¿cuánto debe añadirse el ancho para que quede la misma superficie?
116. Un rectángulo tiene 164 áreas 28 cent. de superficie; su latitud es los ¾ de la longitud; ¿cuáles son sus dimensiones?
117. ¿Cuál es la base y la altura de un triángulo de 98 met. cuad. de superficie, si la base es igual a la altura?
118. Un triángulo tiene 875 met. cuad. de superficie; ¿cuáles son sus dimensiones, si son entre ellas como 2 es a 5?
119. Búsquese la base y la altura de un triángulo de 486 met. cuad. de superficie, si la base es los ¾ de la altura.
120. ¿Cuál es la altura de un triángulo que tiene 155 met. cuad. de superficie, si la altura es ⅓ de la base?
121. ¿Cuál es la base de un triángulo isósceles de 20 met. de altura, y equivalente a un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 18 y 30 metros?
122. ¿Cuáles son las dimensiones de un triángulo que mide 110 áreas 95 cent. de superficie, sabiendo que su altura es el triple de la base.?
123. Un trapecio mide 700 met. cuad., los lados paralelos 30 y 40 metros; cuál es la altura?
124. ¿Cuál es la longitud de la base superior de un trapecio de 200 met. cuad. de superficie, si la inferior tiene 18 met. y la altura 12 met.?
125. Cuáles son las dimensiones de un trapecio que mide 71 áreas 68 cent. de superficie; si la base superior es los ¾ de la inferior, y la altura, la mitad de dicha base inferior?
126. ¿Cuántos círculos de 4 centím. de radio pueden abrirse en una plancha de hoja de lata, de 8C centím. de largo por 60 de ancho, si las circunferencias deben ser tangentes; y cuál es en decímetros cuadrados la superficie de los espacios restantes?
127. Cuántas circunferencias tangentes de 5 centímet. de radio pueden trazarse en una plancha de hoja de lata de 60 centímetros de largo por 40 de ancho?



128. ¿Cuál es la superficie de un círculo cuya circunferencia tiene 1º 3 met. 60; 2º 0 met. 72; 3º 3 met. 52?
129. Una corona circular de 12 metros de diámetro interior tiene 120 met. cuad. de superficie; ¿cuál es la longitud del diámetro mayor?
130. Alrededor de un círculo de 11 met. de circuito se quiere formar una corona de 20 met. cuad. de superficie; ¿cuál será su circunferencia exterior?

### Relaciones entre las superficies.

**341.** PROBLEMA I.—*Constrúyase un cuadrado igual a la suma de otros dos cuadrados dados.*

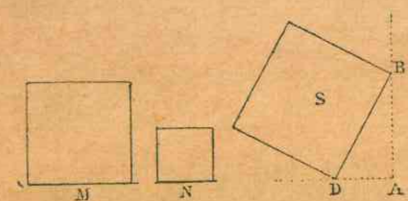



Fig. 153.

1º SOLUCIÓN GRÁFICA (Fig. 153) Se traza un ángulo recto A; se señala la distancia AB igual al lado del cuadrado M, y AD igual al lado del cuadrado N; luégo se traza BD, que es el lado del cuadrado S, igual a M + N.

En efecto, el cuadrado construído sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos (Nº 335).

2º SOLUCIÓN NUMERICA.—Sea 14 mm. la longitud del lado del cuadrado M, y 7 mm. 2 la del cuadrado N; llamemos $x$ el lado del cuadrado igual a la suma, y tendremos.

$$x^2 = 14^2 + 7{,}2^2 = 196 + 51{,}84 = 247{,}84.$$

y extrayendo la raíz cuadrada, $x = 15$ mm. 74.

**342.** PROBLEMA II.—*Constrúyase un cuadrado igual a la diferencia de dos cuadrados dados* M *y* N.

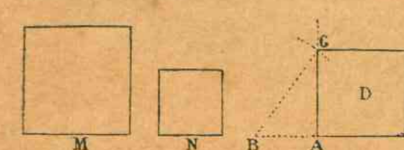



Fig. 154.

1º SOLUCIÓN GRÁFICA (Fig. 154). Se traza un ángulo recto A; se señala la distancia AB igual al lado del cuadrado N; desde el punto B con un radio igual al lado del cuadrado M, se corta el otro lado del ángulo recto, y luégo sobre AC se construye el cuadrado D, igual a M — N.

En efecto, el cuadrado construído sobre uno de los catetos es igual al cuadrado construído sobre la hipotenusa, menos el cuadrado construído sobre el otro cateto (Nº 337).

2º SOLUCIÓN NUMERICA.—Sean 14 mm. 6, y 7 mm. 8 los lados de los cuadrados M y N, y $x$ el lado del cuadrado igual a la diferencia, y tendremos:

$$x^2 = \overline{14,6}^2 - \overline{7,8}^2 = 213,16 - 60,84 = 152,32$$

y extrayendo la raíz cuadrada, $x$ = 12 mm. 34.

**343.** PROBLEMA III.— *Constrúyase un cuadrado doble de otro cuadrado dado* DECF.

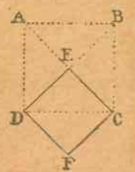


Fig. 155.

1º SOLUCIÓN GRAFICA (Fig. 155). Se toma como lado la diagonal DC del cuadrado dado, y el cuadrado CDAB es doble del cuadrado dado.

En efecto $DC^2 = DF^2 + CF^2 = 2DF^2$.

2º SOLUCIÓN NUMERICA.—Sea 8 mm. 48 la longitud del lado del cuadrado; debemos tener:

$$x^2 = 2 \times \overline{8,48}^2 = 2 \times 71,91 = 134,82.$$

y extrayendo la raíz cuadrada $x$ = 11.98

**344.** PROBLEMA IV.—*Constrúyase un cuadrado que sea la mitad de otro dado.*

1º SOLUCIÓN GRAFICA.—Se toma la longitud del lado del cuadrado como diámetro, y se describe una semicircunferencia (Fig. 156); en seguida se levanta una perpendicular en la mitad del diámetro, y se trazan las rectas AC y BC. Cada una de estas dos líneas será el lado del cuadrado pedido.

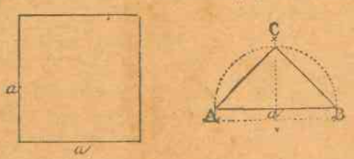


Fig. 156.

En efecto, el triángulo rectángulo ABC es isósceles y el cuadrado de AB es igual a la suma de los cuadrados de AC y de BC o a dos veces el cuadrado de BC.

2º SOLUCIÓN NUMERICA.—Sea 9 m. la longitud del lado del cuadrado conocido; tendremos:

$$x^2 = \frac{9^2}{2} = \frac{81}{2} = 40,50$$

y extrayendo la raíz cuadrada,

$$x = 6 \text{ m. } 36.$$

**345.** PROBLEMA V.—*Constrúyase un cuadrado que esté con otro cuadrado* N *en una relación dada,* ¾ *por ejemplo.*

Sobre AB, lado del cuadrado dado (Fig. 157), se describe una semicircunferencia; en el punto H tomado en los ¾ de AB, se levanta la perpendicular HF; la cuerda AF es el lado del cuadrado pedido.

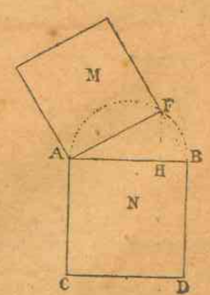


Fig. 157.

# LIBRO CUARTO

# SOLIDOS

**346.** *¿Qué es volumen de un cuerpo?*

El VOLUMEN de un cuerpo es la parte del espacio ocupada por este cuerpo. En un volumen se considera la extensión en sus tres dimensiones: longitud, latitud o anchura, y altura, llamada también profundidad o espesor.

**347.** *¿Qué cuerpos o sólidos se estudian particularmente en la Geometría?*

En la geometría se estudian particularmente los poliedros y los cuerpos redondos.

## CAPITULO I

### De los poliedros

**348.** *¿Qué se llama poliedro?*

Llámase POLIEDRO un cuerpo limitado sólo por caras planas.

**349.** *¿Qué cosas deben considerarse en un poliedro?*

En un poliedro deben considerarse las *aristas*, los *vértices*, las *diagonales*, las *caras*, los *ángulos diedros* y los *ángulos sólidos*.

**350.** *¿A qué se da el nombre de arista?*

Se da el nombre de ARISTA al encuentro de dos caras planas que forman ángulo (AB, Fig. 158).

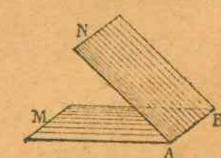


Fig. 158.

**351.**—*¿Cómo se llaman los extremos de las aristas de un poliedro?*

Los extremos de las aristas de un poliedro se llaman VERTICES del polidro.

**352.** *¿Qué es diagonal de un poliedro?*

DIAGONAL de un poliedro es la línea recta que une dos vértices que no se encuentran en una misma cara.

**353.** *¿Qué son caras de un poliedro?*

CARAS de un poliedro son las superficies que lo limitan.

**354.** *¿Qué se llama ángulo diedro?*

Llámase ANGULO DIEDRO la abertura comprendida entre dos planos que se cortan (MABN, Fig. 158).

Estos dos planos son las caras del diedro y su intersección es la arista.

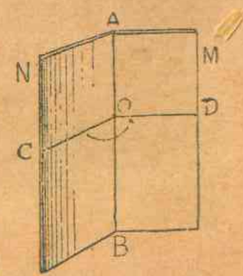



Fig. 159.

**355.** *¿Qué es ángulo plano?*

ANGULO PLANO correspondiente a un ángulo diedro (COD, Fig. 159) es el ángulo formado por dos rectas trazadas en las dos caras, perpendicularmente a un mismo punto de la arista?

**356.** *¿Cómo se designa un ángulo diedro?*

Un ángulo diedro se designa por su arista.

**357.** *¿Qué es ángulo sólido?*

ANGULO SÓLIDO o ANGULO POLIEDRO es la figura formada por varios planos que se cortan en un mismo punto; por ejemplo, la aguja de un campanario.

Este punto es el vértice del ángulo sólido, y cada arista forma un ángulo diedro.

Fig. 160.

**358.** *¿Qué es triedro?*

TRIEDRO es un ángulo sólido de tres caras.

En el triedro se consideran nueve elementos a saber: tres *caras*, tres *diedros* y tres *ángulos planos.*

**359.** *¿Cuándo es convexo un ángulo sólido?*

Un ángulo SOLIDO es CONVEXO cuando



la sección plana que corta a todas las aristas es un polígono convexo.

**360.** *¿Cómo se dividen los poliedros segun la relación de sus ángulos y caras?*

Segun la relación que guardan entre sí los ángulos y caras de los poliedros, se dividen en *regulares* e *irregulares.*

**361.** *¿Qué es poliedro regular?*

Poliedro REGULAR es el que tiene sus caras y ángulos diedros iguales.

**362.** *¿Qué es poliedro irregular?*

Poliedro IRREGULAR es el que no tiene iguales todas sus caras y ángulos.

**363.** *¿Cuántos poliedros regulares hay?*

Hay cinco poliedros regulares; en tres de ellos las caras son triángulos equiláteros: el tetraedro, el octaedro y el icosaedro; en uno, son cuadrados: el hexaedro o cubo; en el último, son pentágonos regulares: el dodecaedro.

**364.** *¿Qué es tetraedro regular?*

TETRAEDRO regular es un sólido limitado por cuatro triángulos equiláteros iguales (Fig. 161).

**365.** *¿Qué es hexaedro o cubo?*

HEXAEDRO o CUBO es un sólido limitado por seis cuadrados (Fig. 162).

**366.** *¿Qué es octaedro regular?*

OCTAEDRO regular es un sólido limitado por ocho triángulos equiláteros iguales (Fig. 163).

Fig. 161.

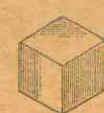


Fig. 162.

Fig. 163.

Fig. 164.

Fig. 165.

**367.** *¿Qué es dodecaedro regular?*

DODECAEDRO regular es un sólido limitado por doce pentágonos regulares iguales (Fig. 164).

**368.** *¿Qué es icosaedro regular?*

ICOSAEDRO regular es un sólido limitado por veinte triángulos equiláteros iguales (Fig 165).

**369.** *¿Qué número de caras puede tener un poliedro?*

Un poliedro puede tener cualquier número de caras, pero nunca menos de cuatro.

**370.** *¿Cuáles son los principales poliedros irregulares?*

Los principales poliedros irregulares son el *prisma* y la *pirámide.*

### § I. — Prisma

√ **371.** *¿Qué se llama prisma?*

Llámase PRISMA el poliedro comprendido entre dos polígonos opuestos, iguales y paralelos; las caras laterales son paralelogramos. (Fig. 166).

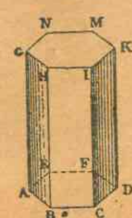


Fig. 166.

**372.** *¿Qué son bases del prisma?*

Los dos polígonos opuestos iguales y paralelos, son las BASES del prisma.

**373.** *¿Cómo es el prisma según su posición?*

Según su posición el prisma es *recto* y *oblicuo.*

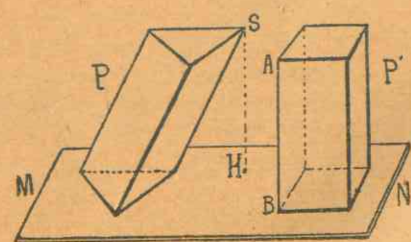


Fig. 167.

**374.** *¿Qué es prisma recto?*

Prisma RECTO es aquel cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases (P' Fig. 167).

**375.** *¿Qué es prisma oblicuo?*

Prisma OBLICUO es aquel cuyas aristas laterales no son perpendiculares a las bases (P, Fig. 167).



**376.** *¿Qué es altura de un prisma?*

ALTURA de un prisma es la distancia que media entre sus dos bases, o la perpendicular bajada de cualquier punto de la base superior a la inferior, que se prolonga si es necesario (SH, Fig. 167).

**377.** *¿Cuál es la altura en el prisma recto?*

En el prisma recto cualquiera de sus aristas se puede tomar por altura.

**378.** *¿Cómo se llama un prisma según el número de lados de su base?*

Según el número de lados de su base un prisma es *triangular, cuadrangular, pentagonal, hexagonal,* etc.

**379.** *¿Cuánao se llama regular el prisma, y cuándo irregular?*

El prisma se llama REGULAR cuando sus bases son polígonos regulares; y cuando no, IRREGULAR.

**380.** *¿Qué se llama eje del prisma?*

La recta que une los centros de los polígonos de las bases se llama EJE del prisma.

**381.** *¿Qué es paralelepípedo?*

PARALELEPÍPEDO es un prisma cuyas bases y caras son paralelogramos; es rectángulo cuando todas las aristas forman ángulos rectos.

**382.** *¿Qué es sección recta de un prisma?*

Llámase SECCION RECTA de un prisma cualquier sección o corte perpendicular a las aristas laterales (ABCD, Fig. 168).

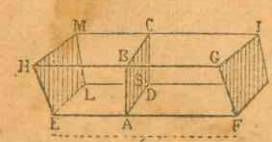


Fig. 168.

**383.** *¿Qué se entiende por superficie lateral de un prisma?*

Por SUPERFICIE LATERAL de un prisma se entiende el conjunto de las superficies de los paralelogramos que lo limitan por los lados.

**384.** *¿De qué consta la superficie total de un prisma:*

La SUPERFICIE TOTAL de un prisma consta de la superficie lateral añadida a la superficie de las dos bases.

## § II. — Pirámide

**385.** *¿Qué es pirámide?*

PIRÁMIDE es un poliedro que tiene por base cualquier polígono, y cuya superficie lateral consta de triángulos que concurren en un punto (Fig 169).

**386.** *Qué es cúspide de la pirámide?*

CÚSPIDE o vértice de la pirámide es el punto en que se reúnen los vértices de los triángulos laterales (S, Fig. 169).

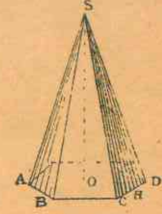


Fig. 169.

**387.** *¿Qué es altura de una pirámide?*

ALTURA de una pirámide es la perpendicular bajada desde la cúspide al plano de la base, el cual se prolonga si es necesario (SO, Fig. 169).

**388.** *¿Cuándo es regular la pirámide, y cuándo irregular?*

La pirámide es REGULAR cuando tiene por base un polígono regular, y la recta que une el centro de la base con el vértice es perpendicular a la base. La que no reúne estas condiciones es IRREGULAR.

**389.** *¿Qué se llama apotema de una pirámide regular?*

Llámase APOTEMA de una pirámide regular la perpendicular bajada desde la cúspide a uno de los lados de la base; o, en otros términos, la altura de los triángulos isósceles laterales.

No debe confundirse la apotema de la pirámide con la apotema del polígono de la base.

**390.** *¿Cómo se llama la pirámide según el número de lados de su base?*

Según el número de lados de su base la pirámide se llama *triangular, cuadrangular, pentagonal, etc.*



**391.** *¿Qué es pirámide truncada?*

PIRÁMIDE TRUNCADA es la porción de pirámide comprendida entre la base y un plano que corte todas las aristas laterales (ABCD, *abcd*, Fig. 170).

**392.** *¿Qué se llama tronco piramidal regular?*

Llámase TRONCO PIRAMIDAL REGULAR la porción de pirámide regular comprendida entre la base y una sección paralela a ella.

**393.** *¿Cuál es la altura del tronco piramidal?*

La altura del tronco piramidal es la distancia comprendida entre las dos bases.

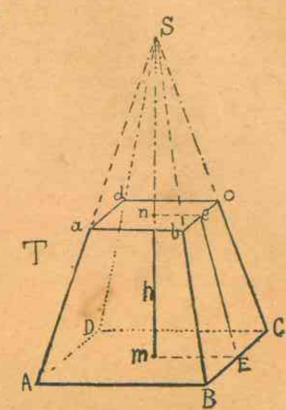


Fig. 170.

**394.** *¿Qué figura representan las caras laterales del tronco piramidal regular?*

Las caras laterales del tronco piramidal regular son trapecios isósceles iguales.

**395.** *¿Cómo se llama la altura de cada uno de los trapecios del tronco piramidal regular?*

La altura de cada uno de estos trapecios se llama APOTEMA DEL TRONCO.

---

# CAPITULO II

## De los cuerpos redondos

**396.** *¿A qué se da el nombre de sólido de revolución?*

Se da el nombre de SOLIDO DE REVOLUCION al cuerpo engendrado por una superficie plana que gira al rededor de un eje situado en el mismo plano que dicha superficie.

**397.** *¿Qué es superficie de revolución?*

Llámase SUPERFICIE DE REVOLUCION la que es engendrada por una línea plana que gira al rededor de un eje situado en un mismo plano.

**398.** *¿Cómo se llama la figura giratoria?*

La figura giratoria se llama GENERATRIZ; cada uno de sus puntos describe una circunferencia total o parcial.

**399.** *¿Qué engendra el perímetro de la figura generatriz en su revolución?*

En su revolución, el perímetro de la figura generatriz engendra a la *superficie* del sólido.

**400.** *¿Cuáles son los principales sólidos de revolución?*

Los principales sólidos de revolución son el *cilindro*, el *cono* y la *esfera*; a los cuales se da el nombre de *cuerpos redondos*.

**401.** *¿Qué es cuerpo redondo?*

CUERPO REDONDO es un sólido que no tiene ningún ángulo poliedro.

## § I. — Cilindro

V **402.** *¿Qué es cilindro de revolución?*

Cilindro de revolución o cilindro circular recto es el sólido engendrado por la revolución completa de un rectángulo alrededor de uno de sus lados (Fig. 171).

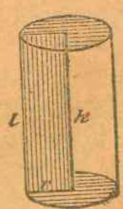


Fig. 171.

**403.** *¿Cómo se llama el lado del rectángulo opuesto al eje?*

El lado del rectángulo opuesto al eje se llama GENERATRIZ o LADO del cilindro; durante el movimiento de revolución, este lado engendra a la superficie lateral del cilindro.

**404.** *¿Qué son los otros dos lados del rectángulo generador?*

Los otros dos lados del rectángulo generador son los RADIOS del cilindro, y engendran a los dos círculos que sirven de bases al sólido. Estas bases son perpendiculares al eje.



**405.** *¿Cómo se puede considerar al cilindro?*

Se puede considerar el cilindro como un prisma que tiene infinidad de caras.

**406.** *¿Qué es cilindro recto?*

El cilindro es RECTO cuando su eje es perpendicular a las bases.

**407.** *¿Qué es cilindro oblicuo?*

Cilindro OBLICUO es aquel cuyo eje no es perpendicular a las bases.

**408.** *¿Qué es altura de un cilindro?*

ALTURA de un cilindro es la distancia entre sus dos bases; en el cilindro recto, la altura es igual al eje y al lado o generatriz.

## § II. — Cono

**409.** *¿Qué es cono de revolución?*

Llámase CONO DE REVOLUCION el sólido engendrado por la revolución completa de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos (Fig. 172).

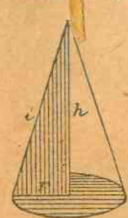


Fig. 172

**410.** *¿Cómo se llama el cateto alrededor del cual gira el triángulo generador?*

El cateto alrededor del cual gira el *triángulo rectángulo generador*, es a un tiempo EJE y ALTURA del cono.

**411.** *¿Cuál es la generatriz o lado del cono?*

La hipotenusa es la GENERATRIZ o LADO *del cono;* durante el movimiento de revolución, dicha hipotenusa engendra la *superficie lateral* del cono.

**412.** *¿Cuál es el radio del cono?*

El radio del cono es el radio del círculo de la base; es el segundo cateto del triángulo rectángulo.

**413.** *¿Qué es tronco de cono de bases paralelas?*

TRONCO DE CONO DE BASES PARALELAS es la porción de un cono comprendida entre la base y una sección paralela a dicha base (Fig. 173).

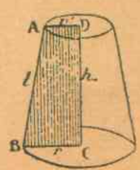


Fig. 173.

**414.** *¿Cómo puede considerarse engendrado el tronco de cono de bases paralelas?*

El tronco de cono de bases paralelas, puede considerarse como engendrado por un trapecio rectángulo que gira alrededor del lado perpendicular a las bases.

**415.** *¿Cómo se puede considerar el cono?*

Se puede considerar el cono como una pirámide que tiene infinidad de caras.

**416.** *¿Qué es cono recto?*

Cono RECTO es aquel cuyo eje cae perpendicularmente sobre la base.

**417.** *¿Qué es cono oblicuo?*

Cono OBLICUO es aquel cuyo eje no cae perpendicularmente sobre la base.

**418.** *¿Qué es altura del cono?*

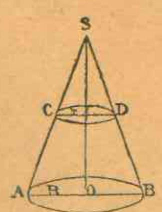


Fig. 174.

ALTURA del cono es la perpendicular bajada desde el vértice al plano de la base (SO, Fig. 174).

**419.** *¿Qué clase de figura se obtiene haciendo una sección paralela a la base de un cono?*

Toda sección paralela a la base de un cono es un círculo (CD, Fig. 174).



## § III. — Esfera

**420.** *¿Qué es esfera?*

ESFERA es un sólido terminado por una superficie curva convexa que tiene todos sus puntos equidistantes de uno que se considera en su interior, llamado centro (Fig. 175).

Fig. 175.

**421.** *¿Qué otra definición puede darse de la esfera?*

La esfera es el sólido engendrado por la revolución completa de un semicírculo alrededor de su **diámetro.**

**422.** *¿Qué describe en la rotación la semicircunferencia?*

En la rotación, la semicircunferencia describe la SUPERFICIE DE LA ESFERA.

**423.** *¿Qué son el centro, radio y diámetro del semicírculo generador?*

El centro, radio y diámetro del semicírculo generador son también el *centro, radio* y *diámetro* de la esfera.

**424.** *¿Qué es diámetro en la esfera?*

Toda recta trazada por el centro de la esfera y que por ambos extremos termina en la superficie, es un DIAMETRO (AB, Fig 177).

**425.** *¿Qué es eje de la esfera?*

EJE de la esfera es el diámetro alrededor del cual se considera girar la esfera (FB, Fig. 176).

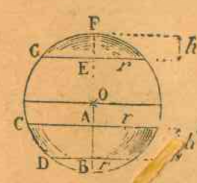


Fig. 176.

**426.** *¿Qué son polos de la esfera?*

POLOS de la esfera son los extremos del eje (F y B, Fig. 176).

**427.** *¿Qué es toda sección plana de una esfera?*

Toda sección plana de una esfera es un CIRCULO.

**428.** *¿Cómo se llama la sección obtenida por un plano que pasa por el centro de la esfera?*

Si el plano de la sección pasa por el centro de la esfera, la sección se llama CIRCULO MAXIMO.

**429.** *¿En cuántas partes divide el círculo máximo a la esfera?*

El círculo máximo divide a la esfera en dos partes iguales llamadas HEMISFERIOS.

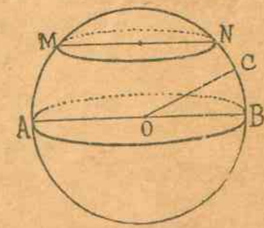



Fig. 177.

**430.** *¿Cuándo se llama círculo menor la sección hecha en la esfera?*

Si el plano de la sección no pasa por el centro de la esfera, la sección se llama CIRCULO MENOR.

**431.** *¿En cuántas partes divide el círculo menor a la esfera?*

El círculo *menor* divide a la esfera en dos partes desiguales, llamadas SEGMENTOS.

**432.** *¿Cuándo es un plano tangente a una esfera?*

Un plano es TANGENTE a una esfera cuando tiene con ella un solo punto de contacto.

**433.** *¿Cuándo son tangentes dos esferas?*

Dos esferas son TANGENTES cuando sus superficies tienen un solo punto de contacto.

**434.** *¿Cuáles son las partes principales de la superficie de la esfera?*

Las partes principales de la superficie de la esfera son: la *zona*, el *casquete* y el *huso esférico*.

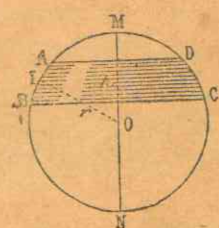



Fig. 178.

**435.** *¿Qué es zona?*

ZONA es la parte de la superficie de la esfera comprendida entre dos planos paralelos (ABCD, Fig 178).

**436.** *¿Qué es casquete esférico?*

CASQUETE ESFERICO es la parte de la superficie de la esfera comprendida entre dos planos paralelos, uno de los cuales es tangente a la esfera (CBA, Fig. 180).

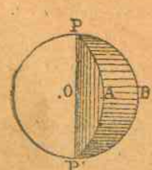



Fig. 179.

**437.** *¿Qué es huso esférico?*

HUSO ESFERICO es la parte de la superficie de la esfera comprendida entre dos semicírculos máximos que terminan en un diámetro común.



**438.** *¿Cuáles son las partes principales del volumen de la esfera?*

Las partes principales del volumen de la esfera son: el *segmento de dos bases*, el *segmento de una base*, la *cuña esférica*, y el *sector esférico*.

**439.** *¿Qué es segmento esférico de dos bases?*

SEGMENTO ESFERICO DE DOS BASES es la parte de la esfera comprendida entre dos planos paralelos; o, en otros términos, el sólido envuelto por la *zona* (EFGH, Fig. 180).

**440.** *¿Qué es segmento de una base?*

SEGMENTO DE UNA BASE es la parte de la esfera comprendida entre dos planos paralelos, uno de los cuales es tangente a la esfera; o, de otro modo, el sólido envuelto por el casquete esférico (BAC, Fig. 180).

**441.** *¿Cuál es la altura de la zona o del segmento?*

La ALTURA de la zona o del segmento es la distancia de los dos planos paralelos.

**442.** *¿Qué es cuña esférica?*

CUÑA ESFERICA es una parte de la esfera comprendida entre los planos de dos semicírculos máximos que terminan en un diámetro común; tiene por base el huso eférico (PP'AB, Fig. 179).

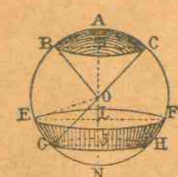



Fig. 180.

**443.** *¿Qué es sector esférico?*

SECTOR ESFERICO es una porción de la esfera que tiene por base una zona o un casquete, y cuyo vértice está en el centro de la esfera.

**444.** *¿Cómo es engendrado el sector esférico?*

El sector esférico es engendrado por un sector de círculo que gira alrededor de un radio.

## CAPITULO III

### Medición del área y volumen de los sólidos

**445.** *¿Qué es medir el volumen de un cuerpo?*

MEDIR EL VOLUMEN de un cuerpo es determinar cuántas veces contiene a otro cuerpo tomado como unidad de medida.

**446.** *¿Cuál es la unidad de volumen?*

La unidad de *volumen* es el *metro cúbico*, la *vara cúbica*, o el *pie cúbico*, según los países.

**447.** *¿Qué se toma como unidad para medir los volúmenes considerables?*

Para medir volúmenes considerables, se toma como unidad un múltiplo de las medidas ordinarias.

**448.** *Qué se toma como unidad para medir los volúmenes menores que la unidad?*

Para medir los volúmenes menores que la unidad ordinaria, se toma como unidad un submúltiplo de aquélla.

### § I. — Hexaedro o cubo

**449.** Para encontrar la SUPERFICIE TOTAL DEL CUBO se multiplica por 6 el cuadrado de una de sus aristas:

$$\text{Area } S = 6a^2.$$

**450.** Cuando se conoce la superficie total del cubo, para encontrar el lado:

1º Se divide por 6 la superficie total, lo que da la superficie de una cara;

2º Se extrae la raíz cuadrada del cociente, y el resultado será el lado pedido: $l = \sqrt{\dfrac{S}{6}}$

**451.** EL VOLUMEN DEL CUBO se encuentra haciendo la multiplicación de una de sus aristas tomada tres veces como factor, $V = a^3$.

De aquí viene el uso de llamar CUBO DE UN NUMERO al producto de un número tomado tres veces como factor, o elevado a su tercera potencia.

### § II. — Prisma

**452.** LA SUPERFICIE LATERAL DEL PRISMA RECTO, o de un paralelepípedo, es igual al perímetro de la base multiplicado por la altura.

**453.** Si el prisma es oblicuo, se multiplica una arista por el perímetro de la sección recta, es decir obtenida por un corte perpendicular a las aristas. $S = pa$.



**454.** LA SUPERFICIE TOTAL DEL PRISMA es igual a la superficie lateral sumada con la de las dos bases.

**455.** EL VOLUMEN DEL PARALELEPIPEDO RECTANGULO es igual al producto de sus tres dimensiones: $V = abc$.

Sea el paralelepípedo P (Fig. 181), que mide 7 met. de largo, 4 de ancho y 3 de alto. Este sólido puede descomponerse en 3 paralelepípedos de 7 met. de largo, 4 de ancho y 1 de alto. Cada paralelepípedo parcial puede dividirse, a su vez, en otros 4, de 7 met. de largo, 1 de ancho y 1 de alto. Por fin, cada uno de estos últimos puede dividirse en 7 partes iguales de 1 metro cúbico cada uno. Luego el número total será de $7 \times 4 \times 3 = 84$ met. cúb.

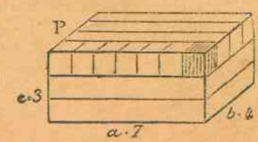


Fig. 181.

**456.** O también: el volumen del paralelepípedo o de cualquier prisma recto u oblicuo es igual al producto de la superficie de la base por la altura: $V = ba$.

### § III. — Pirámide

**457.** La SUPERFICIE LATERAL DE LA PIRAMIDE REGULAR es igual a la mitad del producto de su apotema por el perímetro de la base:

$$S = \frac{a}{2} \times p.$$

**458.** Si la pirámide es irregular, se miden separadamente sus caras, y se suman los resultados.

**459.** LA SUPERFICIE TOTAL DE UNA PIRAMIDE se compone de la lateral aumentada de la de su base.

**460.** La superficie *lateral* de un tronco de pirámide regular es igual a su apotema multiplicada por la semisuma de los perímetros de las bases: $S = a \times \dfrac{P + p}{2}$.

Porque esta superficie se compone de trapecios iguales, que tienen por altura la apotema del tronco y por bases los diversos lados de las bases del tronco.

**461.** La superficie *total* del tronco de pirámide se compone de la lateral aumentada de la de las dos bases.

**462.** EL VOLUMEN DE UNA PIRAMIDE es igual a la tercera parte del producto de la superficie de la base por la altura: $V = \frac{1}{3}\ ba$.

**463.** El volumen de un tronco de pirámide de bases paralelas es igual a la tercera parte de la altura del tronco multiplicada por la suma de las bases y de su media geométrica:

$$V = \tfrac{1}{3}\ a\ (B + b + \sqrt{Bb}).$$

Se encuentra la media geométrica de las bases multiplicándolas entre sí, y extrayendo la raíz cuadrada del producto.

## § IV. — Cilindro

**464.** LA SUPERFICIE LATERAL DEL CILINDRO RECTO es igual al producto de la altura por la circunferencia de la base: $S = 2\pi ra$.

**465.** LA SUPERFICIE TOTAL DEL CILINDRO se compone de la de los círculos de las bases añadida a la superficie lateral: $S = 2\pi ra + 2\pi r^2 = 2\pi r\ (a + r)$.

**466.** El volumen del cilindro es igual al producto de la superficie de la base por la altura: $V = \pi r^2 a$.

## § V. — Cono

**467.** LA SUPERFICIE LATERAL DEL CONO RECTO es igual a la mitad del lado o generatriz multiplicada por la circunferencia de la base: $S = \frac{1}{2}\ 2\pi rl = \pi rl$.

**468.** LA SUPERFICIE TOTAL se compone de la lateral aumentada de la superficie del círculo de la base:

$$S = \pi rl + \pi r^2 = \pi r\ (l + r).$$

**469.** La superficie *lateral* de un tronco de cono es igual al producto del lado o generatriz por la semisuma de las circunferencias de sus bases.

$$S = \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} \times l = \pi\ (r + r')\ l.$$

**470.** EL VOLUMEN DE UN CONO es igual a la tercera parte del producto de su base por la altura: $V = \frac{1}{3}\ \pi r^2 a$.



**471.** El volumen de un tronco de cono es igual al tercio de la altura multiplicado por $\pi$ y por la suma del cuadrado del radio mayor, más el cuadrado del menor, más el producto de los dos radios: $V = \dfrac{\pi a}{3}\ (r^2 + r'^2 + rr')$.

## § VI. — Esfera

**472.** LA SUPERFICIE DE LA ESFERA es igual al producto del diámetro por la circunferencia de un círculo máximo:

$$S = 2\ \pi r \times 2r.$$

**473.** Como el diámetro de la esfera está representado por $2r$, y la circunferencia del círculo máximo por $2\pi r$, el área de la esfera se expresa por $4\pi r^2$, es decir 4 veces el área de un círculo máximo.

Si llamamos $d$ el diámetro, la circunferencia será $\pi d$, y el área de la esfera, $\pi d^2$.

**474.** Para encontrar el DIAMETRO de la esfera, cuando se conoce su superficie, se divide ésta por $\pi$, y se extrae la raíz cuadrada del cociente: $d = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$

**475.** LA SUPERFICIE DE LA ZONA y del CASQUETE ESFERICO es igual a la circunferencia de la esfera, multiplicada por la altura de la zona: $Z = 2\pi ra$.

**476.** LA SUPERFICIE DE UN HUSO ESFERICO es igual a la superficie de la esfera multiplicada por la relación del ángulo del huso a 360°.

Si $n$ es el ángulo del huso, la superficie será:

$$4\pi r^2 \times \frac{n}{360} = \frac{\pi r^2 \times n}{90}.$$

**477.** EL VOLUMEN DE LA ESFERA es igual al producto de la superficie por la tercera parte del radio.

Ya que la superficie de la esfera es $4\ \pi r^2$, el volumen será $4\pi r^2 \times \frac{1}{3} r = \frac{4}{3}\ \pi r^3$.

Si llamamos $d$ el diámetro, tendremos: $r = \frac{d}{2}$, $r^3 = \frac{d^3}{8}$

y el volumen de la esfera será $\frac{4}{3} \pi \frac{d^3}{8} = \frac{1}{6} \pi d^3$.

**478.** El volumen de un sector esferico es igual al área del casquete o de la zona que le sirve de base, multiplicada por la tercera parte del radio de la esfera.

$$\text{Sector} = 2\pi ra \times \frac{r}{3} = \frac{2\pi r^2 a}{3}.$$

**479.** El volumen de un segmento esferico de dos bases es igual a la semisuma de las bases multiplicada por la altura, más el volumen de la esfera que tenga un diámetro igual a esta altura.

Siendo las bases $\pi r^2$ y $\pi r'^2$, y el volumen de la esfera $\frac{1}{6} \pi d^3$, el segmento de dos bases será:

$$\frac{\pi r^2 + \pi r'^2}{2} \times a + \frac{1}{6} \pi d^3.$$

**480.** El volumen de un segmento de una base es igual a la mitad de la superficie de la base multiplicada por la altura, más el volumen de la esfera que tenga un diámetro igual a esta altura.

El segmento de una base puede considerarse como comprendido entre dos planos paralelos, uno de los cuales es tangente a la esfera, y presenta una base nula. Luego el segmento de una base será:

$$\frac{\pi r^2}{2} \times a + \frac{1}{6} \pi d^2$$

**481.** El volumen de la cuña esferica es igual al volumen de la esfera, multiplicado por la relación del ángulo de la cuña a 360°:

$$\text{Cuña} = \frac{4\pi r^3}{3} \times \frac{n}{360} = \frac{\pi r^3 \times n}{270}.$$

## § VII. — Poliedros regulares, cuerpos irregulares

**482.** El volumen de cualquier poliedro regular es igual al producto de la superficie de sus caras por la tercera parte del radio de la esfera inscrita en el poliedro.



**483.** Para encontrar la superficie de los cuerpos irregulares:

1º Si sus caras son planas, se mide separadamente cada cara; se suman los resultados, y el total será la superficie;

2º Si están limitados por caras curvas, se los descompone en caras bastante pequeñas para que puedan considerarse como planas. Se las mide separadamente, y el total es la superficie aproximada del cuerpo.

**484.** Para encontrar el volumen de los cuerpos irregulares, como una piedra, una cadena, una fruta, etc.:

Se toma una vasija de tamaño proporcionado al objeto que se quiere medir; se la llena de agua, y luégo se echa adentro el objeto de que se trata: el volumen del agua derramada es igual al volumen del cuerpo sumergido en este líquido.

# Aplicaciones geométricas

## SOBRE EL LIBRO CUARTO

### CAPITULO I

**Desarrollo de la superficie de algunos sólidos**

**485.** Desarrollar un sólido es extender sobre un mismo plano las superficies que lo rodean.

**486.** La superficie desarrollada de un cubo se forma de seis cuadrados iguales (Fig. 182).

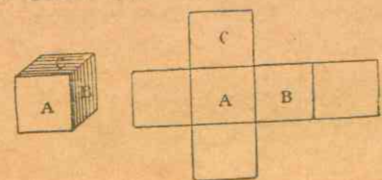



Fig. 182.

**487.** La superficie desarrollada de un paralelepipedo rectángulo se forma de seis rectángulos iguales de dos en dos. (Fig. 183).

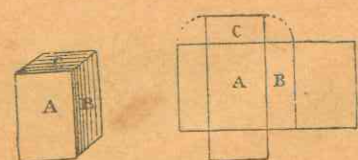



Fig. 183.

**488.** La superficie lateral desarrollada de un prisma regu-

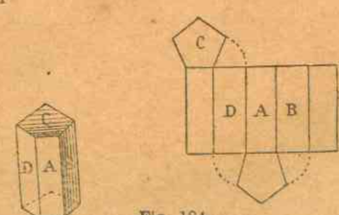



Fig. 184.

lar forma un rectángulo que tiene por altura la del prisma, y por base el perímetro de la base del prisma (Fig. 184).



**489.** La superficie lateral de una piramide regular, desarrollada sobre un plano, forma un sector limitado por una línea poligonal regular (Fig. 185).

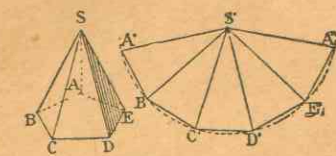



Fig. 185.

**490.** El radio del sector es igual a la arista de la pirámide, y la línea poligonal del sector es igual al perímetro de la base de la pirámide (Fig. 185).

**491.** La superficie lateral del tronco de piramide regular, desarrollada sobre un plano forma una figura limitada por dos líneas poligonales regulares que tienen un mismo centro. Las

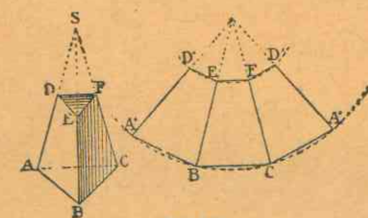



Fig. 186.

dos líneas poligonales son iguales a los perímetros de las bases (Fig. 186).

**492.** La superficie lateral del cilindro, desarrollada sobre un plano, forma un rectángulo que tiene por altura la del

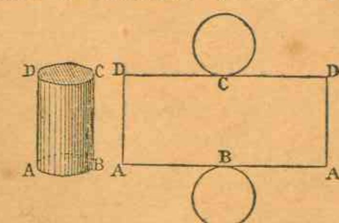



Fig. 187.

cilindro, y por base la circunferencia del mismo. (Fig. 187).

**493.** La superficie lateral del cono, desarrollada sobre un plano, forma un sector de círculo que tiene por radio la generatriz del cono, y por arco la circunferencia rectificada de la base del cono (Fig. 188).

**494.** La superficie lateral del TRONCO DE CONO, desarrollada sobre un plano, forma un segmento de corona circular. Los dos arcos son iguales a las circunferencias de las bases del tronco de cono (Fig. 189).

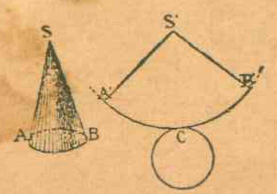



Fig. 188.

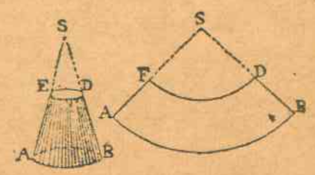



Fig. 189.

**495.** La superficie de la ESFERA no puede desarrollarse de una manera rigurosa; pero si se descompone en husos, fácilmente se logra desarrollarla con una aproximación suficiente en la práctica, por ejemplo, para la construcción de los globos. (Fig. 190).

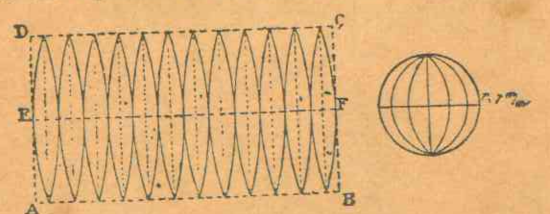



Fig. 190.

---

## CAPITULO II

### Ejercicios numéricos sobre el área y volumen de los sólidos

#### § I. — Hexaedro o cubo

131. ¿Cuál es la superficie total de un cubo que tiene de lado: 1º 12 met.; 2º 12 met. 45?
132. ¿Cuál es el lado de un cubo cuya superficie total es de 384 met. cuad.?
133. ¿Cuál es el volumen de un cubo de 6 met. 25 de lado?



134. ¿Cuál es la arista de un cubo de 216 centím. cúbicos de volumen?
135. ¿Cuál es la superficie y el volumen de un cubo que tiene 5 metros de lado?
136. ¿Cuál es la superficie y el volumen de un cubo que mide 6 metros 25 de lado?
137. Calcúlense la superficie y el volumen de una piedra cúbica, que mide 8 metros 10 de lado.
138. Se trata de cavar un pozo cúbico de 10 metros de lado, ¿cuántos decímetros cúbicos de tierra habrá que sacar?

#### § II. — Prisma

139. ¿Cuál es la superficie lateral de un paralelepído rectángulo que tiene 3 metros de largo, 4 de ancho y 5 de alto?
140. ¿Cuál es la superficie total de un paralelepípedo cuya longitud es de 5 metros 25, el ancho 4 met. 50, y el alto 3 met. 75?
141. ¿Cuál es la superficie lateral de un prisma recto, si el perímetro de la base es de 7 met. y la altura 2 met. 25?
142. ¿Cuál es la superficie lateral de un prisma recto de 9 met. de altura, y cuya base es un triángulo equilátero de 1 met. 80 de lado?
143. ¿Cuántos metros de tela se necesitan para forrar un cubo de 1 met. 32 de lado, si la tela tiene 75 centím. de ancho?
144. ¿Cuál es la superficie total de una pilastra rectangular de 8 met. de ancho, cuya base es un cuadrado de 5 met. cuad. 2250 de superficie?
145. Un paralelepípedo rectángulo tiene 3 met. de largo, 5 de ancho y 8 de alto; calcúlese:
     1º La superficie lateral del sólido;
     2º El lado de un cubo que tenga la misma superficie total que el paralelepípedo.
146. Las caras de un cubo tienen juntas 54 met cuad.: ¿cuál es: 1º la longitud de una arista; 2º el volumen del cubo?
147. ¿Cuál es la superficie de la base de un prisma cuadrangular que tiene 15 met. de alto y 4 met. cúbicos 250 de volumen?
148. ¿Cuál es la altura de un prisma, cuya base tiene 3 met. cuad. 5 de superficie, y cuyo volumen es de 5 metros cúbicos 750?
149. La superficie lateral de un paralelepípedo rectángulo de 7 met. de altura, mide 63 metros cuadrados; ¿cuál es el perímetro de la base?
150. ¿Cuál es la altura de un prisma recto cuya superficie lateral es de 104 met. cuad., sabiendo que la base es un pentágono regular de 2 met. 6 de lado?
151. ¿Cuál es el volumen de un prisma cuya base tiene 5 met. cuad. de superficie, y la altura es de 2 met. 40?

152. ¿Cuál es el volumen de un prisma triangular, sabiendo que la base del triángulo mide 1 met. 02, su altura 8 decím., y la altura del prisma 2 met. 6?
153. ¿Cuál es el volumen de un tabique que tiene 4 met. 5 de largo, 25 centím. de espesor y 3 met. 20 de alto?
154. ¿Qué volumen tiene un prisma triangular regular, de 2 met. 24 de alto, siendo el perímetro de la base de 3 met. 75?
155. Un aljibe rectangular tiene 12 met. 25 de largo, 0 met. 75 de ancho y 0 met. 75 de profundidad; ¿cuántos hectolitros de agua se necesitan para llenarlo?
156. Un paralelepípedo rectángulo tiene 1 decím. de alto y 6 decím. cuad. de superficie total, siendo el largo doble del ancho, ¿cuál es su volumen?
157. Una clase de Quito mide 8 met. 25 de largo, 7 de ancho y 3 met. 45 de alto; pregúntase:
1º Qué volumen de aire contiene:
2º Cuánto pesa este aire, sabiendo que 1 decím. cúb. de aire pesa en la altitud de Quito 0 gr. 96?
158. Un hojalatero quiere construír un cubo con una hoja de zinc de 8 met. cuad. 64; 1º ¿cuál será la longitud de la arista?; 2º ¿cuál será el volumen del cubo?
159. Un prisma hexagonal tiene 3 met. 82 de alto; cada arista de la base es de 34 centím. Dígase su volumen.
160. Un aljibe de 80 centímetros de profundidad tiene la forma de un prisma recto con base octogonal regular de 6 met. de lado; ¿cuál es la capacidad del aljibe?
161. ¿Qué altura tiene un prisma de 5 met. cúb. 75 de volumen, cuya base tiene 3 met. cuad. 05?
162. Una zanja de 4 met. 10 de largo por 3 met. 50 de ancho, debe contener 24 met. cúb. de cal.; ¿cuál debe ser su profundidad?
163. ¿Cuánto pesa el aire contenido en una sala de 6 met. 20 de largo por 4 met 75 de ancho y 2 met. 88 de alto, si un litro de aire pesa 1 gr. 293?
164. Un prisma hexagonal regular tiene 71 met. cúb. 112 de volumen, y el lado del hexágono es de 2 met. 34; búsquese: 1º la superficie de la base; 2º la altura del prisma.
165. Todo cuerpo pierde en el agua un peso igual al peso del volumen de agua que desaloja. Cuánto pesa por consiguiente, en el agua, un cuerpo de 400 kilog., si sus dimensiones son 1 met. 20, 0 met. 62 y 0 met. 40?

### § III. — Pirámide

166. ¿Cuál es la superficie lateral de una pirámide recta, que tiene por base un triángulo equilátero de 5 met. de lado, si la apotema de las caras es de 8 met. 165? ¿Cuál es la superficie total de la misma?



167. La base de una pirámide regular es un cuadrado de 10 met. de lado, las aristas laterales tienen igualmente 10 met. ¿cuál es la superficie total de la pirámide?
168. Cuál es el volumen de una pirámide de 2 met. 4 de alto, y cuya base es un decágono de 4 met. cuad. de superficie?
169. ¿Cuál es el volumen de una pirámide triangular regular de 2 metros de alto, si el lado de la base mide 0 met. 8?
170. ¿Cuál es la superficie lateral de una pirámide regular que tiene 6 met. 56 de apotema, y cuya base es un pentágono de 5 met. 25 de lado?
171. ¿Cuál es la superficie lateral de un tetraedro regular de 4 met. de lado.?
172. Cada arista de una pirámide regular hexagonal tiene 5 met.; ¿cuál es su superficie lateral, si el lado del hexágono mide 8 metros?
173. ¿Cuál es la longitud de la arista de un tetraedro regular cuya superficie total mide 36 metros?
174. ¿Cuál es la superficie lateral de un tronco de pirámide cuadrangular cuya apotema mide 12 met., cada lado de la base inferior 4 met. 50, y cada lado de la base superior 3 met. 20?
175. Los perímetros inferior y superior de una pirámide truncada miden respectivamente 80 y 60 centím. y la apotema 30; ¿cuántos decímetros cuadrados tiene de superficie lateral?
176. ¿Cuál es el volumen de una pirámide cuya base tiene 4 met. cuad. y la altura 2 met. y medio?
177. ¿Cuál es el volumen de una pirámide triangular de 3 met. de altura, si el triángulo que le sirve de base tiene 80 centím. de altura y 90 de base?
178. ¿Cuál es la altura de una pirámide cuyo volumen mide 1,35 met. cúbicos, y la superficie de la base 3 met. cuad.?
179. ¿Cuál es el volumen de un tronco de pirámide regular que tiene 2 met. de alto, si sus dos bases son hexágonos cuyos lados miden respectivamente 0,70 m. y 0,20 m.?
180. ¿Cuál es el volumen de una viga de 24 decím. de largo, cuyos extremos son cuadrados respectivamente de 15 y 6 centím. de lado?
181. ¿Cuál es el volumen de una pirámide pentagonal truncada cuya altura mide 5 met.; cada lado de la base inferior 18 decím., y cada lado de la superior 6?
182. ¿Cuál es el volumen de un monolito piramidal cuya base cuadrada tiene 1 met. 89 de lado, y la altura de la pirámide 4 met. 12?
183. ¿Cuál es la superficie lateral de un tronco de pirámide regular de siete lados, de bases paralelas, si los dos polígonos de las bases tienen respectivamente 1 met. 64 y 1 met. de lado, y la altura de los trapecios es 2 met. 25?

184. Las bases paralelas y cuad. de un tronco de pirámide regular tienen por lados 9 decím. y 4 decím., la altura del tronco es 15 decím.; ¿cuál es su volumen?

## § IV. — Cilindro

185. ¿Cuál es la superficie lateral de un cilindro si el radio de la base mide 10 centím. y la altura 50?
186. El radio de la base de un cilindro mide 0,35 met.; la altura es igual al doble del diámetro de la base; calcúlese: 1º la superficie lateral del cilindro; 2º la superficie de las bases.
187. ¿Cuánto se pagará por la pintura de las paredes y techo de un gabinete circular, que tiene 30 decím. de diámetro y 25 de alto, a razón de $ 2,50 el metro cuadrado?
188. ¿Cuántos litros contiene una cuba cilíndica cuya base mide 94 decím. cuadrados y la altura 80 centímetros?
189. ¿Cuál es el volumen de un cilindro cuya altura mide 4 met., y el diámetro de su base 2 met. 40?
190. Una barra de hierro fundido tiene 5 met. de largo por 2½ centím. de diámetro, ¿cuál es su volumen en decim. cúbicos?
191. ¿Cuántos hectolitros de trigo puede contener una troj cilíndrica de 4 met. de alto y 2½ metros de diámetro?
192. ¿Cuál es la altura de un cilindro cuyo volumen mide 2 met. cúb. 760, y la base 2 met. cuad. 25?
193. ¿Cuál es el área de la base de un cilindro, cuyo volumen es igual a 3 met. cúb. y la altura 1 met. 20?
194. ¿Cuál es el diámetro de la base de un cilindro cuya superficie lateral mide 5 met. cuad. 6548 y la altura 6 met.?
195. Cuál es la capacidad de una cisterna de forma cilíndrica, si el radio de la base tiene 12 met. y la altura 2 met.?
196. ¿Cuál es la superficie lateral de un cilindro de 4 met. de diámetro y 3 met. 75 de alto?
197. El radio de una columna cilíndrica es de 0 met. 58, y la altura de 4 met.; ¿cuál es la superficie lateral?
198. El radio de la base de un cilindro es de 0 met. 35, la altura es igual al doble del diámetro de la base; búsquese: 1º la superficie lateral del cilindro; 2º la superficie total de las bases.
199. ¿Cuántos litros de agua contiene una cuba cilíndrica de 4 met. 8 de diámetro y 1 met. 96 de profundidad?
200. Se echa una piedra en una vasija cilíndrica de 8 decím. de diámetro, llena de agua en parte; ¿cuál es el volumen de la piedra, si después de la inmersión el nivel del agua sube 0 met. 483?
201. ¿Cuál es la superficie de la base de un cilindro de 1 met. 20 de alto, cuyo volumen es 248 decím. cúb.?



## § V. — Cono

202. ¿Cuál es la superficie total de un cono recto que mide 9 metros de radio y 12 de altura?
203. ¿Cuál es la altura de los conos que tienen las siguientes dimensiones: 1º generatriz 12 met. y radio 4 met.; 2º gen. 16 met. radio 5 met.; 3º gen. 20 met., radio 6 met.; 4º gen. 24 met., radio 10 met.; 5º gen. 50 met., rad. 15 met.?
204. ¿Cuál es la generatriz de los conos que tienen las siguientes dimensiones: 1º altura 5 met., rad. 4 met.; 2º alt. 7 met., rad. 3 met.; 3º alt. 8 met., rad. 4 met.; 4º alt. 10 met., rad. 6 met.; 5º alt. 20 met., rad. 12 met.?
205. ¿Cuál es el radio de los conos que tienen las dimensiones siguientes: 1º gen. 3 met., alt. 5 met.; 2º gen. 9 met., alt. 6 met.; 3º gen. 10 met., alt. 7 met.; 4º gen. 12 met., alt. 8 met.; 5º gen. 20 met., alt. 10 metros?
206. Calcúlese la superficie lateral de un cono recto cuya generatriz mide 4 met. 50, y la circunferencia de su base 6 metros.
207. ¿Cuál es el lado de un cono recto cuya superficie lateral tiene 30 met. cuad. 80, y el radio de la base 2 met.?
208. ¿Cuál es la circunferencia de la base de un cono cuya superficie lateral mide 28 met. cuad. y el lado 7 met?
209. ¿Cuál es la superficie lateral de un tronco de cono cuyo lado tiene 2 met. 60, y los radios de las bases 1 met. 40 y 2 met. 10?
210. ¿Cuál es la superficie lateral de una cuba si el diámetro del fondo mide 2 met. 10, el de la abertura 2 met. 30, y si el lado tiene 3 met 84?
211. ¿Cuál es el volumen de un pilón de azúcar cuya altura mide 0 met. 45, y el radio de la base 0 met. 22?
212. ¿Cuál es el volumen de un cono cuya altura tiene 1 met. 23, y la circunferencia de la base 1 met. 98?
213. ¿Cuál es el volumen de un cono que tiene 4 met. de altura, y 5 met. de lado o apotema?
214. ¿Cuál es la base de un cono cuyo volumen mide 1 metro cúbico 60, y la altura 0 met. 80?
215. ¿Cuál es la altura de un cono que tiene un volumen de 4 metros cúbicos y 3 met. cuad. 60 de base?
216. ¿Cuál es el volumen de un tronco de cono de bases paralelas, si la base inferior tiene 2 metros cuadrados 25, la base superior 1 met. cuad. 21 y la altura del tronco 0 met. 90?
217. ¿Cuál es la altura de un tronco de cono de 28 met. cúbicos, sabiendo que la base superior mide 1 met. cuad. y la inferior 4?
218. ¿Cuál es el volumen de un árbol de 6 met. ¾ de largo, si las circunferencias de las bases miden 1 metro 145 y 0 met. 628?

219. ¿Cuál es el radio de un cono cuyo volumen mide 20 met. cúbicos 944, y la altura 5 metros?
220. ¿Cuál es la superficie lateral de un cono recto, cuyo lado mide 4 met. 50 y la circunferencia de la base 6 metros 25?
221. ¿Cuál es la superficie total de un cono recto, cuya altura es de 3 metros 9 y la generatriz de 4 met. 95?
222. ¿Cuál es el volumen de un cono de 2 metros 10 de alto, si el radio de la base mide 0 metros 56?
223. La generatriz de un cono es de 1 met. 60 y la altura de 1 met. 2; ¿cuál es su volumen?
224. ¿Cuál es la superficie lateral de un tronco de cono de 3 met. de lado, si los radios de las bases miden 2 met. 1 y 2 metros 8?
225. ¿Cuál es el volumen de un árbol de 9 met. 25 de largo, si las circunferencias de las extremidades miden respectivamente 1 met. 50 y 0 met. 55?

## § VI. — Esfera

226. Una esfera tiene 3,08 metros de radio; se pregunta: 1º ¿cuál es la circunferencia de un círculo máximo?; 2º ¿cuál es la superficie de la esfera?
227. ¿Cuál es la superficie de una esfera si la circunferencia de un círculo máximo mide 4 met. 84?
228. ¿Cuál es el radio de una esfera cuya superficie mide 6 decímetros cuad. 16?
229. ¿Cuál es el diámetro de una esfera si la circunferencia de uno de los círculos máximos tiene 9 met. 25?
230. ¿Cuál es la superficie de un huso de 80 grados, en una esfera de 5 centímetros de radio?
231. ¿Cuál es el ángulo de un huso esférico cuya superficie mide 104,72 met. cuad. y el radio de la esfera 10 met.?
232. ¿Cuál es la superficie de un casquete esférico de 0 met. 65 de altura, sabiendo que la circunferencia de un círculo máximo mide 5 metros?
233. ¿Cuál es la superficie de un casquete esférico de 0 met. 8 de altura, sabiendo que el radio de la esfera tiene 2 metros 10?
234. La superficie de un casquete esférico es de 2 met cuad. 85; ¿cuál es la superficie total de la esfera, sabiendo que la altura del casquete es de 0 met. 45?
235. Expresar en miriámetros cuadrados la superficie de cada zona glacial, sabiendo: 1º que cada zona es un casquete esférico de 52 miriámetros 65 de altura; 2º que el radio terrestre mide 636 miriámetros 62.
236. ¿Cuál es el volumen de una esfera cuya superficie mide 55,44 met. cuadrados?



237. ¿Cuál es el volumen de una esfera de 0 m. 84 de radio?
238. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la cual la circunferencia de un círculo máximo .nide 4 metros 62?
239. ¿Cuál es el volumen de una esfera, si la superficie de un círculo máximo es de 6 decím. cuad. 16?
240. ¿Cuál es el radio de una esfera cuyo volumen tiene 179 decímetros cúbicos?
241. ¿Cuál es la circunferencia de un círculo máximo de una esfera que tiene de volumen 4 met. cúbicos 245?
242. ¿Cuál es el diámetro de un alambre que pesa 7 gram. 34, sabiendo que tiene 30 centímetros de largo, y que un centímetro cúbico de hierro pesa 7 gramos 79?
243. ¿El volumen de una esfera mide 4 met. cúb. 62; 1º ¿cuál es su diámetro; 2º ¿cuánto mide la circunferencia de un círculo máximo; 3º ¿cuál es la superficie de la esfera?
244. Se desea saber cuál es el volumen de un sector esférico, en una esfera de 1 met. 71 de radio, si la superficie del casquete mide 2 met. cuad. 75.
245. ¿Cuál es el volumen de un sector esférico cuando el casquete que le sirve de base tiene 0 met. 25 de altura, y el radio de la esfera 0 met. 84?
246. ¿Cuál es el radio de la esfera en la cual un sector esférico de 0 met. cúb. 663 corresponde a un casquete de 1 metro cuadrado 2?
247. ¿Cuál es el volumen de un segmento esférico cuya altura mide 9 met. y el radio de su base 10?
248. ¿Cuál es el volumen de un segmento esférico cuya altura mide 2 centímetros y el diámetro de la esfera 10?
249. La altura de un segmento esférico es de 8 centímetros, y el radio de su base de 14; ¿cuál es su volumen?
250. El diámetro de una esfera es de 5 decím. y la altura de un segmento de la misma, de 2 decímetros; cuál es el volumen del segmento?
251. La altura de un segmento esférico es de 0 met. 42, la superficie de su casquete de 1 metro cuadrado 6632; se pregunta: 1º cuál es el radio de la esfera; 2º cuál es el volumen del sector esférico.
252. ¿Cuál es el volumen de una cuña esférica de 25º en una esfera de 1 met. cúbico?
253. ¿Cuál es el radio de una esfera si una cuña esférica de 15º mide 21 decímetros cúbicos?
254. ¿Cuánto pesa una bola de madera de 36 centímetros de diámetro, si se hunde 6 centím. en el agua?
255. Un cubo y una esfera tienen igual superficie, la cual es de 2 metros cuadrados 4; ¿qué diferencia de volumen hay entre ambos cuerpos?

256. Un cubo de metal de 80 centímetros de lado ha sido fundido y transformado en una esfera; pregúntase: ¿cuál es su diámetro y cuánto excede la superficie del cubo a la de la esfera?

257. Un cubo, una esfera y un cilindro que tienen el diámetro igual a la altura, tienen cada uno 1 metro cuadrado de superficie; búsquese separadamente el volumen de estos tres cuerpos.

258. Tres bolas de metal que tienen por diámetro respectivamente 1 met. 2, 0 met. 3, y 0 met. 4 deben ser fundidas en una sola; ¿cuál será el diámetro de esta última?

259. ¿Cuál es el volumen de un segmento de una base que tiene 4 decímetros de alto, si la base mide 6 decímetros?

# INDICE

## LIBRO TERCERO

### Superficies



APLICACIONES GEOMETRICAS SOBRE EL LIBRO TERCERO



## LIBRO CUARTO

### Sólidos



APLICACIONES GEOMETRICAS SOBRE EL LIBRO CUARTO

Este libro debe

# *Extracto del Catálogo*

## LIBROS ELEMENTALES PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

**Nº 472. Tratado del Sistema Métrico Decimal.** — In-18º, de 96 páginas, con numerosos ejercicios.

**Nº 472 *b*. El mismo, Maestro.**

**Nº 467. Cálculo mental y abreviado.** — In-12º de 160 páginas.

La obrita está dividida en dos partes desiguales: la primera (115 páginas) trata del cálculo mental y señala muchas aplicaciones al sistema métrico y a la regla de interés; la segunda explica el modo de abreviar los cálculos, sobre todo tratándose [illegible] interés y descuento.

**Nº 476 *b*. Primeras Nociones de Algebra.** — In-12 de 92 páginas .

La obrita consta de tres partes: 1ª Cálculo algebraico. 2ª, Ecuaciones de primer grado. 3ª, Ecuaciones de segundo grado. Los problemas y ejercicios son numerosísimos.

**Nº 476 *b*. El mismo, Maestro.**

**Nº 478. Algebra y Trigonometría.** — In-12º, de 296 páginas.

Las nociones de Algebra van divididas en cuatro partes: 1ª, Cálculos algebraicos. 2ª, Ecuaciones de primer grado. 3ª, Ecuaciones de 2º grado. 4ª, Progresiones, Logaritmos, Interés compuesto, Anualidades.

Unas 60 páginas tratan de las nociones de trigono metría.

**Nº 478 *b*. El mismo, Maestro.**

**Nº 479. Geometría, Curso superior.** — In-12º, de 392 páginas.

La obrita está dividida en 3 partes: 1ª, Geometría plana, los 4 primeros libros, con numerosas aplicaciones. 2ª, Geometría del espacio, en cuatro libros, el último explicando las curvas usuales. 3ª, Nociones de *Agrimensura y Nivelación*, con gran número de grabados explicativos.

**Nº 479 *b*. El mismo, Maestro.**

EDITORES Y DISTRIBUIDORES EN EL OCCIDENTE COLOMBIANO
FELIX DE BEDOUT E HIJOS
MEDELLIN — COLOMBIA