SISTEMA MÉTRICO

decimal frances.

Con un apéndice sobre

ARQUEOS.

Estas lecciones fueron escritas en 1863, para la enseñanza de los alumnos de la Clase de

MATEMÁTICAS,

POR

D. H. ARAÚJO,

DIRECTOR DE UN PLANTEL DE EDUCACION EN CARTAGENA.

IMPRENTA DEL COLEGIO.

1876.

SANTIAGO PÉREZ,

PRESIDENTE DE LOS ESTADOS UNIDOS DE COLOMBIA,

HACE SABER:

Que el Señor D. H. Araújo ha solicitado privilegio exclusivo para publicar i vender una obra de su propiedad, cuyo título, que ha depositado en la Presidencia del Estado S. de Bolívar, prestando el juramento requerido por la lei, es como sigue: "Sistema métrico decimal frances". Por tanto, en uso de la atribucion que le confiere el artículo 66 de la Constitucion, pone, mediante la presente, al expresado Señor Araújo, en posesion del privilegio por quince años, de conformidad con la lei 1ª, parte 1ª, tratado 3º de la Recopilacion Granadina, "que asegura por cierto tiempo la propiedad de las producciones literarias i algunas otras".

Dada en Bogotá, a 19 de Febrero de 1876.

S. PÉREZ.

El Secretario de Hacienda i Fomento,

Nicolas Esguerra.

Despacho del P. E. del Estado Soberano de Bolívar.—Cartagena, 10 de Marzo de 1876.—Registrada a folios 11 a 11 vto. del libro respectivo.—Por el Ciudadano Encargado del Poder Ejecutivo,—El Srio. general de Estado,—*Felipe Angulo.*

Todo ejemplar legítimo lleva la firma del autor.

Araújo

mc minúsculas, significan *metro cuadrado;*
mcb minúsculas, significan *metro cúbico;*
a minúscula, significa *área;*
e minúscula, significa *esterio;*
g minúscula, significa *gramo;*
l minúscula, significa *litro;*
d minúscula, significa *deci;*
c minúscula, significa *centi;*
m minúscula, significa *mili,* cuando va seguida de otra letra representativa de unidad.

P. ¿Cuántas clases de medidas se relacionan con el *metro*?

R. Siete, a saber:

1ª MEDIDAS LINEALES.
2ª MEDIDAS CUADRADAS.
3ª MEDIDAS CÚBICAS.
4ª MEDIDAS AGRARIAS.
5ª MEDIDAS DE MADERAS.
6ª MEDIDAS DE CAPACIDAD.
7ª MEDIDAS DE PESO.

P. ¿Existe alguna otra cosa, que se relacione con el *metro*?

R. Tambien se relacionan las *monedas metálicas.*

P. I ¿cuáles son las medidas que no se relacionan con el *metro*?

R. Las del *tiempo* i las del *círculo.*

---

§ 1º—MEDIDAS LINEALES O DE LONGITUD.

P. ¿Cuál es la unidad en esta clase de medidas?

R. El METRO LINEAL.

P. ¿Qué significa la palabra *metro*?

R. Es palabra griega, que significa *medida*.

P. ¿A qué es igual el metro lineal?

R. A una de las diez millones de partes iguales, en que se considera dividido el arco del meridiano, comprendido entre el Ecuador i cualquiera de los polos.

P. ¿Con qué voz compuesta se designan diez metros?

R. Un *decámetro*.

P. ¿Cien metros?

R. Un *hectómetro*.

P. ¿Mil metros?

R. Un *kilómetro*.

P. ¿Diez mil metros?

R. Un *miriámetro*.

P. ¿Un décimo de metro?

R. Un *decímetro*.

P. ¿Un centésimo de metro?

R. Un *centímetro*.

P. ¿Un milésimo de metro?

R. Un *milímetro*.

P. ¿Cómo haremos la reduccion de una fraccion de metros lineales, a decímetros, centímetros &ª lineales?

R. Corriendo la coma decimal, un lugar a la derecha, para cada clase de unidades.

P. ¿Cómo haremos la reduccion de un número entero de metros lineales, a decámetros, hectómetros &ª lineales?

R. Corriendo la coma decimal, un lugar hácia la izquierda, para cada clase de unidades.

P. Ejemplo de lo primero.

R. 1 metro lineal i 23 centésimas de metro lineal, equivalen a 1 metro lineal, 2 decímetros lineales, i 3 centímetros lineales.

P. Ejemplo de lo segundo.

R. 123 metros lineales, equivalen a 1 hectómetro lineal, 2 decámetros lineales, i 3 metros lineales.

P. ¿Con qué otras clases de medidas, se procede de igual modo?

R. Con las de capacidad i las de peso.

P. ¿En qué se funda el procedimiento?

R. En que los múltiplos de dichas medidas, no son otra cosa que las decenas, centenas &ª de la unidad principal; de igual modo que los submúltiplos, no son otra cosa que las décimas, centésimas &ª de la misma.

P. ¿Qué medida antigua de *longitud*, quedó vigente por lei nacional, en transacciones o negocios de carácter privado? *

R. La VARA COLOMBIANA.

P. ¿A qué es igual la vara colombiana?

* La lei del Estado de 13 de Octubre de 1873, hace obligatorio el sistema métrico, en las transacciones de los particulares.

R. A una de las doce millones quinientas mil partes iguales, en que se considera dividido el arco del meridiano, comprendido entre el Ecuador i cualquiera de los polos.

P. ¿Cuánto vale pues la *vara*, comparada con el *metro?*

R. La vara es igual a 80 centímetros: igual a 8 decímetros: igual a cuatro quintos de la longitud del metro.

P. I ¿cuánto vale el *metro*, comparado con la *vara?*

R. El metro es igual a una vara i cuarta: igual a una vara i veinte i cinco centésimas: igual a cinco cuartos de la longitud de la vara.

P. Luego, ¿cómo reduciremos metros a varas?

R. Multiplicando los metros por 1,25: lo que resulte serán varas.

P. I ¿cómo reduciremos varas a metros?

R. Dividiendo las varas entre 1,25: lo que resulte serán metros.

P. ¿Podría hacerse la reduccion, de alguna otra manera?

R. Teniendo presente que la *vara* con el *metro*, guardan la relacion del *peso sencillo* con el *fuerte*,—se practica comunmente para la reduccion de los primeros, lo que se enseña por la lei para la reduccion de los segundos; es decir: añadir a los *metros* la cuarta parte o el 25 por ciento; i, por el contrario, sustraer de las *varas* la quinta parte o el 20 por ciento.

P. ¿Cuáles son los múltiplos de la *vara?*

R. La *cuadra*, que tiene 100 *varas;*
La *legua*, que tiene 62 ½ *cuadras;* i
El *miriámetro*, que tiene 2 *leguas.*

P. ¿Cuáles son los submúltiplos de la *vara?*

R. La *cuarta*, que es igual a ¼ de *vara;*
La *pulgada*, que es igual a un décimo de *cuarta;* i
La *línea*, que es igual a un décimo de *pulgada.*

---

§ 2º—Medidas cuadradas o de superficie.

P. ¿Cuál es la unidad en esta clase de medidas?

R. El metro cuadrado.

P. ¿A qué se da el nombre de metro cuadrado?

R. A un *cuadrado* que tiene por lado la extension de un metro lineal.—Luego el metro lineal es, en último análisis, la unidad fundamental de esta clase de medidas.

P. ¿De qué modo se forman, con el metro cuadrado, los múltiplos i los submúltiplos que se requieren en la práctica?

R. Del mismo modo que con el metro lineal, pero con valores relativos diferentes; porque, siendo las áreas de las figuras semejantes como los cuadrados de sus lados homólogos o diagonales homólogas, cuando estas líneas sigan la razon decimal, las áreas seguirán la razon centesimal, por ser 100 el cuadrado de 10.

P. ¿Es, pues, un *decámetro cuadrado*, el conjunto de diez metros cuadrados?

R. Nó, Señor; sino el de cien metros cuadrados; porque el cuadrado de diez es ciento.

P. ¿I un *hectómetro cuadrado*, el de cien metros cuadrados?

R. Nó, Señor; sino el de diez mil metros cuadrados; porque el cuadrado de cien es diez mil.

P. ¿I un *kilómetro cuadrado*, el de mil metros cuadrados?

R. Nó, Señor; sino el de un millon de metros cuadrados; porque el cuadrado de mil es un millon.

P. ¿I un *miriámetro cuadrado*, el de diez mil metros cuadrados?

R. Nó, Señor; sino el de cien millones de metros cuadrados; porque el cuadrado de diez mil es cien millones.

P. ¿Es un *decímetro cuadrado*, la décima parte de un metro cuadrado?

R. Nó, Señor; sino la centésima parte de un metro cuadrado; porque el cuadrado de una décima es una centésima.

P. ¿I un *centímetro cuadrado*, la centésima parte de un metro cuadrado?

R. Nó, Señor; sino la diez milésima parte de un metro cuadrado; porque el cuadrado de una centésima es una diez milésima.

P. ¿I un *milímetro cuadrado*, la milésima parte de un metro cuadrado?

R. Nó, Señor; sino la millonésima parte de un metro cuadrado; porque el cuadrado de una milésima es una millonésima.

P. Si tuviéramos, por consiguiente, que hacer la valuacion, en decímetros, centímetros &ª cuadrados, de fracciones decimales superficiales o cuadradas, ¿procederíamos del mismo modo que para el avalúo de las lineales?

R. De ninguna manera: tendríamos que correr la coma, para cada clase de unidades, nó uno, sino dos lugares, de la izquierda a la derecha.

P. I si tuviéramos, por el contrario, que reducir metros cuadrados, a decámetros, hectómetros &ª cuadrados, ¿qué deberíamos practicar?

R. Tendríamos que correr la coma, para cada clase de unidades, nó uno, sino dos lugares, de la derecha hácia la izquierda.

P. Presentemos ejemplo de lo primero.

R. Sea la cantidad decimal 1.234 metros cuadrados, i 5.678 diez milésimas de metro cuadrado. Valuada la fraccion, debe leerse de este modo: 1.234 metros cuadrados, 56 decímetros cuadrados, i 78 centímetros cuadrados; o bien, 1.234 metros cuadrados, i 5.678 centímetros cuadrados.

P. Presentemos ejemplo de lo segundo.

R. Sea la misma cantidad decimal 1.234 metros cuadrados, i 5.678 diez milésimas de metro cuadrado. Reducida la cantidad a decámetros cuadrados, debe leerse de este modo: 12 decámetros cuadrados, i 345.678 millonésimas de decámetro cuadrado; o bien, 12 decámetros cuadrados, 34 metros cuadrados, 56 decímetros cuadrados, i 78 centímetros cuadrados; o bien, 12 decámetros cuadrados, i 345.678 centímetros cuadrados.

P. ¿Qué medida antigua de *superficie*, quedó vigente por lei nacional, en transacciones o negocios de carácter privado?

R. La VARA CUADRADA.

P. ¿A qué es igual la vara cuadrada?

R. A un cuadrado que tiene por lado la extension de una vara lineal. I, teniendo esta cuatro *cuartas lineales*, i midiéndose el *cuadrado* por el cuadrado de su lado, se sigue que la *vara cuadrada* es equivalente a diez i seis *cuartas cuadradas*. I por idéntica razon, es la *cuarta cuadrada* equivalente a cien *pulgadas cuadradas;* i la *pulgada cuadrada*, a cien *líneas cuadradas*.

---

§ 3º—MEDIDAS CÚBICAS O DE SOLIDEZ.

P. ¿Cuál es la unidad en esta clase de medidas?

R. El METRO CÚBICO.

P. ¿A qué se da el nombre de metro cúbico?

R. A un *cubo* que tiene por arista la extension de un metro lineal.–Luego el METRO LINEAL es, en último análisis, la unidad fundamental de esta clase de medidas.

P. ¿De qué modo se forman, con el metro cúbico, los múltiplos i los submúltiplos que se requieren en la práctica?

R. Del mismo modo que con el metro lineal, pero con valores relativos diferentes; porque, siendo las solideces de los cuerpos semejantes como los cubos de sus lados homólogos o diagonales homólogas, cuando estas líneas sigan la razon decimal, las solideces seguirán la razon milesimal, por ser 1.000 el cubo de 10.

P. ¿Es, pues, un *decámetro cúbico*, el conjunto de diez metros cúbicos?

R. Nó, Señor; sino el de mil metros cúbicos; porque el cubo de diez es mil.

P. ¿I un *hectómetro cúbico*, el de cien metros cúbicos?

R. Nó, Señor; sino el de un millon de metros cúbicos, porque el cubo de cien es un millon.

P. ¿I un *kilómetro cúbico*, el de mil metros cúbicos?

R. Nó, Señor; sino el de mil millones de metros cúbicos; porque el cubo de mil es mil millones.

P. ¿I un *miriámetro cúbico*, el de diez mil metros cúbicos?

R. Nó, Señor; sino el de un billon de metros cúbicos; porque el cubo de diez mil es un billon.

P. ¿Es un *decímetro cúbico*, la décima parte de un metro cúbico?

R. Nó, Señor; sino la milésima parte de un metro cúbico; porque el cubo de una décima es una milésima.

P. ¿I un *centímetro cúbico*, la centésima parte de un metro cúbico?

R. Nó, Señor; sino la millonésima parte de un metro cúbico; porque el cubo de una centésima es una millonésima.

P. ¿I un *milímetro cúbico,* la milésima parte de un metro cúbico?

R. Nó, Señor; sino la mil millonésima parte de un metro cúbico; porque el cubo de una milésima es una mil millonésima.

P. Si tuviéramos, por consiguiente, que hacer la valuacion, en decímetros, centímetros &.ª cúbicos, de fracciones decimales cúbicas o de solidez, ¿procederíamos del mismo modo que para el avalúo de las lineales?

R. De ninguna manera: tendríamos que correr la coma, para cada clase de unidades, nó uno, sino tres lugares, de la izquierda a la derecha.

P. I si tuviéramos, por el contrario, que reducir metros cúbicos, a decámetros, hectómetros &.ª cúbicos, ¿qué deberíamos practicar?

R. Tendríamos que correr la coma, para cada clase de unidades, nó uno, sino tres lugares, de la derecha hácia la izquierda.

P. Presentemos ejemplo de lo primero.

R. Sea la cantidad decimal 1.234 metros cúbicos, i 5.678 diez milésimas de metro cúbico. Valuada la fraccion, debe leerse de este modo: 1.234 metros cúbicos, 567 decímetros cúbicos, i 800 centímetros cúbicos; o bien, 1.234 metros cúbicos, i 567.800 centímetros cúbicos.

P. Presentemos ejemplo de lo segundo.

R. Sea la misma cantidad decimal 1.234 metros cúbicos, i 5.678 diez milésimas de metro cúbico.

Reducida la cantidad a decámetros cúbicos, debe leerse de este modo: 1 decámetro cúbico, i 2,345.678 diez millonésimas de decámetro cúbico; o bien, 1 decámetro cúbico, 234 metros cúbicos, 567 decímetros cúbicos, i 800 centímetros cúbicos; o bien, 1 decámetro cúbico, i 234,567.800 centímetros cúbicos.

P. ¿Qué es lo que se infiere de los ejemplos anteriores?

R. Que para el avalúo de fracciones decimales, deberá ser *par* el número de cifras, si se tratare de fracciones decimales *cuadradas;* i *múltiplo de tres,* si las fracciones fueren *cúbicas;* debiendo añadirse, en caso de no serlo, los ceros que se requieran para el número preciso.

P. ¿Qué medida antigua de *solidez,* quedó vigente por lei nacional, en transacciones o negocios de carácter privado?

R. La VARA CÚBICA.

P. ¿A qué es igual la vara cúbica?

R. A un cubo que tiene por arista la extension de una vara lineal. I, teniendo esta cuatro *cuartas lineales,* i midiéndose el *cubo* por el cubo de su arista, se sigue que la *vara cúbica* es equivalente a sesenta i cuatro *cuartas cúbicas.* I por idéntica razon, es la *cuarta cúbica* equivalente a 1.000 *pulgadas cúbicas;* i la *pulgada cúbica,* a 1.000 *líneas cúbicas.*

R. Una *miliárea.*

P. Siendo cuadradas las unidades *agrarias,* ¿están ellas sujetas a las mismas reglas, para su valuacion i reduccion, que los metros cuadrados?

R. A las mismas, exactamente. Así, el *área,* que

dó vigente por lei nacional, en transacciones o negocios de carácter privado?

R. La FANEGADA.

P. ¿A qué es igual la fanegada?

R. A 16 *aranzadas.*
P. ¿I la aranzada?
R. A 25 *estadales.*
P. ¿I el estadal?
R. A 400 *varas cuadradas.*

---

§ 5º—MEDIDAS DE MADERAS.

P. ¿Cuál es la unidad en esta clase de medidas?
R. El ESTERIO.
P. ¿Qué significa la palabra *esterio*?
R. Es palabra griega, que significa *sólido.*
P. ¿A qué se da el nombre de esterio?
R. Al volúmen de un *metro cúbico,* formado por la superposicion de fragmentos de madera, sobre un cuadro que tiene por lado la extension de un metro lineal.—Luego el METRO LINEAL es, en último análisis, la unidad fundamental de esta clase de medidas.
P. ¿Con qué voz compuesta se designan diez esterios?
R. Un *decaesterio.*
P. ¿Cien esterios?
R. Un *hectoesterio.*
P. ¿Mil esterios?
R. Un *kiloesterio.*
P. ¿Diez mil esterios?
R. Un *miriaesterio.*
P. ¿Un décimo de esterio?

R. Un *deciesterio.*
P. ¿Un centésimo de esterio?
R. Un *centiesterio.*
P. ¿Un milésimo de esterio?
R. Un *miliesterio.*
P. Siendo cúbicas las unidades *de maderas,* ¿están ellas sujetas a las mismas reglas, para su valuacion i reduccion, que los metros cúbicos?
R. A las mismas exactamente. Así, un *decaesterio* es equivalente a 1.000 metros cúbicos; un *hectoesterio,* a 1,000.000 de metros cúbicos; un *kiloesterio,* a 1.000,000.000 de metros cúbicos, &ª &ª
P. Luego, ¿cómo haremos la reduccion de unidades de maderas, a metros cúbicos, i submúltiplos de ellos?
R. Corriendo la coma decimal, 3, 6, 9 &ª lugares a la derecha.
P. I, ¿cómo haremos la reduccion de metros cúbicos, a unidades de maderas, i múltiplos de ellas?
R. Corriendo la coma decimal, 3, 6, 9 &ª lugares hácia la izquierda.
P. Presentemos ejemplo de lo primero.
R. 12 esterios i 3.456 diez milésimas de esterio, reducidos a metros cúbicos &ª, equivalen a 12 metros cúbicos, 345 decímetros cúbicos, i 600 centímetros cúbicos.
P. Presentemos ejemplo de lo segundo.
R. 12,345.678 metros cúbicos, reducidos a esterios &ª, equivalen a 12 hectoesterios, 345 decaesterios, i 678 esterios.

P. ¿Qué medida antigua para *las maderas*, quedó vigente por lei nacional, en transacciones o negocios de carácter privado?

R. La misma que quedó vigente para las medidas de solidez; es decir: la VARA CÚBICA, con los submúltiplos que le corresponden.

P. ¿Qué método se emplea hoi, para la medicion de las maderas?

R. El de multiplicar la longitud en piés, por el ancho i por el grueso representados en pulgadas; i dividiendo entre 12 el producto que resulte, se obtendrá un número de piés cuadrados, del espesor de una pulgada.

P. ¿Qué diremos de este método?

R. Que, sin disputa, es mas sencillo que el que nos enseña la Aritmética; el cual consiste, como sabemos, en reducir a pulgadas la longitud en piés; multiplicar las tres dimensiones para obtener pulgadas cúbicas; dividir estas pulgadas entre 1.728; i reducir los piés en solidez, a piés en superficie, multiplicándolos por 12.

P. Presentemos un ejemplo.

R. Supóngase una troza con las siguientes dimensiones: 12 piés de largo, 25 pulgadas de ancho, i 20 pulgadas de espesor. La multiplicacion de los tres números, nos dará un producto de 6.000; i la division de este por 12, nos dará un cuociente de 500.–Luego la troza tiene por medida, 500 piés cuadrados, con el espesor de una pulgada.

P. I ¿es con el pié cuadrado, que se celebran contratos sobre las maderas?

R. Así sucede generalmente: i, cuando se dice que en New-York está el *cedro* a 12 centavos, no se trata sino del precio del pié superficial, con una pulgada de espesor.

P. ¿A qué pié nos referimos en los anteriores cálculos?

R. Al pié español, o de 12 pulgadas.

P. ¿De qué modo se forman las toneladas de maderas?

R. Es práctica observada entre los comerciantes de este ramo, la de dividir entre 500 los piés superficiales. Así, los 500 piés, en el ejemplo que antecede, se reputan equivalentes a 1 tonelada.

---

§ 6º—MEDIDAS DE CAPACIDAD.

P. ¿Cuál es la unidad en esta clase de medidas?

R. El LITRO.

P. ¿Qué significa la palabra *litro*?

R. *Litro* es palabra griega, que significa *medida de líquidos*.

P. ¿A qué se da el nombre de litro?

R. A la capacidad de un *decímetro cúbico*; entendiéndose por decímetro cúbico, un cubo que tiene por arista la décima parte de un metro lineal.–Luego el METRO LINEAL es, en último análisis, la unidad fundamental de esta clase de medidas.

P. Demos una idea de la capacidad de un litro.

R. Es poco ménos de la de medio azumbre; o de la de dos cuartillos, medida de Castilla; o poco más de la capacidad de una botella grande de Champaña.

P. ¿Se emplea tambien el litro, para la medida de los áridos?

R. Se emplea indistintamente para la de los *áridos* i los *líquidos*.

P. ¿Con qué voz compuesta se designan diez litros?

R. Un *decálitro*.

P. ¿Cien litros?

R. Un *hectólitro*.

P. ¿Mil litros?

R. Un *kilólitro*.

P. ¿Diez mil litros?

R. Un *miriálitro*.

P. ¿Un décimo de litro?

R. Un *decílitro*.

P. ¿Un centésimo de litro?

R. Un *centílitro*.

P. ¿Un milésimo de litro?

R. Un *milílitro*.

P. ¿Qué medida antigua de *capacidad*, quedó vigente por lei nacional, en transacciones o negocios de carácter privado?

R. Para los líquidos, el AZUMBRE: para los áridos, la FANEGA.

P. ¿A qué es igual el azumbre?

R. A poco más de dos litros.

P. ¿A qué es igual la fanega?

R. A poco más de dos hectólitros.

P. ¿Cuáles son los múltiplos del *azumbre*?

R. La *cántara*, que tiene 8 azumbres; i
El *moyo*, que tiene 8 cántaras.

P. ¿Cuáles son los submúltiplos del *azumbre*?

R. El *cuartillo*, que es igual a $\frac{1}{4}$ de azumbre; i
La *copa*, que es igual a $\frac{1}{4}$ de cuartillo.

P. ¿Cuáles son los múltiplos de la *fanega*?

R. No existe más que el *cahiz*, que tiene 12 fanegas.

P. ¿Cuáles son los submúltiplos de la *fanega*?

R. El *almud*, que es igual a un duodécimo de fanega; i
La *cuartilla*, que es igual a la cuarta parte del almud.

---

§ 7º—MEDIDAS DE PESO O PONDERALES.

P. ¿Cuál es la unidad en esta clase de medidas?

R. El GRAMO.

P. ¿Qué significa la palabra *gramo*?

R. *Gramo* es palabra griega, que significa *pequeño peso*.

P. ¿A qué se da el nombre de gramo?

R. Al peso de un *centímetro cúbico* de agua destilada, pesada en el vacío, i a la temperatura de 4 grados del termómetro centígrado; entendiéndose por centímetro cúbico, un cubo que tiene por arista la centésima parte de un metro lineal.–Luego el METRO LINEAL es, en último análisis, la unidad fundamental de esta clase de medidas.

P. ¿Por qué razon debe ser el agua, necesariamente destilada?

R. Porque es preciso que esté libre de toda sustancia extraña: de otro modo, la unidad dejaría de ser constante.

P. ¿Por qué razon debe estar el agua, a la temperatura de 4 grados?

R. Porque el agua destilada, a 4 grados de temperatura, presenta su grado máximo de contraccion o densidad: i a este fenómeno hai que atender, para que la unidad sea inalterable.

P. ¿Por qué razon debe ser el agua, pesada en el vacío?

R. Porque los cuerpos en el vacío, pesan mas que al aire libre: i este hecho debe estimarse, para que sea uniforme la medida.

P. Demos una idea de lo que pesa un gramo.

R. La quinta parte de lo que pesa un franco; i teniendo 5 francos el peso frances, es este equivalente a 25 gramos.

P. ¿Sucede lo mismo con el peso colombiano?

R. Lo mismo exactamente. La peseta colombiana pesa 5 gramos; i teniendo 5 pesetas el peso colombiano, es este equivalente a 25 gramos.

P. ¿Con qué voz compuesta se designan diez gramos?

R. Un *decágramo.*

P. ¿Cien gramos?

R. Un *hectógramo.*

P. ¿Mil gramos?

R. Un *kilógramo.*

P. ¿Diez mil gramos?

R. Un *miriágramo.*

P. ¿Un décimo de gramo?

R. Un *decígramo.*

P. ¿Un centésimo de gramo?

R. Un *centígramo.*

P. ¿Un milésimo de gramo?

R. Un *milígramo.*

P. ¿Qué medida antigua de *peso,* quedó vigente por lei nacional, en transacciones o negocios de carácter privado?

R. La LIBRA PONDERAL.

P. ¿A qué es igual la libra ponderal?

R. A algo ménos de la mitad de un kilógramo; pues en el comercio, se reputa el kilógramo, como igual a dos libras i un quinto de libra.

P. Luego, ¿cómo reduciremos kilógramos a libras?

R. Multiplicando los kilógramos por 2 i 20 centésimas: lo que resulte serán libras.

P. I ¿cómo reduciremos libras a kilógramos?

R. Dividiendo las libras entre 2 i 20 centésimas: lo que resulte serán kilógramos.

P. ¿Cuáles son los múltiplos de la *libra*?

R. La *arroba,* que tiene 25 libras;
El *quintal,* que tiene 4 arrobas; i
La *tonelada,* que tiene 20 quintales.

P. ¿Cuáles son los submúltiplos de la *libra*?

R. La *onza*, que es igual a la 16.ª parte de una libra;

El *adarme*, que es igual a la 16.ª parte de una onza; i

El *grano*, que es igual a la 40.ª parte de un adarme.

---

§ 8.º—Observaciones generales.

P. ¿Qué observacion ocurre hacer, sobre las siete clases de medidas?

R. Que no es indispensable, en el uso comun, emplear todas las denominaciones pertenecientes al sistema; pues, si bien no está mal dicho 2 miriágramos i 5 kilógramos, se prefiere siempre decir, con igual exactitud i mayor brevedad, 25 *kilógramos*; en lugar de 1 kilólitro, 10 *hectólitros;* en lugar de 1 miriárea, 100 *hectáreas*, &.ª

P. ¿Se deduce algo importante de la anterior explicacion?

R. Sí, Señor: que para las medidas de peso, se prefiere el KILÓGRAMO; para las de capacidad, el HECTÓLITRO; i para las agrarias, la HECTÁREA.

P. Si, pues, recibimos de nuestro agente 55.555 *gramos* de harina, ¿qué dirá él que nos envía?

R. 55 *kilógramos*, i 555 *gramos*.

P. I, ¿si recibimos del mismo, 55.555 *litros* de aceite?

R. Nos dirá que nos envía 555 *hectólitros*, i 55 *litros*.

P. I, si se nos conceden por el Congreso 55.555 *áreas* de tierras baldías, ¿qué diremos que se nos concede?

R. 555 *hectáreas*, i 55 *áreas*.

P. Basado, como está, el sistema métrico en la numeracion decimal, ¿de cuántos modos puede enunciarse la expresion métrica siguiente: 55.555 gramos?

R. Puede enunciarse de seis maneras:

5 miriágramos, i 5.555 gramos;
55 kilógramos, i 555 gramos;
555 hectógramos, i 55 gramos;
5.555 decágramos, i 5 gramos;
55.555 gramos; i
5 miriágramos, 5 kilógramos, 5 hectógramos, 5 decágramos, i 5 gramos.

P. ¿Tiene igual significacion 1 decímetro cuadrado, que 1 décimo de metro cuadrado; i 1 centímetro cuadrado, que 1 centésimo de metro cuadrado?

R. Nó, Señor: porque 1 décimo de metro cuadrado, equivale a 10 decímetros cuadrados; i 1 centésimo de metro cuadrado, a 1 decímetro cuadrado.

P. I ¿tiene igual significacion 1 decímetro cúbico, que 1 décimo de metro cúbico; 1 centímetro cúbico, que 1 centésimo de metro cúbico; i 1 milímetro cúbico, que 1 milésimo de metro cúbico?

R. Nó, Señor: porque 1 décimo de metro cúbico, equivale a 100 decímetros cúbicos; 1 centésimo de metro cúbico, a 10 decímetros cúbicos; i 1 milésimo de metro cúbico, a 1 decímetro cúbico.

P. ¿En qué se funda todo lo expuesto?

R. En que, si es cierto que las unidades lineales siguen siempre la razon *decimal*,—las cuadradas o de superficie siguen la razon *centesimal*, i las cúbicas o de solidez, la razon *milesimal;* como claramente se demuestra en la Geometría especulativa.

---

§ 9º—MONEDAS METÁLICAS.

P. ¿Cuántas clases tenemos de monedas metálicas?

R. Tres: de *plata*, de *oro*, i de *cobre* o de *vellon*.

P. ¿Cuál es la unidad en las monedas de plata?

R. El PESO FUERTE COLOMBIANO.

P. ¿A qué se da el nombre de peso fuerte colombiano?

R. A una pieza de plata, cilíndrica aplanada, con el sello legal en bajo relieve, con el peso de 25 gramos, con el diámetro de 37 milímetros, i con 9 décimos de lei, i 1 décimo de liga.—Luego esta unidad se refiere al METRO, tanto por el diámetro como por el peso.

P. ¿Cuáles son los múltiplos del peso fuerte colombiano?

R. No existe ningun múltiplo.

P. ¿Cuáles son los submúltiplos de la misma unidad?

R. El medio peso fuerte, o *peseta de 5 reales;*
El quinto de peso fuerte, o *peseta de 2 reales:*
El décimo de peso fuerte, llamado tambien *real;*
El medio décimo de peso fuerte, llamado *medio real;* i
El cuarto de décimo de peso fuerte, llamado tambien *cuartillo*.

P. ¿A qué se da el nombre de *lei* de la moneda?

R. A la cantidad de metal fino que en ella se contiene.

P. I ¿qué se llama *liga?*

R. El metal de menor valor, unido al metal fino.

P. ¿Cuál es el objeto de la liga?

R. Aumentar, por la aleacion, la conveniente dureza de las monedas.

P. ¿Cuál es la lei de nuestras monedas?

R. 900 milésimos para todas, excepto para el cuartillo: lo cual significa que, en 1.000 unidades, se contienen 100 de liga, i 900 de metal fino.

P. I ¿cuál es el título o la lei del cuartillo?

R. 666 milésimos: lo cual significa que, en 1.000 unidades, se contienen 666 de plata i 334 de liga.

P. ¿Qué es *feble* de la moneda?

R. Lo que le falta, en cuanto al peso.

P. ¿Qué es *fuerte* de la moneda?

R. Lo que le sobra, en cuanto al peso.

P. ¿Qué es *gráfila* de la moneda?

R. La orla que la circunda, en su anverso i en su reverso.

P. ¿Qué forma tiene la gráfila, en nuestras monedas de oro i plata?

R. La de una serie de semielipses, puestas en contacto por su diámetro menor.

P. ¿Qué es *corte* de la moneda?

R. La superficie o faja lateral, del cilindro aplanado que la constituye.

P. ¿Qué forma tiene hoi el corte, de nuestros condores, dobles condores, pesos i medios pesos?

R. Es liso en su mayor parte; presentando las tres palabras DIOS, LEI, LIBERTAD, grabadas en hueco distintamente.

P. ¿Cuál es el objeto de estas palabras?

R. Impedir el recorte de la moneda.

P. ¿Qué es lo que se llama *sello*?

R. La marca que se estampa o graba, sobre las dos caras de la moneda.

P. ¿Qué debe contener el sello?

R. Cuanto disponga el legislador; sin omitir jamas el peso ni la lei de la moneda, ni el lugar ni el año de la acuñacion.

P. ¿Qué objeto tiene la colocacion del sello?

R. El de impedir que la moneda sea falsificada.

P. ¿Qué otros pesos, ademas de los fuertes, circulan en la República?

R. Los *sencillos*, o de 8 décimos.

P. ¿Qué disposicion nacional existe respecto de estos pesos?

R. Que se recojan i se conviertan en pesos de 10 décimos.

P. ¿Están recogidos i convertidos?

R. Tan léjos están de ello, que su circulacion es abundante.

P. Cuando en un contrato, documento, &ª, se dice simplemente *pesos*, ¿qué debe comprenderse?

R. Que se trata de pesos fuertes, de lei, o de 10 décimos.

P. ¿Cuál es la unidad en las monedas de oro?

R. El CONDOR.

P. ¿A qué se da el nombre de condor?

R. A una pieza de oro, cilíndrica aplanada, con el sello legal en bajo relieve, con el peso de 16 gramos i 129 milígramos, con el diámetro de 26 milímetros, del valor de 10 pesos fuertes, i con 9 décimos de lei, i 1 décimo de liga.–Luego esta unidad se refiere al METRO, tanto por el diámetro como por el peso.

P. ¿Cuáles son los múltiplos del condor?

R. Solo existe el *doble condor*, equivalente a 20 pesos fuertes.

P. ¿Cuáles son los submúltiplos de la misma unidad?

R. El *medio condor*, que vale 5 pesos fuertes;
El *quinto de condor*, que vale 2 pesos; i
El *décimo de condor*, que vale tanto como el peso.

P. ¿Qué otras monedas de oro circulan en la República?

R. La *onza*, o moneda de 16 pesos fuertes;
La *media onza*, de 8 pesos;
El *doblon*, de 4 pesos;
El *escudo*, de 2 pesos; igual a un quinto de condor; i
El *escudito*, que vale 1 peso; igual a un décimo de condor.

P. ¿Cuál es la unidad en las monedas de cobre?
R. El CÉNTIMO DE PESO, moneda imaginaria.

P. ¿Por qué se le da el nombre de moneda imaginaria?
R. Porque, aunque fué mandada acuñar desde 1846, con el nombre equivalente de *décimo de real*, no existe sino en los cálculos, para la valuacion de las fracciones. *

P. ¿Cuántos céntimos de peso componen un cuartillo?
R. Dos céntimos i medio.
P. ¿I medio real?
R. Cinco céntimos.
P. ¿I tres cuartillos?
R. Siete céntimos i medio.
P. ¿I un real?
R. Diez céntimos; &ª, &ª

* Circulan hoi monedas de cobre, de 1 ¼ céntimos; es decir, de un octavo de real; acuñadas en el extranjero, en 1874.

§ 10º—PRÁCTICA DEL SISTEMA.

P. ¿Cómo se practican en el *sistema métrico* las operaciones de la Aritmética?
R. Como en el sistema decimal, sobre cuya numeracion está basado.

P. Presentemos ejemplo de la ADICION.
R. Si se nos pide sumar 12 Mg., 3 Hg., 4 Dg., i 5 dg.; con 67 Kg., 91 g., i 2 mg.,—dispondremos los sumandos de esta manera:

$$\begin{array}{r} 120340,\ 5 \\ 67091,\ 002 \\ \hline 187431,\ 502 \end{array}$$

I, practicada la suma, como lo enseña la Aritmética, habremos obtenido: 18 Mg., 7 Kg., 4 Hg., 3 Dg., 1 g., 5 dg., i 2 mg.; o lo que es lo mismo, 187.431 gramos, i 502 miligramos.

P. Presentemos ejemplo de la SUSTRACCION.
R. Si se nos pide restar 98 mc., i 76 cmc.; de 123 mc., 45 dmc., i 67 cmc.,—dispondremos como sigue, el minuendo i el sustraendo:

$$\begin{array}{r} 123,4567 \\ 98,0076 \\ \hline 25,4491 \end{array}$$

I, practicada la resta, como lo enseña la Aritmética, habremos obtenido: 25 mc., 44 dmc., i 91 cmc.; o lo que es lo mismo, 25 metros cuadrados, i 4.491 centímetros cuadrados.

P. Presentemos ejemplo de la MULTIPLICACION.

R. Costando el kilógramo de café 0 pesos i 65 centésimas de peso, se pregunta ¿cuál es el precio de 1.250 Dg., 9 g., i 6 cg.?—I como el precio que se da conocido es el de 1 *kilógramo* de café, i la cantidad propuesta es equivalente a 12 kilógramos, i 50.906 cienmilésimas de kilógramo,—dispondremos los factores de esta manera:

```
   12,509 06
        0,65
  ----------
   62 545 30
  7 50 543 6
  ----------
  8,13 088 90
```

I, practicada la multiplicacion, como lo enseña la Aritmética, habremos encontrado que el precio que se nos pide, es el de 8 pesos i 13 centésimas de peso.

P. ¿Podríamos haber practicado la misma operacion de un modo distinto?

R. Sí, Señor: porque, si el precio del kilógramo, es 0 pesos i 65 centésimas, el precio del gramo (milésima parte del kilógramo), será 0 pesos i 65 cienmilésimas, que resultan de la division de 65 centésimas por mil: i equivaliendo la cantidad propuesta a 12.509 gramos i 6 centésimas de gramo,—podríamos, con igual resultado, i tomando el *gramo* por unidad, disponer los factores del modo siguiente:


```
   12 509,06
    0,000 65
  ----------
   62 545 30
  7 50 543 6
  ----------
  8,13 088 90
```

P. Presentemos ejemplo de la DIVISION.

R. Costando 625 Hl., 5 l., i 75 cl. de vino, 31.250 pesos, se pregunta, ¿cuánto vale el litro?—I, como la cantidad propuesta es equivalente a 62.505 litros, i 75 centésimas de litro,—dispondremos los términos de esta manera:

```
31250,000   | 62.505,75
            |----------
 6247 7000    0,499
  622 18250
   59 63075
```

I, practicada la division, como lo enseña la Aritmética, habremos encontrado que el litro de vino, cuesta 0 pesos, i 50 centésimas de peso.

P. I ¿de qué modo procederíamos, si, en lugar del precio del *litro*, quisiéramos saber el precio del *hectólitro*?

R. Colocaríamos en el divisor la coma decimal, a la derecha de la cifra que representa los hectólitros; es decir, dividiríamos 31.250 pesos, entre 625 hectólitros i 575 diezmilésimas de hectólitro: el cuociente nos daría el precio del hectólitro.—I, en general, en el divisor, se pondrá siempre la coma decimal, en el lugar que le corresponda, segun las unidades de que se trate.

—:o:—

APÉNDICE
sobre arqueos.

P. ¿Qué se entiende por *arquear* un buque?
R. Buscar la medida de su cavidad.
P. ¿A quién toca legislar sobre esta materia?
R. Al Congreso de la República.
P. ¿A quién delegó el Congreso el arreglo de los arqueos?
R. Al Poder ejecutivo de la Nacion, por lei de 25 de Abril de 1857.
P. ¿Cómo cumplió la delegacion el Poder ejecutivo?
R. Estableció reglas para los arqueos, por decreto de 13 de Mayo de 1862; haciendo la distincion necesaria, entre buques de vela i buques de vapor.
P. ¿Qué importa definir, para la inteligencia de estas reglas?
R. La significacion de ciertas palabras, del vocabulario de la Marina.
P. ¿A qué se da el nombre de RODA?
R. Al madero grueso i encorvado, que forma el remate de la proa de la nave.
P. ¿A qué se da el nombre de CODASTE?

R. Al extremo encorvado de la quilla de la nave, en contacto inmediato con la pala del timon.

P. ¿Qué es QUILLA?

R. Madero encorvado, de popa a proa, en la parte ínfima de la nave.

P. ¿Qué es PROA?

R. La parte anterior de la nave.

P. ¿Qué es POPA?

R. La parte posterior de la nave.

P. ¿Qué es ESTAMBOR?

R. Lo mismo que *codaste*.

P. ¿Qué es CONTRAQUILLA?

R. La pieza que cubre la quilla por la parte interior de la nave, para seguridad de la quilla i de las varias piezas que sostiene.

P. ¿Qué son CARLINGAS?

R. Cuadrados escopleados en la contraquilla de la nave, donde entran i se aseguran los espigones de los mástiles.—Algunos dan a la contraquilla, el nombre arbitrario de *carlinga de fondo*.

P. ¿Qué son PALMEJARES?

R. Maderos que ciñen interiormente la nave, endentados, de popa a proa, con las curvas de la ligazon.

P. ¿Qué es CALA?

R. La parte mas baja de la bodega de la nave.

P. ¿Qué es PORTELO DEL TIMON?

R. El agujero por donde pasa la caña del timon.

P. ¿Qué son ESCOTILLAS?

R. Las aberturas de la nave, por donde se introduce el cargamento.

P. ¿Qué es PUENTE?

R. Lo mismo que *cubierta*.

P. ¿Qué son ENTREPUENTES?

R. Los suelos o las cubiertas, debajo de la cubierta principal.—Tambien se llama *entrepuente*, el intervalo entre dos puentes.

P. ¿Qué es ARCON o rancho de popa?

R. La pequeña division debajo de la cámara, donde está, o por donde pasa, la caña del timon.

P. ¿Qué es ESLORA?

R. La longitud de la nave.

P. ¿Qué es MANGA?

R. Su latitud.

P. ¿Qué es PUNTAL?

R. Su profundidad o altura.

Buques de vela.

P. ¿Cuántos datos son necesarios, en el arqueo de un buque de vela?

R. Tres: *eslora*, *manga* i *puntal*.

P. ¿Por qué procedimiento se obtendrá la *eslora*?

R. Midiendo la longitud del buque, de roda a codaste, sobre la cubierta. I si el buque tiene entrepuente, se medirá tambien la longitud de este, desde el borde de la roda hasta el portelo del timon: se sumarán las dos longitudes, i la mitad de la suma será la *eslora*.

P. I ¿qué deberá hacerse cuando la caña del timon, pasa por el puente o por el entrepuente?

R. Se tomarán las longitudes por el interior del buque; midiendo desde la primera hasta la última escotilla; luego, desde la primera hasta tocar contra la roda; i en seguida, desde la última hasta tocar contra el codaste. Si la cámara tuviere lumbrera, se introducirá una vara por la lumbrera de la cámara, hasta apoyarla contra el lado en que el arcon toca al estambor; i la longitud de esta vara entrará como medida.

P. ¿Por qué procedimiento se obtendrá la *manga?*

R. Haciendo de la longitud de la cala, tres divisiones exactemente iguales; i tomando dos latitudes sobre cada una de las tres divisiones.

P. ¿Qué nombres daremos a estas tres divisiones?

R. Division de *proa*, division de *popa*, i division *central*.

P. ¿Cómo se averiguan i determinan las dos latitudes de la division de *proa?*

R. Se tomará la cuarta parte de la longitud del buque, de roda a codaste; i sobre esta cuarta parte se practicarán dos medidas: la 1ª, sobre la carlinga de fondo, de costado a costado, horizontalmente; i la 2ª, en el vacío vientre, o mayor cavidad de aquella parte del buque, tambien de banda a banda, i paralelamente a la primera.

P. ¿Cómo se averiguan i determinan las dos latitudes de la division de *popa?*

R. Se tomará la cuarta parte de la longitud del

buque, de codaste a roda; i sobre esta cuarta parte se practicarán dos medidas: la 1ª, sobre la carlinga de fondo, de costado a costado, horizontalmente; i la 2ª, en el vacío vientre, o mayor cavidad de aquella parte del buque, tambien de banda a banda, i paralelamente a la primera.

P. ¿Cómo se averiguan i determinan las dos latitudes de la division *central?*

R. Se tomará la mitad de la longitud del buque; i sobre esta mitad se practicarán dos medidas: la 1ª, sobre la carlinga de fondo, de costado a costado, horizontalmente; i la 2ª, en el vacío vientre, o mayor cavidad de aquella parte del buque, paralelamente a la primera, i hasta tocar los palmeiares.

P. ¿Qué deberá hacerse, despues de estas medidas?

R. Se sumarán las seis latitudes; la suma se dividirá entre 6; i el cuociente que resulte será la *manga*.

P. ¿Por qué procedimiento se obtendrá el *puntal?*

R. Sobre los mismos puntos que se fijaron para tomar las latitudes, se medirán tres alturas o profundidades diferentes: una en *proa*, otra en *popa*, i otra en la *mitad* del buque; partiendo siempre desde la carlinga de fondo, i terminando en la parte baja de los tablones de la cubierta. Se sumarán estas tres medidas; se dividirá la suma entre 3; i el cuociente que resulte será el *puntal*.

P. I ¿qué se hará cuando haya entrepuentes, i

sultado del arqueo del buque de vela.

Buques de vapor.

P. ¿Cuántos datos son necesarios, en el arqueo de un buque de vapor?

R. Tres: *eslora*, *manga* i *puntal*.

P. ¿Por qué procedimiento se obtendrá la *eslora?*

R. Multiplicar la eslora por el puntal i por la manga, i dividir el producto obtenido, entre 3 i 80 centésimas:—50 centésimas del cuociente que resulte, darán las toneladas del buque de vapor; siendo de advertir, que, en los anteriores cálculos, la fraccion que no llegare a 50 centésimas, habrá de despreciarse; i la que igualare o excediere, figurará como un entero.

——:o:——

TRATADO

DE

ÁLGEBRA,

DESTINADO A LA ENSEÑANZA.

POR

D. H. ARAÚJO,

DIRECTOR DE UN PLANTEL DE EDUCACION EN

CARTAGENA.

1 28

[illegible] DE ANTONIO ARAÚJO.

1877

SANTIAGO PÉREZ,

Presidente de los Estados Unidos de Colombia,

HACE SABER:

Que el Sr. D. H. Araújo ha solicitado privilegio exclusivo para publicar i vender una obra de su propiedad, cuyo título, que ha depositado en el Despacho del Presidente del Estado de Bolívar, prestando el juramento requerido por la lei, es como sigue:

"Tratado de Álgebra, destinado a la enseñanza".

Por tanto, en uso de la autorizacion que le confiere el artículo 66 de la Constitucion, pone, mediante la presente, al expresado Sr. Araújo en posesion del privilegio por quince años, de conformidad con la lei 1ª, parte 1ª. tratado 3º de la Recopilacion Granadina, "que asegura por cierto tiempo la propiedad de las produciones literarias i algunas otras".

Dada en Bogotá, a diez de Abril de mil ochocientos setenta i cinco.

S. PÉREZ.

El Secretario de Hacienda i Fomento,

Nicolas Esguerra.

Secretaría general de Estado.—Cartagena 28 de Abril de 1875.—Registrada al folio siete del Libro respectivo.

El Oficial mayor,—*Avelino Manótas.*

Todo ejemplar legítimo lleva la firma del autor.

Araújo

TRATADO DE ÁLGEBRA.

LECCION 1.ª

NOCIONES PRELIMINARES.

P. ¿Qué es Álgebra?

R. La parte de las Matemáticas puras, que trata de la cantidad discreta expresada por letras.

P. ¿Qué es cantidad discreta?

R. La que se considera de un modo discontinuo; es decir, como la reunion de cantidades menores, o como parte de otra mayor.

P. ¿De dónde se deriva la palabra Álgebra?

R. De *Él-djaber*, término árabe que significa *restauracion;* porque en las ecuaciones algebráicas, las cantidades negativas se *restauran*, o hacen positivas, trasladándolas de un miembro a otro.

P. ¿A quién se debe la invencion del Álgebra?

R. A Diofanto de Alejandría, que vivió, mui probablemente, en el siglo cuarto de nuestra Era.

P. ¿En qué se distingue de la Aritmética?

R. En que los elementos de la Aritmética tienen valor fijo i determinado; miéntras que los del Álgebra representan siempre, cantidades vagas e indefinidas. Así, el número 7 (prescindiendo de su situacion), no vale nunca sino *siete* unidades; i la letra x puede valer *siete*, i tambien *diez*, *cincuenta*, *mil*, *un millon*, i cuanto se quiera.

P. ¿De qué elementos se vale el Álgebra, para representar las cantidades?

R. De las letras, mayúsculas o minúsculas, del alfabeto comun o del alfabeto griego.—A estas letras pueden añadirse una o más comas, a la derecha o a la izquierda, arriba o abajo, de esta manera: a', $'a$, $a_{,}$, $_{,}a$; leyéndose entónces *a prima*, *prima a*, *a subprima*, *subprima a;* i si las comas fueren dos, *a segunda*, *segunda a*, *a subsegunda*, *subsegunda a*, &a. &a.—En lugar de comas, pueden usarse números, en seguida de la letra i en la parte de abajo, como a_1, a_2, a_3; leyéndose entónces *a índice* 1, *a índice* 2, *a índice* 3. Por tanto, son infinitos los elementos con que cuenta el Álgebra.

P. ¿Es del todo indiferente el uso de las letras?

R. Para los *datos* o las cantidades conocidas, se prefieren las primeras del alfabeto; i las últimas, para las *incógnitas* o cantidades desconocidas.

P. ¿De qué signos se vale el Álgebra para indicar las operaciones?

R. Casi de los mismos de que se vale la Aritmética.

P. ¿Cuáles son estos?

R. Una cruz (+), que se lee *más*, indica la adicion.

Una raya horizontal (—), que se pronuncia *ménos*, indica la sustraccion.

Una équis o un punto (× .), que se leen *multiplicado por*, indican la multiplicacion.

Dos puntos entre dos cantidades, o una raya horizontal con el dividendo encima i el divisor debajo (: —), que se leen *sobre* o *dividido entre*, indican la division.

Un ángulo con el vértice a la derecha (>), el cual se llama *signo de mayoridad*, i se lee *mayor que*,

indica que la cantidad que precede es mayor que la que sigue.

Un ángulo con el vértice a la izquierda (<), el cual se llama *signo de minoridad*, i se lee *menor que*, indica que la cantidad primera es menor que la segunda.

Dos rayitas horizontales i paralelas (=), que se llaman *signo de igualdad*, i se leen *igual a*, indican que son iguales las cantidades que ellas separan.

Un ángulo vertical, sin exponente o con el exponente 2 ($\sqrt{\ }$ $\sqrt[2]{\ }$), el cual se lee *raíz cuadrada de*, indica que de la cantidad que sigue se extraiga la raíz cuadrada.

Un ángulo vertical con los exponentes 3, 4, &a. ($\sqrt[3]{\ }$ $\sqrt[4]{\ }$), el cual se lee *raíz cúbica*, *cuadro-cuadrada*, o *raíz* 3, *raíz* 4 &a., indica que de la cantidad que sigue se extraiga la raíz que el exponente expresa.

Una cruz con una raya horizontal por debajo o por encima (± ∓), la cual se lee *más ménos*, i *ménos más*, i se llama *signo de ambigüedad*, indica que a la cantidad que precede se quite o añada el valor de la que sigue.

P. ¿Puede indicarse la multiplicacion de alguna otra manera?

R. Lo mas comun es escribir la una cantidad a continuacion de la otra, sin hacer uso de ningun signo: así, *ab* significa que *a* debe multiplicarse por *b*.

P. ¿Permiten hacer lo mismo los elementos de la Aritmética?

R. De ninguna manera; pues si para indicar la multiplicacion de 2 por 4, se escribiera el 4 en seguida del 2, tendría que leerse *veinte i cuatro*, que no es el producto de 2 por 4.

P. ¿Qué otro uso tienen en Álgebra, los signos *más* i *ménos* de la adicion i sustraccion?

R. El de indicar i distinguir, por su medio, las cantidades *positivas* i las *negativas*.

P. ¿Qué son cantidades positivas?

R. Las que conspiran al fin u objeto que se propone el calculador.

P. ¿De qué signos van precedidas?

R. Del signo +, que, si puede quedar tácito, es sólo al principio de expresion algebráica.

P. ¿Qué son cantidades negativas?

R. Las que conspiran a un fin contrario al que se propone el calculador.

P. ¿De qué signo van precedidas?

R. Del signo —, que no puede quedar tácito.

P. Expliquemos estas cantidades por medio de un ejemplo.

R. Si, por ejemplo, quiero calcular en cuánto tiempo se *llena* un hórreo, en el cual entra trigo i del cual sale trigo, consideraré como *positivas* las cantidades que entran, i como *negativas* las cantidades que salen: Mas, si quiero calcular el tiempo en que se *vacía*, consideraré como *positivas* todas las que salen, i como *negativas* todas las que entran.

P. ¿Qué consecuencia se deduce de la anterior explicacion?

R. Que las cantidades negativas son menores que cero; pues, si el que tiene cero pesos, tiene mucho ménos que el que tiene 100 pesos, el que tiene — 100 pesos, que es aquel que debe esta suma, tiene todavía ménos que el que tiene cero pesos.

P. ¿Qué signos numéricos considera el Algebra en las adiciones i multiplicaciones?

R. Los *coeficientes* i los *exponentes*.

P. ¿A qué se da el nombre de coeficiente?

R. Al número que expresa las veces que una cantidad se ha de tomar por sumando: así, en lugar de $a + a$, puede escribirse $2a$; i en lugar de $b + b + b$, puede escribirse $3b$; siendo los números 2 i 3, los coeficientes de tales cantidades.

P. ¿A qué se da el nombre de exponente?

R. Al número que expresa las veces que una cantidad se ha de tomar por factor: así, en lugar de $a \times a$, puede escribirse a^2; i en lugar de $b \times b \times b$, puede escribirse b^3; siendo los números 2 i 3, los exponentes de tales expresiones.

P. ¿Qué diremos de toda letra considerada por sí sola?

R. Que tiene la unidad por coeficiente, la unidad por exponente, i la unidad por divisor: de modo que la letra a, significa 1 a, *elevado a* 1, *sobre* 1.

P. ¿Qué es término?

R. Toda cantidad separada de otra por los signos + o —.

P. ¿Qué es dimension?

R. El número de letras de que consta un término. B es un término de una sola dimension; $2bc$, de dos dimensiones; $5bcd$, de tres dimensiones; b^4, de cuatro dimensiones. Luego los coeficientes no constituyen dimension; pero la letra que tiene exponente, representa por sí sola tantas dimensiones, como son las unidades que tiene el exponente.

P. ¿Cómo se cuentan las dimensiones en los quebrados literales?

R. Restando de las dimensiones del numerador, las dimensiones del denominador: así, $\frac{ab}{c}$ es un quebrado literal de una sola dimension; $\frac{2ab}{cd}$, de cero dimensiones; i $\frac{a}{b^2}$, de ménos una dimension.

P. ¿Qué nombres toman las cantidades por razon del número de sus términos?

R. Se llama *un monomio*, la que consta de un término; *un binomio*, la que consta de dos; *un trinomio*, la que consta de tres; i en general, *un polinomio*, la que consta de más de uno.

P. ¿Qué divisiones se hacen de los términos?

R. En *homogéneos* i *heterogéneos*; *semejantes* i *desemejantes.*

P. ¿Qué son términos homogéneos?

R. Aquellos que están compuestos de igual número de dimensiones; como: a i b; cd i m^2; bcd i $-x^3$.

P. ¿Qué son términos heterogéneos?

R. Aquellos que están compuestos de desigual número de dimensiones; como: a i $-bc$; d i x^2; $2m^2$ i $-z^4$.

P. ¿Qué son términos semejantes?

R. Los que tienen unas mismas letras con unos mismos exponentes; como: a i $-2a$; b^2 i $4b^2$; $-5x^3$ i $-2x^3$.

P. ¿Qué son términos desemejantes?

R. Los que no tienen unas mismas letras con unos mismos exponentes; como: a i a^2; $-a^2$ i b^2; a^2 i $-z^4$.

P. ¿Qué debe hacerse con las cantidades que tienen términos semejantes?

R. Simplificarlas.

P. ¿Cómo se practica la simplificacion?

R. Puede practicarse de dos maneras: por *reduccion* i por *destruccion*.

P. ¿Cuándo i de qué manera se verifica por reduccion?

R. Cuando los términos semejantes van precedidos de los mismos signos; en cuyo caso, se hace la suma de todos los coeficientes, i se antepone esta suma a las letras comunes, con los mismos exponentes, i con el signo comun. Así, $+2ab^2$ i $+5ab^2 = +7ab^2$; i $-3m^2z^4$ i $-6m^2z^4 = -9m^2z^4$.

P. ¿Cuándo i de qué manera se verifica por destruccion?

R. Cuando los términos semejantes van precedidos de distintos signos; en cuyo caso, se suman primero los coeficientes de signos iguales, se practica en seguida la resta de las sumas, i se antepone el residuo a las letras comunes, con los exponentes comunes, i con el signo del residuo. Así, $+2ab^2$ i $-5ab^2 = -3ab^2$; $-3m^2z^4$ i $+6m^2z^4 = +3m^2z^4$; i $+4x - 7x - x + 3x = -x$.

LECCION 2ª

ADICION.

P. ¿Qué es adicion algebráica?

R. Es la operacion que tiene por objeto, reunir en una sola varias cantidades algebráicas.

P. ¿Cómo se ejecuta la adicion?

R. Colocando los sumandos, unos a continuacion de otros, i practicando en seguida la simplificacion que se pueda.

P. ¿Cuántos casos pueden presentarse en las adiciones algebráicas?

R. Cuatro, a saber: términos semejantes con signos iguales: términos semejantes con signos desiguales: términos desemejantes con signos iguales i términos desemejantes con signos desiguales. En todos se procede de la misma manera.

P. Presentemos ejemplo del primer caso.

R.
$$\begin{array}{r} 4a^3-3a^2+\ \ 1 \\ 2a^3-\ \ a^2+17 \\ 5a^3-2a^2+\ \ 4 \\ \hline =11a^3-6a^2+22. \end{array}$$

P. Presentemos ejemplo del segundo caso.

R.
$$\begin{array}{r} -\ a^3+\ \ ab-2b^2 \\ 4a^3-3ab+\ \ b^2 \\ 2a^3+4ab-4b^2 \\ \hline =5a^3+2ab-5b^2. \end{array}$$

P. Presentemos ejemplo del tercer caso.

R.
$$\begin{array}{l} 6a\ +4b\ +3c \\ 4c^2+\ \ b^3+\ a^2 \\ \hline =6a\ +4b\ +3c+4c^2+b^3+a^2. \end{array}$$

P. Presentemos ejemplo del cuarto caso.

R.
$$\begin{array}{r} 4x^2-2xy+1\ -3y+4x^3 \\ 4y\ +3x^3\ -y^2+xy-\ \ x^2 \\ 5x^3-2x\ \ +y\ -15+\ \ y^2 \\ \hline =3x^2-xy-14\ +2y+12x^3-2x \end{array}$$

P. ¿Es siempre la suma, en Álgebra, mayor que cualquiera de los sumandos?

R. La suma es siempre mayor, cuando los sumandos tienen signos iguales; pero si los signos son diferentes, puede ser la suma menor que los suman-

dos, i aun en ciertos casos, equivalente a cero. Así, $+16a$ i $+4a$ dan por suma $+20a$; $+16a$ i $-4a$ producen $+12a$; i $+16a$ i $-16a$ equivalen a cero, o se destruyen al sumarlos.

LECCION 3.ª

SUSTRACCION.

P. ¿Qué es sustraccion algebráica?

R. Es la operacion que tiene por objeto, hallar la diferencia entre dos cantidades algebráicas.

P. ¿Cómo se ejecuta la sustraccion?

R. Cambiando los signos del sustraendo, colocando este a continuacion del minuendo, i practicando en seguida la simplificacion que se pueda.

P. ¿En qué razon está fundado el cambio de los signos?

R. En que si se nos pidiera, por ejemplo, trabajando con números, restar de 8, 4—2, no procederíamos restando 4 i *quitando* despues 2, pues entónces es evidente que el residuo sería 2; sino restaríamos primero 4 i *añadiríamos* despues 2, para que el residuo fuera 6; pues el sustraendo no es todo el 4, sino el 4 reducido en 2.—Luego del mismo modo, trabajando con letras, si se nos pidiera restar de a el valor de $z-y$, restaríamos primero lo que vale z, i en seguida *añadiríamos* lo que vale y; o lo que es lo mismo, en lenguaje algebráico, *cambiaríamos* los signos de la z i de la y.

Si se nos pidiera, por el contrario, trabajando con números, restar de 8, 4+2, no procederíamos restando 4 i *añadiendo* despues 2, pues entónces es evidente que el residuo sería 6; sino restaríamos primero 4 i *quitaríamos* despues 2, para que el residuo fuera 2; pues el sustraendo no es sólo el 4, sino el 4 aumentado en 2.—Luego del mismo modo, trabajando con letras, si se nos pidiera restar de a el valor de $z+y$, restaríamos primero lo que vale z, i en seguida *quitaríamos* lo que vale y; ó lo que es lo mismo, en lenguaje algebráico, *cambiaríamos* los signos que lleva el sustraendo.

P. ¿Cuántos casos pueden presentarse en las sustracciones algebráicas?

R. Tres, a saber: todos los términos semejantes: todos los términos desemejantes: unos términos semejantes i otros desemejantes.

P. Presentemos ejemplo del primer caso.

R.

$5y^2-4y+3a$	*Minuendo.*
$-6y^2-4y-a$	*Sustraendo.*
$=-y^2\quad 0\ +4a.$	*Residuo*

P. Presentemos ejemplo del segundo caso.

R.

$4a+2b+c^3$	*Minuendo.*
$-2y+3z+z^3$	*Sustraendo.*
$=4a+2b+c^3+2y-3z-z^3.$	*Residuo.*

P. Presentemos ejemplo del tercer caso.

R.

$5a^2-4ab+3bc-b^2$	*Minuendo.*
$-8a^2-2ab$	*Sustraendo.*
$=-3a^2-2ab+3bc-b^2.$	*Residuo.*

P. ¿Es siempre el residuo, en Álgebra, menor que el minuendo?

R. El residuo es siempre menor, i aun en ciertos

casos equivalente a cero, cuando minuendo i sustraendo tienen signos iguales; pero si los signos son diferentes, puede ser el residuo mayor que el minuendo. Así, por ejemplo, si de $+16a$ se resta $+4a$, será el residuo $+12a$; si de $+16a$ se resta $+16a$, será el residuo igual a *cero*; i si de $+16a$ se resta $-4a$, será el residuo $+20a$.

LECCION 4ª

MULTIPLICACION.

P. ¿Qué es multiplicacion algebráica?

R. Es tomar una cantidad las veces que expresa otra, i del modo como esta ordena que debe tomarse.

P. ¿Cuántos casos pueden presentarse en las multiplicaciones algebráicas?

R. Tres, a saber: un monomio por otro monomio: un polinomio por un monomio: i un polinomio por otro polinomio.

P. ¿A cuántas cosas hai que atender para ejecutar las multiplicaciones?

R. A cuatro: a *signos*, a *coeficientes*, a *letras* i a *exponentes*.

P. ¿Cuál es la regla de los signos?

R. Signos semejantes en los factores, dan + en el producto; i signos desemejantes en los factores, dan − en el producto: o lo que es lo mismo, + por + da +; + por − da −; − por + da −; i − por − da +.

P. ¿En qué se funda esta regla?

R. En que el multiplicador expresa, nó sólo las veces que se toma el multiplicando, sino el sentido o el modo como debe tomarse.

P. ¿Por qué, pues, + por + da + ?

R. Porque si, por ejemplo, he de multiplicar $+a$ por $+b$, el signo + del multiplicador, ordena tomar al multiplicando como este indica que debe tomarse; pero él indica que se tome en sentido positivo, luego habrá de tomarse *positivamente*.

P. I ¿por qué + por − da − ?

R. Porque si, por ejemplo, he de multiplicar $+a$ por $-b$, el signo − del multiplicador, ordena tomar al multiplicando de un modo contrario al indicado por este; pero él indica que se tome en sentido positivo, luego habrá de tomarse *negativamente*.

P. I ¿por qué − por + da − ?

R. Porque si, por ejemplo, he de multiplicar $-a$, por $+b$, el signo + del multiplicador, ordena tomar al multiplicando como este indica que debe tomarse; pero él indica que se tome en sentido negativo, luego habrá de tomarse *negativamente*.

P. I ¿por qué − por − da + ?

P. Porque si, por ejemplo, he de multiplicar $-a$ por $-b$, el signo − del multiplicador, ordena tomar al multiplicando de un modo contrario al indicado por este; pero él indica que se tome en sentido negativo, luego habrá de tomarse *positivamente*.

P. ¿Cuál es la regla de los coeficientes?

R. Los coeficientes se multiplican segun las reglas de la Aritmética; pues es regla sin excepcion, en los cálculos algebráicos, hacer con los coeficientes lo que indica la operacion.

P. ¿Cuál es la regla de las letras?

R. Las letras comunes en los factores, se escriben una sola vez: las letras distintas en los factores, se escriben unas a continuacion de otras.

P. ¿Cuál es la regla de los exponentes?

R. Los exponentes deben sumarse, siguiendo las reglas de la Aritmética.

P. ¿Cómo, pues, multiplicaremos un monomio por otro monomio?

R. Teniendo presentes, i practicando las reglas establecidas, sobre los signos, los coeficientes, las letras i los exponentes.

P. Expliquemos estas reglas por medio de ejemplos.

R. Ejemplo 1º

$$\begin{array}{r} 3abc \\ \times\ 4a^2b \\ \hline =12a^3b^2c. \end{array}$$

Ejemplo 2º

$$\begin{array}{r} 4xy \\ \times -2ay \\ \hline =-8axy^2. \end{array}$$

Ejemplo 3º

$$\begin{array}{r} -5a^2b^3 \\ \times\ 4abc \\ \hline =-20a^3b^4c. \end{array}$$

Ejemplo 4º

$$\begin{array}{r} -5a^3b^2cd \\ \times -3abc^4 \\ \hline =15a^4b^3c^5d. \end{array}$$

P. ¿De qué modo se multiplica un polinomio por un monomio?

R. Multiplicando por el monomio cada término del polinomio; escribiendo los productos, a continuacion de otros; i practicando en seguida la simplificacion que se pueda.

P. Expliquemos estas reglas por medio de ejemplos.

R. Ejemplo 1º

$$\begin{array}{r} 12a^3-2a^2+4a-1 \\ \times \quad 3x \\ \hline =36a^3x-6a^2x+12ax-3x. \end{array}$$

Ejemplo 2º

$$\begin{array}{r} 9a^2x+3a-x+1 \\ \times -x^2 \\ \hline =-9a^2x^3-3ax^2+x^3-x^2. \end{array}$$

Ejemplo 3º

$$\begin{array}{r} 4x^2y+3x-2y \\ \times -3xy \\ \hline =-12x^3y^2-9x^2y+6xy^2. \end{array}$$

P. ¿De qué modo se multiplica un polinomio por otro polinomio?

R. Haciendo la multiplicacion de todo el multiplicando por el primer término del multiplicador, luego por el segundo, despues por el tercero, &a.; ejecutando la suma de los productos parciales; i practicando en seguida la simplificacion que se pueda.

P. ¿Qué es conveniente hacer en la disposicion de los factores, para facilitar las reducciones de que sea el producto susceptible?

R. Ordenar siempre los factores con relacion a una misma letra, en la serie de sus potencias crecientes o decrecientes; sucediendo entónces necesariamente, que sólo el primero i el último término son irreducibles en el producto.

P. Expliquemos estas reglas por medio de ejem-

R. Ejemplo 1º

$$\begin{array}{r} a^2+ab+b^2 \\ \times\, a-b \\ \hline a^3+a^2b+ab^2 \\ -a^2b-ab^2-b^3 \\ \hline =a^3 \quad 0 \quad 0 -b^3. \end{array}$$

Ejemplo 2º

$$\begin{array}{r} 3x^2-2x+5 \\ \times\, 6x-7 \\ \hline 18x^3-12x^2+30x \\ -21x^2+14x-35 \\ \hline =18x^3-33x^2+44x-35. \end{array}$$

Ejemplo 3º

$$\begin{array}{r} x^2-\frac{3}{4}x+1 \\ \times\, x^2-\frac{1}{2}x \\ \hline x^4-\frac{3}{4}x^3+x^2 \\ -\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{2}x \\ \hline =x^4-\frac{5}{4}x^3+\frac{11}{8}x^2-\frac{1}{2}x. \end{array}$$

P. ¿Qué producto se obtiene de la multiplicacion, de la suma de dos cantidades por la diferencia de las mismas?

R. La suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia, da por producto la diferencia de las mismas; pero con exponente duplo del que tenían en los factores. Así, si multiplicamos $a+b$ por $a-b$, obtendremos por producto a^2-b^2.

P. ¿Qué se infiere de esto recíprocamente?

R. Que, dada la diferencia de dos cantidades, si se quisiere desenvolverla en sus dos factores componentes, se escribirá la suma de las dos cantidades multiplicada por su diferencia; pero con la mitad del exponente que tenían en el producto. Por consiguiente, los dos factores de a^2-b^2, son, la suma $a+b$, i la diferencia $a-b$.

LECCION 5.ª

DIVISION.

P. ¿Qué es division algebráica?

R. Es averiguar las veces que una cantidad contiene a otra, determinando al mismo tiempo de qué modo la contiene.

P. ¿Cuántos casos pueden presentarse en las divisiones algebráicas?

R. Tres, a saber: un monomio por otro monomio: un polinomio por un monomio: i un polinomio por otro polinomio.

P. ¿A cuántas cosas hai que atender, para ejecutar una division?

R. A cuatro: a *signos*, a *coeficientes*, a *letras* i a *exponentes*.

P. ¿Cuál es la regla de los signos?

R. Signos semejantes en los dos términos, dan + en el cuociente; i signos desemejantes en los dos términos, dan — en el cuociente: o lo que es lo mismo, + por + da +; + por — da —; — por + da —; i — por — da +.

P. ¿En qué se funda esta regla?

R. En que el dividendo es un producto, formado por la multiplicacion del divisor por el cuociente.

P. ¿Por qué, pues, + por + da +?

R. Porque sólo así sucedería que, multiplicando + en el divisor, por + en el cuociente, resultara + en el dividendo.

P. I ¿por qué + por — da —?

R. Porque sólo así sucedería que, multiplicando — en el divisor, por — en el cuociente, resultara + en el dividendo.

P. I ¿por qué — por + da —?

R. Porque sólo así sucedería que, multiplicando + en el divisor, por — en el cuociente, resultara — en el dividendo.

P. I ¿por qué — por — da +?

R. Porque sólo así sucedería que, multiplicando — en el divisor, por + en el cuociente, resultara — en el dividendo.

P. ¿Cuál es la regla de los coeficientes?

R. Los coeficientes se dividen segun las reglas de la Aritmética. I si no dieren cuociente exacto, se dejará indicada la division por un quebrado simplificado, cuyo numerador sea el dividendo, i cuyo denominador sea el divisor.

P. ¿Cuál es la regla de las letras?

R. Las letras comunes en los dos términos, quedan destruidas en el cuociente: las letras distintas en los dos términos, van al lugar que les corresponda.

P. ¿Cuál es la regla de los exponentes?

R. Los exponentes deben restarse, segun los preceptos de la Aritmética: no debiendo olvidarse para comprenderlo, que el dividendo ha de resultar de la multiplicacion del cuociente por el divisor.

P. ¿Cómo, pues, dividiremos un monomio por otro monomio?

R. Teniendo presentes, i practicando las reglas establecidas, sobre los signos, los coeficientes, las letras i los exponentes.

P. Expliquemos estas reglas por medio de ejemplos.

R. Ejemplo 1º — Ejemplo 2º

$$\frac{25a^3c^2}{-5a^2c}=-\ 5ac. \qquad \frac{-14a^3b^2c}{7ac}=-\ 2a^2b^2.$$

Ejemplo 3.º

$$\frac{-20x^2y^2z^3}{-\ 4yz}=5x^2yz^2.$$

P. ¿De qué modo se divide un polinomio por un monomio?

R. Dividiendo cada término del polinomio por el monomio; reuniendo todos los cuocientes; i practicando en seguida la simplificacion que se pueda.

P. Expliquemos estas reglas por medio de ejemplos.

R. Ejemplo 1º

$$\frac{4x^3-2x^2+2x}{2x}=2x^2-x+1.$$

Ejemplo 2.º

$$\frac{-24a^2x^2y-3axy+6x^2y^2}{-3xy}=8a^2x+a-2xy.$$

Ejemplo 3º

$$\frac{14ab^3+7a^2b^2-21a^2b^3+35a^3b}{7ab}=2b^2+ab-3ab^2+5a^2.$$

P. ¿De qué modo se divide un polinomio por otro polinomio?

R. Se principia ordenando dividendo i divisor, por las potencias decrecientes de una misma letra: se escribe el dividendo a la derecha i el divisor a la izquierda, separados por un paréntesis o por una raya vertical: se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor, i se escribe el cuociente a la derecha del dividendo: se multiplica el cuociente por *todo* el divisor; se restan los términos del producto, de los correspondientes del dividendo; i se hace en seguida la simplificacion que se pueda. A la derecha del residuo, se bajan los términos necesarios: se divide el primer término de la resta por el primer término del divisor, i resultará un segundo cuociente que se escribirá a la derecha del anterior: se practican luego la multiplicacion, la sustraccion i la simplificacion indicadas: se bajan nuevos términos al residuo, i se continúa así hasta acabar; o porque se obtenga un cuociente exacto, o porque no pueda continuarse la division; en cuyo caso, se pondrá el residuo con su propio signo a la derecha del cuociente, por numerador de un quebrado propio, que llevará al divisor por denominador.

P. ¿Es indispensable ordenar los términos, para la division de los polinomios?

R. Por lo ménos, importa mucho, para abreviar los cálculos i los resultados.

P. ¿Por qué se hace la multiplicacion por *todo* el divisor, cuando no se hace la division sino por el primer término de él?

R. Porque los signos + i — de que el Álgebra hace uso, permiten sin inconvenientes proceder de esta manera; corrigiendo cada cuociente, por medio de dichos signos, los errores que se cometan en los cuocientes próximos anteriores.

P. ¿Qué otra cosa debe observarse, al hacer la multiplicacion i la resta?

R. Que puede omitirse multiplicar el cuociente, por el primer término del divisor; pues, debiendo en seguida verificarse la resta, es forzosa la destruccion del primer término del dividendo.

P. Expliquemos estas reglas por medio de ejemplos.

R.

Ejemplo 1.°

$$\begin{array}{l}
a+b\,)\;a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\;(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\\
\quad -a^4-\;a^3b\\
\quad\;\; 0+3a^3b+6a^2b^2\\
\qquad\; -3a^3b-3a^2b^2\\
\qquad\quad 0+3a^2b^2+4ab^3\\
\qquad\qquad -3a^2b^2-3ab^3\\
\qquad\qquad\quad 0+\;ab^3+b^4\\
\qquad\qquad\qquad -\;ab^3-b^4\\
\qquad\qquad\qquad\quad 0\quad 0.
\end{array}$$

Ejemplo 2.°

$$\begin{array}{l}
5x^3-4x^2\,)\;25x^6-x^4-2x^3-8x^2\;(5x^3+4x^2+3x+2.\\
\quad -25x^6+20x^5\\
\qquad 0+20x^5-\;x^4\\
\qquad\; -20x^5+16x^4\\
\qquad\quad 0+15x^4-2x^3\\
\qquad\qquad -15x^4+12x^3\\
\qquad\qquad\quad 0+10x^3-8x^2\\
\qquad\qquad\qquad -10x^3+8x^2\\
\qquad\qquad\qquad\quad 0\quad 0.
\end{array}$$

Ejemplo 3.°

$$\begin{array}{l}
a-x\,)\;a^5-x^5\;(a^4+a^3x+a^2x^2+ax^3+x^4.\\
\quad -a^5+a^4x\\
\quad\;\; 0+a^4x-x^5\\
\qquad -a^4x+a^3x^2\\
\qquad\quad 0+a^3x^2-x^5\\
\qquad\qquad -a^3x^2+a^2x^3\\
\qquad\qquad\quad 0+a^2x^3-x^5\\
\qquad\qquad\qquad -a^2x^3+ax^4\\
\qquad\qquad\qquad\quad 0+ax^4-x^5\\
\qquad\qquad\qquad\qquad -ax^4+x^5\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0\quad 0.
\end{array}$$

Ejemplo 4.°

$$\begin{array}{l}
3x^2-3x\,)\;6x^4+9x^2-20x\;\left(2x^2+2x+5-\dfrac{5x}{3x^2-3x}.\right.\\
\quad -6x^4+6x^3\\
\quad\;\; 0+6x^3+9x^2\\
\qquad -6x^3+6x^2\\
\qquad\quad 0+15x^2-20x\\
\qquad\qquad -15x^2+15x\\
\qquad\qquad\quad 0-\;5x.
\end{array}$$

Ejemplo 5.°

$$
\begin{array}{l}
x^2-4x-5)\ 9x^6-46x^5+95x^2+150x\ \ (9x^4-10x^3+5x^2-30x. \\
\quad -9x^6+36x^5+45x^4 \\
\quad\quad 0-10x^5+45x^4+95x^2 \\
\quad\quad\quad +10x^5-40x^4-50x^3 \\
\quad\quad\quad\quad 0+5x^4-50x^3+95x^2 \\
\quad\quad\quad\quad\quad -5x^4+20x^3+25x^2 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0-30x^3+120x^2+150x \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad +30x^3-120x^2-150x \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0\quad 0\quad 0.
\end{array}
$$

Ejemplo 6.°

$$
\begin{array}{l}
\frac{4}{3}x-2)\ x^4-\frac{13}{6}x^3+x^2+\frac{4}{3}x-2\ \ (\frac{3}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+1. \\
\quad -x^4+\frac{3}{2}x^3 \\
\quad\quad 0-\frac{2}{3}x^3+x^2 \\
\quad\quad\quad +\frac{2}{3}x^3-x^2 \\
\quad\quad\quad\quad 0\quad 0+\frac{4}{3}x-2 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad -\frac{4}{3}x+2 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0\quad 0.
\end{array}
$$

LECCION 6.ª

QUEBRADOS LITERALES.

P. ¿Qué son quebrados literales?

R. Son divisiones indicadas bajo una forma particular, colocando el dividendo en la parte superior, i el divisor en la inferior de una raya horizontal.

P. ¿A qué reglas están sujetos los quebrados literales?

R. A las mismas, exactamente, a que están sujetos los numéricos.

P. Luego, ¿qué alteracion experimenta un quebrado, por la multiplicacion o division de sus términos?

R. Si se multiplica el numerador, aumenta el valor del quebrado; si se divide el numerador, disminuye el valor del quebrado; si se multiplica el denominador, disminuye el valor del quebrado; i si se divide el denominador, aumenta el valor del quebrado: siendo la razon de esto, la que nos enseña la Aritmética.

P. I ¿qué sucede, si los dos términos se multiplican o dividen por una misma cantidad?

R. Que el quebrado, en su valor, no experimenta alteracion.

P. Hagamos la demostracion, multiplicando los dos términos.

R. Sea $\frac{a}{b}=c$. Como el dividendo es igual al divisor multiplicado por el cuociente, será $a=bc$. Si multiplicamos estas dos cantidades por d, será $ad=bcd$. I si las dividimos por bd, será $\frac{ad}{bd}=\frac{bcd}{bd}$. Pero en el segundo miembro de esta ecuacion, bd en el dividendo i bd en el divisor se destruyen, luego $\frac{ad}{bd}=c$. Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, luego si $\frac{a}{b}=c$, i $\frac{ad}{bd}=c$, será $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$. Luego el valor del quebrado no se ha alterado, multiplicando sus términos por la letra d.

P. Hagamos la demostracion, dividiendo los dos términos.

R. Sea $\frac{ad}{bd} = c$. Como el dividendo es igual al divisor multiplicado por el cuociente, será $ad = bdc$. Si dividimos estas dos cantidades por d, será $a = bc$. Si volvemos a dividirlas por b, será $\frac{a}{b} = \frac{bc}{b}$. Pero en el segundo miembro de esta ecuacion, b en el dividendo i b en el divisor se destruyen, luego $\frac{a}{b} = c$. Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, luego si $\frac{ad}{bd} = c$, i $\frac{a}{b} = c$, será $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$. Luego el valor del quebrado no se ha alterado, dividiendo sus términos por la letra d.

P. ¿Cómo se simplifica un quebrado literal?

R. Dividiendo todos los términos del numerador i denominador, por la cantidad igual que se contenga en ellos.

P. Presentemos ejemplos.

R. El quebrado $\frac{10x^3}{15x^2}$, queda reducido a $\frac{2x}{3}$, dividiendo sus términos por $5x^2$.

El quebrado $\frac{3abx^2}{6ax}$, queda reducido a $\frac{bx}{2}$, dividiendo sus términos por $3ax$.

El quebrado $\frac{14x^2y^2-21x^3y^2}{7x^3y}$, queda reducido a $\frac{2y-3xy}{x}$, dividiendo sus términos por $7x^2y$.

I el quebrado $\frac{a-b}{a^2-b^2}$, queda reducido a $\frac{1}{a+b}$, dividiendo sus términos por $a-b$.

P. I cuando a primera vista no se conoce el divisor comun a los términos de un quebrado, ¿cómo se reduce este a su menor expresion?

R. Buscando primeramente el máximo comun divisor.

P. ¿Cuál es la regla para descubrirlo?

R. Ordenar las dos cantidades por las potencias decrecientes de una misma letra: dividir la mayor por la menor; llevando adelante la division, hasta que la letra por la cual se ordenó, tenga en el residuo exponente igual, o exponente menor que en el divisor: dividir de la misma manera la cantidad menor por el residuo: dividir, si quedare otro residuo, el primero por el segundo; luego el segundo por el tercero; i así sucesivamente, hasta obtener, si se puede, una division exacta; en cuyo caso el último divisor será el máximo divisor buscado. Pero si la division exacta fuere imposible, no tendrán las cantidades divisor comun.

P. ¿Qué otra cosa hai que advertir en la anterior operacion?

R. Que ántes de ejecutar las divisiones indicadas, es preciso suprimir las letras i los números, que sean comunes a los términos de cada divisor.

P. Presentemos ejemplos.

R. Ejemplo 1.°

El máximo comun divisor de $\frac{cx+x^2}{ca^2+a^2x}$, es $c+x$; como se ve por el resultado de la siguiente operacion:

$$cx+x^2)\ ca^2+a^2x\ ;$$

i, suprimiendo en el divisor las letras comunes,

$$c+x\Big)\ \frac{\begin{array}{l}ca^2+a^2x\\-ca^2-a^2x\end{array}}{0\qquad 0.}\ \Big(a^2.$$

Ejemplo 2.°

El máximo comun divisor de $\frac{20x^2+10x}{6x+3}$, es $2x+1$; como se ve por el resultado del procedimiento siguiente:

$$6x+3\Big)\ 20x^2+10x;$$

i, suprimiendo en el divisor los números comunes,

$$2x+1\Big)\ \frac{\begin{array}{l}20x^2+10x\\-20x^2-10x\end{array}}{0\qquad 0.}\ \Big(10x.$$

Ejemplo 3.°

El máximo comun divisor de $\frac{4x^2-36}{5x+15}$, es $x+3$; como se ve por el resultado del procedimiento siguiente:

$$5x+15\Big)\ 4x^2-36;$$

i, suprimiendo en el divisor los números comunes,

$$x+3\Big)\ \frac{\begin{array}{l}4x^2-36\\-4x^2-12x\end{array}}{0\quad -12x-36\Big)\ x+3;}\ \Big(4x.$$

i, suprimiendo números comunes, i haciendo los términos positivos,

$$x+3\Big)\ \frac{\begin{array}{l}x+3\\-x-3\end{array}}{0\quad 0.}\ \Big(1.$$

P. ¿Cómo se extraen los enteros de un quebrado literal?

R. Dividiendo el numerador entre el denominador: el cuociente serán los enteros: i si quedare algun residuo, se añadirá a los enteros un quebrado, que tenga por numerador el residuo, i por denominador el del quebrado.

P. Presentemos ejemplos.

R. Si extraemos los enteros del quebrado impropio $\frac{4x^2-5a}{2x}$, el resultado será $2x-\frac{5a}{2x}$.

Si extraemos los enteros del quebrado impropio $\frac{12a^2+4a-3c}{4a}$, el resultado será $3a+1-\frac{3c}{4a}$.

Si extraemos los enteros del quebrado impropio $\frac{10x^2y+3x^3-2b^2}{x^2}$, el resultado será $10y+3x-\frac{2b^2}{x^2}$.

I si extraemos los enteros del quebrado impropio $\frac{15a^2+2x-3c}{5a}$, el resultado será $3a+\frac{2x-3c}{5a}$.

P. ¿Cómo se reduce entero i quebrado a la especie de su quebrado?

R. Multiplicando el entero por el denominador del quebrado, i añadiendo al producto el numerador: esta suma se pondrá por numerador de un quebrado impropio, cuyo denominador será el del quebrado.

P. Presentemos ejemplos.

R. Si reducimos a la especie de su quebrado, la cantidad mixta $5x+\frac{4x}{6a^2}$, el resultado será $\frac{30a^2x-4x}{6a^2}$.

Si reducimos a la especie de su quebrado, la cantidad mixta $4ab+\frac{2c}{3a}$, el resultado será $\frac{12a^2b+2c}{3a}$.

Si reducimos a la especie de su quebrado, la cantidad mixta $3b^2-\frac{4a}{5x}$, el resultado será $\frac{15b^2x-4a}{5x}$.

I si reducimos a la especie de su quebrado, la cantidad mixta $a-x+\frac{a^2-ax}{x}$, el resultado será $\frac{a^2-x^2}{x}$.

P. ¿Cómo se da a un entero la forma de quebrado?

R. Poniendo uno de los factores del entero, por denominador; pero con exponente de signo contrario.

P. Hagamos la demostracion.

R. Sea $a^2b^3=c$. Si multiplicamos estas cantidades por b^{-3}, será $a^2b^3b^{-3}=cb^{-3}$; i $a^2=cb^{-3}$. Si las dividimos por b^{-3}, será $\frac{a^2}{b^{-3}}=\frac{cb^{-3}}{b^{-3}}$. Pero en el segundo miembro de esta ecuacion, b^{-3} en el dividendo i b^{-3} en el divisor se destruyen, luego $\frac{a^2}{b^{-3}}=c$. Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, luego si $a^2b^3=c$, i $\frac{a^2}{b^{-3}}=c$, será $a^2b^3=\frac{a^2}{b^{-3}}$. Luego el entero ha recibido la forma de quebrado, poniendo por denominador uno de los factores del numerador; pero con exponente de signo contrario.

P. ¿Qué principio de Álgebra debemos sentar, para la buena inteligencia de la anterior demostracion?

R. Que "toda cantidad cuyo exponente es cero, es igual a la unidad." Por consiguiente $b^3b^{-3}=b^{3-3}=b^0=1$.

P. Hagamos la demostracion.

R. Segun las reglas del Álgebra $\frac{b}{b}=\frac{b^1}{b^1}=b^{1-1}=b^0$.

Segun las reglas de la Aritmética $\frac{b}{b}=1$, pues toda cantidad dividida por sí misma, da por cuociente la unidad. Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, luego b elevado a cero es igual a la unidad.

P. ¿Cómo se da a un quebrado la forma de entero?

R. Pasando el denominador al numerador como factor, pero con exponente de signo contrario.

P. Hagamos la demostracion.

R. Sea $\frac{a^2}{b^{-3}}=c$. Como el dividendo es igual al divisor multiplicado por el cuociente, será $a^2=b^{-3}c$. Si multiplicamos ámbas cantidades por b^3, será $a^2b^3=b^3b^{-3}c$. Pero $b^3b^{-3}=b^{3-3}=b^0=1$, luego $a^2b^3=1\times c=c$. Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, luego si $\frac{a^2}{b^{-3}}=c$, i $a^2b^3=c$, será $\frac{a^2}{b^{-3}}=a^2b^3$.

Luego el quebrado ha recibido la forma de entero, pasando el denominador al numerador como factor; pero con exponente de signo contrario.

P. ¿Cómo se reducen los quebrados a un comun denominador?

R. Multiplicando el numerador de cada uno por los denominadores de los demas: el producto será el numerador de aquel quebrado; i multiplicando los denominadores entre sí, se obtendrá el denominador comun.

P. Presentemos ejemplos.

R. Los quebrados $\frac{3x}{5}$, $\frac{4bx}{3a}$, i $\frac{5x^2}{a}$, reducidos a un comun denominador, equivalen a $\frac{9a^2x}{15a^2}$, $\frac{20abx}{15a^2}$, i $\frac{75ax^2}{15a^2}$.

Los quebrados $\frac{2x+3}{x}$, i $\frac{5x+1}{3}$, reducidos a un comun denominador, equivalen a $\frac{6x+9}{3x}$, i $\frac{5x^2+x}{3x}$.

Los quebrados $\frac{4x^2+2x}{5}$, $\frac{3x^2}{4a}$, i $\frac{2x}{3b}$, reducidos a un comun denominador, equivalen a $\frac{48abx^2+24abx}{60ab}$, $\frac{45bx^2}{60ab}$, i $\frac{40ax}{60ab}$.

I los quebrados $\frac{7x^2-1}{2x}$, i $\frac{4x^2-x+2}{2a^2}$, reducidos a un comun denominador, equivalen a $\frac{14a^2x^2-2a^2}{4a^2x}$, i $\frac{8x^3-2x^2+4x}{4a^2x}$.

LECCION 7ª

ADICION DE QUEBRADOS.

P. ¿Cómo se suman los quebrados literales?

R. Reduciéndolos a un comun denominador, si lo tuvieren distinto; sumando luego los numeradores, i poniendo a la suma el denominador comun.

P. Presentemos ejemplos.

R.

Ejemplo 1.º

$\frac{2x+1}{3}$, $\frac{4x+2}{5}$, i $\frac{x}{7}$, dan por suma $\frac{169x+77}{105}$.

Ejemplo 2º

$\frac{5a^2+b}{3b}$, i $\frac{4a^2+2b}{5b}$, dan por suma $\frac{37a^2+11b}{15b}$.

Ejemplo 3º

$\frac{2x-5}{3}$, i $\frac{x-1}{2x}$, dan por suma $\frac{4x^2-7x-3}{6x}$.

Ejemplo 4º

$\frac{x}{x-3}$, i $\frac{x}{x+3}$, dan por suma $\frac{2x^2}{x^2-9}$.

LECCION 8ª

SUSTRACCION DE QUEBRADOS.

P. ¿Cómo se restan los quebrados literales?

R. Reduciéndolos a un comun denominador si lo tuvieren distinto; restando los numeradores, i poniendo al residuo el denominador comun.

P. Presentemos ejemplos.

R. Ejemplo 1º

$\frac{5x+1}{7}$ restado de $\frac{21x+3}{4}$, da por residuo $\frac{127x+17}{28}$.

Ejemplo 2º

$\frac{3x+1}{x+1}$ restado de $\frac{4x}{5}$, da por residuo $\frac{4x^2-11x-5}{5x+5}$.

Ejemplo 3º

$\frac{2x-3}{3x}$ restado de $\frac{4x+2}{3}$, da por residuo $\frac{4x^2+3}{3x}$.

Ejemplo 4º

$\frac{1}{a+b}$ restado de $\frac{1}{a-b}$, da por residuo $\frac{2b}{a^2-b^2}$.

LECCION 9.ª

MULTIPLICACION DE QUEBRADOS.

P. ¿Cómo se multiplican los quebrados literales?

R. Multiplicando los numeradores, se obtendrá el numerador del producto; i multiplicando los de-

nominadores, se obtendrá el denominador.

P. Presentemos ejemplos.

R. Ejemplo 1.º

$\frac{3x^2-5x}{14}$ multiplicado por $\frac{7a}{2x^3-3x}$, da por producto $\frac{3ax-5a}{4x^2-6}$, despues de practicada la simplificacion requerida.

Ejemplo 2.º

$\frac{2x}{x-1}$ multiplicado por $\frac{3x}{7}$, da por producto $\frac{6x^2}{7x-7}$.

Ejemplo 3.º

$\frac{3x^2-x}{5}$ multiplicado por $\frac{10}{2x^2-4x}$, da por producto $\frac{3x-1}{x-2}$.

Ejemplo 4.º

$\frac{2a}{a-b}$ multiplicado por $\frac{a^2-b^2}{8}$, da por producto $\frac{a^2+ab}{4}$, dividiendo los dos términos por $2a-2b$.

LECCION 10ª

DIVISION DE QUEBRADOS.

P. ¿Cómo se dividen los quebrados literales?

R. Multiplicando el numerador del dividendo por el denominador del divisor, se obtendrá el numerador del cuociente; i multiplicando el denominador del dividendo por el numerador del divisor, se obtendrá el denominador: o de otro modo, invirtiendo los términos del divisor, i procediendo lo mismo que en la multiplicacion.

P. Presentemos ejemplos.

R. Ejemplo 1.°

$\frac{4x}{7}$ dividido por $\frac{9x}{5}$, da por cuociente $\frac{20}{63}$.

Ejemplo 2.°

$\frac{4x+2}{3}$ dividido por $\frac{2x+1}{5x}$, da por cuociente $\frac{10x}{3}$, dividiendo los dos términos por $2x+1$.

Ejemplo 3.°

$\frac{x^2-9}{5}$ dividido por $\frac{x+3}{4}$, da por cuociente $\frac{4x-12}{5}$, dividiendo los dos términos por $x+3$.

Ejemplo 4.°

$\frac{9x^2-3x}{5}$ dividido por $\frac{x^2}{5}$, da por cuociente $\frac{9x-3}{x}$.

LECCION 11ª

ELEVACION A POTENCIAS, O INVOLUCION.

P. ¿Qué es potencia de una cantidad algebráica?

R. El producto que resulta de tomar la cantidad varias veces por factor.

P. ¿Qué division se hace de las potencias?

R. La misma que en la Aritmética, a saber: potencias segundas o cuadradas, terceras o cúbicas, &.ª &.ª

P. ¿Qué es lo que determina el grado de las potencias?

R. El número de veces que deba la raíz entrar como factor, para formar la potencia; siendo entónces las multiplicaciones, tantas ménos una, como unidades se contengan en el exponente de la potencia.

P. ¿A cuántas cosas hai que atender para la involucion de una cantidad?

R. A tres, a saber: a los signos, a los coeficientes, i a los exponentes.

P. ¿Cuál es la regla de los signos?

R. Si el exponente fuere par, el signo de la potencia siempre será +: si el exponente fuere impar, el signo de la potencia será el de la raíz.

P. ¿Cuál es la regla de los coeficientes?

R. Los coeficientes deben elevarse a la potencia indicada por el exponente de la potencia.

P. ¿Cuál es la regla de los exponentes?

R. Los exponentes de las letras, llamados tambien de las dimensiones, deben multiplicarse por el exponente de la potencia: lo cual se concibe sin la menor dificultad, teniendo presente que la elevacion a potencias, es el caso de la multiplicacion en que los factores son iguales.

P. ¿Cómo, pues, se eleva un monomio a una potencia de cualquier grado?

R. Teniendo presente, i practicando con la debida regularidad, lo establecido sobre los signos, los coeficientes i los exponentes.

P. Aclarémoslo con ejemplos.

R. Ejemplo 1º

El cuadrado del monomio

$$2a^3b^25c, \text{ es } 4a^6b^425c^2.$$

Ejemplo 2.º

El cubo del monomio

$$3x^24zy^5, \text{ es } 27x^664z^3y^{15}.$$

Ejemplo 3.º

El cuadro–cuadrado del monomio

$$2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{5}{2}}, \text{ es } 16a^2b^6c^{10}.$$

P. I ¿cómo se eleva un polinomio a una potencia de cualquier grado?

R. Del mismo modo que en la Aritmética; es decir: haciendo entrar el polinomio como factor, tantas veces como unidades tenga el exponente de la potencia.

P. Aclarémoslo con ejemplos.

R. Ejemplo 1º

El cuadrado del polinomio

$$3x^2+2x+5, \text{ es } 9x^4+12x^3+34x^2+20x+25.$$

Ejemplo 2.º

El cubo del polinomio

$$3x-5, \text{ es } 27x^3-135x^2+225x-125.$$

P. ¿Cómo se eleva un quebrado a una potencia cualquiera?

R. Elevando a dicha potencia su numerador i denominador. Así el cuadrado de $\frac{a}{b}$, es $\frac{a^2}{b^2}$; i el cubo de $\frac{a^2}{b^2}$, es $\frac{a^6}{b^6}$.

P. ¿Qué demostracion puede hacerse por medio del Álgebra, con respecto a los elementos del cuadrado de un binomio?

R. La de que el cuadrado de un binomio consta de tres partes, a saber: cuadrado del primer término, duplo del primero por el segundo, i cuadrado del segundo. En efecto, el cuadrado de $a+b$, es $a^2+2ab+b^2$.

P. I ¿cuál puede hacerse por medio del Álgebra, con respecto a los elementos del cubo de un binomio?

R. La de que el cubo de un binomio consta de cuatro partes, a saber: cubo del primer término, triplo cuadrado del primero multiplicado por el segundo, triplo del primero por el cuadrado del segundo, i cubo del segundo. En efecto, el cubo de $a+b$, es $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

LECCION 12ª

EXTRACCION DE RAÍCES, O EVOLUCION.

P. ¿Qué es raíz de una cantidad algebráica?

R. La cantidad que, tomada varias veces por factor, produce la potencia de la misma cantidad.

P. ¿Qué division se hace de las raíces?

R. La misma que en la Aritmética, a saber: raíces segundas o cuadradas, terceras o cúbicas, &.ª &ª.

P. ¿Qué es lo que determina el grado de las raíces?

R. El número de veces que se tome la raíz como divisor de la potencia, hasta encontrarla en el cuociente; siendo entónces las divisiones, tantas ménos una, como unidades se contengan en el exponente de la raíz.

P. ¿A cuántas cosas hai que atender, para la evolucion de una cantidad?

R. A tres, a saber: a los signos, a los coeficientes, i a los exponentes.

P. ¿Cuál es la regla de los signos?

R. Si el exponente fuere par, el signo de la raíz será el de ambigüedad: si el exponente fuere impar, el signo de la raíz será el de la potencia.

P. ¿Cuál es la regla de los coeficientes?

R. De los coeficientes debe extraerse la raíz indicada por el exponente radical.

P. ¿Cuál es la regla de los exponentes?

R. Los exponentes de las letras, llamados también de las dimensiones, deben ser divididos por el exponente de la raíz: lo cual se concibe sin la menor dificultad, teniendo presente que la extraccion de raíces, es operacion contraria de la elevacion a potencias. Si la division exacta fuere imposible, se dejará indicada en forma de quebrado.

P. ¿Tienen todas las cantidades raíz exacta de cualquier grado?

R. De ninguna manera; pues nó siempre son las cantidades, potencias exactas de la raíz pedida.

P. ¿Con qué nombres se designan las raíces exactas?

R. Con los de *racionales* i *conmensurables*.

P. I ¿las que no pueden extraerse con exactitud?

R. Se llaman *números sordos, irracionales* e *inconmensurables*.

P. ¿Cómo, pues, se extrae de un monomio, la raíz de un grado cualquiera?

R. Teniendo presente, i practicando con la debida regularidad, lo establecido sobre los signos, los coeficientes, i los exponentes.

P. Aclarémoslo con ejemplos.

R. Ejemplo 1.º

La raíz cuadrada del monomio

$$4a^6b^4 25c^2 \text{, es } \pm 2a^3b^2 5c.$$

Ejemplo 2º

La raíz cúbica del monomio

$$27x^6 64z^3y^{15} \text{, es } +3x^2 4zy^5.$$

Ejemplo 3.°

La raíz cuadro-cuadrada del monomio

$$16a^2b^6c^{10}, \text{ es } \pm 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{5}{2}}.$$

P. I ¿cómo se extrae de un polinomio, la raíz de un grado cualquiera?

R. Del mismo modo que en la Aritmética; siendo más frecuentes, lo mismo que en ella, los casos de la extraccion de raíces segundas i terceras.

P. Aclarémoslo con ejemplos.

R.

Ejemplo 1.°

La raíz cuadrada del polinomio

$$9x^4+12x^3+34x^2+20x+25, \text{ es } 3x^2+2x+5.$$

Ejemplo 2.°

La raíz cúbica del polinomio

$$27x^3-135x^2+225x-125, \text{ es } 3x-5.$$

P. ¿Cómo se extrae de un quebrado, la raíz de un grado cualquiera?

R. Extrayendo dicha raíz de su numerador i denominador. Así, la raíz cuadrada de $\frac{a^2}{b^2}$, es $\frac{a}{b}$; i la raíz cúbica de $\frac{a^6}{b^6}$, es $\frac{a^2}{b^2}$.

LECCION 13.ª

CANTIDADES RADICALES.

P. ¿Qué son cantidades radicales?

R. Las que están afectadas por el signo radical.

P. ¿Qué orígen tienen los cálculos con las cantidades radicales?

R. El hecho cierto de que en muchas ocasiones, no tienen raíz exacta los elementos de los cálculos; siendo preciso aproximarla por un trabajo fastidioso. Para evitar esto, los algebristas han excogitado el medio directo, de ejecutar con las cantidades radicales las mismas operaciones que con las raíces; i practicar luego, al fin de sus cálculos, sobre un simple resultado, la extraccion requerida.

P. ¿Qué operaciones se ejecutan con ellas?

R. Las mismas que con las no radicales: *adicion*, *sustraccion*, *multiplicacion* i *division*.

P. ¿Cómo se suman las cantidades radicales?

R. Colocando los sumandos, unos a continuacion de otros, i practicando en seguida la simplificacion que se pueda. Pero en cuanto a esto, es preciso observar, que para que los términos sean semejantes, no basta que sean iguales las letras i sus exponentes, sino que tambien debe ser igual el exponente radical en todos.

P. Expliquemos estas reglas por medio de ejemplos.

R.

Ejemplo 1.°

Las cantidades radicales $\sqrt{x} + 4\sqrt{x} - \sqrt[3]{z}$, dan por suma $5\sqrt{x} - \sqrt[3]{z}$.

Ejemplo 2.°

Las cantidades radicales $\frac{1}{2}\sqrt[3]{a}+\frac{2}{3}\sqrt{b}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{a}$, dan por suma $\frac{2}{3}\sqrt{b}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{a}$.

P. ¿Cómo se restan las cantidades radicales?

R. Cambiando los signos del sustraendo, colocando este luego a continuacion del minuendo, i practicando en seguida la simplificacion que se pueda. Pero, en cuanto a esto, es preciso observar, que para que los términos sean semejantes, no basta que sean iguales las letras i sus exponentes, sino que tambien debe ser igual el exponente radical en todos.

P. Expliquemos estas reglas por medio de ejemplos.

R. Ejemplo 1°

Si de la cantidad radical $3\sqrt[5]{ab}$, restamos $-2\sqrt[5]{ab}$, será el residuo $5\sqrt[5]{ab}$.

Ejemplo 2°

Si de la cantidad radical $\frac{2}{3}\sqrt{4b}$, restamos $\frac{1}{2}\sqrt{4b}$, será el residuo $\frac{1}{6}\sqrt{4b}$.

P. ¿Cómo se multiplican las cantidades radicales?

R. Si los radicales fueren de un mismo grado, puede hacerse de dos maneras: o multiplicando los factores como si no fueran radicales, i anteponiendo al producto un radical del mismo grado; o dando primero a los factores exponentes fraccionarios,

que tengan por numerador el exponente de la letra, i por denominador el exponente radical; i procediendo luego como en las multiplicaciones comunes. Pero si los radicales fueren de distintos grados, se reducirán a radicales de un mismo grado, ántes de proceder a las operaciones indicadas.

P. Expliquemos estas reglas por medio de ejemplos.

R. Ejemplo 1.°

$\sqrt[7]{a^2}\times\sqrt[7]{a^5}=\sqrt[7]{a^7}=a^1=a$; o tambien:

$\sqrt[7]{a^2}\times\sqrt[7]{a^5}=a^{\frac{2}{7}}\times a^{\frac{5}{7}}=a^{\frac{7}{7}}=a^1=a$.

Ejemplo 2.°

$3\sqrt{2ab^3}\times 5\sqrt{4a^3bx}=15\sqrt{8a^4b^4x}=15a^2b^2\sqrt{8x}$; o tambien:

$3\sqrt{2ab^3}\times 5\sqrt{4a^3bx}=3\left(2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}\right)\times 5\left(4a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\right)$
$=15\times 8a^2b^2x^{\frac{1}{2}}=15a^2b^2\sqrt{8x}$.

P. ¿Cómo se dividen las cantidades radicales?

R. Si los radicales fueren de un mismo grado, puede hacerse de dos maneras: o dividiendo los términos como si no fueran radicales, i anteponiendo al cuociente un radical del mismo grado; o dando primero a los términos exponentes fraccionarios, que tengan por numerador el exponente de la letra, i por denominador el exponente radical; i procediendo luego como en las divisiones comunes. Pero si los radicales fueren de distintos grados, se reducirán a radicales de un mismo grado, ántes de proceder a las operaciones indicadas.

P. Expliquemos estas reglas por medio de ejemplos.

R. Ejemplo 1°

$$\frac{\sqrt[4]{4ac}}{\sqrt[4]{2a}}=\sqrt[4]{\frac{4ac}{2a}}=\sqrt[4]{2c}\ ;\ \text{o tambien:}$$

$$\frac{\sqrt[4]{4ac}}{\sqrt[4]{2a}}=\frac{4a^{\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{4}}}{2a^{\frac{1}{4}}}=2c^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2c^{1}}=\sqrt[4]{2c}\,.$$

Ejemplo 2.°

$$\frac{\sqrt[4]{x^2-z^2}}{\sqrt[4]{x+z}}=\sqrt[4]{\frac{x^2-z^2}{x+z}}=\sqrt[4]{x-z}\ ;\ \text{o tambien:}$$

$$\frac{\sqrt[4]{x^2-z^2}}{\sqrt[4]{x+z}}=\frac{x^{\frac{2}{4}}-z^{\frac{2}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}+z^{\frac{1}{4}}}=x^{\frac{1}{4}}-z^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{x^1-z^1}=\sqrt[4]{x-z}\,.$$

P. ¿Cómo se reducen a un mismo grado, cantidades radicales de distintos grados?

R. Multiplicando los exponentes de las letras, en cada radical, por el producto de los exponentes de los otros radicales; así se obtendrán los exponentes de las letras: i multiplicando los exponentes de los radicales entre sí, se obtendrá el exponente radical comun.

P. ¿En qué razon se funda esta regla?

R. En la misma en que está fundada, la reduccion de los quebrados numéricos a un comun denominador.

P. Presentemos ejemplos.

R. Ejemplo 1.°

$\sqrt{a^8}$ i $\sqrt[3]{a^6}=\sqrt[6]{a^{24}}$ i $\sqrt[6]{a^{12}}$: cuyas cantidades, multiplicadas, segun los métodos enseñados, nos darán:

$$\sqrt[6]{a^{24}}\times\sqrt[6]{a^{12}}=\sqrt[6]{a^{24}\times a^{12}}=\sqrt[6]{a^{36}}=a^{\frac{36}{6}}=a^6\ ;\ \text{o tambien:}$$

$$\sqrt[6]{a^{24}}\times\sqrt[6]{a^{12}}=a^{\frac{24}{6}}\times a^{\frac{12}{6}}=a^{\frac{36}{6}}=a^6\,.$$

Ejemplo 2.°

$\sqrt{b^4}$ i $\sqrt[3]{b^2}=\sqrt[6]{b^{12}}$ i $\sqrt[6]{b^4}$: cuyas cantidades, divididas, segun los métodos enseñados, nos darán:

$$\frac{\sqrt[6]{b^{12}}}{\sqrt[6]{b^4}}=\sqrt[6]{\frac{b^{12}}{b^4}}=\sqrt[6]{b^8}=b^{\frac{8}{6}}=b^1b^{\frac{2}{6}}=b\sqrt[6]{b^2}\ ;\ \text{o tambien:}$$

$$\frac{\sqrt[6]{b^{12}}}{\sqrt[6]{b^4}}=\frac{b^{\frac{12}{6}}}{b^{\frac{4}{6}}}=b^{\frac{8}{6}}=b^1b^{\frac{2}{6}}=b\sqrt[6]{b^2}\,.$$

P. ¿Cómo se eleva una cantidad radical, a una potencia de cualquier grado?

R. Elevando al grado indicado la cantidad afectada por el radical, i anteponiendo a la potencia obtenida, el mismo radical que tenga la raiz.

P. Presentemos ejemplos.

R. El cuadrado de $\sqrt[7]{ab}$, es $\sqrt[7]{a^2b^2}$ · i el cubo de $\sqrt[5]{xz}$, es $\sqrt[5]{x^3z^3}$.

P. ¿Cómo se extrae de una cantidad radical, la raiz de un grado cualquiera?

R. Si los exponentes de las dimensiones o letras fueren divisibles por el de la raíz, se extraerá la raíz propuesta de la cantidad afectada por el radical, i se antepondrá a la raíz obtenida, el mismo radical que tenga la potencia. Pero si los exponentes de las dimensiones o letras no fueren divisibles por el de la raíz, se multiplicarán los dos exponentes, el del radical por el de la raíz, i el producto, antepuesto a la cantidad radical, será el exponente de la raíz que se busca.

P. Ejemplo de lo primero.

R.

$$\sqrt[2]{\sqrt[5]{a^4}} = \sqrt[5]{a^2}.$$

P. Ejemplo de lo segundo.

R.

$$\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^3}} = \sqrt[20]{a^3}.$$

LECCION 14.ª

CANTIDADES IMAGINARIAS.

P. ¿Qué son cantidades imaginarias?

R. Raíces de grado par, de cantidades negativas.

P. ¿Por qué se les da este nombre?

R. Porque pedirnos la raíz par de una cantidad negativa, es pedirnos una cantidad que, multiplicada por sí misma un número par de veces, dé un producto negativo; lo cual es imposible, pues + por + da siempre +, i − por − tambien da +, cuando estos signos se multiplican un número par de veces.

P. Siendo, pues, imposibles las cantidades imaginarias, ¿por qué razon el Álgebra se ocupa de ellas?

R. Porque por su medio se obtienen muchas veces, valores positivos bastante notables; i porque, si la resolucion de un problema algebráico da por resultado una cantidad imaginaria, esto sólo es una prueba de que la cuestion es imposible.

P. ¿Qué operaciones se practican con las cantidades imaginarias?

R. Las mismas que con las radicales, a que las imaginarias pertenecen.

P. ¿Cómo se suman las cantidades imaginarias?

R. Colocando los sumandos, unos a continuacion de otros, i practicando en seguida la simplificacion que se pueda. Pero, en cuanto a esto es preciso observar, que para que los términos sean semejantes, no basta que sean iguales las letras i sus exponentes, sino que tambien debe ser igual el exponente radical en todos.

P. Expliquemos estas reglas por medio de ejemplos.

R. Ejemplo 1.º

Las cantidades imaginarias $\sqrt{-x} + 4\sqrt{-x} - \sqrt[4]{-z}$, dan por suma $5\sqrt{-x} - \sqrt[4]{-z}$.

Ejemplo 2.°

Las cantidades imaginarias $\frac{1}{2}\sqrt[4]{-a}+\frac{2}{3}\sqrt{-b}-\frac{3}{4}\sqrt[4]{-a}$, dan por suma $\frac{2}{3}\sqrt{-b}-\frac{1}{4}\sqrt[4]{-a}$.

P. ¿Cómo se restan las cantidades imaginarias?

R. Cambiando los signos del sustraendo; colocando este luego a continuacion del minuendo; i practicando en seguida la simplificacion que se pueda. Pero, en cuanto a esto es preciso observar, que para que los términos sean semejantes, no basta que sean iguales las letras i sus exponentes, sino que tambien debe ser igual el exponente radical en todos.

P. Expliquemos estas reglas por medio de ejemplos.

R. Ejemplo 1.°

Si de la cantidad imaginaria $3\sqrt[4]{-ab}$, restamos $-2\sqrt[4]{-ab}$, será el residuo $5\sqrt[4]{-ab}$.

Ejemplo 2.°

Si de la cantidad imaginaria $\frac{2}{3}\sqrt{-4b}$, restamos $\frac{1}{3}\sqrt{-4b}$, será el residuo $\frac{1}{3}\sqrt{-4b}$.

P. ¿Cómo se multiplican las cantidades imaginarias?

R. O por los dos métodos enseñados para la multiplicacion de las radicales, pues las cantidades imaginarias son radicales; o descomponiendo cada expresion en dos factores diferentes, uno real que sea un radical que tenga debajo la cantidad positiva,

i otro imaginario que sea un radical que contenga la unidad con signo negativo.

P. Expliquemos con un ejemplo la descomposicion en dos factores.

R. La expresion imaginaria $\sqrt{-a}$, es igual a $\sqrt{-1a}$ $=\sqrt{-1\times a}=\sqrt{-1}\times\sqrt{a}$.

P. ¿A qué es igual $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$?

R. Es igual a -1; porque $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$, es igual a $\sqrt{-1^2}=-1^{\frac{2}{2}}=-1^1=-1$.

P. Presentemos ejemplo de multiplicacion de cantidades imaginarias, por el último método.

R. $\sqrt{-x}\times\sqrt{-z}=\left(\sqrt{x}\sqrt{-1}\right)\times\left(\sqrt{z}\sqrt{-1}\right)$

$=\left(\sqrt{x}\sqrt{z}\right)\times\left(\sqrt{-1}\sqrt{-1}\right)=\sqrt{xz}\times-1$

$=-\sqrt{xz}$.

P. ¿Cómo se dividen las cantidades imaginarias?

R. O por los dos métodos enseñados para la division de las radicales, pues las cantidades imaginarias son radicales; o descomponiendo cada expresion en dos factores diferentes, uno real que sea un radical que tenga debajo la cantidad positiva, i otro imaginario que sea un radical que contenga la unidad con signo negativo.

P. Presentemos ejemplo de division de cantidades imaginarias, por el último método.

R. $$\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-z}}=\frac{\sqrt{x}\ \sqrt{-1}}{\sqrt{z}\ \sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{z}}=\sqrt{\frac{x}{z}}.$$

LECCION 15.ª

ANÁLISIS ALGEBRÁICO.

P. ¿Qué es análisis algebráico?

R. La parte del Álgebra que se ocupa de la resolucion de las *ecuaciones*.

P. ¿Qué se entiende por *ecuacion*?

R. Toda expresion de dos cantidades, unidas entre sí por el signo de igualdad.

P. ¿Cómo se distinguen estas dos cantidades?

R. Con los nombres de *primer miembro* i de *segundo miembro*: llamándose *primero* el que va delante; i *segundo* el que va detras, o inmediatamente despues del expresado signo.

P. ¿Cuántas clases de cantidades tienen entrada en las ecuaciones?

R. Dos, a saber: unas conocidas que se llaman *datos*, i se representan por medio de números, o con las primeras letras del alfabeto; i otras desconocidas que se denominan *incógnitas*, i se señalan ordinariamente con las últimas letras del abecedario.

P. ¿Qué se entiende por *grado* en una ecuacion?

R. El mayor exponente que lleva la incógnita.

P. ¿Cómo se clasifican las ecuaciones?

R. Llámanse *ecuaciones de 1er. grado*, aquellas en que es 1 el exponente de la incógnita; *ecuaciones de 2.º grado*, aquellas en que es 2 el mayor exponente de la incógnita; *ecuaciones de 3er. grado*, aquellas en que es 3 el mayor exponente de la incógnita, &.ª, &ª. Así, $ax+b=c-x$, es ecuacion de *1er. grado*: $ax+x^2=4$, es ecuacion de *2.º grado*: i $ax^3+x^5=7-x$, es ecuacion de *5.º grado*.

P. ¿De qué otro modo se dividen las ecuaciones?

R. En *determinadas* e *indeterminadas*.

P. ¿Cuáles son las determinadas?

R. Las que incluyen una sola incógnita; por ejemplo: $ax=8$; $x^2+x=36$.

P. ¿Cuáles son las indeterminadas?

R. Las que encierran más de una incógnita; por ejemplo: $x+y=\frac{1}{6}$; $2x-y^3=z^4$.

P. ¿Cuál es la regla para señalar el grado, en las ecuaciones indeterminadas?

R. Sumar los exponentes de todas las incógnitas, del término que se encuentre con mayor número de estas: la suma dará el grado. Así, $bx=cy$, es ecuacion de *1er. grado*, porque en cada término hai una incógnita con la unidad por exponente; i $ax^3+by^4z^5=x^2+7$, es ecuacion de *9.º grado*, porque en el 2.º término del 1er. miembro, hai dos incógnitas, y z, cuyos exponentes sumados componen 9.

P. ¿Qué otra division se hace de las ecuaciones?

R. En *puras* o *simples*, i *mixtas*, *compuestas* o *afectas*.

P. ¿Cuáles son las puras o simples?

R. Las que contienen una vez la incógnita, con el exponente que da nombre a la ecuacion: como $a+x^2=6$.

P. ¿Cuáles son las mixtas, compuestas o afectas?

R. Las que llevan la misma incógnita en diferentes términos: en uno, con el exponente que da nombre a la ecuacion; i en los otros términos, con exponente menor: como $x^3+3x^2+a=b$.

P. ¿Se hace de las ecuaciones, alguna otra division?

R. Se dividen tambien en *numéricas*, i *algebráicas* o *literales*.

P. ¿Qué son ecuaciones numéricas?

R. Aquellas cuyos datos, todos son números: como $x^3+x=12$.

P. ¿Qué son ecuaciones literales o algebráicas?

R. Aquellas en que todos, o algunos de los datos, se encuentran representados por medio de letras: como $x-b=c$; $x^2+c=25$.

P. ¿Qué se entiende por *plantear* una cuestion algebráica; *plantear* o *cifrar* un problema en ecuacion?

R. Es expresar en ecuaciones, todas las condiciones del problema; o lo que es lo mismo, traducir la cuestion, del lenguaje comun al lenguaje algebráico.

P. ¿Pueden darse reglas para esta operacion?

R. La única regla es el sentido o exámen detenido de la cuestion; i la representacion, por medio de signos, de las relaciones entre la incógnita i las cantidades conocidas.

P. ¿Qué es *descubrir* o *despejar* una incógnita?

R. Es dejarla sola en un miembro de la ecuacion; con la unidad por coeficiente, con la unidad por exponente, con la unidad por divisor, sin cantidades que la acompañen, i con el signo positivo.

P. ¿Ofrece este despejo alguna dificultad?

R. Ninguna absolutamente; pues él está fundado en el axioma conocido, de que "si con cantida-

des iguales se practican operaciones iguales, los resultados deben ser iguales".

P. ¿Cuál es, pues, la regla general, para el despejo de las incógnitas?

R. "Practicar, en ámbos miembros, operaciones contrarias, a las que indiquen las cantidades que las afecten o acompañen".

P. ¿De cuántos modos pueden los datos estar unidos a las incógnitas?

R. De siete, a saber: por vía de suma; por vía de resta; por vía de multiplicacion; por vía de division; puede mostrarse la incógnita elevada a una potencia; puede aparecer indicando que se le extraiga una raíz; i puede ella misma presentarse como exponente potencial.

P. Despejemos la incógnita en el primer caso, o cuando un dato la acompañe por vía de suma.

R. Sea la ecuacion propuesta, $x+2=4$. Como el número 2 acompaña a la incógnita en el 1er. miembro por vía de suma, pasará al segundo por vía de resta, o restaremos 2 de uno i otro miembro; i la x quedará sola, o despejada de esta manera: $x=4-2=2$.

P. Despejemos la incógnita en el segundo caso, o cuando un dato la acompañe por vía de resta.

R. Sea la ecuacion propuesta, $x-2=4$. Como el número 2 acompaña a la incógnita en el 1er. miembro por vía de resta, pasará al 2.° por vía de suma, o añadiremos 2 a uno i otro miembro; i la x quedará sola, o despejada de esta manera: $x=4+2=6$.

P. Despejemos la incógnita en el tercer caso, o cuando un dato la acompañe por vía de multiplicacion.

R. Sea la ecuacion propuesta, $2x=4$. Como el número 2 acompaña a la incógnita en el 1er. miembro por vía de multiplicacion, pasará al 2.° por vía de division, o dividiremos por 2 uno i otro miembro; i la x quedará sola, o despejada de esta manera: $x=\frac{4}{2}=2$.

P. Despejemos la incógnita en el cuarto caso, o cuando un dato la acompañe por vía de division.

R. Sea la ecuacion propuesta $\frac{x}{2}=4$. Como el número 2 acompaña a la incógnita en el 1er. miembro por vía de division, pasará al 2.° por vía de multiplicacion, o multiplicaremos por 2 uno i otro miembro; i la incógnita quedará sola, o despejada de esta manera: $x=4\times2=8$.

P. Despejemos la incógnita en el quinto caso, o cuando se muestre elevada a una potencia cualquiera.

R. Sea la ecuacion propuesta $x^2=4$. Como el número 2 acompaña a la incógnita como exponente de una potencia, pasará al 2.° miembro como exponente de una raíz, o extraeremos de uno i otro miembro la raíz indicada por el exponente; i la incógnita quedará sola, o despejada de esta manera: $x=\sqrt[2]{4}=2$.

P. Despejemos la incógnita en el sexto caso, o cuando aparezca indicando que se le extraiga una raíz.

R. Sea la ecuacion propuesta $\sqrt[2]{x}=4$. Como el número 2 acompaña a la incógnita como exponente de una raíz, pasará al 2.° miembro como exponente de una potencia, o elevaremos uno i otro miembro a la potencia indicada por el exponente; i la incógnita quedará sola, o despejada de esta manera: $x=4^2=16$.

P. Despejemos la incógnita en el séptimo caso, o cuando ella misma se presente como exponente potencial.

R. Sea la ecuacion propuesta, $100^x=10.000$. Como cantidades iguales tienen logaritmos iguales, será L 100^x = L 10.000. Como para elevar a una potencia en el sistema logarítmico, se multiplica el exponente de la potencia por el logaritmo de la raíz, será xL 100 = L 10.000. Como el logaritmo de 100 es 2, i el logaritmo de 10.000 es 4, será $x\times2=4$. I como el número 2 acompaña a la incógnita por vía de multiplicacion, pasará al 2.° miembro por vía de division, o dividiremos por 2 uno i otro miembro; i la incógnita quedará sola, o despejada de esta manera: $x=\frac{4}{2}=2$.

P. ¿Qué debe hacerse, para el despejo de la incógnita, cuando esta se presenta con signo negativo?

R. Se le dará el signo positivo, multiplicando por -1 todos los términos de la ecuacion: lo cual equivale a dar a los términos, signos contrarios a los que ántes tenían.

LECCION 16.ª

ECUACIONES DE 1er. GRADO, CON UNA SOLA INCÓGNITA.

P. ¿Qué son *ecuaciones de 1er. grado*?

R. Aquellas en que es 1 el mayor exponente de la incógnita.

P. ¿Sobre qué reglas está fundada la resolucion de estas ecuaciones?

R. Sobre 3 principales, a saber:

"1.ª Si en la ecuacion hubiere quebrados, multiplíquese cada entero por los denominadores de los quebrados, i el numerador de cada quebrado por los denominadores de los demas: lo cual no altera el valor de la ecuacion; porque, si cantidades iguales se multiplican por una misma cantidad, los resultados deben ser iguales".

"2.ª Toda cantidad puede ser trasladada de uno a otro miembro, con signo contrario: lo cual no altera el valor de la ecuacion; porque, si a cantidades iguales se añaden o quitan cantidades iguales, los resultados deben ser iguales".

"3.ª Si la incógnita tuviere coeficiente, divídanse ámbos miembros por dicho coeficiente: lo cual no altera el valor de la ecuacion; porque, si cantidades iguales se dividen por una misma cantidad, los resultados deben ser iguales".

P. Luego, ¿ cómo se resuelven, por regla general, las *ecuaciones de* 1er. *grado con una sola incógnita*?

R. De esta manera:

"Elimínense los quebrados, si los hubiere; poniendo en práctica la Regla 1.ª.

Pásense al 1er. miembro las cantidades desconocidas, i al 2.° las conocidas; poniendo en práctica la Regla 2.ª.

Despéjese la incógnita o déjesela sola; poniendo en práctica la Regla 3.ª".

P. Presentemos un ejemplo.

R. Se nos pide la resolucion del siguiente problema, que fué el epitafio del inventor del Álgebra, tal como se encuentra en la Anthología griega:

Diofanto pasó en la infancia UN SEXTO *de los*

años que vivió: pasó UN DUODÉCIMO *en la adolescencia: en seguida contrajo matrimonio; i permaneció en esta union* UN SÉPTIMO *de su vida, aumentado en* CINCO *años, ántes de tener un hijo; al cual sobrevivió* CUATRO *años, i el cual no alcanzó a vivir sino la* MITAD *del tiempo que su padre vivió.—Se piden los años que vivió Diofanto.*

Plantearemos el problema de esta manera; suponiendo que es x la edad pedida:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x.$$

Haciendo desaparecer los quebrados, tendremos:

$$168x+84x+144x+5.040+504x+4.032=1.008x.$$

Pasando al 1er. miembro, todos los términos en que está la incógnita:

$$168x+84x+144x+504x-1.008x=-5.040-4.032.$$

Simplificando:

$$-108x=-9.072.$$

Haciendo la incógnita positiva, multiplicando por -1:

$$108x=9.072.$$

I despejando:

$$x=\frac{9.072}{108}=84$$ AÑOS, EDAD DE DIOFANTO CUANDO MURIÓ.

P. ¿Podría seguirse otro método, para la eliminacion de los quebrados?

R. Podría multiplicarse la x por el producto de los denominadores de todos los quebrados; i tomar exactamente del coeficiente de la incógnita, las partes alicuotas que los quebrados determinen. Pero entónces, no podría obtenerse directamente el valor de la incógnita; sino que habría que multiplicar, obtenido ya el despejo, el resultado de la operacion por el coeficiente primitivo.

P. Demostrémoslo con el mismo ejemplo.

R. Multiplicada la x por el producto de los denominadores de los quebrados, i tomadas de este producto las partes alicuotas correspondientes, tendremos:

$$168x+84x+144x+5+504x+4=1.008x.$$

Transponiendo:

/+504x $$168x+84x+144x-1.008x=-5-4.$$

Simplificando:

$$-108x=-9.$$

Haciendo la incógnita positiva:

$$108x=9.$$

Despejando:

$$x=\tfrac{9}{108}=\tfrac{1}{12}.$$

I multiplicando este valor por el coeficiente primitivo, será:

$$\tfrac{1}{12}\times 1.008=84.$$

P. Dadas la suma i la diferencia de dos cantidades, ¿por qué medio sencillo podría encontrarse el valor de cada una, sin necesidad de ecuacion?

R. "La cantidad *mayor* es siempre igual a la mitad de la suma, *más* la mitad de la diferencia; i la *menor* es siempre igual a la mitad de la suma, *ménos* la mitad de la diferencia."

P. Hagamos la demostracion.

R. Sea s la suma de las dos cantidades, d su diferencia, i x la cantidad menor. Si la menor es x, la mayor será $x+d$; i $x+x+d$, o $2x+d=s$: luego $2x=s-d$; i $x=\frac{s-d}{2}$: lo que indica el valor de la cantidad *menor*.—Ahora bien, si la menor es $\frac{s-d}{2}$, la mayor será $\frac{s-d}{2}+d=\frac{s-d+2d}{2}=\frac{s+d}{2}$: lo que indica el valor de la cantidad *mayor*.

P. Aclaremos la doctrina por medio de un ejemplo.

R. Si se nos propone determinar las edades de dos hermanos, las cuales sumadas dan 24 años, i restadas producen 6, podríamos, representando por x la edad del menor, plantear el problema de esta manera: $x+x+6=24$; i $2x=24-6=18$; i $x=\frac{18}{2}=9$ años. I conocida de este modo la edad del menor, es claro que la del mayor será $9+6=15$ años.

Pero, aplicando la regla de la proposicion que explicamos, diremos:

$$\begin{array}{rl} & \frac{1}{2} \text{ de } 24 = 12 \\ + & \frac{1}{2} \text{ de } \ \ 6 = \ \ 3 \\ \hline & \text{Total} \quad 15 \text{ años, edad del } \textit{mayor}. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \frac{1}{2} \text{ de } 24 = 12 \\ - & \frac{1}{2} \text{ de } \ \ 6 = \ \ 3 \\ \hline & \text{Residuo} \quad 9 \text{ años, edad del } \textit{menor}. \end{array}$$

LECCION 17.ª

ECUACIONES DE 1er. GRADO, CON MÁS DE UNA INCÓGNITA.

P. ¿Sobre qué reglas está fundada la resolucion de estas *ecuaciones*?

R. Ademas de las indicadas para el caso de una incógnita, debe observarse la siguiente:

"Fórmense tantas ecuaciones, independientes unas de otras, cuantas fueren las incógnitas que hubieren entrado en el problema; combínense las ecuaciones para la eliminacion de las incógnitas; i despéjese cada incógnita por los valores de las demas".

P. ¿A qué se da el nombre de *eliminacion*?

R. A la exclusion de las incógnitas, una despues de otra, por la combinacion de las ecuaciones del modo mas conveniente; hasta llegar a una ecuacion única, de 1er. grado, con una incógnita.

P. ¿Cuántos son los métodos de eliminacion?

R. Pueden reducirse a tres: el de *adicion* i *sustraccion*, el de *reemplazo* o *sustitucion*, i el de *igualacion* o *comparacion*.

P. ¿En qué consiste el primer método, de *adicion* i *sustraccion*?

R. En hacer iguales en dos ecuaciones los coeficientes de una misma incógnita, lo cual se conseguirá por las multiplicaciones convenientes; en sumar luego estas ecuaciones, si los signos de la incógnita fueren contrarios; i en restarlas si fueren iguales, para lograr por este medio la desaparicion de aquella incógnita.

P. Presentemos un ejemplo.

R. Sean las dos ecuaciones,

$$2x+3z=13.$$
$$5x+4z=22.$$

Para hacer iguales los coeficientes de z en ambas ecuaciones, multiplicaremos por 4 los términos de la primera, i por 3 los de la segunda, de esta manera:

$$8x+12z=52.$$
$$15x+12z=66.$$

I restando las ecuaciones una de otra, por preceder a la z signos iguales, resultará como única la ecuacion siguiente:

$$7x=14; \text{ i}$$
$$x=\tfrac{14}{7}=2.$$

I buscando el valor de la z en valores de la x ya despejada, trabajando sobre cualquiera de las primeras ecuaciones, tendremos sobre la 1.ª:

$$2\times2+3z=13; \text{ i}$$
$$3z=13-4=9; \text{ i}$$
$$z=\tfrac{9}{3}=3.$$

I sobre la 2.ª:

$$5\times 2+4z=22;\ i$$
$$4z=22-10=12;\ i$$
$$z=\tfrac{12}{4}=3.$$

Luego la x vale 2, i la z vale 3; despejadas ámbas letras por el primer método de eliminacion.

P. ¿En qué consiste el segundo método, de *reemplazo* o *sustitucion*?

R. En buscar sobre *una* de las ecuaciones el valor de la incógnita que quiera eliminarse, en valores de la otra incógnita como si estuviera conocida; en sustituir a la primera incógnita, sobre la *otra* ecuacion, este valor ficticio; i en despejar la segunda incógnita, segun las reglas establecidas.

P. Hagamos la explicacion sobre el ejemplo ya propuesto.

R. Sean las dos ecuaciones,

$$2x+3z=13.$$
$$5x+4z=22.$$

El valor de la x en la primera ecuacion, será:

$$x=\frac{13-3z}{2}.$$

I sustituyendo este valor en la segunda ecuacion, tendremos:

$$5\left(\frac{13-3z}{2}\right)+4z=22.$$

I buscando el valor de la z, única incógnita que nos ha quedado, resultará:

$$z=3.$$

I sustituyendo este valor en cualquiera de las ecuaciones propuestas, por ejemplo en la segunda, encontraremos:

$$5x+4\times 3=22;\ i$$
$$5x=22-12=10;\ i$$
$$x=\tfrac{10}{5}=2.$$

Luego la x vale 2, i la z vale 3; despejadas ámbas letras por el segundo método de eliminacion.

P. ¿En qué consiste el tercer método, de *igualacion* o *comparacion*?

En buscar sobre *ámbas* ecuaciones el valor de la incógnita que quiera eliminarse, en valores de la otra incógnita como si estuviera conocida; en comparar estos dos valores en una ecuacion única con una incógnita; i en despejar esta segunda incógnita, segun las reglas establecidas.

P. Expliquémoslo con el mismo ejemplo.

R. Sean las dos ecuaciones,

$$2x+3z=13.$$
$$5x+4z=22.$$

El valor de la x, en la primera ecuacion, será:

$$x=\frac{13-3z}{2}.$$

El valor de la x, en la segunda ecuacion, será:

$$x=\frac{22-4z}{5}.$$

E igualando los dos valores, porque dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, tendremos:

LECCION 18.ª

ECUACIONES DE 2.° GRADO, CON UNA SOLA INCÓGNITA.

P. ¿Qué son ecuaciones de 2.° grado?
R. Aquellas en que es 2 el mayor exponente de la incógnita.
P. ¿Qué division se hace de ellas?
R. En *puras* o *simples*, i *mixtas*, *compuestas* o *afectas*.
P. ¿Cuáles son las puras o simples?
R. Las que sólo contienen el cuadrado de la incógnita.
P. ¿Cuáles son las mixtas, compuestas o afectas?
R. Las que contienen, ademas del cuadrado, la primera potencia de la misma incógnita.
P. ¿A qué regla está sujeta la resolucion de las primeras?
R. "Transpónganse los términos, si fuere necesario, llevando al 1er. miembro el cuadrado de la incógnita, i al 2.° todos los datos o elementos conocidos: divídanse ámbos miembros por el coeficiente de la incógnita, si esta tuviere coeficiente; i extráigase la raíz cuadrada de los dos miembros igualados".
P. Aclaremos esto con ejemplos.

R. Ejemplo 1.°

$$3x^2-4=71.$$

Transponiendo:

$$3x^2=71+4=75.$$

Dividiendo por 3:

$$x^2=\tfrac{75}{3}=25.$$

I extrayendo la raíz cuadrada:

$$x=\pm\sqrt{25}=\pm 5.$$

Ejemplo 2.°

$$5x^2-1=244.$$

Transponiendo:

$$5x^2=244+1=245.$$

Dividiendo por 5:

$$x^2=\tfrac{245}{5}=49.$$

I extrayendo la raíz cuadrada:

$$x=\pm\sqrt{49}=\pm 7.$$

Ejemplo 3°

$$\frac{4x^2+5}{9}=45.$$

Suprimiendo el denominador:

$$4x^2+5=405.$$

Transponiendo:

$$4x^2=405-5=400.$$

Dividiendo por 4:

$$x^2=\tfrac{400}{4}=100.$$

I extrayendo la raíz cuadrada:

$$x=\pm\sqrt{100}=\pm 10.$$

$$\frac{13-3z}{2}=\frac{22-4z}{5}.$$

I buscando el valor de la z, única incógnita que nos ha quedado, resultará:

$$z=3.$$

I sustituyendo este valor en cualquiera de las ecuaciones propuestas, por ejemplo en la primera, encontraremos:

$$2x+3\times3=13\,;\ \text{i}$$
$$2x=13-9=4;\ \text{i}$$
$$x=\tfrac{4}{2}=2.$$

Luego la x vale 2, i la z vale 3; despejadas ámbas letras por el tercer método de eliminacion.

P. Presentemos ejemplo de una ecuacion de 1er. grado, con más de una incógnita.

R. *Dos individuos A i B, tienen capitales diferentes.—A propone a B: dame 15 pesos de tu dinero, i tendré entónces 5 veces tanto como te quede.—B propone a A: dame 5 pesos de tu dinero, i tendré entónces, exactamente, tanto como te reste.—¿Cuál era la suma de cada uno?*

Suponiendo que sea x el capital de A, i que sea y el capital de B, el problema nos ofrece las dos siguientes ecuaciones:

$$x+15=5\left(y-15\right).$$
$$x-\ 5=y+5.$$

Practicando la multiplicacion indicada, aparecerán las ecuaciones bajo esta forma:

$$x+15=5y-75.$$
$$x-\ 5=y+\ 5.$$

Transponiendo:

$$x-5y=-75-15=-90.$$
$$x-\ y=\quad 5+\ 5=\quad 10.$$

Eliminando la x por el 1er. método, es decir, restando las ecuaciones por tener la incógnita el mismo signo, cambiaremos los signos del sustraendo, i aparecerán las ecuaciones de esta manera:

$$x-5y=-90.$$
$$-x+\ y=-10.$$

I simplificando, tendremos:

$$-4y=-100.$$

I haciendo la incógnita positiva, será:

$$4y=100.$$

I despejando la y:

$$y=\tfrac{100}{4}=25,\ \text{CAPITAL DE B.}$$

Buscando ahora el valor de la x, sobre el valor de la y que acaba de encontrarse, i en una de las ecuaciones anteriormente ordenadas, por ejemplo $x-y=10$, resultará:

$$x-25=10;\ \text{i}$$
$$x=10+25=35,\ \text{CAPITAL DE A.}$$

LECCION 18.ª

ECUACIONES DE 2.º GRADO, CON UNA SÓLA INCÓGNITA.

P. ¿Qué son ecuaciones de 2.º grado?

R. Aquellas en que es 2 el mayor exponente de la incógnita.

P. ¿Qué division se hace de ellas?

R. En *puras* o *simples*, i *mixtas*, *compuestas* o *afectas*.

P. ¿Cuáles son las puras o simples?

R. Las que sólo contienen el cuadrado de la incógnita.

P. ¿Cuáles son las mixtas, compuestas o afectas?

R. Las que contienen, ademas del cuadrado, la primera potencia de la misma incógnita.

P. ¿A qué regla está sujeta la resolucion de las primeras?

R. "Transpónganse los términos, si fuere necesario, llevando al 1er. miembro el cuadrado de la incógnita, i al 2.º todos los datos o elementos conocidos: divídanse ámbos miembros por el coeficiente de la incógnita, si esta tuviere coeficiente; i extráigase la raíz cuadrada de los dos miembros igualados".

P. Aclaremos esto con ejemplos.

R. Ejemplo 1.º

$$3x^2-4=71.$$

Transponiendo:

$$3x^2=71+4=75.$$

Dividiendo por 3:

$$x^2=\tfrac{75}{3}=25.$$

I extrayendo la raíz cuadrada:

$$x=\pm\sqrt{25}=\pm5.$$

Ejemplo 2.º

$$5x^2-1=244.$$

Transponiendo:

$$5x^2=244+1=245.$$

Dividiendo por 5:

$$x^2=\tfrac{245}{5}=49.$$

I extrayendo la raíz cuadrada:

$$x=\pm\sqrt{49}=\pm7.$$

Ejemplo 3.º

$$\frac{4x^2+5}{9}=45.$$

Suprimiendo el denominador:

$$4x^2+5=405.$$

Transponiendo:

$$4x^2=405-5=400.$$

Dividiendo por 4:

$$x^2=\tfrac{400}{4}=100.$$

I extrayendo la raíz cuadrada:

$$x=\pm\sqrt{100}=\pm10.$$

P. ¿Por qué, en las ecuaciones de 2.° grado, aparece el valor de la incógnita precedido del signo de ambigüedad?

R. Porque, siendo cierto que en las multiplicaciones, signos semejantes producen $+$, x^2 puede resultar de $+x \times +x$, i de $-x \times -x$. Luego en las ecuaciones de 2.° grado, los valores de la incógnita tienen que ser dos: uno positivo, que conviene a la cuestion tal como se enuncia; i otro negativo, que tambien le convendría, si el problema se enunciara bajo las opuestas condiciones.

P. ¿Qué subdivision se hace de las ecuaciones mixtas de 2.° grado?

R. En *completas* e *incompletas*.

P. ¿Cuáles son las completas?

R. Las que presentan, o pueden presentar por las transposiciones convenientes, un cuadrado perfecto; es decir, el cuadrado de la 1.ª parte de la raíz, más el duplo de la 2.ª por la 1.ª, más el cuadrado de la 2.ª Tales son: $x^2+2ax+a^2=c^2$; i $x^2+2ax=c^2-a^2$.

P. ¿Cuáles son las incompletas?

R. Las que no presentan, ni pueden presentar por las transposiciones convenientes, un cuadrado perfecto; sino añadiendo a sus dos miembros una determinada cantidad. Tales son: $x^2+2ax=c$; i $x^2=c-2ax$.

P. ¿Cómo se resuelven las primeras?

R. Extrayendo la raíz cuadrada de uno i otro miembro (bastando para el 1.°, extraer la del 1.° i el 3.er término, i enlazar estas dos raíces con el signo del 2.° término); i despejando luego la incógnita, segun las reglas establecidas. Así, en el ejemplo propuesto $x^2+2ax+a^2=c^2$, tendremos:

Extrayendo la raíz de los dos miembros:

$$x+a=\pm c;\ \text{i}$$

Despejando la incógnita:

$$x=\pm c-a.$$

P. ¿Cómo se resuelven las segundas?

R. Para resolverlas hai que prepararlas; o lo que es lo mismo, convertirlas de *incompletas* en *completas*.

P. ¿De qué modo se verifica esto?

R. Añadiendo a los dos miembros de las ecuaciones *incompletas*, el cuadrado de la mitad del coeficiente de la primera potencia de la incógnita: así se obtendrá un cuadrado perfecto; i se procederá a la resolucion, como se procede en las *completas*.

P. Presentemos un ejemplo.

R. Se nos pide la resolucion del siguiente problema:

Hai dos números cuya diferencia es 7; siendo la mitad de su producto más 30, igual al cuadrado del número menor.—¿Cuáles son estos dos números?

Sea x el número menor. Si el menor es x, el mayor será $x+7$; i plantearemos el problema de esta manera:

$$\frac{x\,(x+7)}{2}+30=x^2.$$

Practicando la multiplicacion indicada, tendremos:

$$\frac{x^2+7x}{2}+30=x^2.$$

Eliminando el quebrado, resultará:

$$x^2+7x+60=2x^2.$$

Transponiendo:

$$x^2-2x^2+7x=-60.$$

Simplificando:

$$-x^2+7x=-60.$$

Haciendo positivo el cuadrado de la incógnita:

$$x^2-7x=60.$$

Completando la ecuacion:

$$x^2-7x+12,25=60+12,25=72,25.$$

Extrayendo la raíz cuadrada:

$$x-3,5=\pm\sqrt{72,25}=\pm 8,5.$$

Despejando la incógnita:

$$x=8,5+3,5=12;\ \text{i tambien:}$$
$$x=-8,5+3,5=5.$$

I tomando el valor positivo, para llenar las condiciones del problema, será 12 EL NÚMERO MENOR: i $12+7=19$, EL NÚMERO MAYOR.

P. ¿Qué conviene hacer, segun práctica inglesa, cuando, siendo impar el coeficiente de la primera potencia de la incógnita, resultare ser su mitad un número mixto o fraccionario?

R. Multiplicar todos los términos de los dos lados de la ecuacion, por 4 veces el coeficiente del cuadrado de la incógnita; i despues de practicada esta operacion preparatoria, añadir para *completar*, nó el cuadrado de la *mitad*, sino el de *todo* el coeficiente, de la incógnita elevada a 1.

P. Demostrémoslo con el mismo ejemplo.

R. Si en la ecuacion $x^2-7x=60$, quisiéramos añadir para librarnos de fracciones, el cuadrado del coeficiente 7, i nó el de su mitad, multiplicaríamos ántes por 4 todos los términos de la ecuacion, i apareceria ella entónces de esta manera:

$$4x^2-28x=240.$$

I añadiendo a ámbos miembros el cuadrado de 7:

$$4x^2-28x+49=240+49=289.$$

I extrayendo la raíz cuadrada:

$$2x-7=\pm\sqrt{289}=\pm 17.$$

I despejando la incógnita:

$$x=\frac{17+7}{2}=\frac{24}{2}=12;$$

resultado exactamente igual al anterior.

LECCION 19.ª

ECUACIONES DE 2º GRADO, CON DOS INCÓGNITAS.

P. ¿Cuántos casos se presentan en las ecuaciones de este género?

R. Dos: o una de las ecuaciones es de 1er. grado; o ámbas ecuaciones son de 2.º grado.

P. ¿Qué regla debe seguirse para la resolucion del 1er. caso?

R. "Buscar primeramente sobre la ecuacion de 1er. grado, el valor de una de las incógnitas en valores de la otra; sustituir luego este valor en la ecuacion de 2.° grado; i resolver por último esta ecuacion, segun los métodos establecidos."

P. Presentemos un ejemplo.

R. Se nos pide la resolucion del siguiente problema:

Hai dos números tales, que si restamos el menor de tres veces el mayor, será el residuo 35; *i si dividimos el mayor tomado cuatro veces, por el triplo del menor aumentado en la unidad, el cuociente será igual al número menor.—¿ Cuáles son estos dos números?*

El problema da lugar a las dos siguientes ecuaciones:

$$3x - y = 35.$$
$$\frac{4x}{3y+1} = y.$$

Buscando el valor de x sobre la 1.ª ecuacion, en valores de y, como si estuviera conocida, tendremos:

$$x = \frac{35+y}{3}.$$

Sustituyendo este valor en la 2.ª ecuacion, resultará:

$$\frac{4\left(\frac{35+y}{3}\right)}{3y+1} = y.$$

Practicando la multiplicacion indicada:

$$\frac{\frac{140+4y}{3}}{3y+1} = y.$$

Multiplicando ámbos miembros por 3:

$$\frac{140+4y}{3y+1} = 3y.$$

Haciendo desaparecer el quebrado:

$$140+4y = 9y^2+3y.$$

Transponiendo:

$$4y-9y^2-3y = -140.$$

Simplificando i ordenando:

$$-9y^2+y = -140.$$

Dando signo positivo al cuadrádo de la incógnita:

$$9y^2-y = 140.$$

Multiplicando los términos por 4 veces 9:

$$324y^2-36y = 5.040.$$

Completando la ecuacion:

$$324y^2-36y+1 = 5.040+1 = 5.041.$$

Extrayendo la raíz cuadrada de uno i otro miembro:

$$18y-1=\pm 71.$$

Despejando la incógnita, con valor positivo:

$$y=\frac{71+1}{18}=4.$$

I buscando en valores de y, el valor de x en la 1.ª ecuacion:

$$3x-4=35.$$

Transponiendo:

$$3x=35+4=39.$$

I despejando:

$$x=\tfrac{39}{3}=13.$$

LUEGO LOS NÚMEROS 4 I 13, SON LOS NÚMEROS PEDIDOS.

P. ¿Qué regla debe seguirse para la resolucion del 2.° caso?

R. La mejor regla es la siguiente:

"Plantear, ante todo, rigorosamente el problema: representar el valor de una incógnita (por ejemplo x), en una tercera letra (por ejemplo m), multiplicada por la otra incógnita (por ejemplo y): convertir la incógnita y en valores de m: buscar el valor de m, segun el método prescrito: i despejar la y por el valor de m; i la x por los de m i y".

P. Presentemos un ejemplo.

R. Se nos pide la resolucion del siguiente problema:

Hai dos números tales, que el triplo cuadrado del mayor más el duplo cuadrado del menor, producen 110; i la mitad de su producto más el cuadrado del menor, dan por suma 4.—¿Cuáles son estos dos números?

El problema da lugar a las dos siguientes ecuaciones:

$$3x^2+2y^2=110.$$
$$\frac{x\times y}{2}+y^2=4.$$

Eliminando el quebrado de la 2.ª ecuacion, tendremos:

$$3x^2+2y^2=110.$$
$$x\times y+2y^2=8.$$

Representando el valor de x por my, resultará:

$$3m^2y^2+2y^2=110.$$
$$my^2+2y^2=8.$$

Convirtiendo el valor de y en valores de m:

$$y^2=\frac{110}{3m^2+2}.$$
$$y^2=\frac{8}{m+2}.$$

Igualando estos dos valores:

$$\frac{110}{3m^2+2}=\frac{8}{m+2}.$$

Eliminando quebrados:

$$110m+220=24m^2+16.$$

Transponiendo i ordenando:

$$-24m^2+110m=16-220=-204.$$

Cambiando los signos de todos los términos:

$$24m^2-110m=204.$$

Dividiendo los términos por 24:

$$m^2-\frac{110m}{24}=\frac{204}{24}.$$

Completando la ecuacion:

$$m^2-\frac{110m}{24}+\frac{12.100}{2.304}=\frac{204}{24}+\frac{12.100}{2.304}=\frac{19.584}{2.304}+\frac{12.100}{2.304}=\frac{31.684}{2.304}.$$

Extrayendo la raíz cuadrada:

$$m-\frac{110}{48}=\pm\sqrt{\frac{31.684}{2.304}}=\pm\frac{178}{48}.$$

Despejando la incógnita, con valor positivo:

$$m=\frac{178}{48}+\frac{110}{48}=\frac{288}{48}=6.$$

Luego si $m=6$, i y^2, en una de las ecuaciones anteriores, $=\dfrac{8}{m+2}$,

$$y^2=\frac{8}{6+2}=\frac{8}{8}=1.$$

I extrayendo raíces:

$$y=\pm\sqrt{1}=\pm 1.$$

Pero $x=my$; luego

$$x=6\times 1=6.$$

LUEGO LOS NÚMEROS 6 I 1, SON LOS NÚMEROS PEDIDOS.

LECCION 20ª

ECUACIONES SUPERIORES AL 2.º GRADO.

P. ¿Cuál es la opinion formada sobre esta clase de ecuaciones?

R. Que las fórmulas o expresiones inventadas para resolverlas, deben ser consideradas como símbolos curiosos, i de ninguna utilidad para la fijacion de las incógnitas; estando hoi demostrada la irresolubilidad de este problema: HALLAR LAS RAÍCES DE LAS ECUACIONES DE 3ER. GRADO EN ADELANTE, POR OPERACIONES PRACTICADAS SOBRE SUS PROPIOS COEFICIENTES.

P. ¿Qué es lo que se entiende por *raíz de una ecuacion*?

R. Toda expresion de cualquiera especie, que, sustituida a las incógnitas, reduce a *cero* el primer miembro de la ecuacion en que se encuentran.

P. I ¿no podrían servir para conducir a un resultado, las bellas series de LAGRANGE sobre los valores radicales?

R. De ningun modo; porque tales series, de ordinario, son tan divergentes, i contienen por su estructura tan crecido número de términos, que podrían llevarse a lo infinito, sin obtener jamas un resultado.

Las tres lecciones siguientes pueden suprimirse, por los que no deseen saber del ÁLGEBRA, sino lo que se enseña en los Colegios.

LECCION 21.ª

APLICACION DE LOS SIGNOS I DE LAS NOTACIONES ALGEBRÁICAS.

P. ¿A qué usos, ademas de los dichos, pueden aplicarse los preceptos del Algebra?

R. Al conocimiento de la naturaleza i de las propiedades de los números, en sistemas de numeracion que no sean el decimal.

P. ¿Qué números estudiaremos para la enunciada aplicacion?

R. LAS FRACCIONES CONTINUAS.

LAS FRACCIONES DE LAMBERT.

LOS NÚMEROS POLIGONALES.

LOS NÚMEROS FIGURADOS.

LOS NÚMEROS AMIGOS.

LOS NÚMEROS PERFECTOS. I tambien, por curiosidad, LOS CUADROS MÁGICOS HELÉNICOS; aunque muchos de estos números se explican fácilmente,

i con la claridad apetecida, omitiendo los símbolos del Álgebra.

P. ¿Qué son FRACCIONES CONTINUAS?

R. Las derivadas de una fraccion comun, por la division de sus dos términos, sucesivamente ejecutada; siendo los dividendos constantemente diferentes. Su forma es:

$$a+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\ \&^a$$

Los denominadores de estas fracciones se llaman *cuocientes incompletos*; i los elementos que las constituyen, *fracciones integrantes*.

P. ¿Cómo se hace *continua* una fraccion *comun*?

R. Por el mismo método que se observa para hallar el máximo comun divisor; es decir: dividiendo primero el término mayor por el menor; luego el menor por la primera resta; en seguida la primera resta por la segunda; i así sucesivamente: los cuocientes que vayan resultando, serán los denominadores de la *fraccion continua*; siendo siempre la unidad el numerador comun.

P. Presentemos un ejemplo.

R. La fraccion comun $\frac{1.733}{445}$, reducida a *fraccion continua*, debe escribirse de esta manera:

$$3+\frac{1}{1}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{3}.$$

P. ¿Quién fué el inventor de esta clase de fracciones?

R. Milord BROUNCKER, canciller de Inglaterra; pero fué *Huygens*, especialmente, quien se aprovechó de sus ventajas, para disminuir los numerosos dientes de su ingeniosa *máquina automática*.

P. ¿Qué son FRACCIONES DE LAMBERT?

R. Las derivadas de una fraccion comun, por la division de sus dos términos, sucesivamente ejecutada; siendo los dividendos constantemente iguales.

P. ¿Cuál es el modo de convertir en *fraccion de Lambert*, una fraccion comun?

R. Dividiendo el término mayor por el menor; lúego el mayor por la primera resta; en seguida el mayor por la segunda resta; i así sucesivamente: los cuocientes que vayan resultando, serán los denominadores de la *fraccion de Lambert*; siendo siempre la unidad el numerador comun.

P. Presentemos un ejemplo.

R. La fraccion comun $\frac{887}{1.103}$, reducida a *fraccion de Lambert*, debe escribirse de esta manera: $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5.47} - \frac{1}{5.47.50} + \frac{1}{5.47.50.367} - \frac{1}{5.47.50.367.551} + \frac{1}{5.47.50.367.551.1103}$.

P. ¿Quién fué HENRIQUE LAMBERT?

R. Un insigne matemático del siglo 18; un segundo *Pascal*, sencillo i modesto, segun la expresion de Federico el Grande. Sus fracciones nos dan las razones 22 : 7, i 355 : 113, propuestas por Arquímedes i Adriano Mecio, para designar la relacion entre la circunferencia i el diámetro.

P. ¿Qué son NÚMEROS POLIGONALES?

R. Los que, derivados de diferentes progresiones aritméticas, se aplican a la formacion de las diversas clases de polígonos.

P. ¿Qué division se hace de estos números?

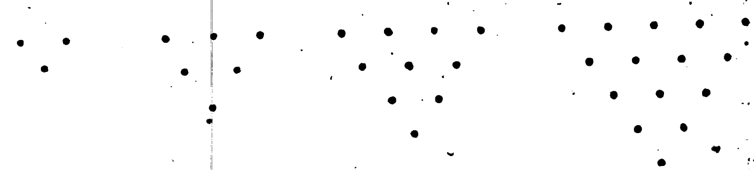
R. En *trígonos*, *cuadrados*, *pentágonos*, *hexágonos*, *heptágonos*, &.ª.

P. ¿Qué son *números trígonos*?

R. Los que resultan de sumar los términos de la progresion aritmética siguiente: ÷ 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . . . . . ; perteneciendo por consiguiente a la clase de los *trígonos*, los números 3, 6, 10, 15, 21, 28, &.ª.

P. ¿Por qué se llaman estos números *trígonos*?

R. Porque con ellos pueden formarse triángulos equiláteros, poniendo en órden tantos puntos, como unidades simples determinan; i así se demuestra con las siguientes figuras:



P. ¿Por qué fórmula algebráica son representados?

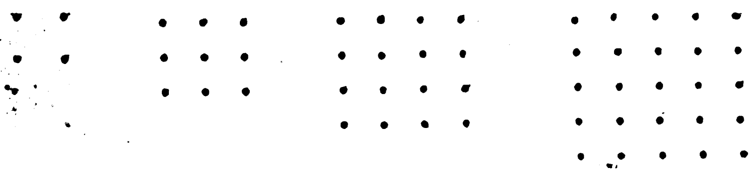
R. $\frac{1}{2}\left(n^2+n\right)$, o, $\frac{1}{2}n\left(n+1\right)$: la cual significa que, llamando n al número de puntos de cada lado, el total de los puntos de cada triángulo, es igual a la mitad de, el cuadrado del lado, más el mismo lado; o igual a la mitad del lado, multiplicada por el mismo lado más la unidad.

P. ¿Qué son *números cuadrados*?

R. Los que resultan de sumar los términos, de la progresion aritmética siguiente: ÷ 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . . . . ; perteneciendo por consiguiente a la clase de los *cuadrados*, los números 4 , 9 , 16 , 25 , 36 , 49, &.ª.

P. ¿Por qué se llaman estos números *cuadrados*?

R. Porque con ellos pueden formarse polígonos cuadrados, poniendo en órden tantos puntos, como unidades simples determinan; i así se demuestra con las siguientes figuras:



P. ¿Por qué fórmula algebráica son representados?

R. n^2: la cual significa que, llamando n al número de puntos de cada lado, el total de los puntos de cada cuadrado, es igual al cuadrado del lado.

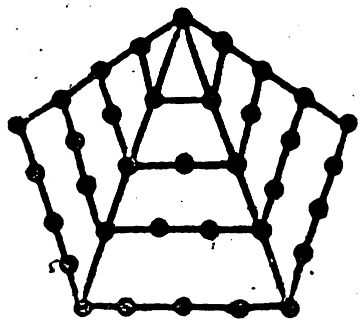
P. ¿Qué son *números pentágonos*?

R. Los que resultan de sumar los términos, de la progresion aritmética siguiente: ÷ 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . . . . ; perteneciendo por consiguiente a la clase de los *pentágonos*, los números 5 , 12 , 22 , 35 , 51 , 70, &.ª.

P. ¿Por qué se llaman estos números *pentágonos*?

R. Porque con ellos pueden formarse pentágonos regulares, poniendo en órden tantos puntos, como

unidades simples determinan; i así se demuestra con la siguiente figura:



P. ¿Por qué fórmula algebráica son representados?

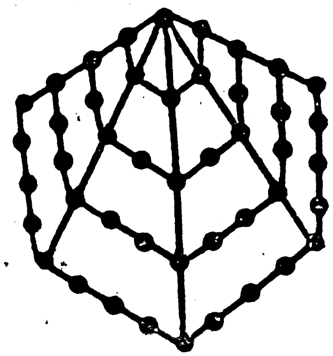
R. $\frac{1}{2}\left(3n^2-n\right)$, o, $\frac{1}{2}n\left(3n-1\right)$: la cual significa que, llamando n al número de puntos de cada lado, el total de los puntos de cada pentágono, es igual a la mitad de, 3 veces el cuadrado del lado, ménos el mismo lado; o igual a la mitad del lado multiplicada por, 3 veces el mismo lado ménos la unidad.

P. ¿Qué son *números hexágonos*?

R. Los que resultan de sumar los términos, de la progresion aritmética siguiente: ÷ 1 . 5 . 9 . 13 . 17 . 21 . . . . ; perteneciendo por consiguiente a la clase de los *hexágonos*, los números 6 , 15 , 28 , 45 , 66 , 91, &.ª.

P. ¿Por qué se llaman estos números *hexágonos*?

R. Porque con ellos pueden formarse hexágonos regulares, poniendo en órden tantos puntos, como unidades simples determinan; i así se demuestra con la siguiente figura:



P. ¿Por qué fórmula algebráica son representados?

R. $\frac{1}{2}\left(4n^2-2n\right)$: la cual significa que, llamando n al número de puntos de cada lado, el total de los puntos de cada hexágono, es igual a la mitad de, 4 veces el cuadrado del lado, ménos 2 veces el mismo lado.

P. ¿Qué método fácil debe seguirse, para representar por medio de puntos, un polígono regular cualquiera?

R. Trazar primeramente el polígono regular pedido; tirar luego desde uno de los vértices, rectas indefinidas a los otros vértices: tomar sobre estas rectas, la distancia entre los vértices i el orígen comun: unir estas divisiones por medio de paralelas a los lados del polígono; i marcar sobre estas paralelas, porciones iguales a la extension de cada lado.

P. ¿Cuál es la fórmula general para los *números polígonos*?

R. $\frac{(m-2)\,n^2-(m-4)\,n}{2}$: la cual significa que, representando por m la suma de los lados de un polígono cualquiera, i llamando n al número de puntos correspondientes a cada lado, el total de los puntos que formen el polígono, será igual, a su contorno o perímetro ménos 2, multiplicado por el cuadrado del lado, ménos el perímetro ménos 4, multiplicado por el simple lado: todo esto dividido por 2.

P. ¿Qué son NÚMEROS FIGURADOS?

R. Son series de números en progresiones aritméticas, derivadas unas de otras, en virtud de un órden regular i constante.

P. ¿Admiten estos números alguna division?

R. Se llaman *de* 1.^{er} *órden, de* 2.° *órden*, &.ª, &.ª, segun su natural distancia de la progresion aritmética primitiva.

P. ¿Cuáles son los *figurados de* 1.^{er} *órden*?

R. Los que constituyen los términos de la progresion aritmética ÷ 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . . . .

P. ¿Cuáles son los *figurados de* 2.° *órden*?

R. Los que resultan de sumar los términos de la misma progresion: tales son los números 1, 3, 6, 10, 15, 21, &.ª, que tambien se llaman *triangulares*.

P. ¿Cuáles son los *figurados de* 3.^{er} *órden*?

R. Los que resultan de las sumas sucesivas de los figurados de 2.° órden: tales son los números 1, 4, 10, 20, 35, 56, &.ª, que tambien se llaman *piramidales*.

P. ¿Trae hoi algunas ventajas el conocimiento de estos números?

R. Por mucho tiempo ocuparon ellos la seria atencion de los algebristas; porque les proporcionaban un medio fácil de formar las potencias de todos los binomios. Así, si se observa, que en el binomio $a+b$, es

la 1.ª potencia, $a+b$;
la 2.ª potencia, $a^2+2ab+b^2$;
la 3.ª potencia, $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
la 4.ª potencia, $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$;
la 5.ª potencia, $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$, &ª.

—se reconocerá fácilmente, que los coeficientes de los segundos términos, son los números *naturales* o figurados de 1.er órden; los de los terceros términos, son los números *triangulares* o figurados de 2.° órden; los de los cuartos términos, son los *piramidales* o figurados de 3.er órden; i así de los demas. Pero hoi, con las grandes ventajas que ofrece la fórmula inventada por Newton, el conocimiento de los *figurados* es de poquísima importancia.

P. ¿Qué son NÚMEROS AMIGOS?

R. Son dos números especiales, relacionados de tal manera, que cada uno compone la suma de las partes alícuotas del otro.

P. Presentemos un ejemplo.

R. 220 i 284 son *números amigos*; porque las partes alícuotas del primero, 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, i 110, dan por suma 284; i las partes alícuotas del segundo, 1, 2, 4, 71, i 142, dan por suma 220.

P. ¿Cuántos *números amigos* han llegado a descubrirse?

R. Tres pares solamente, presentados por *Schooten*.

P. ¿Se ha enseñado alguna regla, para encontrar los *números amigos*?

R. Se ha enseñado la siguiente:

Escríbase en 2.ª serie, la progresion geométrica doble, principiando por el 2.

Triplíquense sus términos, i colóquense los productos debajo de los términos correspondientes.

Quítese una unidad a cada uno de estos productos, i colóquense los residuos encima de los términos de la 2.ª serie.

Fórmese, por último, una 4.ª serie, multiplicando cada término de la 3.ª por el inmediato que está delante, i disminuyendo cada producto, ántes de escribirlo, en una unidad.—Por consiguiente, las cuatro series aparecerán de esta manera:

1.ª serie:	5	11	23	47	95	191	383.
2.ª serie:	2	4	8	16	32	64	128.
3.ª serie:	6	12	24	48	96	192	384.
4.ª serie:		71	287	1151	4607	18431	73727.

P. Expliquemos de qué modo se hace uso de estas series.

R. Tómese un número de la serie 4.ª, por ejemplo 71. Como el correspondiente 11 de la serie 1.ª, i el inmediato 5 de la misma serie, son ámbos primos como el 71, puede este producir *números amigos*; para lo cual, multiplíquese el 11 por el 5, i el producto 55, por el término 4 de la 2.ª serie: el resultado 220, es uno de los *números amigos*; encontrándose el otro, 284, multiplicando por el mismo 4, el número 71.

P. I ¿qué sucede cuando el número de la 1.ª serie, i el inmediato que está delante, no son ámbos números primos?

R. Que el número de la 4.ª serie, es incapaz de producir *amigos.* Así, 4.607 no puede producirlos; porque de los superiores correspondientes, 95 i 47, el primero es número compuesto de los factores 19 i 5. Luego no hai más *amigos* que los siguientes pares: 220 i 284, que proceden de 71; 17.296 i 18416; que proceden de 1.151; 9,363.584 i 9,437.056, que proceden de 73.727.

P. ¿Qué son NÚMEROS PERFECTOS?

R. Los que son iguales a la suma de sus propias partes alicuotas.

P. Presentemos ejemplos.

R. El 6 es un *número perfecto,* porque sus partes alicuotas 1, 2 i 3, dan por suma 6; i el 28 tambien lo es, porque $1+2+4+7+14$, que son sus partes alicuotas, producen 28.

P. ¿Cuál es la regla para descubrir los *números perfectos?*

R. Escribir los términos de la progresion doble 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, &.ª: —examinar cuáles de ellos, disminuidos en 1, son números primos; como son 2, 4, 8, 32, 128, &.ª, pues disminuidos en la unidad, dan 1, 3, 7, 31, i 127:—multiplicar cada uno de estos últimos, por el término de la progresion que inmediatamente va delante; i los productos que resulten serán *números perfectos.* Así, si multiplicamos $32-1=31$, que es un número primo, por 16, que es el término que inmediatamente va delante, resultará el *número perfecto* 496.

P. ¿Qué observacion ocurre hacer respecto de estos números?

R. Que todos van terminados por 6 o 28.

P. I ¿cuál es la demostracion que sobre ellos ha hecho Euclídes?

R. Que si 2^n-1 es un número primo, $2^{n-1}\left(2^n-1\right)$ es un *número perfecto.*—En efecto, si llamamos *n* al número 2 que es el primer término de la progresion geométrica, tendremos que 2^2 es igual a 4; que $4-1$ es igual a 3 (número primo); que 2^{2-1} es igual $2^1=2$; i que este $2\times2^2-1$ es igual a $2\times3=6$, el cual indudablemente es un *número perfecto.*

P. ¿Qué son CUADROS MÁGICOS?

R. Son verdaderos cuadrados divididos en casillas, dentro de las cuales aparecen ordenados, los términos de una progresion aritmética cualquiera; de modo que, la suma de las bandas del cuadrado, tomadas vertical, horizontal o diagonalmente, son iguales entre sí.

P. ¿Cuántas clases de *cuadros mágicos* construyeron los antiguos?

R. Construyeron sólo dos, los *impares* i los *pares;* pero los mas comunes son los *impares,* cuya formacion es mui sencilla.

P. Expliquemos cómo se forman.

R. Construido el cuadrado de una raíz impar, por ejemplo 5, se escribirán, en el órden que se quiera, i en la primera banda superior horizontal, los 5 primeros términos de la progresion aritmética propuesta; i suponiendo, para mayor claridad, que sea esta progresion la de los números naturales, se dispondrán los 5 primeros términos, caprichosamente, en el órden siguiente: 3, 2, 5, 1, 4. Se elegirá luego en esta serie un numero cualquiera, que disminuido en la unidad no mida la raíz, por ejemplo 4. Esta eleccion fijará la base del cuadrado; pues será siempre desde la 4.ª casilla de cada banda hode cada casilla es igual al número anterior, más el próximo a estè colocado encima : i cada una de las bandas, por órden descendente, principia avanzando siempre una casilla a la derecha. La vista misma del triángulo, hará mejor su descripcion.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	8	4	5	6	7	8	9
		1	3	6	10	15	21	28	36
			1	4	10	20	35	56	84
				1	5	15	25	70	126
					1	6	21	56	126
						1	7	28	84
							1	8	36
								1	9
									1

P. ¿Cuáles son las propiedades del *triángulo aritmético*?

R. Presentar :

en su 2.ª banda, los números naturales, o *figurados de* 1er. *órden*:

en la 3.ª, los triangulares, o *figurados de* 2.º *órden*:

en la 4.ª, los piramidales, o *figurados de* 3er. *órden*:

en la 5.ª, i en las siguientes, los *figurados de los otros órdenes*; i

en las paralelas a la hipotenusa, los mismos números que en las horizontales.

Pero la propiedad mas notable de este *triángulo*, es la de ofrecer en sus bandas verticales, los *coeficientes de un binomio* en todas sus potencias.

P. Demostremos que esto es cierto, con vista del *triángulo*.

R. La 2.ª banda vertical, que en su 2.ª casilla contiene la unidad, corresponde a la 1.ª potencia, en que los coeficientes son 1 i 1.

La 3.ª banda vertical, que en su 2.ª casilla contiene un 2, corresponde a la 2.ª potencia, en que los coeficientes de los 3 términos, son 1, 2 i 1.

La 4.ª banda vertical, que en su 2.ª casilla contiene un 3, corresponde a la 3.ª potencia, en que los coeficientes de los 4 términos, son 1, 3, 3 i 1.

La 5.ª banda vertical, que en su 2.ª casilla contiene un 4, corresponde a la 4.ª potencia, en que los coeficientes de los 5 términos, son 1, 4, 6, 4 i 1; i así sucesivamente.

De suerte que, si tenemos en cuenta el modo como en cada potencia van entrando los términos de un *binomio*, será fácil i facilísimo, elevar este a cualquiera potencia, si hacemos uso para tal efecto del *triángulo de Pascal*.

P. I ¿cómo van entrando en cada potencia los términos de un *binomio*?

R. El 1er. término de cualquiera potencia, es el 1er. término del *binomio*; teniendo siempre por exponente, el exponente de la potencia.

Los demas términos de cualquiera potencia (con la sola excepcion del último), contienen constantemente los dos términos del *binomio*; pero de modo que el primero de este, va perdiendo 1 de su respectivo exponente, al mismo tiempo que el 2.º del mismo, va ganando en el suyo lo que el otro pierde.

El último término de cualquiera potencia, es el 2.° término del *binomio*; teniendo siempre por exponente, el exponente de la potencia.

P. Aclaremos lo expuesto con un ejemplo.

R. Si, por ejemplo, queremos formar la 4.ª potencia de $x+y$, prescindiendo de coeficientes, tendremos, segun las reglas: $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$.

I, aplicando los coeficientes que indica el *triángulo de Pascal*, i que están contenidos en la columna vertical cuya 2.ª casilla presenta el 4, resultará que la 4.ª potencia del *binomio* $x+y$, es $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$.

P. ¿Se conocen fórmulas generales, para elevar un *binomio* a cualquiera potencia?

R. Se conoce la inventada por NEWTON, i que justamente lleva su nombre.

P. Cuál es esta fórmula?

R. Si suponemos que el *binomio* es $x+y$, i representamos por m el exponente de la potencia, la fórmula general de *Newton* se enuncia de esta manera:

$$\left(x+y\right)^m = x^m + myx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}y^2x^{m-2}$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}y^3x^{m-3}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$$

y^4x^{m-4}........; cuya admirable fórmula puede comprobarse, aplicándola a potencias de cualquier grado del *binomio*.

LECCION 23ª

PERMUTACIONES I COMBINACIONES.

P. ¿Qué son *permutaciones*?

R. Son los cambios que pueden sufrir cantidades tomadas de 2 en 2, de 3 en 3, &.ª, &.ª; atendiendo al órden en que estén colocadas.

P. ¿Qué son *combinaciones*?

R. Son los cambios que pueden sufrir cantidades tomadas de 2 en 2, de 3 en 3, &.ª &.ª; sin atender al órden en que estén colocadas.

P. ¿Cuántas *permutaciones* pueden formarse con las letras a, b, c, tomadas de 2 en 2?

R. Pueden formarse 6: ab, ac, bc, ba, ca, cb.

P. I ¿cuántas *combinaciones*?

R. Pueden formarse 3: ab, ac, bc.

P. ¿Cuántas *permutaciones* pueden formarse con las mismas letras, tomadas de 3 en 3?

R. Pueden formarse 6: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

P. I ¿cuántas *combinaciones*?

R. Solamente 1: abc.

P. ¿Cuál es la regla para encontrar el número de *permutaciones* posibles, entre varias cantidades, en determinados grupos?

R. La siguiente: Llámese n el número de las cantidades. Para grupos de 2 en 2, la fórmula será esta: $n\left(n-1\right)$; es decir, el número de las *permutaciones* será igual, al número de las cantidades, multiplicado por el mismo número disminuido en la unidad.—Para grupos de 3 en 3, la fórmula será esta: $n\left(n-1\right)\left(n-2\right)$; es decir, el número de las *permutaciones* será igual, al número de las cantidades, multiplicado por el mismo número ménos 1, multiplicado por el mismo número ménos 2; &.ª, &.ª.

P. ¿Cuál es la regla para encontrar el número de *combinaciones* posibles, entre varias cantidades, en determinados grupos?

R. La siguiente: Llámese n el número de las cantidades. Para grupos de 2 en 2, la fórmula será esta: $\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}$; es decir, el número de las *combinaciones* será igual, al número de las cantidades, multiplicado por el mismo número disminuido en la unidad; i dividido luego por 1 multiplicado por 2.—Para grupos de 3 en 3, la fórmula será esta: $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$; es decir, el número de las *combinaciones* será igual, al número de las cantidades, multiplicado por el mismo número ménos 1, multiplicado por el mismo número ménos 2; i dividido luego por 1, multiplicado por 2, multiplicado por 3; &.ª, &ª.

P. Para practicar las dos reglas por medio de ejemplos, averigüemos el número de *permutaciones* que pueden ejecutarse con 6 estudiantes, todos colocados en una sola fila.

R. Este número resultará, de $6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$.

P. I ¿el número de *combinaciones*?

R. Este número resultará, de $\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{1\,.\,2\,.\,3.\,\,4.\,\,5\,.\,6} = 1$.

P. ¿Cuántas *permutaciones* pueden hacerse con 5 banderas de diferentes colores, separadas, i formando grupos de todas las clases imaginables?

R. Las siguientes:

Separadas,		5
De 2 en 2,	5×4	$=20$
De 3 en 3,	$5\times4\times3$	$=60$
De 4 en 4,	$5\times4\times3\times2$	$=120$
De 5 en 5,	$5\times4\times3\times2\times1$	$=120$
Total de *permutaciones*,		325.

P. I ¿cuántas *combinaciones*?

R. Las siguientes:

Separadas,		5
De 2 en 2,	$\frac{5\times4}{1\,.\,2}$	$=10$
De 3 en 3,	$\frac{5\times4\times3}{1\,.\,2\,.\,3}$	$=10$
De 4 en 4,	$\frac{5\times4\times3\times2}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$	$=5$
De 5 en 5,	$\frac{5\times4\times3\times2\times1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}$	$=1$
Total de *combinaciones*,		31.

P. ¿Cuántas *permutaciones* pueden formarse con 8 flores de distinta clase, tomadas de 5 en 5?

R. 6.720; que resultan de $8\times7\times6\times5\times4$.

P. I ¿cuántas *combinaciones*?

R. 56; que resultan de $\frac{8\times7\times6\times5\times4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}$.

P. ¿Qué debe practicarse en las *permutaciones*, cuando acontece que, en un mismo grupo, concurren cantidades de una misma especie?

R. Entónces debe dividirse el número total de las *permutaciones*, por el número de ellas que habrían sido producidas, por las cantidades repetidas si hubieran sido diferentes. Así, por ejemplo, si en una palabra se encontrare dos veces la misma letra deberán dividirse las *permutaciones* por 1×2: si se encontrare 3 veces, por $1\times 2\times 3$; &.ª, &ª.

P. Presentemos ejemplos.

R. Ejemplo 1º

De la palabra VIRTUD, que consta de 6 letras, siendo estas 6 letras todas diferentes, pueden formarse, con el grupo entero, 720 *permutaciones*; que resultan de $6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$.

Ejemplo 2º

De la palabra BOGOTÁ, que consta de 6 letras, encontrándose entre ellas 2 veces la O, pueden formarse, del mismo modo, 360 *permutaciones*; que resultan de $\dfrac{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{1\ .\ 2}$.

Ejemplo 3º

De la palabra PANAMÁ, que consta de 6 letras, encontrándose entre ellas 3 veces la A, pueden formarse, de igual manera, 120 *permutaciones*; que resultan de $\dfrac{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{1\ .\ 2\ .\ 3}$.

Ejemplo 4º

De la palabra CARÁCAS, que consta de 7 letras, encontrándose entre ellas 3 veces la A, i 2 veces la C, pueden formarse, en los mismos términos, 420 *permutaciones*, que resultan de $\dfrac{7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{1\ .\ 2\ .\ 3\times 1\ .\ 2}$.

P. ¿Pueden averiguarse las *combinaciones*, por medio del TRIÁNGULO DE PASCAL?

R. Ciertamente: así, en el ejemplo de los 6 estudiantes, todos colocados en una sola fila, buscaremos el número 6 en la 2.ª serie superior horizontal; descenderemos 6 casillas sobre la correspondiente columna vertical; i allí encontraremos la cifra 1, indicando el número de *combinaciones* posibles.

Así tambien, en el ejemplo de las 8 flores, tomadas de 5 en 5, buscaremos el número 8 entre los figurados de 1.er órden; bajaremos 5 casillas sobre la respectiva columna vertical; i allí veremos las *combinaciones* posibles, representadas por el número 56.

P. I ¿pueden obtenerse los mismos resultados, por medio de la fórmula del BINOMIO DE NEWTON?

R. Indudablemente; pues los coeficientes de los términos que llevan m por delante, i son $\dfrac{m(m-1)}{1\ .\ 2}$, $\dfrac{m\ (m-1)\ (m-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$, $\dfrac{m\ (m-1)\ (m-2)\ (m-3)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4}$, &.ª, expresan precisamente, el número de *combinaciones* que pueden formarse con m cantidades, tomadas formando grupos de todos los géneros posibles.

P. ¿Qué se deduce de todo lo enseñado?

R. El hecho mui curioso de las relaciones que se observan, entre los *figurados de 1.er órden*, el *triángulo de Pascal*, la *fórmula del binomio*, i la *teoría de las combinaciones*.

NOTA.

Aunque las *proporciones* i las *progresiones* son materia de las doctrinas del ÁLGEBRA, es práctica observada en los Establecimientos de instruccion, comprender este importante estudio en la enseñanza de la ARITMÉTICA.

200 PROBLEMAS PARA LA PRÁCTICA.

1. Una canasta contiene 30 frutas, entre peras i manzanas; pero cuatro veces más de las primeras, que de las segundas.—¿Cuántas son las frutas de cada clase? R. 6 i 24.

2. Un padre tiene 8 veces la edad de su hijo; siendo la suma de las dos edades, igual a 36.—Se pide la edad del uno i del otro. R. 4 i 32.

3. En una mezcla de 16 libras de té negro i de té verde, hai 3 veces más del negro que del verde. —¿Cuántas son las libras de cada clase? R. 4 i 12.

4. La suma de los diámetros de dos bombas, de 24 i de 36, es de 315 milímetros, i su diferencia de 21.—¿Cuál es el diámetro de cada bomba? R. 147 i 168.

5. Una mezcla igual de té negro a 5 chelines la libra, i de té verde a 7 chelines la libra, ha costado 4 guineas (conteniendo 21 chelines cada guinea).—¿Cuántas son las libras de cada especie? R. 7.

6. ¿Cuál es el número que, multiplicado por 4, i aumentado el producto en 20, da por resultado 200? R. 45.

7. El área del piso rectangular de un salon de escuela, es de 180 varas cuadradas, i la base del rectángulo es de 9 varas lineales.—Se pregunta, ¿cuál es la altura? R. 20 v. l.

8. Una caña de 15 piés de largo, debe dividirse en 2 partes tales, que la una de las 2 partes sea cuádrupla de la otra.—¿Cuántos piés tendrá cada parte? R. 3 i 12.

9. ¿Cuál es el número cuyo duplo aumentado en 24, es tántas veces mayor que 80, cuántas él mismo es menor que 100? R. 52.

10. Un caballo i una silla costaron 40 £.; pero el caballo costó 9 veces más que la silla.—¿Cuál fué el precio de cada objeto? R. 4 £. i 36 £.

11. Preguntado un niño cuántos libros tenía, contestó: "Si tuviera dos veces más de los que tengo, tendría 36."—¿Cuál era el número de los libros? R. 12.

12. ¿Qué dos números son aquellos, cuya suma es 43, i su diferencia 9? R. 17 i 26.

13. Vendió un librero 10 libros a cierto precio, i en seguida 15 libros al mismo precio; habiendo recibido la segunda vez, 35 chelines más que la primera.—¿Cuál fué el precio de cada libro? R. 7 ch.

14. Habiendo Juan ido al mercado a comprar una cantidad de carne, encontró: que si la compraba de res a 4 peniques la libra, tendría que invertir todo el dinero que llevaba; pero si la compraba de carnero a 3 peniques la libra, le quedarían 2 chelines (o 24 peniques).—¿Cuántas libras de carne intentaba comprar? R. 24.

15. Se trata de dividir $ 300, entre A, B, C; de modo que reciba A 2 veces tanto como B, i C tanto como B i A.—¿Cuántos pesos tocan a cada uno? R. 50, 100 i 150.

16. Si a 9 veces cierto número, se añade 3 veces el mismo número, i se quita 4 veces el mismo número, resultarán 48.—Se pregunta, ¿cuál es el número? R. 6.

17. Convino un labrador en segar un campo de heno, recibiendo por cada acre 3 chelines 4 peniques; pero habiendo dejado sin segar 6 acres, recibió solamente 60 chelines.—¿Cuántos acres contenía el campo? R. 24.

18. La suma de 100 £. debe dividirse entre 2 hombres, 3 mujeres i 4 niños; de modo que cada hombre reciba 2 veces tanto como cada mujer; i cada mujer, 3 veces tanto como cada niño.—¿Cuál es la parte de cada uno? R. 4, 12 i 24 £.

19. Habiendo encontrado un individuo a 4 pordioseros, distribuyó entre ellos 5 chelines; dando al 2.° el duplo, al 3.° el triplo, i al 4.° el cuádruplo de lo que dió al 1.°—¿Qué parte dió a cada uno? R. 6, 12, 18 i 24 p.

20. Se pide dividir el número 160 en 4 partes tales, que la 1.ª exceda a la 2.ª en 5, a la 3.ª en 7, i a la 4.ª en 24.—¿Cuáles son las partes? R. 49, 44, 42 i 25.

21. Distribuyendo limosnas un caballero, notó que le faltaba un chelin para dar 6 peniques a cada pobre; i dando entónces solamente 5 peniques a cada uno, encontró que le quedaban 7 peniques.—Se pide el número de los pobres. R. 19.

22. Un individuo, deseoso de socorrer a cierto número de pordioseros, intentó dar a cada uno 2 chelines i 6 peniques; pero encontró que le faltaban 3 chelines para el efecto. Dió entónces a cada uno 2 chelines solamente, i observó que le quedaban 4 chelines en el bolsillo.—¿Cuántos eran los chelines, i cuántos los pordioseros? R. 32 i 14.

23. Se pide dividir una línea de 12 piés de largo, en 3 partes tales, que la parte media sea dupla, i la mayor triple de la menor.—¿Cuáles son las partes? R. 2, 4 i 6.

24. Se nos propone dividir el número 40 en 3 partes tales, que la 1.ª sea 5 veces mayor que la

2.ª, i la 3.ª igual a la diferencia entre la 2.ª i la 1.ª.—Pídense las partes. R. 20, 4 i 16.

25. Un tendero mezcló 3 especies de té: de *Bohea* a 3 chelines la libra, de *Twankay* a 5 chelines la libra, i de *Souchong* a 7 chelines la libra. La mezcla contiene igual cantidad de cada clase de té, i cuesta 6 Libras esterlinas.—¿Cuántas son las libras de cada clase? R. 8.

26. Un billete de 700 £., fué pagado en soberanos, medios soberanos i coronas; habiéndose entregado igual número de piezas de cada clase; i advirtiéndose que el soberano tiene 20 chelines, el medio soberano 10 chelines, i la corona 5 chelines.—¿Cuál fué el número de las piezas? R. 400.

27. Dos viajeros salen al mismo tiempo, el uno del *Cármen* i el otro de *Sambrano*, cuyos puntos distan 27 millas: el un viajero anda 4 millas por hora, i el otro 5 millas.—¿En cuántas horas llegan a encontrarse? R. En 3.

28. Un individuo compró un carruaje, un caballo i unos arneses por 120 £.: el precio del caballo fué 2 veces el de los arneses; i el precio del carruaje, 2 veces el precio de los arneses i del caballo.—¿Cuál fué el precio de cada objeto? R. 13⅓ £. &.ª.

29. ¿Qué dos números son aquellos, cuya diferencia es 15, i su suma es 59? R. 22 i 37.

30. ¿Qué dos números son aquellos, cuya suma es 40, i su diferencia es 16? R. 12 i 28.

31. Di a Ricardo i a Jaime 27 reales; pero a Ricardo, 5 más que a Jaime.—¿Cuántos reales di a cada uno? R. 11 i 16.

32. El horario i el minutero de un reloj, están unidos a las 12.—¿A qué hora, inmediatamente

despues, volverán a encontrarse del mismo modo? R. A la 1, 5m. i $\frac{5}{11}$.

33. Habiendo preguntado por la hora a un amigo mío, este me contestó, que la hora se encontraba entre las 8 i las 9, i que el horario i el minutero estaban unidos exactamente.—¿Cuál fué la hora que me indicó? R. Las 8, 43 m, 38 s. i $\frac{2}{11}$.

34. En una eleccion votaron 420 personas; habiendo obtenido el candidato triunfante, una mayoría de 46 votos.—¿Cuántos votos tuvo cada candidato? R. 187 i 233.

35. Una de dos cañas es 8 piés mas larga que la otra; i la mas larga tiene 3 veces la longitud de la mas corta.—¿Qué longitud tiene cada caña? R. 4 i 12 p.

36. 5 veces un número disminuido en 16, es igual a 3 veces el mismo número.—Se pregunta, ¿cuál es el número? R. 8.

37. Un caballo, una vaca i un carnero, costaron 24 £.: la vaca costó 4 £. más que el carnero; i el caballo, 10 £. más que la vaca.—Se pide el precio de cada animal. R. 2, 6 i 16 £.

38. Un comerciante tiene 3 piezas de paño, que miden juntas 159 yardas: la 2.ª pieza tiene 15 yardas más que la 1.ª; i la 3.ª, 24 yardas más que la 2.ª.—¿Cuántas son las yardas que mide cada pieza? R. 35, 50 i 74.

39. 4 veces un número es igual, a 2 veces el mismo número aumentado en 12.—¿Cuál es este número? R. 6.

40. Se pide dividir 36 £. entre A, B, C; de modo que a B toquen 4 £. más que a A; i a C, 7 £. más que a B.—¿Cuál es la parte de cada uno? R. 7, 11 i 18 £.

41. Compró un individuo 4 caballos: dió por el 2.° 12 £. más que por el 1.°; por el 3.°, 5 £. más que por el 2.°; i por el 4.°, 2 £. más que por el 3.°. El valor total de los caballos, fué = 240 £.—Se pide el precio de cada uno. R. 48, 60, 65 i 67 £.

42. ¿Qué número es aquel cuyo duplo es tántas unidades mayor que 21, cuántas él mismo es menor que 21? R. 14.

43. Al hacer la division de una partida de naranjas entre cierto número de niños, encontré que, dando 4 a cada niño, me sobraban 6 naranjas; i que dándoles 3, me sobraban 12.—¿Cuál era el número de los niños? R. 6.

44. Un posta debía viajar 240 millas en 4 días; pero, por el mal estado de los caminos, encontró: que el 2.° día anduvo 5 millas ménos que el 1.°; el 3er. día, 9 millas ménos que el 1.°; i el 4.° día, 14 millas ménos que el 1.°.—¿Cuántas millas anduvo el posta en cada uno de los 4 días?

R. 67, 62, 58 i 53.

45. Se nos pide dividir el número 99 en 5 partes tales, que la 1.ª exceda a la 2.ª en 3; sea menor que la 3.ª en 10; mayor que la 4.ª en 9, i menor que la 5.ª en 16.—¿Cuáles son las 5 partes?

R. 17, 14, 27, 8 i 33.

46. Dos comerciantes, A i B, entraron en una especulacion, en la cual ganó A 54 £. más que B: habiendo sido la ganancia total, 49 £. menor que 3 veces la ganancia de B.—¿Cuáles fueron las ganancias parciales? R. 157 i 103 £.

47. Dos pilas de balas contienen, juntas, 344 balas: hai 64 balas en la una pila más que en la otra.—¿Cuántas son las balas de cada pila?

R. 140 i 204.

48. Habiendo cortado un comerciante, 19 yardas de cada una de 3 piezas iguales de cierto género, i 17 yardas de otra pieza de la misma longitud, encontró que los retazos, juntos, medían 142 yardas.—¿Cuántas yardas tenía cada pieza? R. 54.

49. En una partida de juego, apostó un individuo 3 chelines contra 2, en cada vez que se jugara. Despues de 20 jugadas, ganó 5 chelines.—¿Cuántas fueron las jugadas en que ganó? R. 13.

50. Un pescador sacó un pescado cuya cola pesaba 9 libras; la cabeza, tanto como la cola i la mitad del cuerpo; i el cuerpo, tanto como la cabeza i la cola.—¿Cuál era el peso del pescado entero?

R. 72 lbs.

51. El triplo de la edad de Ana, es tántas veces mayor que 40, cuántas el tercio de su misma edad, es menor que 10.—Se pide la edad de Ana.

R. 15 años.

52. Una cisterna se llena en 20 minutos con el agua que le traen 3 caños; de los cuales, uno conduce 10 galones más, i otro 5 galones ménos, por minuto, que el 3.°. La cisterna se llena con 820 galones.—¿Qué cantidad de agua corre en un minuto, por cada uno de los 3 caños? R. 22, 7 i 12 gal.

53. La edad de A es dupla de la de B; la de B es triple de la de C; i la suma de las 3 edades es igual a 140.—Pídese la edad de cada individuo.

R. 14, 42 i 84 años.

54. ¿Qué dos números son aquellos, cuya diferencia es 12; siendo sus cuadrados iguales entre sí?

R. 6 i —6.

55. Uno de los factores de una multiplicacion es 5, i el otro es igual al producto disminuido en 8 unidades.—¿Cuál es el otro factor? R. 2.

56. La fortuna que me fué ayer adversa, me ha favorecido hoi; pues, habiendo duplicado el resto de mi dinero, en lugar de 5 £. que ayer había perdido, tengo hoi en mi bolsillo 10 £. que he ganado. —¿Cuántas £. tengo *hoi*? R. 30.

57. Voi a añadir a mi librería 5 estantes nuevos: cada uno de los cuales habrá de contener 20 volúmenes más, que cada uno de los 10 que tengo en este instante; i entónces mi librería constará de 1.000 volúmenes.—¿Cuántos volúmenes existen *hoi*? R. 600.

58. Al repartir entre mis alumnos cierto número de libros, observé que me faltaban 8, si daba 6 a cada uno; i que dándoles 4, me sobraban 12.—¿Cuántos eran mis alumnos? R. 10.

59. Un peso de 6 libras se equilibra con un peso de 24, sobre una palanca (que se supone sin peso), de la longitud de 20 pulgadas: si se añaden 3 libras a cada peso, ¿qué adicion deberá hacerse a cada brazo de la palanca, para conservar el equilibrio sobre el punto de apoyo? R. 2 pulg.

60. Dos individuos principiaron a jugar con iguales sumas de dinero: el uno ganó 12 pesos: el otro perdió 9; i entónces el capital del primero, vino a ser duplo del del segundo.—¿Qué capital tenían al principiar el juego? R. $ 30.

61. Hai dos números cuya diferencia es 5; i si 10 veces el menor se resta de 7 veces el mayor, el residuo será 26.—¿Cuáles son estos dos números? R. 3 i 8.

62. Se nos propone dividir el número 84 en dos partes tales, que 3 veces la mayor exceda en 9, a 6 veces la menor.—¿Cuáles son estas dos partes? R. 27 i 57.

63. Un labrador fué concertado por 30 días, bajo las siguientes condiciones: por cada día, que trabajara, recibiría dos chelines; i por cada día que estuviera ausente, perdería 1 chelin i 4 peniques. Al fin de los 30 días recibió 20 chelines.—¿Cuántos días trabajó, i cuántos dejó de trabajar? R. 18 i 12.

64. Un billete de 30 £. fué pagado en guineas i coronas; habiendo sido 92 las piezas que se entregaron.—¿Cuántas fueron las piezas de cada clase? R. $8\frac{3}{4}$ g., $83\frac{1}{4}$ c.

65. ¿Qué dos números son aquellos cuya diferencia es 9; i si 3 veces el mayor se añade a 5 veces el menor, la suma que resulta es igual a 35? R. 1 i 10.

66. Un correo viaja 7 millas por hora; i hacía 5 horas que había sido despachado, cuando otro que fué enviado con el encargo de alcanzarlo, tuvo que andar para conseguirlo, 12 millas en cada hora.—¿Cuántas horas empleó el último para encontrarse con el primero? R. 7.

67. En un tren de ferrocarril, pagaron 15 pasajeros 3 £. 12 chelines; siendo el pasaje de los de 1.ª clase, de 6 chelines cada uno; i el de los de 2.ª, de 4 chelines.—¿Qué número de pasajeros había de cada clase? R. 6 i 9.

68. ¿Qué número es aquel, al cual si se añaden 6, dos veces la suma serán 24? R. 6.

69. ¿Qué dos números son aquellos, cuya diferencia es 6; i si se añaden 12 a 4 veces su suma, el total que resulte será 60? R. 3 i 9.

70. Té a 6 chelines la libra, se ha mezclado con té a 4 chelines la libra; i 16 libras de la mezcla, se han vendido en 3 £. 18 chelines.—¿Cuántas eran las libras de cada clase? R. 7 i 9.

71. La celeridad de un tren de ferrocarril, es de 24 millas por hora; i 3 horas despues de su partida, salió en su alcance otro tren expreso, andando 32 millas por hora.—¿ En cuántas horas el 2.° tren debió encontrarse con el 1.° ? R. En 9.

72. Se pide dividir el número 68 en dos partes tales, que la diferencia entre la mayor i 84, sea igual a tres veces la diferencia entre la menor i 40.—¿ Cuáles son estas dos partes ? R. 26 i 42.

73. A i B jugaban a los naipes; i en dos ocasiones que alzaron cartas, alzaron más que las que dejaron. A alzó dos veces tántas como las que dejó B; i B alzó 7 veces tántas como las que dejó A.—¿ Cuántas fueron las cartas que alzó cada uno; suponiendo que la baraja tenía 52 cartas ? R. 48 i 28.

74. Convinieron varias personas en dar, cada una, 6 peniques a un carruajero, para conducirlas a cierto lugar; pero con la condicion de que, por cada persona de más recibida en el camino, se rebajarían 3 peniques de la suma total del pasaje. Sucedió que el carruajero recibió la 4.ª parte, más 3, de los primeros pasajeros; por lo cual no recibió de estos, sino 5 peniques por cada uno.—¿ Cuál fué el número de los primeros pasajeros ? R. 36.

75. ¿ Qué dos números son aquellos, cuya diferencia es 14; i si 9 veces el menor se resta de 6 veces el mayor, la diferencia es 33 ? R. 17 i 31.

76. Dos individuos, A i B, emplearon en el comercio iguales sumas de dinero: A ganó 120 £., i B perdió 80 £.; siendo, despues de esta ganancia i esta pérdida, el capital de A triple del de B.—¿ Qué suma tenía cada uno ? R. 180 £.

77. Un rectángulo tiene 8 piés de largo; i si tuviera de ancho dos piés más de los que tiene, su

área sería igual a 48 piés cuadrados.—¿ Cuál es su latitud ? R. 4 p.

78. Guillermo tiene 4 veces tantos reales como Tomas; pero si se dieran 12 reales a cada uno, Guillermo sólo tendría 2 veces tantos como Tomas.—¿ Cuántos son los reales que posee cada uno ? R. 24 i 6.

79. Dos pizarras rectangulares tienen, cada una, 8 pulgadas de ancho; pero la longitud de una de ellas, es 4 pulgadas mayor que la de la otra.—Se piden sus longitudes; advirtiendo que la pizarra mas larga, tiene 2 veces más área que la mas corta. R. 4 i 8 p.

80. Dos planchas rectangulares son iguales en área: la latitud de la una es de 18 pulgadas, i la de la otra de 16; siendo de 4 pulgadas la diferencia en sus longitudes.—¿ Cuál es la longitud de cada plancha, i el área comun ? R. 32, 36 i 576.

81. Una palanca recta (que se supone sin peso), sostiene en equilibrio sobre un punto de apoyo, 24 libras en el extremo del brazo mas corto, i 8 libras en el extremo del brazo mas largo; siendo la longitud del brazo mas largo, 6 pulgadas mayor que la del mas corto.—¿ Cuál es la longitud de los dos brazos de la palanca ? R. 3 i 9 p.

82. Una guarnicion de 1.000 hombres, recibió raciones para 30 días: a los 10 días le llegó un refuerzo; i entónces las provisiones se agotaron en 5 días.—¿ Cuántos fueron los hombres que compusieron el refuerzo ? R. 3.000.

83. Dos triángulos tienen, cada uno, una base de 20 piés; pero la altura de uno de ellos, es 6 piés menor que la del otro; siendo el área del triángulo mayor, dupla de la del menor.—¿ Cuáles son las alturas de los dos triángulos ? R. 6 i 12 p.

84. A i B comenzaron a jugar con sumas iguales: A ganó 12 chelines; i entónces, 6 veces el caudal de A, fué igual a 9 veces el caudal de B.—Se pide el caudal de cada uno de ellos. R. 24 ch.

85. Varios individuos, al arreglar su cuenta en una fonda, pagaron, por cabeza, 4 chelines; pero observaron que, si hubieran sido 5 más de los que eran, habrían pagado solamente 3 chelines cada uno.—¿Cuántos eran los individuos? R. 15.

86. Dos jinetes, A i B, partieron al mismo tiempo de dos ciudades diferentes, distantes 40 millas: i, caminando B 2 millas por hora más que A, se encontraron a las 5 horas.—¿Cuántas millas por hora anduvo A? R. 3.

87. Un individuo concertó a un jornalero por 48 días. Por cada dia que trabajara, debía recibir 24 céntimos; i, por el contrario, perder 12, por cada día de ociosidad. Al término del concierto, recibió el jornalero $ 5 i 4 céntimos, o 504 céntimos.—¿Cuántos días trabajó, i cuántos dejó de trabajar? R. 30 i 18.

88. Tiene un comerciante dos especies de té: una a 9 chelines 6 peniques la libra, i otra a 13 chelines 6 peniques la libra.—¿Cuántas libras de cada clase es preciso que tome, para formar una cantidad de 104 libras, que valgan 1.120 chelines? R. 71 i 33.

89. Una pieza de 16, compuesta de cobre i estaño, pesa 2,010.640 gramos, i contiene un volúmen de 223 decímetros cúbicos: i, suponiendo que el decímetro cúbico de cobre pesa 9.250 gramos, i el de estaño, 7.320,—se piden las cantidades de cobre i estaño, que, separadamente, entran en la pieza. R. 196 d. c. de c., i 27 de e.

90. Si añado 5 al número de mis hijos, i multiplico por 2 la suma, tendré por resultado el triplo del número de mis hijos.—¿Cuál es este número? R. 10.

91. Una frutera compró naranjas a 20 peniques la docena; i si hubiera comprado 6 más por el mismo precio, le habría costado la docena 4 peniques ménos.—¿Cuántas eran las naranjas? R. 24.

92. Preguntado un padre sobre la edad de su hijo, respondió: "si del duplo de la edad que tiene, quitamos el triplo de la que tenía hace 6 años, encontraremos su edad actual".—Pídese la edad del niño. R. 9 años.

93. Un comerciante tiene dos especies de brandy: una de 14 reales, i otra de 18 reales la botella.—Se pregunta, ¿cuántas botellas deberá tomar de cada especie, para llenar un barril de 100 botellas, que valga 1.680 reales? R. 30 i 70.

94. ¿Cuál es el número que, multiplicado por 4, aumentado el producto en 12, i dividida la suma entre 5, da por cuociente 8? R. 7.

95. En la composicion de una cantidad de pólvora, $\frac{1}{2}$ del todo más 6 libras, eran de salitre; $\frac{1}{6}$ del todo ménos 5 libras, era de azufre; i $\frac{1}{4}$ del todo ménos 3 libras, era de carbon.—¿Cuántas eran las libras de cada cosa? R. 18, 3 i 3.

96. Se trata de dividir $ 1.170 entre A, B, C, con proporcion a sus edades; siendo la edad de B, un tercio mayor que la de A; i la de A, un medio menor que la de C.—¿Cuál es la parte de cada uno? R. $ 270, 360 i 540.

97. ¿Cuál es el capital que, aumentado en su interes simple por 5 años, al 4 %, se eleva a la suma de $ 8.208? R. $ 6.840.

98. Una liebre que precede a un galgo un espacio de 50 saltos, hace 4 saltos por cada 3 de los del galgo; pero 2 saltos de los del galgo, equivalen a 3 de los de la liebre.—¿A cuántos saltos de los del galgo, se apoderará este de la pobre víctima? R. A 300.

99. Compró una Señora un enjambre de avejas; i observó que su precio excedía en 2 chelines, a $\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{4}$ de su mismo precio.—¿Cuánto le costó el enjambre? R. 40 ch.

100. ¿Qué número es aquel que, aumentado en su mitad, tercera i cuarta parte, da por suma 125? R. 60.

101. ¿Qué número es aquel, del cual si se sustraen 5, dos tercios del residuo compondrán 40? R. 65.

102. El triplo de un número, ménos 20, es tántas veces mayor que su duplo, cuántas su cuarto, más 2, es menor que su mitad.—¿Cuál es el número? R. 24.

103. ¿Por qué número debe multiplicarse 3, para que los $\frac{5}{12}$ del producto, sean iguales a la suma de los factores? R. Por 12.

104. Vendí $\frac{1}{4}$ de mis manzanas en una casa: vendí 25 en otra: i si triplico las que me quedan, reproduciré la cantidad primitiva.—Se pide el número de las manzanas. R. 60.

105. Si hubiera yo pagado por mi reloj, $\frac{1}{3}$ más de su valor, habría sido este 4 £. menor, que el duplo de lo que me costó.—¿Cuánto me costó el reloj? R. 6 £.

106. A encontró a dos pordioseros, B i C: teniendo cierta suma en su bolsillo, dió a B $\frac{1}{6}$ de ella; i a C, $\frac{3}{5}$ de lo que le quedó; conservando entónces A, 20

peniques en su bolsillo.—¿Qué suma tenía al principio? R. 5 ch.

107. Un jugador perdió primero $\frac{1}{5}$ de su dinero, i en seguida ganó 18 chelines: perdió en otra jugada $\frac{1}{3}$ de lo que tenía, i despues ganó 3 chelines; retirándose con 3 guineas.—¿Cuál era la suma que tenía al principio? R. 4 £. 10 ch.

108. Se pide dividir el número 50 en dos partes tales, que $\frac{3}{4}$ de la una, unidos a $\frac{5}{6}$ de la otra, compongan 40.—¿Cuáles son estas dos partes? R. 20 i 30.

109. En una mezcla de vino i cidra, la mitad del todo, más 25 galones, eran de vino; i el tercio del todo, ménos 5 galones, era de cidra.—¿Cuántos eran los galones de cada clase? R. 85 i 35.

110. ¿Qué número es aquel, del cual si se quitan 5, dos tercios de la resta serán 60? R. 95.

111. Se nos propone dividir el número 46 en dos partes tales, que la suma de los cuocientes, obtenida despues de dividir, la una parte por 7 i la otra por 3, sea igual a 10.—¿Cuáles son estas dos partes? R. 28 i 18.

112. Un individuo perdió en el juego $\frac{1}{3}$ de su dinero, i ganó luego 4 chelines: perdió en seguida $\frac{1}{4}$ de lo que tenía, i ganó en seguida 18 chelines: por último, perdió $\frac{1}{8}$ de su capital actual, i se retiró con 28 chelines.—¿Qué suma poseía al principiar el juego? R. 1 £. i 12 ch.

113. ¿Qué número es aquel, al cual si se añaden 10, tres quintos de la suma serán 66? R. 100.

114. ¿Qué número es aquel que, multiplicado por 6, aumentado el producto en 18, i dividida la suma por 9, da por cuociente 20? R. 27.

115. Un poste tiene $\frac{1}{4}$ en la tierra, $\frac{3}{7}$ en el agua, i

13 piés fuera del agua.—¿Cuál es la longitud del poste? R. 35 p.

116. Despues de gastar $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{7}$ de mi dinero, me quedaron 85 £.—¿Qué suma tenia al principio? R. 140 £.

117. ¿Qué número es aquel, al cual si añado 20, i de $\frac{2}{3}$ de esta suma sustraigo 12, el residuo será 10? R. 13.

118. Qué número es aquel, cuyo tercio i cuarto, unidos a sus dos séptimos, dan 73? R. 84.

119. ¿Qué número es aquel, cuyo tercio excede a su quinto, justamente en 72? R. 540.

120. Hai dos números cuya suma es 37; i si 3 veces el menor se resta de 4 veces el mayor, i el residuo se divide entre 6, el cuociente será 6.—¿Cuáles son estos dos números? R. 21 i 16.

121. Hai dos números cuya suma es 49; i si $\frac{1}{7}$ del menor, se resta de $\frac{1}{5}$ del mayor, el residuo será 5.—¿Cuáles son estos dos números? R. 35 i 14.

122. ¿Qué número es aquel, cuyo tercio excede a su cuarto, justamente en 16? R. 192.

123. Se pide dividir el número 72 en tres partes tales, que $\frac{1}{2}$ de la *primera*, sea igual a la *segunda*; i $\frac{3}{5}$ de la *segunda*, sean iguales a la *tercera*.—¿Cuáles son estas tres partes? R. 40, 20 i 12.

124. Gastó un individuo $\frac{1}{5}$ de su renta, más 10 £.; habiéndole quedado $\frac{1}{2}$ de su renta, más 35 £.—Pídese su renta. R. 150 £.

125. ¿Qué número es aquel cuyo medio, tercio i cuarto, aumentados en 45, dan por suma 448? R. 372.

126. Se nos propone dividir el número 90 en cuatro partes tales, que la primera *aumentada* en 2, la segunda *disminuida* en 2, la tercera *multiplicada* por 2, i la cuarta *dividida* entre 2, presenten exactamente la misma cantidad.—¿Cuáles son las cuatro partes? R. 18, 22, 10 i 40.

127. De tres números dados, el mediano es $\frac{1}{5}$ mayor que el menor, i $\frac{1}{4}$ menor que el mayor; i si a cada uno se quitara $\frac{1}{3}$, se quitarían a su suma 19 unidades.—¿Cuáles son los tres números? R. 24, 18 i 15.

128. Un mozo llegó a un convento, a comprar unas naranjas; pero tropezó en la puerta con el portero, que nó le quiso franquear la entrada, sino con la condicion de que había de entregarle, al instante de la salida, las tres cuartas partes de las naranjas que llevara. Al continuar hácia dentro, tropezó con el prior, i despues con el abad; quienes, uno despues de otro, le hicieron iguales exigencias. Cumplió puntualmente el mozo con las condiciones estipuladas, i salió del convento con sólo una naranja.—Se pregunta, ¿cuántas naranjas fueron las compradas? R. 64.

129. Tres labradores A, B, C, pueden segar un campo de trigo, trabajando separadamente, en 4, 8 i 12 días.—¿En cuántos días lo segarían si trabajaran juntos? R. En 2 $\frac{2}{11}$ días.

130. Tenía yo dentro de mi bolsa cierta suma de dinero, de la cual retiré la tercera parte: introduje luego \$ 50: separé mas tarde la cuarta parte de lo que entónces existía: añadí en seguida \$ 70: conté el dinero que había en la bolsa, i encontré \$ 120.—Se desea saber la cantidad primitiva. R. \$ 25.

131. Un capitalista colocó $\frac{1}{3}$ de su capital al 4%,

R. $\frac{4}{15}$.

136. Un individuo tiene dos caballos, i una silla estimada en 10 £. Si se pone la silla al primer caballo, se hace el valor de este, duplo del del segundo; pero si se pone sobre el segundo, será entónces el valor de este, menor en 13 £. que el del primero.—Se pide el precio de ámbos caballos. R. 56 i 33.

137. Hai un quebrado tal, que si se añade 1 al numerador, el resultado será $\frac{1}{2}$; i si se añaden 3 al denominador, el resultado será $\frac{1}{3}$.—¿Cuál es este quebrado? R. $\frac{5}{12}$.

138. Hai un quebrado tal, que si se añaden 3 al numerador, el resultado será $\frac{1}{3}$; i si se quita 1 al de-

143. Hai un número de 2 dígitos: la suma de ellos es 5; i si se añaden 9 al número mismo, aparecerán los dígitos invertidos.—Se pregunta, ¿cuál es el número? R. 23.

144. Un jóven dijo a su hermana: dame $\frac{1}{4}$ de tu dinero para completar 30 £. La hermana le respondió: dame tú $\frac{4}{5}$ del tuyo, i sumaré con lo que tengo 40 £.—¿Cuántas £. tenía cada uno? R. 25 i 20.

145. Hai dos números cuya suma es 63; siendo $\frac{5}{8}$ del uno, iguales a un quíntuplo del otro.—¿Cuáles son estos dos números? R. 56 i 7.

146. ¿Que número es aquel, a la suma de cuyos

dígitos si añado 7, el resultado será 3 veces el dígito del lado izquierdo; i si del número mismo sustraigo 18, aparecerán los dígitos invertidos? R. 53.

147. Hai dos números tales, que $\frac{1}{2}$ del mayor unido a $\frac{1}{3}$ del menor, produce 13; i si $\frac{1}{2}$ del menor se resta de $\frac{1}{3}$ del mayor, la diferencia es *cero*.—¿Cuáles son los números? R. 18 i 12.

148. Hai dos números tales, que el triplo del menor es, en 3 unidades, superior al mayor; i si aumentamos el mayor en sus $\frac{3}{11}$, i el menor en sus $\frac{3}{4}$, el primero vendrá a ser duplo del segundo.—¿Cuáles son estos dos números? R. 33 i 12.

149. Tres bombas, de 12 pulgadas la *primera*, de 10 pulgadas la *segunda*, i de 8 pulgadas la tercera, pesan juntas 143 kilógramos. La bomba de 12 pulgadas pesa 22 kilógramos más que la de 10; i la de 10, 29 kilógramos más que la de 8.—¿Cuál es el peso de cada bomba? R. 72, 50 i 21.

150. Hai tres números tales, que el *primero* con la mitad de la suma del *segundo* i el *tercero*, producen 120: el *segundo* con un quinto de la diferencia entre el *tercero* i el *primero*, producen 70: i la mitad de la suma de los tres números, es igual a 95.—¿Cuáles son estos tres números? R. 50, 65 i 75.

151. La pólvora de cañon se compone de salitre, azufre, i carbon. La mezcla es tal, que en 100 kilógramos de pólvora, el triple del peso del salitre empleado, es igual a 13 veces el del carbon, más 5 veces el del azufre; i 5 veces el peso del salitre, equivale a 37 veces el peso del azufre, ménos 7 veces el del carbon.—¿En qué proporcion debe hacerse la mezcla? R. 75, $12\frac{1}{2}$ i $12\frac{1}{2}$.

152. Tres hermanos desean comprar una finca en

\$ 50.000. Falta al *primero* para pagar su valor, la mitad del capital que tiene el segundo. Falta al *segundo* para el mismo objeto, el tercio del capital que tiene el primero. Finalmente, falta al *tercero*, la cuarta parte del capital del primero.—Pídense separadamente los tres capitales. R. \$ 30.000, 40.000 i 42.500.

153. A i B, juntos, tienen $\frac{2}{3}$ del capital de C; B i C, juntos, tienen 6 veces el capital de A; i si B tuviera \$ 680 más de los que tiene, tendría tanto como A i C juntos.—Pídese el capital de los tres. R. \$ 200, 360 i 840.

154. Se pide dividir 1.300 £. entre A, B, C i D; de modo que A i B, juntos, reciban 1.000; A i C, juntos, reciban 800; i A i D, juntos, reciban 700.—¿Cuántas £. tocan a cada uno? R. 600, 400, 200 i 100.

155. La suma de dos números es 13, i la diferencia de sus cuadrados es 39.—¿Cuáles son los números? R. 5 i 8.

156. ¿Cuál es el número cuyo séptimo multiplicado por su octavo, siendo luego este producto dividido por 3, da $298\frac{2}{3}$? R. 224.

157. ¿Qué dos números son aquellos, cuyo producto es 750, i su cuociente $3\frac{1}{3}$? R. 50 i 15.

158. El producto de dos números es 192, i su cuociente 3.—¿Cuáles son los números? R. 8 i 24.

159. Se nos propone dividir el número 56 en dos partes tales, que su producto sea 640.—¿Cuáles son esta dos partes? R. 40 i 16.

160. La diferencia de dos números es 16, i su producto 377.—¿Cuáles son estos dos números? R. 13 i 29.

161. Se nos pide dividir el número 81 en dos

partes tales, que su producto sea 1.458.—¿Cuáles son estas dos partes? R. 27 i 54.

162. ¿Qué números son aquellos, cuya diferencia es 8, i su producto 240? R. 12 i 20.

163. ¿En qué dos partes debe dividirse el número 60, para que, multiplicadas una por otra, produzcan 864? R. 24 i 36.

164. ¿En qué dos partes debe descomponerse el número 30, para que su producto sea igual a 8 veces su diferencia? R. 6 i 24.

165. La suma de dos números es igual a 10, i la suma de sus cuadrados es igual a 58.—¿Cuáles son estos dos números? R. 3 i 7.

166. Habiendo vendido una pieza de paño en 24 £., i habiendo ganado tanto por ciento como el paño me costó, se pregunta el valor del paño. R. 20 £.

167. ¿Qué dos números son aquellos, cuya suma es 20, i su producto 36? R. 2 i 18.

168. ¿Qué número es aquel que, restado de 10, si se multiplica el residuo por el número mismo, será el producto 21? R. 3 o 7.

169. Pídese dividir el número 24 en dos partes tales, que su producto sea igual a 35 veces su diferencia.—¿Cuáles son estas dos partes? R. 10 i 14.

170. Pídese dividir el número 33 en dos partes tales, que el producto de su multiplicacion, sea 162.—¿Cuáles son estas dos partes? R. 6 i 27.

171. ¿Qué dos números son aquellos, cuya suma es 29, i su producto 100? R. 4 i 25.

172. La diferencia de dos números es 5, i $\frac{1}{4}$ de su producto es 26.—Pídense los números. R. 8 i 13.

173. La diferencia de dos números es 6; i si se añaden 47 a dos veces el cuadrado del menor, el resultado será igual al cuadrado del mayor.—¿Cuáles son estos dos números? R. 11 i 17.

174. Compró un comerciante paño, por 33 £. 15 chelines: vendió despues este paño a 2 £. 8 chelines la pieza; i ganó tanto en la especulacion como cada pieza le había costado—Se pide el número de las piezas. R. 15.

175. A i B partieron al mismo tiempo, con direccion a cierto lugar que distaba 150 millas. A caminaba 3 millas por hora más que B; de modo que terminó su viaje 8 horas i 20 minutos ántes que él. ¿—Cuántas millas por hora anduvo cada uno? R. 6 i 9.

176. Cierto número de abejas descansó sobre un árbol: a poco tiempo salió volando la raíz cuadrada de su mitad; i en seguida, $\frac{8}{9}$ del número total de ellas: quedaron sólo 2 abejas.—¿Cuántas abejas había en el árbol? R. 72.

177. La diferencia de dos números es 4, i su suma es 4 unidades menor que su producto.—¿Cuáles son estos dos números? R. 2 i 6.

178. Una señora hablando de su hija, dijo estas palabras: "Cuando pasen 6 años, tendrá mi hija el cuadrado de la edad que tenía 6 años hace.—¿Qué edad tenía la hija? R. 10 años.

179. Pídese hallar un número tal, que, añadiendo a su cuadrado 8 veces el mismo número, sea la suma 48.—¿Cuál es este número? R. 4.

180. Pídese dividir el número 12 en dos partes tales, que el producto de la una por la otra, sea igual a 32.—¿Cuáles son estas dos partes? R. 4 i 8.

181. Preguntado un individuo por su edad, contestó: "Mi madre tenía 20 años cuando yo nací; i el número de sus años multiplicado por el de los míos, excede en 2.500 a las dos edades reunidas.—¿Qué edad tenía el individuo? R. 42 años.

182. Un caballero compró varios muebles, i los vendió poco tiempo despues, por $ 144 ; habiendo ganado en esta operacion, tanto por ciento, como los muebles le habían costado.—Se pide el precio de los muebles. R. $ 80.

183. ¿Qué números son aquellos, cuya suma es 41, i la suma de sus cuadrados, 901? R. 26 i 15.

184. La diferencia entre dos números es 8, i la suma de sus cuadrados, 544.—¿Cuáles son los números? R. 12 i 20.

185. Se nos pide dividir el número 16 en dos partes tales, que si se añade a su producto la suma de sus cuadrados, resulten 208.—¿Cuáles son estas dos partes? R. 12 i 4.

186. Si sustraes $\frac{1}{6}$, de la edad de mi hermano, i añades $\frac{1}{6}$ a la de mi hermana, los habrás hecho gemelos ; i la suma de sus edades habrá disminuido en 2.—Pídense las edades. R. 24 i 18.

187. Compró un ganadero cierto número de bueyes por 80 £.; i si hubiera comprado 4 más por el mismo precio, habría dado, por cabeza, una £. ménos.—Se pide el número de los bueyes. R. 16.

188. Compró un individuo cierto número de carneros por 120 £. : si hubieran sido los carneros 8 más de los que fueron, cada uno le habría costado 10 chelines ménos.—¿Cuántos fueron los carneros? R. 40.

189. ¿Cuál es el número cuyo cuadrado, aumentado en 21, es igual a 10 veces el mismo número? R. 7.

190. Manlio i Torcuato partieron al mismo tiempo, con direccion a cierto lugar que distaba 300 millas. Manlio caminaba 1 milla por hora más que Torcuato; de modo que terminó su viaje 10 horas ántes que él.—¿Cuántas millas por hora anduvo cada uno? R. 5 i 6.

191. Compró un individuo cierto número de carneros por 57 £ : i habiendo perdido 8 de ellos, i vendido el resto con una utilidad de 8 chelines por cabeza, ni ganó ni perdió en la especulacion.—¿Qué número de carneros compró? R. 38.

192. A i B distribuyeron, cada uno, 1.200 £. entre cierto número de pobres: A socorrió a 40 pobres más que B; pero B dió a cada pobre, 5 £. más que A.—¿Cuántos fueron los socorridos por el uno i por el otro? R. 80 i 120.

193. Si mi salario se duplicara, dijo un actor, sería 96 chelines mayor, que el cuadrado de la vigésima quinta parte de lo que es.—Pídese el salario. R. 1.200 ch.

194. Cuando la nieta nació, tenía el abuelo $3\frac{1}{2}$ veces la edad actual de la nieta: 10 años despues tenía aquel, el cuadruplo de esta misma edad.—Se pregunta la edad actual del abuelo i de la nieta. R. 90 i 20.

195. Una reunion de jóvenes en un hotel, tenían que pagar una cuenta de 8 £. i 15 chelines; pero ántes que la cuenta fuera cubierta, se retiraron 2 de ellos; i entónces los que quedaron, pagaron, cada uno, 10 chelines más de los que ántes les tocaban.—¿Cuántos formaban la reunion? R. 7.

196. Un ganadero compró cierto número de car-