

**AUTORIZACIÓN DE LOS AUTORES PARA LA CONSULTA, LA
REPRODUCCIÓN PARCIAL O TOTAL, Y PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DEL
TEXTO COMPLETO**

Puerto Colombia, **08 DE OCTUBRE DE 2020**

Señores

DEPARTAMENTO DE BIBLIOTECAS

Universidad del Atlántico

Cuidad

Asunto: Autorización Trabajo de Grado

Cordial saludo,

Yo, **HAROLD JOSÉ ACOSTA PINEDA.**, identificado(a) con **C.C. No. 1.143.370.415.** de **CARTAGENA**, autor(a) del trabajo de grado titulado **BIFURCACIÓN DE HOPF SUPERCRÍTICA Y SUBCRÍTICA EN UN SISTEMA DIFERENCIAL MULTIPARAMETRICO** presentado y aprobado en el año **2020** como requisito para optar al título Profesional de **MATEMÁTICO.**; autorizo al Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico para que, con fines académicos, la producción académica, literaria, intelectual de la Universidad del Atlántico sea divulgada a nivel nacional e internacional a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios del Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico pueden consultar el contenido de este trabajo de grado en la página Web institucional, en el Repositorio Digital y en las redes de información del país y del exterior, con las cuales tenga convenio la Universidad del Atlántico.
- Permitir consulta, reproducción y citación a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato CD-ROM o digital desde Internet, Intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer.

Esto de conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

Atentamente,

Firma 

HAROLD JOSÉ ACOSTA PINEDA

C.C. No. 1.143.370.415. de CARTAGENA



Universidad
del Atlántico

CÓDIGO: FOR-DO-110

VERSIÓN: 01

FECHA: 02/DIC/2020

DECLARACIÓN DE AUSENCIA DE PLAGIO EN TRABAJO ACADÉMICO PARA GRADO

Este documento debe ser diligenciado de manera clara y completa, sin tachaduras o enmendaduras y las firmas consignadas deben corresponder al (los) autor (es) identificado en el mismo.

Puerto Colombia, **08 DE OCTUBRE DE 2020**

Una vez obtenido el visto bueno del director del trabajo y los evaluadores, presento al **Departamento de Bibliotecas** el resultado académico de mi formación profesional o posgradual. Asimismo, declaro y entiendo lo siguiente:

- El trabajo académico es original y se realizó sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, en consecuencia, la obra es de mi exclusiva autoría y detento la titularidad sobre la misma.
- Asumo total responsabilidad por el contenido del trabajo académico.
- Eximo a la Universidad del Atlántico, quien actúa como un tercero de buena fe, contra cualquier daño o perjuicio originado en la reclamación de los derechos de este documento, por parte de terceros.
- Las fuentes citadas han sido debidamente referenciadas en el mismo.
- El (los) autor (es) declara (n) que conoce (n) lo consignado en el trabajo académico debido a que contribuyeron en su elaboración y aprobaron esta versión adjunta.

Título del trabajo académico:	BIFURCACIÓN DE HOPF SUPERCRÍTICA Y SUBCRÍTICA EN UN SISTEMA DIFERENCIAL MULTIPARAMETRICO
Programa académico:	MATEMATICAS

Firma de Autor 1:							
Nombres y Apellidos:	HAROLD JOSÉ ACOSTA PINEDA						
Documento de Identificación:	CC	X	CE		PA	Número:	1.143.370.415
Nacionalidad:	COLOMBIANO				Lugar de residencia:		
Dirección de residencia:							
Teléfono:					Celular:		

FORMULARIO DESCRIPTIVO DEL TRABAJO DE GRADO

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO DE GRADO	BIFURCACIÓN DE HOPF SUPERCRÍTICA Y SUBCRÍTICA EN UN SISTEMA DIFERENCIAL MULTIPARAMÉTRICO
AUTOR(A) (ES)	HAROLD JOSÉ ACOSTA PINEDA
DIRECTOR (A)	JORGE RODRIGUEZ
CO-DIRECTOR (A)	ALBERTO REYES
JURADOS	OSMIN FERRER BORIS REYES
TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE	MATEMÁTICO
PROGRAMA	MATEMÁTICAS
PREGRADO / POSTGRADO	PREGRADO
FACULTAD	CIENCIAS BÁSICAS
SEDE INSTITUCIONAL	SEDE NORTE
AÑO DE PRESENTACIÓN DEL TRABAJO DE GRADO	2020
NÚMERO DE PÁGINAS	62
TIPO DE ILUSTRACIONES	IMÁGENES
MATERIAL ANEXO (VÍDEO, AUDIO, MULTIMEDIA O PRODUCCIÓN ELECTRÓNICA)	No Aplica
PREMIO O RECONOCIMIENTO	APOYO ECONOMICO RECIBIDO EN CONVOCATORIA



Bifurcación de Hopf Supercrítica y
Subcrítica en un Sistema
Diferencial Multiparamétrico

Harold Acosta Pineda

Tesis De Pregrado

Barranquilla, Agosto 2020



Bifurcación de Hopf Supercrítica y Subcrítica en un Sistema Diferencial Multiparamétrico.

Harold Acosta Pineda

Trabajo de Pregrado

Barranquilla, Agosto 2020



UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
PREGRADO EN MATEMÁTICAS

Bifurcación de Hopf Supercrítica y Subcrítica en un Sistema Diferencial Multi-paramétrico

Estudiante: Harold Acosta Pineda

Este trabajo de grado ha sido aprobado en nombre de la Universidad del Atlántico por el siguiente jurado examinador:

Nombre- Filiacion -País

Nombre- Filiacion -País

Agosto del 2020

Contenido

APROBACIÓN DEL JURADO	iii
Contenido	vi
Lista de Figuras	viii
Agradecimientos	ix
Resumen	xi
1 Introducción	1
2 Preliminares	3
2.0.1 Teorema de la Variedad Estable.	4
2.0.2 Teoremas Para las singularidades en el plano finito.	6
2.1 CICLOS LIMITES	11
2.2 BIFURCACIONES	14
2.3 Singularidades en el infinito	20
3	25
3.1 SUPERFICIES PARAMETRICAS	25
3.2	29
4	33

5		37
5.1	Bifurcación de Hopf Supercrítica y Subcrítica	37
5.2	39
6		43
6.1	Singularidades en el Plano Infinito	43
6.2	45
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS		47

Lista de Figuras

2.1	Puntos Singulares Hiperbólicos.	7
2.2	Retrato fase de Puntos Singulares Semi-Hiperbólicos	8
2.3	Retrato fase de Puntos Singulares Nilpotentes	10
2.4	Bifurcación de un sistema lineal.	15
2.5	Bifurcaciones por pérdida de hiperbolicidad en equilibrios.	16
2.6	Gráficas de $f(x) = \alpha + x^2$ para la bifurcación fold.	17
2.7	La carta local U_k, V_k para $k = 1, 2, 3$ de la esfera de Poincaré	22
2.8	El retrato de fase en el disco de Poincaré del sistema	23
4.1	Origen inestable, no hay ciclos límites.	34
4.2	Origen estable, no hay ciclos límites.	34
4.3	Origen estable, ciclos límite inestable.	35
4.4	Origen inestable, ciclos límite estable	36
5.1	Bifurcación Hopf supercrítica.	38
5.2	Bifurcación Hopf subcrítica.	39
6.1	Sistema (3.1) con $(a, b, c) \in B_1$ y $b > 0$	46
6.2	Sistema (3.1) con $(a, b, c) \in B_1$ y $b < 0$	46
6.3	Sistema (3.1) con $(a, b, c) \in B_1$ y $b = 0$	46
6.4	Sistema (3.1) con $(a, b, c) \in \bigcup_{k=2}^3 B_k$, y $b < 0$	46

6.5	Sistema (3.1) con $(a, b, c) \in \bigcup_{k=2}^3 B_k$ y $b > 0$	46
-----	---	----

Agradecimientos

Primeramente darle gracias a Dios por guiarme y darme las fuerzas suficiente para alcanzar este logro tan anhelado, a mis padres Jorge Acosta Pérez y Alba Marina Pineda Jiménez que siempre han estado ahí con su apoyo incondicional desde el primer momento que tome esta decisión de estudiar esta carrera, por esa confianza que depositaron en mi y así poder lograr esta meta.

Seguidamente a mis tías, en particular a mi tia Mirla Acosta Pérez, quién con su apoyo me ayudo en los momentos más difíciles de esta carrera; a Neriz Pineda Jiménez, a mis primos y primas que creyeron en mi, a Jesús Carlo Guerra, Doris del Pilar Arrauth y a mi novia Laura Guerra quienes con sus consejos me impulsabn aún más.

A mis compañeros de clase en particular, Vladimir Blanco, Rafael Gonzalez, Efren Mesino, Miguel Berrocal, Isaias Beleño, Eduardo Perez, Cristian Joly y entre otros, , muy agradecido con ellos, fue una linda carrera al lados de todos ellos.

A los profesores que siempre dieron lo mejor de ellos para sacar todo de mi, a esos que al final de todo le agradezco, profesores como; Rafael Castro, Tovias Castro, Carlos Araujo, Oswaldo Dede, entre otros, que con sus enseñanzas alimentaron un poco mis conocimientos.

A mis tutores, jefes y amigos, el profesor Jorge Rodríguez y el profesor Alberto Reyes, por su confianza, apoyo y dedicación, sin ellos este trabajo no hubiese sido posible.

GRACIAS, MUCHAS GRACIAS.

Resumen

En este trabajo de investigación, en primer lugar presentamos las superficies paramétricas, las cuales constituyen a \mathbb{R}^3 . En segundo lugar, clasificamos las singularidades en el plano finito teniendo en cuenta los parámetros $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ para las regiones donde aparece el origen como único punto crítico. Seguidamente, usando la teoría de bifurcación de Hopf para la existencias de estas, también posee ciclos límites. Por último concluimos con la variedad estable e inestable, singularidades en el plano infinito y sus retratos globales.

Palabras Claves: Ciclos Límites, centros, focos, bifurcación de Hopf

Introducción

Las soluciones exactas de ecuaciones diferenciales juegan un papel fundamental en la comprensión adecuada de características cualitativas de fenómenos de diferentes áreas de conocimiento, en especial, las ciencias naturales. Las respectivas soluciones comúnmente se usan para verificar las consistencias y estimar los errores de algunos valores numéricos, y los métodos analíticos utilizados como aproximación. Varios de los problemas de ingeniería, ciencias sociales y ciencias básicas, se pueden expresar como sistemas autónomos:

$$\dot{X} = f(X)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continuamente diferenciable. En general no es posible resolver el problema no lineal dado, así que tener información cualitativa del comportamiento local de las soluciones constantes de la ecuación puede ser de gran ayuda.

En particular el teorema de Hartman-Grobman, ver [2], muestra que topológicamente el comportamiento global del sistema no lineal, cerca de una solución de equilibrio Y_0 , es típicamente determinada por el comportamiento del sistema lineal: $\dot{X} = AX$ cerca del origen, donde la matriz $A = Df(x)$. Por este motivo el estudio de la dinámica de las soluciones cercanas al origen es importante desde el punto de vista teórico y práctico. Ahora bien, el comportamiento cualitativo de las soluciones de la ecuación recae directamente en los valores propios de la matriz A , así el problema se hace puramente algebraico.

El sistema de ecuaciones diferenciales en el que centraremos nuestro estudio es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= y[4ax^2 + b] + [-a^2x^4 - abx^2 + c]x \end{aligned} \tag{1.1}$$

El cual nace de la siguiente ecuación diferencial cuando $n = 1$ y $k = 2$

$$yy'_x = x^{n-1}y[a(2n+k)x^k + b] + [-a^2nx^{2k} - abx^k + c]x^{2n-1} \quad (1.2)$$

La ecuación diferencial (1.2) se escogió de [6]. Ecuación que llama la atención dado su nivel de dificultad para el estudio cualitativo. Además, según [6] es una ecuación que podría encontrarse en diversas aplicaciones (en la teoría de la transferencia de calor y masa, mecánica no lineal, elasticidad, hidrodinámica, teoría de oscilaciones no lineales, teoría de la combustión, ciencia de ingeniería química, etc).

La configuración de las curvas en el espacio de fase revela información sobre la existencia de atractores, repulsores y ciclos límite; este último desarrollara un concepto teórico muy importante como el mapeo de retorno o el Teorema de la Región Anular, el cual con la contribución del matemático I. Bendixson en 1901 se transformo en el famoso Teorema de Poincaré-Bendixson. El resultado anterior confirma que las soluciones en las cuales realmente estamos interesados, son aquellas que llamamos singulares (asociadas a puntos críticos, orbitas periódicas). Esto es debido a que bajo condiciones de compatibilidad, cualquier otra solución tiende hacia un conjunto de curvas singulares, llamadas conjunto límite. Por lo tanto, el retrato fase se determina por el carácter y la configuración de las soluciones singulares.

En este trabajo final, analizaremos las singularidades en el plano finito e infinito para ciertas regiones, órbitas periódicas y bifurcaciones de Hopf para el sistema multiparamétrico (1.1). Para el análisis de las bifurcaciones locales en un sistema dado, se usa transformaciones invertibles locales que dependen del parámetro, con el fin de transformar el sistema en uno de tipo polinómico (forma normal), que sea localmente topológicamente equivalente al dado. Luego, en primera instancia se busca comprender las demostraciones de los teoremas de formas normales, para luego generar un documento más detallado y de fácil comprensión sobre dicha temática.

El estudio de la teoría cualitativa es de vital importancia para los sistemas dinámicos, puesto que brinda una visualización del comportamiento de ciertas curvas al redor de diversos puntos críticos del sistema, además permite modelar fenómenos de la naturaleza. Es por esta razón que a continuación se estará profundizando algunos temas que posteriormente se utilizaran en el desarrollo de este trabajo de grado.

Preliminares

En este capítulo se describen los preliminares a consideración son necesarios para que cualquier lector pueda interpretar de la mejor manera cada sección que conforma este trabajo de investigación.

Aquí estudiaremos sistemas de la forma

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y) \quad (2.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = G(x, y) \quad (2.2)$$

donde F y G son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en todo el plano.

El sistema (2.1) y (2.2) en el que la variable independiente t no aparece en F y en G se le llama **autónomo**.

Definición 2.0.1 (Punto Crítico). *Un punto (x_0, y_0) tal que $F(x_0, y_0) = 0$ y $G(x_0, y_0) = 0$ se llama un punto crítico del sistema.*

Definición 2.0.2. *El sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$ con la matriz $A = Df(x_0)$ es llamado la **Linealización** del sistema en (x_0) . Para analizar un sistema no lineal es importante determinar los puntos críticos para así poder describir su comportamiento cerca de ellos. Se mostrará que el comportamiento local de un sistema no lineal cerca de un punto crítico hiperbólico x_0 es determinado cualitativamente por el comportamiento del sistema $\dot{x} = Ax$ con la matriz $A = Df(x_0)$, cerca del origen. La función $Ax = Df(x_0)x$ es llamada parte lineal de f en x_0 .*

2.0.1 Teorema de la Variedad Estable.

El teorema de la Variedad Estable es uno de los resultados mas importante en la teoría cualitativa local de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. El Teorema muestra que cerca a un punto de equilibrio hiperbólico x_0 , el Sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$ tiene una variedad estable e inestable S y U tangente a x_0 .

Teorema 2.0.3 (Variedad Estable e Inestable). *Sea E un subconjunto de \mathbb{R}^n conteniendo el origen, sea $f \in C^1(E)$, y sea ϕ_t el flujo del sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$. Suponga que $f(0) = 0$ y que $Df(0)$ tiene k valores propios con parte real negativa y $n - k$ valores propios con parte real positiva. Entonces existe una variedad k -dimensional S tangente al subespacio estable E^s del sistema $\dot{x} = Ax$ en 0 tal que para todo $t \geq 0$, $\phi_t(S) \subset S$ y para todo $x_0 \in S$.*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = 0;$$

y existe una variedad u $n - k$ dimensional diferenciable tangente al subespacio inestable E^u de $\dot{x} = Ax$ en 0 tal que para todo $t \leq 0$, $\phi_t(U) \subset U$ y para todo $x_0 \in U$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = 0.$$

Para ver la prueba de este teorema [2], observemos que si $f \in C^1(E)$ y $f(0) = 0$, entonces el sistema $\dot{x} = f(x)$ puede escribirse como

$$\dot{x} = Ax + F(x) \tag{2.3}$$

donde $A = Df(0)$, $F(x) = f(x) - Ax$, $F \in C^1(E)$, $F(0) = 0$ y $DF(0) = 0$.

Ademas, para ver algo mas detallado ver [2] donde nos muestra que la solución de la ecuación integral. hay una matriz C $n \times n$ invertible tal que

$$B = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

donde los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de la matriz P de $k \times k$ tiene parte real negativa y los valores propios $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ de la matriz Q de $(n - k) \times (n - k)$ tiene parte real positiva.

Tomando $y = C^{-1}x$, el sistema (2.3) entonces tiene la forma

$$\dot{y} = By + G(y) \quad (2.4)$$

donde $G(y) = C^{-1}F(Cy)$. Entonces

$$u(t, a) = U(t)a + \int_0^t U(t-s)G(u(s, a))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(u(s, a))ds$$

satisface (2.4) y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, a) = 0.$$

Ademas, le da un esquema iterativo para computación de la solución:

$$u^{(0)}(t, a) = 0$$

$$u^{(j+1)}(t, a) = U(t)a + \int_0^t U(t-s)G^j(u(s, a))ds - \int_t^\infty V(t-s)G^j(u(s, a))ds$$

Ejemplo 2.0.4. Dado el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y^2, \\ \dot{y} = x^2 + y. \end{cases} \quad (2.5)$$

$$A = B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1. \end{bmatrix}, \quad F(x) = G(x) = \begin{bmatrix} -y^2 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 0. \end{bmatrix}, \quad V(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^t. \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$u^{(0)}(t, a) = 0$$

$$\mathbf{u}^{(1)}(t, \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} e^{-t} \mathbf{a}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}^{(2)}(t, \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} e^{-t} \mathbf{a}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-s)} & 0 \\ 0 & 0. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2s} \mathbf{a}_1^2 \end{bmatrix} ds - \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{(t-s)}. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2s} \mathbf{a}_1^2 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} e^{-t} \mathbf{a}_1 \\ -\frac{e^{-2t}}{3} \mathbf{a}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}^{(3)}(t, \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} e^{-t} \mathbf{a}_1 + \frac{1}{27} (e^{-4t} - e^{-t}) \mathbf{a}_1^4 \\ -\frac{e^{-2t}}{3} \mathbf{a}_1^2 \end{bmatrix}$$

En lo que siguiente podemos mostrar que $\mathbf{u}^4(t, \mathbf{a}) - \mathbf{u}^3(t, \mathbf{a}) = O(\mathbf{a}_1^5)$ y por lo tanto podemos aproximar por $\psi_2(\mathbf{a}_1) = -\frac{1}{3} \mathbf{a}_1^2 + O(\mathbf{a}_1^5)$ y la variedad estable puede aproximarse por

$$S : \mathbf{y} = -\frac{1}{3} \mathbf{x}_1^2 + O(\mathbf{a}_1^5)$$

como $\mathbf{x}_1 \rightarrow 0$. Del mismo modo obtener

$$U : \mathbf{x} = -\frac{1}{3} \mathbf{y}_1^2 + O(\mathbf{a}_1^5)$$

2.0.2 Teoremas Para las singularidades en el plano finito.

Teorema 2.0.5 (Puntos Singulares Hiperbólicos.). Sea $(0, 0)$ una singularidad aislada de campo vectorial X , dado por

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mathbf{a}x + \mathbf{b}y + A(x, y), \\ \dot{y} &= \mathbf{c}x + \mathbf{d}y + B(x, y). \end{cases}$$

donde A y B son analíticas en una vecindad del origen con

$$A(0, 0) = B(0, 0) = DA(0, 0) = DB(0, 0) = 0.$$

Sean λ_1 y λ_2 los valores propios de $DX(0,0)$. Entonces:

1. Si λ_1, λ_2 son reales y $\lambda_1\lambda_2 < 0$, entonces $(0,0)$ es un punto silla, (figura (2.1)a), cuyas separatrices tienden a $(0,0)$ en las direcciones dadas por los vectores propios asociados con λ_1 y λ_2 .
2. Si λ_1, λ_2 son reales y $\lambda_1\lambda_2 > 0$, entonces $(0,0)$ es un nodo, (figura (2.1)b). Si $\lambda_1 > 0$ ($\lambda_1 < 0$) entonces es repulsor (atractor).
3. Si $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ y $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ con $\alpha, \beta \neq 0$, entonces $(0,0)$ es un foco, (figura (2.1)c). Si $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) entonces es repulsor (atractor).
4. Si $\lambda_1 = \beta i$ y $\lambda_2 = -\beta i$, entonces $(0,0)$ es un centro lineal, topológicamente un foco o un centro, (figura (2.1)c y d).

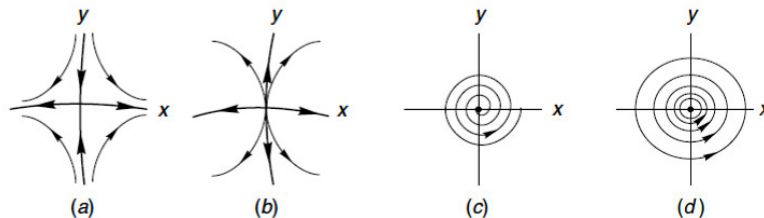


Figura 2.1 Puntos Singulares Hiperbólicos.

Para un estudio más detallado de la temática ver [1, pág 71].

Ejemplo 2.0.6. Dado el siguiente sistema,

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 - 1, \\ \dot{y} = 2y. \end{cases} \quad (2.6)$$

Note que $(1,0)$ y $(-1,0)$ son los puntos críticos del sistema (2.6)

Luego

$$M(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 0 & 2. \end{bmatrix}$$

entonces

$$M(1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2. \end{bmatrix}$$

Así $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 2$, por teorema (2.0.5), $\lambda_1\lambda_2 = 4 > 0$, además $\lambda_1 > 0$, entonces el $(1, 0)$ es un nodo repulsor.

por otra parte

$$M(-1, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2. \end{bmatrix}$$

Así $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 2$, por teorema (2.0.5), $\lambda_1\lambda_2 = -4 < 0$, además $\lambda_1 < 0$, entonces el $(-1, 0)$ es un punto silla.

Teorema 2.0.7 (Puntos Singulares Semi-Hiperbólicos). Sea $(0, 0)$ un punto singular aislado del campo vectorial X dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x, y), \\ \dot{y} = \lambda y + B(x, y). \end{cases}$$

donde A y B son analíticas en una vecindad del origen y también

$A(0, 0) = B(0, 0) = DA(0, 0) = DB(0, 0) = 0$ y $\lambda \neq 0$. Sea $y = f(x)$ la solución de la ecuación $\lambda y + B(x, y) = 0$ en una vecindad del punto $(0, 0)$, y suponga que la función $g(x) = A(x, f(x))$ tiene la expresión $g(x) = a_m x^m + o(x^m)$, donde $m \geq 2$ y $a_m \neq 0$. Entonces:

1. Si m es impar y $a_m < 0$, entonces $(0, 0)$ es una silla topológica, (figura(2.0.7)a).
2. Si m es impar y $a_m > 0$, entonces $(0, 0)$ es un nodo topológico inestable, (figura(2.0.7)b).
3. Si m es par, entonces $(0, 0)$ es una silla-nodo, es decir, un punto singular cuya vecindad es la unión de un sector parabólico y dos sectores hiperbólicos, (figura(2.0.7)c).

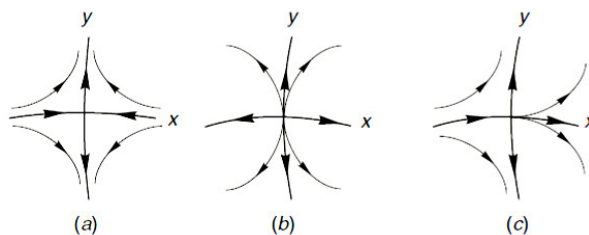


Figura 2.2 Retrato fase de Puntos Singulares Semi-Hiperbólicos

Para un estudio más detallado de la temática ver [1, pág 74].

Teorema 2.0.8 (Puntos Singulares Nilpotentes). Sea $(0,0)$ un punto singular aislado del campo vectorial X dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = y + A(x, y), \\ \dot{y} = B(x, y). \end{cases}$$

donde A y B son analíticas en una vecindad del origen y también $j_1A(0,0) = j_1B(0,0) = 0$. Sea $y = f(x)$ la solución de la ecuación $y + A(x, y) = 0$ en una vecindad de el punto $(0,0)$, y considere $F(x) = B(x, f(x))$ y $G(x) = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)_{(x, f(x))}$. Entonces

1. Si $F(x) \equiv G(x) \equiv 0$, entonces el retrato de fase de X esta dado por la figura (2.3)a.
2. Si $F(x) \equiv 0$ y $G(x) \equiv \beta x^n + o(x^n)$ para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ y $\beta \neq 0$, entonces el retrato de fase de X esta dado por la figura (2.3)b o c.
3. Si $G(x) \equiv 0$ y $F(x) \equiv \alpha x^m + o(x^m)$ para $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$ y $\alpha \neq 0$, entonces.
 - (a) Si m es impar y $\alpha > 0$, entonces el origen de X es una silla. figura (2.3)d, y si $\alpha < 0$, entonces es un centro o un foco. figura (2.3)e-g;
 - (b) Si m es par entonces el origen de X es una cúspide como en la figura (2.3)h.
4. Si $F(x) \equiv \alpha x^m + o(x^m)$ y $G(x) \equiv \beta x^n + o(x^n)$ con $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$, entonces tenemos
 - (a) si m es par; y
 - i. $m < 2n + 1$, entonces el origen de X es una cúspide como en la figura (2.3)h;
 - ii. $m > 2n + 1$, entonces el origen de X es una silla-nodo como en la figura (2.3)i o j;
 - (b) Si m es impar y $\alpha > 0$ entonces el origen de X es una silla como en la figura (2.3)d;
 - (c) Si m es impar, $\alpha < 0$ y
 - i. Ya sea $m < 2n + 1$, o $m = 2n + 1$ y $\beta^2 + 4\alpha(n + 1) < 0$, entonces el origen de X es un centro o un foco, figura (2.3)e-g;
 - ii. n es impar y ya sea $m > 2n + 1$, o $m = 2n + 1$ y $\beta^2 + 4\alpha(n + 1) \geq 0$, entonces el retrato de fase de el origen de X consiste en un sector hiperbólico y un sector elíptico como en la figura (2.3)k;
 - iii. n es par y ya sea $m > 2n + 1$, o $m = 2n + 1$ y $\beta^2 + 4\alpha(n + 1) \geq 0$, entonces el origen de X es un nodo como en la figura (2.3)m. El nodo es atractor si $\beta < 0$ y repulsor si $\beta > 0$.

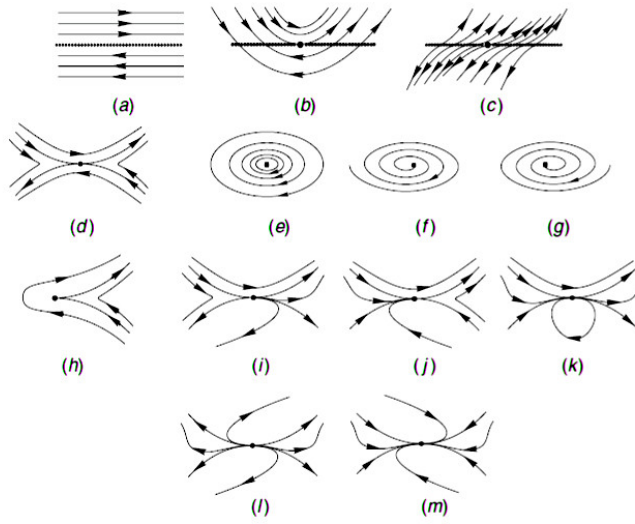


Figura 2.3 Retrato fase de Puntos Singulares Nilpotentes

Para un estudio más detallado de la temática ver [1, pág 116].

Ejemplo 2.0.9. Dado el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 + y, \\ \dot{y} = x^3. \end{cases} \quad (2.7)$$

Notemos que el único punto crítico del sistema (2.7) es el $(0, 0)$.

Luego

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 & 1 \\ 3x^2 & 0. \end{bmatrix}$$

entonces

$$M(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0. \end{bmatrix}$$

Así $\lambda_1 \lambda_2 = 0$. Luego por teorema (2.0.8), sea $y = f(x) = -x^3 \Rightarrow F(x) = x^3$ y $G(x) = 3x^2$, con $m = 3$, $\alpha > 0$, entonces el $(0, 0)$ es un punto silla.

2.1 CICLOS LIMITES

Consideremos el sistema autónomo no lineal

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y); \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y) \quad (2.8)$$

donde F, G así como sus primeras derivadas parciales son continuas en el plano de fase.

Definición 2.1.1. *Un ciclo límite es una trayectoria aislada cerrada, es decir, no existen otras trayectorias cerradas en la vecindad de ésta y por lo tanto las trayectorias vecinas a ésta se mueven en espiral acercándose o alejándose del ciclo límite.*

Si todas las trayectorias vecinas se acercan al ciclo, entonces éste es estable. El ciclo límite es inestable si las trayectorias vecinas se alejan del ciclo; existen casos extraños donde se dice que el ciclo es semiestable y se da cuando algunas trayectorias se alejan del ciclo y otras tienden a él.

Los ciclos límites sólo pueden ocurrir en sistemas no lineales; es imposible que sucedan en sistemas lineales. Aunque un sistema lineal puede tener orbitas cerradas, éstas no son aisladas y corresponden a la dinámica causada por un punto fijo tipo centro.

Criterios de no-existencia de órbitas periódicas

Dada una órbita periódica $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ nos interesa saber qué tipo de órbita hay en la región acotada por la curva, denotémosla por $\text{int}(\gamma)$. Enunciemos primero un resultado que nos será útil:

Teorema 2.1.2 (De punto fijo de Brouwer). *Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ homeomorfo a una bola cerrada en \mathbb{R}^2 y $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función continua, tal que $g(\partial U) \subset U$. Entonces g tiene al menos un punto fijo en U , es decir, existe un punto $x \in U$, tal que $g(x) = x$.*

Teorema 2.1.3. *Sea $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva periódica para $\phi_t(x)$. Entonces $\text{int}(\gamma)$ contiene al menos un punto crítico.*

Resultados de no existencia del Tipo Bendixson:

Continuamos discutiendo otros resultados para la no-existencia de soluciones periódicas, pero primero recordemos el siguiente Teorema clásico:

Teorema 2.1.4 (Green). Sea $f = (f_1, f_2) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 , es decir, funciones con primeras derivadas parciales continuas en un dominio simplemente conexo D (es decir, D no posee hoyos), sea $\gamma \subset D$ una curva de Jordan y $\text{int}(\gamma)$ la región limitada por la curva, entonces se cumple

$$\oint_{\gamma} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 = \iint_{\text{int}(\gamma)} \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2.$$

Teorema 2.1.5 (Criterio de Bendixson). Sea $f = (f_1, f_2) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 en un dominio simplemente conexo $D \subset \mathbb{R}^2$ tal que la divergencia de f , $\text{div}(f) := \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$, es no idénticamente cero, y no cambia de signo en D , entonces el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

no tiene órbitas periódicas en D .

Teorema 2.1.6 (Criterio de Bendixson-Dulac). Sean $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$ y $h(x_1, x_2)$ funciones con primera derivada parcial continua en un dominio simplemente conexo $D \subset \mathbb{R}^2$, tales que $\frac{\partial(f_1 h)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2 h)}{\partial x_2}$ no es idénticamente cero, y no cambia de signo en D , entonces el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

no tiene órbitas periódicas en D .

Corolario 2.1.7. Sea $U_0 \subset U$ un conjunto abierto anular (i.e., homeomorfo a un anillo del plano), supongamos que existe una función con derivadas parciales continuas $h : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que la divergencia $\frac{\partial(hf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(hf_2)}{\partial x_2}$ no es idénticamente 0, ni cambia de signo en U_0 . Entonces el sistema tiene a lo más una órbita periódica enteramente contenida en U_0 .

Criterios afirmativos para la existencia de soluciones periódicas

Dado un punto $x \in \Omega$, supongamos que la solución de

$$(1') \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases}$$

con $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y $f_1, f_2 : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi_t(x)$ está definida para todo tiempo, entonces su órbita positiva (negativa) se define como $\{\phi_t(x)\}_{t \geq 0}$ ($\{\phi_t(x)\}_{t \leq 0}$).

Decimos que un conjunto D en el plano es positivamente (negativamente) invariante por el flujo ϕ_t de la ecuación (1'), si $\phi_t(x) \in D, \forall x \in D, \forall t \geq 0$ ($\forall t \leq 0$).

Un resultado positivo para la existencia de órbitas periódicas es dado por el siguiente Proposición, la cual es una consecuencia del Teorema de Poincaré-Bendixson:

Teorema 2.1.8. *Un conjunto cerrado, acotado y no vacío $K \subset \mathbb{R}^2$, que es positivamente (negativamente) invariante por el flujo ϕ_t de (1') contiene una órbita periódica o un punto crítico.*

Casos particulares y otros criterios

Existen además familias de ecuaciones diferenciales para las que es posible probar resultados relativos a la existencia de órbitas periódicas, las cuales, a pesar de su particularidad, son importantes en aplicaciones o para fines teóricos.

Por ejemplo, tenemos los sistemas gradiente.

Sistemas Gradiente

Definición 2.1.9. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, un sistema gradiente es una ecuación de la forma*

$$\dot{x} = -\text{grad}v(x).$$

Donde $v : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función C^2 y $\text{grad}v(x) = \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}$.

Definición 2.1.10. *Sea $y := (y_1, y_2) : I \rightarrow U$ una función diferenciable y $v : U \rightarrow \mathbb{R}$, entonces*

$$Dv(y) = \left(\frac{\partial v}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial v}{\partial y_2} \dot{y}_2 \right),$$

es la derivada de v a lo largo de y .

Proposición 2.1.11. *Un sistema gradiente $\dot{x} = \text{grad}v(x)$ no posee órbitas periódicas.*

Definición 2.1.12 (Ecuación de Liénard). *Una ecuación diferencial se llama de Liénard, si es una ecuación de la forma*

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0.$$

Pasando al sistema asociado, tomando $x_1 = x, x_2 = \dot{x}_1$, obtenemos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -f(x_1)x_2 - g(x_1). \end{cases}$$

Teorema 2.1.13 (Teorema de Lienard). *Suponga que F, g funciones C^1 , tales que:*

a) *g es una función impar y $g(x) > 0$ si $x > 0$.*

b) *$F(x) = \int_0^x f(s)ds$ tiene exactamente un cero positivo c , $F(x) < 0$, si $0 < x < c$, positiva y no decreciente si $x > c$, si además $F(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$.*

Entonces la ecuación de Liénard tiene exactamente una órbita periódica.

2.2 BIFURCACIONES

En este apartado nombraremos los preliminares que a consideracion son necesarios para desarrollar la teoría de bifurcaciones.

Definición de bifurcaciones y sus formas normales

Ahora considere la siguiente familia de ecuaciones diferenciales:

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R},$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es la variable de estado y $\alpha \in \mathbb{R}$ es un parámetro real que no depende del tiempo t . Con esta ecuación lo que se busca es analizar el comportamiento de las soluciones cuando se varia el parámetro α . Entonces, dados dos valores de parámetros, existen dos posibilidades: que los sistemas queden topológicamente equivalentes o no.

Definición 2.2.1. *La aparición de un retrato de fase de $x' = f(x, \alpha)$ no topológicamente equivalente por la variación del parámetro α se llama una bifurcación.*

Es decir, una bifurcación es un cambio de tipo topológico del sistema con relación a la variación de parámetros. Las bifurcaciones se clasifican como globales o locales.

Definición 2.2.2. *Un diagrama de bifurcaciones de un sistema dinámico es una estratificación de su espacio de parámetros inducido por la equivalencia topológica, junto con los retratos de fase representados por cada estrato.*

Ejemplo 2.2.3. Considerando el siguiente sistema

$$x' = Ax,$$

donde la matriz A esta dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Es claro que el único punto de equilibrio que tiene el sistema es $x = 0$. Ahora si $\alpha = 0$ los valores propios de A son $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$, luego las órbitas que se generan son órbitas cerradas y el origen resulta ser un centro, ahora si $\alpha \neq 0$ los valores propios están dados por $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4})$ para valores de α muy cercanos a cero, estos valores propios son complejos, y tienen parte real diferente de cero. Entonces, si $\alpha > 0$ las órbitas resultan ser espirales inestables, y si $\alpha < 0$, las espirales resultan ser estables.

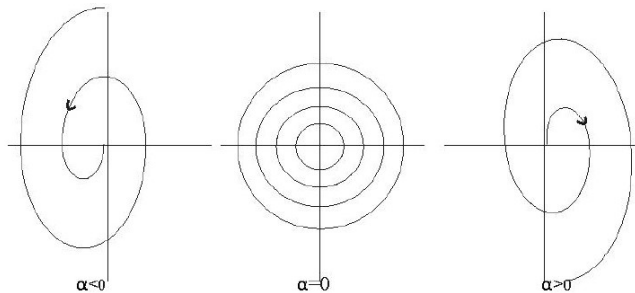


Figura 2.4 Bifurcación de un sistema lineal.

En el ejemplo se puede comprender que para $\alpha = 0$ el sistema tiene una estructura de órbitas diferente que cuando $\alpha \neq 0$, luego los retratos de fase no resultan ser topológicamente equivalentes, debido a que en un caso las órbitas son cerradas y en los otros casos son espirales, por lo tanto $\alpha = 0$ es un valor de bifurcación.

Para las bifurcaciones locales los diagramas de bifurcación universales se obtienen mediante las formas normales. Esta es una de las nociones más importantes en la teoría de las bifurcaciones. Este concepto se puede presentar de la siguiente forma:

Definición 2.2.4 (Forma normal de una bifurcación). Una forma normal de bifurcación para el sistema genérico $x' = f(x, \alpha)$ que tiene un equilibrio en $x = 0$ y presenta una bifurcación en $\alpha = 0$, es un sistema dinámico de la forma

$$\xi' = g(\xi, \beta), \xi \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}^m,$$

donde la función g es un polinomio en la variable $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, depende del parámetro β , y $g(0, 0) = 0$ tal que estos sistemas son topológicamente equivalentes cerca del origen.

Bifurcaciones a un parámetro

Consideramos un sistema de tiempo continuo dependiendo de un parámetro

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.9)$$

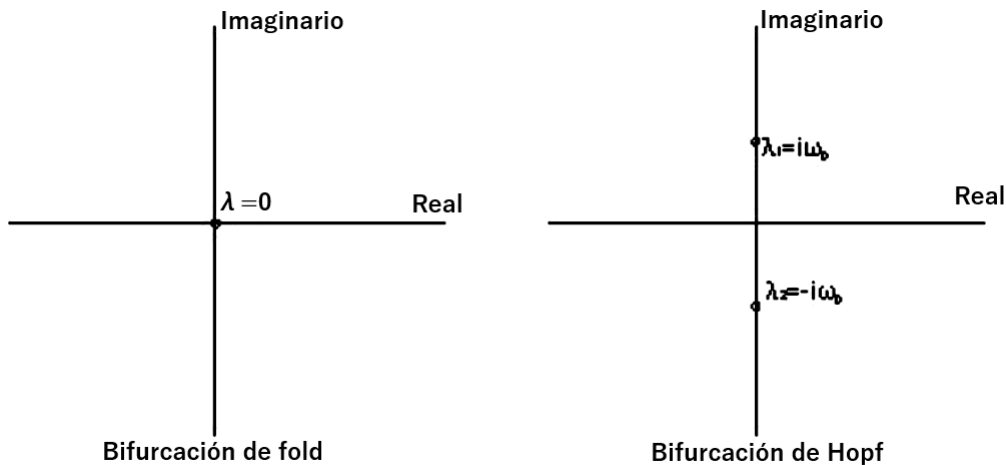


Figura 2.5 Bifurcaciones por pérdida de hiperbolicidad en equilibrios.

donde f es suave con respecto a x y α . Sea $x = x_0$ un equilibrio hiperbólico del sistema para $\alpha = \alpha_0$. Si el parámetro se cambia un poco, el equilibrio también se mueve, pero permanece hiperbólico. Existen dos formas donde la hiperbolicidad del equilibrio se puede perder:

- Si uno de los valores propios de la matriz jacobiana de f evaluada en el equilibrio se convierte en cero ($\lambda = 0$),
- si la parte real de dos valores propios complejos de la matriz jacobiana se vuelve cero ($\lambda_1 = i\omega_0$, $\lambda_2 = -i\omega_0$, $\omega_0 > 0$).

El primer caso es condición necesaria para que ocurra una bifurcación fold o tangente, y la segunda para que ocurra una bifurcación de Hopf.

La forma normal de la bifurcaciones fold

Consideramos el siguiente sistema dinámico unidimensional dependiendo de un parámetro α ,

$$x' = \alpha + x^2 = f(x, \alpha); \quad x, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

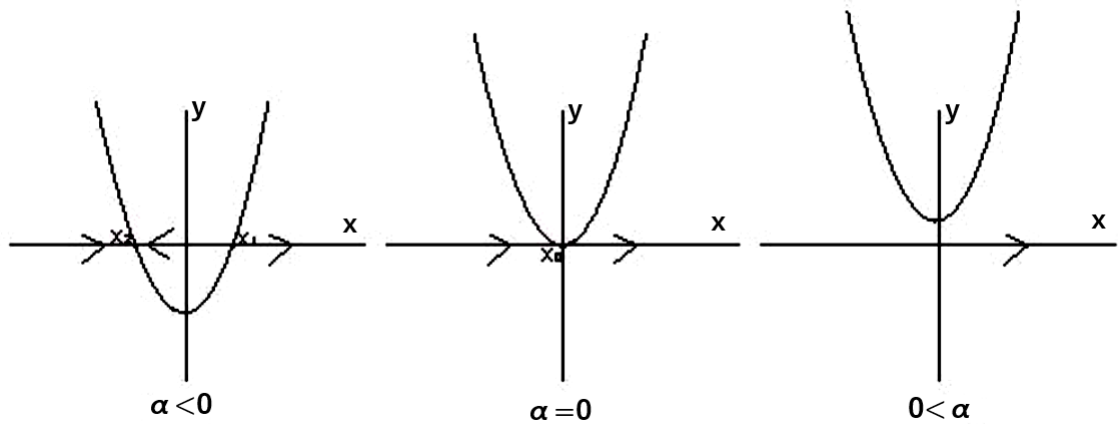


Figura 2.6 Gráficas de $f(x) = \alpha + x^2$ para la bifurcación fold.

En $\alpha = 0$ este sistema tiene un equilibrio no hiperbólico $x_0 = 0$ y no es estable ni inestable con $f_x(0,0) = 0$. Para $\alpha < 0$ hay dos equilibrios en el sistema dados por $x_1(\alpha) = \sqrt{-\alpha}$ y $x_2(\alpha) = -\sqrt{-\alpha}$, en donde $x_2(\alpha)$ es equilibrio estable, mientras en $x_1(\alpha)$ es inestable. Ahora para $\alpha > 0$ no hay equilibrios en el sistema, la cual es una dinámica creciente. Podemos entender que cuando $\alpha = 0$ los dos equilibrios colisionan y desaparecen dando origen a un solo equilibrio en $x_0 = 0$ con valor propio $\lambda = 0$, la cual es condición necesaria de la bifurcación fold.

Ahora vamos adicionar términos de orden superior a la ecuación (2.10)

$$x' = \alpha + x^2 + o(x^3) = f(x, \alpha), \quad (2.11)$$

donde $o(x^3)$ puede depender sin problemas del parámetro α , luego en una vecindad suficientemente

pequeña de $x = 0$ el término $o(x^3)$ no afecta el comportamiento del sistema, el número de equilibrios y estabilidad son los mismos para el sistema (2.10) y el sistema (2.11) en los correspondientes valores paramétricos siempre que α sea suficientemente pequeño. Para estos dos sistemas se preserva la condición de ser localmente topológicamente equivalentes. Estos resultados se formalizan con el siguiente lema.

Lema 2.2.5. *El sistema $x' = \alpha + x^2 + o(x^3)$ es local topológicamente equivalente cerca al origen al sistema $x' = \alpha + x^2$.*

Teorema 2.2.6 (Teorema de la bifurcación fold). *Supongamos que un sistema unidimensional*

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R},$$

donde f es diferenciable, tiene en $\alpha = 0$ el equilibrio $x = 0$, y sea $\lambda = f_x(0, 0) = 0$. Si asumimos las siguientes condiciones genéricas:

1. $f_{xx}(0, 0) \neq 0$
2. $f_\alpha \neq 0$,

entonces existen cambios de coordenadas y parámetros invertibles que transforman el sistema en

$$\eta' = \beta \pm \eta^2 + o(\eta^3).$$

Aplicando el Lema 1. se puede eliminar $o(\eta^3)$ y finalmente llegar al siguiente resultado general.

Teorema 2.2.7 (Forma normal topológica para la bifurcación fold). *Cualquier sistema genérico con un parámetro*

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R},$$

teniendo en $\alpha = 0$ el equilibrio $x = 0$ con $\lambda = f_x(0, 0) = 0$, es localmente topológicamente equivalente cerca al origen a una de las siguientes formas normales:

$$\eta' = \beta \pm \eta^2.$$

Proposición 2.2.8 (Forma normal para la bifurcación Hopf). *La ecuación*

$$z' = z\lambda + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z \bar{z}^l + o(|\omega|^4),$$

donde $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, $g_{ij}(\alpha)$, puede ser transformada mediante el cambio invertible de coordenada compleja (que dependen del parámetro),

$$z = \omega + \frac{h_{20}}{2}\omega^2 + h_{11}\omega\bar{\omega} + \frac{h_{02}}{2}\bar{\omega}^2 + \frac{h_{30}}{6}\omega^3 + \frac{h_{12}}{2}\omega\bar{\omega}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{\omega}^3,$$

para $|\alpha|$ suficientemente pequeño, en la ecuación con solo el término resonante cubico

$$\omega' = \lambda\omega + c_1\omega^2\bar{\omega} + o(|\omega|^4),$$

donde $c_1 = c_1(\alpha)$.

Teorema 2.2.9. *Suponga un sistema bidimensional*

$$x' = f(x, \alpha); \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

con f función suave, tiene para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño el equilibrio $x = 0$ con valores propios

$$\lambda_{1,2} = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha),$$

donde $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$.

Asuma que se tienen las siguientes condiciones genéricas:

1. $\mu' \neq 0$
2. $l_1(0) \neq 0$, donde l_1 es el primer coeficiente de Lyapunov.

Entonces existe un cambio invertible de coordenadas y parámetros, y una reparametrización del tiempo que transforma el sistema en

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \pm (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + o(\|x\|^4)$$

Lema 2.2.10. *El sistema*

$$z' = (\alpha + i)z - z|z|^2 + o(|z|^4) \tag{2.12}$$

es localmente topológicamente equivalente cerca al origen al sistema

$$z' = (\alpha + i)z - z|z|^2 \tag{2.13}$$

Teorema 2.2.11 (Forma normal topológica para la bifurcación Hopf). *Cualquier sistema genérico bidimensional y uniparamétrico*

$$x' = f(x, \alpha),$$

que tenga en $\alpha = 0$ el equilibrio $x = 0$ con valores propios

$$\lambda_{1,2}(0, 0) = \pm i\omega_0, \quad \omega_0 > 0,$$

es localmente topológicamente equivalente cerca al origen a la siguiente forma normal:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \pm (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

2.3 Singularidades en el infinito

Usaremos la compactificación de Poincaré, ver [1], para representar las soluciones.

Definición 2.3.1. *Compactificación de Poincaré*

Consideremos $X = P\partial/\partial x_1 + Q\partial/\partial x_2$ un campo vectorial Polinomial (las funciones P y Q son polinomios arbitrarios de grado en la variable x_1 y x_2), en otras palabras:

$$\begin{cases} \dot{x} &= P(x_1, x_2), \\ \dot{y} &= Q(x_1, x_2). \end{cases}$$

el grado de X es d si d es el máximo grado de P y Q .

Ahora, consideremos \mathbb{R}^2 como el plano en \mathbb{R}^3 definido por $(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, 1)$. Consideremos la esfera $\mathbb{S}^2 = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$, que llamaremos esfera de Poincaré; esta es tangente a \mathbb{R}^2 en el punto $(0, 0, 1)$. Podríamos dividir esta esfera en $H_+ = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 > 0\}$ (el hemisferio norte), $H_- = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 < 0\}$ (el hemisferio sur) y $\mathbb{S}^1 = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 = 0\}$ (el ecuador). Ahora consideremos la proyección $f^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ y $f^- : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$. Mas precisamente, $f^+(x)$ (respectivamente, $f^-(x)$) es la intersección de la línea recta que pasa por Y y el origen con el hemisferio norte (respectivamente, sur) de \mathbb{S}^2 :

$$f^+(x) = \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right), \quad f^-(x) = \left(\frac{-x_1}{\Delta(x)}, \frac{-x_2}{\Delta(x)}, \frac{-1}{\Delta(x)} \right),$$

donde

$$\Delta(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}.$$

El campo vectorial extendido en \mathbb{S}^2 es llamado la compactificación de Poincaré del campo vectorial X en \mathbb{R}^2 , y este es denotado por $p(X)$.

Como es habitual en trabajos con superficies curvas, usamos cartas para hacer cálculos. Para \mathbb{S}^2 usemos 6 cartas locales dadas por $U_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k > 0\}$, $V_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k < 0\}$ para $k = 1, 2, 3$. Las funciones locales correspondientes $\phi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\psi_k : V_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ son definidas como $\phi_k(y) = -\psi_k(y) = (y_m/y_k, y_n/y_k)$ para $m < n$ y $m, n \neq k$. Denotemos por $z = (u, v)$ el valor de $\phi_k(y)$ o $\psi_k(y)$ para cualquier k , tal que (u, v) jugara diferentes roles según la carta local que estamos considerando. geométrica-mente las coordenadas (u, v) pueden expresarse como en la figura (1.4). Los puntos de \mathbb{S}^1 en cualquier carta tiene $v = 0$.

La expresión para $p(X)$ en la carta local (U_1, ϕ_1) es dada por

$$\begin{cases} \dot{u} &= v^d [-uP(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}) + Q(\frac{1}{v}, \frac{u}{v})], \\ \dot{v} &= -v^{d+1}P(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}). \end{cases}$$

La expresión para (U_2, ϕ_2)

$$\begin{cases} \dot{u} &= v^d [P(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}) - uQ(\frac{u}{v}, \frac{1}{v})], \\ \dot{v} &= -v^{d+1}P(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}). \end{cases}$$

y para (U_3, ϕ_3)

$$\begin{cases} \dot{u} &= P(u, v), \\ \dot{v} &= Q(u, v). \end{cases}$$

La expresión para $p(X)$ en las cartas (V_k, ψ_k) es la misma como para (U_k, ϕ_k) multiplicado por $(-1)^{d-1}$, para $k = 1, 2, 3$.

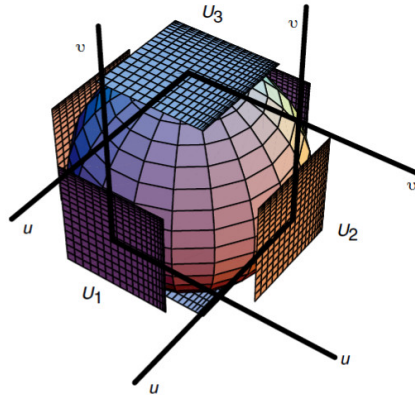


Figura 2.7 La carta local U_k, V_k para $k = 1, 2, 3$ de la esfera de Poincaré

Para un estudio más detallado de la temática ver [1, pág 149].

Ejemplo 2.3.2. Dado el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= x, \\ \dot{y} &= -y. \end{cases} \quad (2.14)$$

Este sistema tiene un único punto singular en el plano finito, el origen, el cual es un punto silla. Sea X el campo vectorial asociado al sistema (2.14). Entonces la expresión para $p(X)$ en la carta local U_1 es

$$\begin{cases} \dot{u} &= -2u, \\ \dot{v} &= -v. \end{cases}$$

Por lo tanto hay un único punto singular en U_1 , el origen, el cual es un nodo estable en el infinito. Ya que el grado de X es impar, el origen de V_1 también es otro nodo estable.

La expresión para $p(X)$ en la carta U_2 es

$$\begin{cases} \dot{u} &= 2u, \\ \dot{v} &= v. \end{cases}$$

Entonces en el origen de U_2 hay un nodo inestable. Lo mismo es cierto para el origen de V_2

Si ahora dibujamos el retrato de fase del sistema (2.14) en el disco de Poincaré obtenemos, figura (2.8)

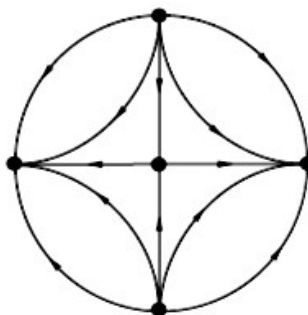


Figura 2.8 El retrato de fase en el disco de Poincaré del sistema

Aquí solo proyectamos el hemisferio norte de la esfera de Poincaré sobre el disco de Poincaré paralelo al eje y_3 . Note que las únicas separatrices de este sistema son las sillan en el origen, que están contenidas en las líneas rectas invariantes $x = 0$ y $y = 0$.

Singularidades en la Región $\bigcup_{k=1}^5 B_k$.

3.1 SUPERFICIES PARAMETRICAS

En esta sección determinaremos las superficies parametricas del siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= y(4ax^2 + b) - (a^2x^4 + abx^2 - c)x,\end{aligned}\tag{3.1}$$

con $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, que influyen en la estabilidad; para encontrar el número de puntos críticos y la estabilidad de cada uno de ellos, al sistema de ecuaciones diferenciales (3.1) lo estudiaremos en cada una de las superficies parametricas, las cuales constituyen a la superficie \mathbb{R}^3 .

$$B_1 = \{(a, b, c) \mid b^2 + 4c < 0\}$$

$$B_2 = \{(a, b, c) \mid b^2 + 4c > 0, c < 0, ab \geq 0\}$$

$$B_3 = \{(a, b, c) \mid b^2 + 4c = 0, ab > 0\}$$

$$B_4 = \{(a, b, c) \mid b^2 + 4c > 0, c = 0, ab > 0\}$$

$$B_5 = \{(a, b, c) \mid c = 0, b = 0\}$$

$$B_6 = \{(a, b, c) \mid b^2 + 4c > 0, c > 0, a \neq 0, ab < 0\}$$

$$B_7 = \{(a, b, c) \mid b^2 + 4c > 0, c = 0, ab < 0\}$$

$$B_8 = \{(a, b, c) \mid b^2 + 4c > 0, c < 0, ab < 0\}$$

$$B_9 = \{(a, b, c) \mid c = 0, a = 0\}$$

Proposición 3.1.1. *La familia $\{B_k\}_{k=1}^9$ es una partición de \mathbb{R}^3 .*

Demostración.

En efecto,

$$\mathbb{R}^3 = \bigcup_{k=1}^9 B_k, \text{ además } B_k \cap B_j = \emptyset \text{ para } j \neq k \text{ donde } j, k \in \{1, \dots, 9\}.$$

Por lo tanto, $\{B_i\}_{i=1}^9$ es una partición de \mathbb{R}^3 . □

Proposición 3.1.2. *Dado el sistema (3.1), con $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, entonces:*

1. *Si $(a, b, c) \in \bigcup_{k=1}^5 B_k$, entonces $(0, 0)$ es el único punto crítico.*
2. *Si $(a, b, c) \in \bigcup_{k=6}^7 B_k$, entonces el sistema tiene tres puntos críticos.*
3. *Si $(a, b, c) \in B_8$, entonces el sistema tiene cinco puntos críticos.*
4. *Si $(a, b, c) \in B_9$, entonces el sistema tiene infinitos puntos críticos.*

Demostración.

La prueba de esta proposición esta basada en el número de ceros que tenga la función

$$g(x) = a^2x^4 + abx^2 - c = \left((ax^2)^2 + b(ax^2) + \frac{b^2}{4} \right) - \frac{b^2 + 4c}{4}$$

entonces

$$g(x) = \left(\left(ax^2 + \frac{b}{2} \right)^2 - \frac{b^2 + 4c}{4} \right) \tag{3.2}$$

Luego

$$g(x) = \left(ax^2 + \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 + 4c}}{2} \right) \left(ax^2 + \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 + 4c}}{2} \right) \tag{3.3}$$

1. Si $(a, b, c) \in B_1$, entonces $b^2 + 4c < 0$, luego por (3.2) se tiene que $g(x) > 0$, entonces la expresión (3.3) no tiene raíces en los reales. Así que $(0, 0)$ es el único punto crítico.

Si $(a, b, c) \in B_2$, entonces $b^2 + 4c > 0$, $c < 0$, $ab \geq 0$, luego por la expresión (3.3) y

$$g(x) = \left(\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 + 4c}}{2} \right) \left(\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 + 4c}}{2} \right) = -c > 0, \text{ entonces}$$

Si $b > 0$, $a > 0$ entonces $g(x) > 0$

Si $b < 0$, $a < 0$ entonces $g(x) < 0$

Si $a = 0$ entonces $g(x) = -c > 0$

Así que en cualquiera de los casos anteriores $g(x)$ no tiene raíces reales y por lo tanto $(0, 0)$ es el único punto crítico

Si $(a, b, c) \in B_3$, entonces $b^2 + 4c = 0$, $ab > 0$, luego $g(x) = \left(ax^2 + \frac{b}{2} \right)^2 > 0$, entonces $g(x)$ no tiene raíces en los reales. Así $(0, 0)$ es el único punto crítico.

Si $(a, b, c) \in B_4$, entonces $b^2 + 4c > 0$, $c = 0$, $ab > 0$, luego $g(x) = a^2x^4 + abx^2 = (a^2x^2 + ab)x^2$ notemos que $a^2x^2 + ab > 0$, entonces $g(x)$ no tiene raíces en los reales. Así que $(0, 0)$ es el único punto crítico.

Si $(a, b, c) \in B_5$, entonces $c = 0$, $b = 0$, luego $g(x) = a^2x^4$. Por lo tanto $(0, 0)$ es el único punto crítico

En conclusión se tiene que si $(a, b, c) \in \bigcup_{k=1}^5 B_k$ el $(0, 0)$ es el único punto crítico.

2. Si $(a, b, c) \in B_6$, entonces $b^2 + 4c > 0$, $c > 0$, $a \neq 0$, $ab < 0$, luego por la expresión (3.3) se tiene que:

Si $b \neq 0$, entonces $\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 + 4c}}{2} > 0$, $\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 + 4c}}{2} < 0$, entonces:

- Si $a > 0$, entonces $ax^2 + \frac{b}{2} + \frac{b^2 + 4c}{2} > 0$, luego $g(x)$ tiene dos ceros.

Así que el sistema (3.1) tiene tres puntos críticos, son:

$$(0, 0), \left(\pm \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2a}}, 0 \right).$$

- Si $a < 0$, entonces $ax^2 + \frac{b}{2} - \frac{b^2 + 4c}{2} < 0$, luego $g(x)$ tiene dos raíces reales.

Por lo tanto (3.1) tiene tres puntos críticos, son:

$$(0, 0), \left(\pm \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 + 4c}}{2a}}, 0 \right).$$

Si $b = 0$, entonces $g(x) = (ax^2 - \sqrt{c})(ax^2 + \sqrt{c})$. Luego $(ax^2 + \sqrt{c}) > 0$, así que $g(x)$ tiene dos raíces reales. Por lo tanto (3.1) tiene tres puntos críticos, son:

$$(0, 0), \left(\pm \sqrt{\frac{\sqrt{c}}{a}}, 0 \right).$$

Si $(a, b, c) \in B_7$, entonces $b^2 + 4c > 0$, $c = 0$, $ab < 0$, luego $g(x) = a^2x^4 + ab^2 = (a^2x^2 + ab)x^2$, así que $g(x)$ tiene dos raíces reales distintas de cero, luego el sistema (3.1) tiene tres puntos críticos, son

$$(0, 0), \left(\pm \sqrt{\frac{-b}{a}}, 0 \right)$$

En conclusión si $(a, b, c) \in B_6 \cup B_7$, el sistema tiene tres puntos críticos.

3. Si $(a, b, c) \in B_8$, entonces $b^2 + 4c > 0$, $c < 0$, $ab < 0$, luego por la expresión (3.3) y

$$\left(\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 + 4c}}{2} \right) \left(\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 + 4c}}{2} \right) = -c > 0, \text{ entonces:}$$

Si $b > 0$, $a < 0$, luego $g(x)$ tiene 4 raíces reales. Por lo tanto el sistema (3.1) tiene cinco puntos críticos, son:

$$(0, 0), \left(\pm \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2a}}, 0 \right) \text{ y } \left(\pm \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 + 4c}}{2a}}, 0 \right).$$

Si $b < 0$, $a > 0$, luego $g(x)$ tiene 4 raíces reales. Por lo tanto el sistema (3.1) tiene cinco puntos críticos, son:

$$(0, 0), \left(\pm \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2a}}, 0 \right) \text{ y } \left(\pm \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 + 4c}}{2a}}, 0 \right).$$

Por lo tanto, si $(a, b, c) \in B_8$, el sistema tiene cinco puntos críticos.

4. Si $(a, b, c) \in B_9$, entonces $a = 0$, $c = 0$, luego el sistema (3.1) se reduce

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= by\end{aligned}$$

Luego el sistema tiene infinitos puntos críticos.

□

3.2 Estudio de la estabilidad del punto crítico $(0, 0)$ en las superficies $\bigcup_{k=1}^5 B_k$.

En esta sección estudiaremos la estabilidad del punto crítico $(0, 0)$ del sistema diferencial (3.1), en las superficies $\bigcup_{k=1}^5 B_k$.

Proposición 3.2.1. Dado el sistema (3.1) con $(a, b, c) \in \bigcup_{k=1}^5 B_k$, entonces:

1. Si $(a, b, c) \in B_1$ y $b > 0$, entonces $(0, 0)$ es un foco repulsor.
2. Si $(a, b, c) \in B_1$ y $b < 0$, entonces $(0, 0)$ es un foco atractor.
3. Si $(a, b, c) \in B_1$ y $b = 0$, entonces $(0, 0)$ es un centro.
4. Si $(a, b, c) \in B_2$, entonces $(0, 0)$ es un nodo (repulsor si $b > 0$) (atractor si $b < 0$).
5. Si $(a, b, c) \in B_3$, entonces $(0, 0)$ es un nodo (repulsor si $b > 0$) (atractor si $b < 0$).
6. Si $(a, b, c) \in B_4$, y si:
 - (a) $a > 0$ y $b > 0$, entonces $(0, 0)$ es un nodo repulsor.
 - (b) $a < 0$ y $b < 0$, entonces $(0, 0)$ un punto silla.

7. Si $(a, b, c) \in B_5$, entonces $(0, 0)$ es un nodo (repulsor si $a > 0$) (atractor si $a < 0$).

Demostración.

El jacobiano asociado al sistema diferencial (3.1) en el origen esta dada por:

$$M(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c & b \end{bmatrix}$$

Los valores propios asociados a la matriz jacobiana son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2} \text{ y } \lambda_1 \lambda_2 = -c$$

1. Si $(a, b, c) \in B_1$ y $b > 0$, entonces $b^2 + 4c < 0$ y $b > 0$, esto implica, $\lambda_1 = \frac{b + i\sqrt{-(b^2 + 4c)}}{2}$
y $\lambda_2 = \frac{b - i\sqrt{-(b^2 + 4c)}}{2}$, por lo tanto $(0, 0)$ es un foco repulsor.

2. Si $(a, b, c) \in B_1$ y $b < 0$, entonces $b^2 + 4c < 0$, y $b < 0$, esto implica que $\lambda_1 = \frac{b + i\sqrt{-(b^2 + 4c)}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{b - i\sqrt{-(b^2 + 4c)}}{2}$, así $(0, 0)$ es un foco atractor.

3. Si $(a, b, c) \in B_1$ y $b = 0$, entonces $b^2 + 4c < 0$ y $b = 0$, luego $\lambda_1 = i\sqrt{-c}$ y $\lambda_2 = -i\sqrt{-c}$, así $(0, 0)$ es un centro.

4. Si $(a, b, c) \in B_2$, entonces $b^2 + 4c > 0$, $c < 0$ y $ab \geq 0$.

Si $b > 0$, $a \geq 0$, y $\lambda_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2} > 0$ y $\lambda_1 \lambda_2 = -c > 0$, luego $\lambda_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4c}}{2} > 0$.
Por lo tanto $(0, 0)$ es un nodo repulsor.

Si $b < 0$, $a \leq 0$, entonces $\lambda_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4c}}{2} < 0$ y $\lambda_1 \lambda_2 = -c > 0$, luego
 $\lambda_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2} < 0$. Por lo tanto $(0, 0)$ es un nodo atractor.

5. Si $(a, b, c) \in B_3$, entonces $b^2 + 4c = 0$, $c < 0$ y $ab \geq 0$.

Si $b > 0$, $a \geq 0$, entonces $\lambda_{1,2} = \frac{b}{2} > 0$. Por lo tanto $(0, 0)$ es un nodo repulsor.

Si $b < 0$, $a \leq 0$, entonces $\lambda_{1,2} = \frac{b}{2} < 0$. Por lo tanto $(0, 0)$ es un nodo atractor.

6. Si $(a, b, c) \in B_4$, entonces $b^2 + 4c > 0$, $c = 0$, $ab > 0$, se tiene que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = b$, en este caso aplicaremos el teorema (2.0.7).

En el sistema (3.1) con $c = 0$, realizaremos el cambio de variable $u = bx - y$, con lo cual se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -4\frac{a}{b^2}(u+y)^2y + \frac{a^2}{b^5}(u+y)^5 + \frac{a}{b^2}(u+y)^3 \\ \dot{y} &= by + 4\frac{a}{b^2}(u+y)^2y - \frac{a^2}{b^5}(u+y)^5 - \frac{a}{b^2}(u+y)^3\end{aligned}$$

$$\text{Luego } A(u, y) = -4\frac{a}{b^2}(u+y)^2y + \frac{a^2}{b^5}(u+y)^5 + \frac{a}{b^2}(u+y)^3,$$

$$B(u, y) = 4\frac{a}{b^2}(u+y)^2y - \frac{a^2}{b^5}(u+y)^5 - \frac{a}{b^2}(u+y)^3.$$

Para despejar y en la ecuación

$$by + 4\frac{a}{b^2}(u+y)^2y - \frac{a^2}{b^5}(u+y)^5 - \frac{a}{b^2}(u+y)^3 = 0,$$

aplicaremos la serie de Taylor con valor inicial $y(0) = 0$, entonces

$$by' + \frac{8a}{b^2}(u+y)(1+y') + \frac{4a}{b^2}(u+y)^2y' - \frac{5a^2}{b^5}(u+y)^4(1+y') - \frac{3a}{b^2}(u+y)^2(1+y') = 0,$$

entonces $y' = 0$,

$$\begin{aligned}by'' + \frac{8a}{b^2}(1+y')^2y + \frac{16a}{b^2}(u+y)(1+y')y' + \frac{8a}{b^2}(u+y)y''y + \frac{a}{b^2}(u+y)^2y'' + \\ - \frac{20a^2}{b^5}(u+y)^3(1+y')^2 - \frac{5a^2}{b^5}(u+y)^4y'' - \frac{6a}{b^2}(u+y)(1+y')^2 = 0,\end{aligned}$$

entonces $y'' = 0$,

$$\begin{aligned}by''' + \frac{24a}{b^2}(1+y')y''y + \frac{24a}{b^2}(1+y')^2y' + \frac{24a}{b^2}(u+y)y''y' + \frac{6a}{b^2}(u+y)(1+y')y'' + \frac{8a}{b^2}(u+y)y'''y + \\ + \frac{a}{b^2}(u+y)^2y''' - \frac{60a^2}{b^5}(u+y)^2(1+y')^3 - \frac{60a^2}{b^5}(u+y)^3(1+y')y'' - \frac{5a^2}{b^5}(u+y)^4y''' - \frac{6a}{b^2}(1+y')^3 = 0,\end{aligned}$$

entonces $y''' = \frac{6a}{b^3}$.

Ahora $y = f(u) = \frac{6a}{3!b^3}u^3 = \frac{a}{b^3}u^3 + \dots$ TOS

Por otro lado, $g(u) = A(u, f(u)) = -\frac{4a^2u^3}{b^5}(u + \frac{a}{b^3}u^3)^2 + \frac{a^2}{b^5}(u + \frac{a}{b^3}u^3)^5 + \frac{a}{b^2}(u + \frac{a}{b^3}u^3)^3$

entonces $g(u) = \frac{a}{b^2}u^3 + \dots$ TOS, donde $m = 3$ y $a_m = a/b^2$.

Si $a > 0$, $b > 0$, entonces $a_m = a/b^2 > 0$, Por lo tanto $(0, 0)$ es un nodo repulsor.

Si $a < 0$, $b < 0$, entonces $a_m = a/b^2 < 0$, Por lo tanto $(0, 0)$ es una silla.

7. Si $(a, b, c) \in B_5$, entonces $c = 0$, $b = 0$, se tiene que los valores propios son $\lambda_{1,2} = 0$, luego aplicando el teorema (2.0.8), se tiene que $A(x, y) = 0$ y $B(x, y) = 4ax^2y - a^2x^5$, se sigue que $f(x) = y = 0$, entonces $F(x) = B(x, f(x)) = -a^2x^5$, con $m = 5$, $\alpha = -a^2$,

$G(x) = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)_{(x, f(x))} = 4ax^2$, con $n = 2$, y $\beta = 4a$. Luego, $m = 5$ es impar, $\alpha = -a^2 < 0$

y $n = 2$ es par, además $m = 2n + 1 = 5$ y $\beta^2 + 4\alpha(n + 1) = 4a^2 > 0$. Entonces:

Si $a > 0$ implica que $\beta = 4a > 0$. Por lo tanto el $(0, 0)$ es nodo repulsor.

Si $a < 0$ implica que $\beta = 4a < 0$. Por lo tanto el $(0, 0)$ es nodo atractor.

□

Ciclos Límites

En este capítulo estudiaremos la existencia o no de ciclos límites que se presentan en algunas superficies teniendo en cuenta los parámetros. A continuación presentaremos algunos de estos resultados.

Proposición 4.0.2. Si $b^2 + 4c < 0$, entonces

1. Si $ab > 0$, entonces el sistema (3.1) no tiene ciclos límites.
2. Si $a = 0$, entonces el sistema (3.1) no tiene ciclos límites.

Demostración.

1. Si $b^2 + 4c < 0$, y $ab > 0$, la $\text{div}(x, y) = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)_{(x,y)} = 4ax^2 + b = 4a \left(x^2 + \frac{b}{4a} \right)$.

Como $\left(x^2 + \frac{b}{4a} \right) > 0$, entonces la divergencia tiene el mismo signo de a . Luego, por el teorema de la divergencia el sistema (3.1) no tiene ciclos límites en esa superficie.

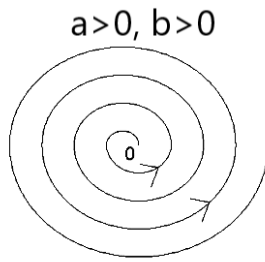


Figura 4.1 Origen inestable, no hay ciclos límites.

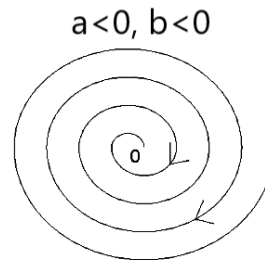


Figura 4.2 Origen estable, no hay ciclos límites.

2. Si $b^2 + 4c < 0$, y $a = 0$, la $\text{div}(x, y) = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)_{(x,y)} = b$.

Como $x^2 > 0$, entonces la divergencia tiene el mismo signo de b . Luego, por el teorema de la divergencia el sistema (3.1) no tiene ciclos límites en esa superficie.

□

Proposición 4.0.3. Si $b^2 + 4c < 0$, y $ab < 0$, entonces el sistema (3.1) tiene ciclo límite.

Demostración.

Sea $f(x) = 4ax^2 + b$ y $g(x) = a^2x^5 + abx^3 - cx$, así que el sistema (3.1) nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(x)y - g(x)\end{aligned}$$

Sea $y = w - F(x)$, donde $F(x) = \int_0^x f(s)ds$, entonces

$$\dot{y} = \dot{w} - f(x)\dot{x} \quad y \quad \dot{w} = -g(x)$$

Así que el sistema (3.1) es equivalente

$$\begin{aligned}\dot{x} &= w - F(x) \\ \dot{w} &= -g(x)\end{aligned}$$

Luego $y = w$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - F(x) \\ \dot{y} &= -g(x)\end{aligned}$$

$$\text{Luego } F(x) = \int_0^x (4ax^2 + b)dx = \frac{4a}{3}x^3 + bx$$

$F(-x) = -F(x)$, $g(x) = -g(x)$, son impares.

$$xg(x) = a^2x^6 + abx^4 - cx^2 = a^2x^2 \left(x^4 + \frac{b}{a}x^2 - \frac{c}{a^2} \right) = a^2x^2 \left(\left(x^2 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2 + 4c}{4a^2} \right)$$

$$xg(x) = a^2x^2 \left(\left(x^2 + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 + 4c}{4a^2} \right)$$

$$F(0) = 0, \quad F'(x) = 4ax^2 + b = 4a \left(x^2 + \frac{b}{4a} \right) = 4a \left(x + \sqrt{-\frac{b}{4a}} \right) \left(x - \sqrt{-\frac{b}{4a}} \right)$$

Para $a > 0$, $b < 0$, entonces $F'(0) = b < 0$. Ahora $F(x) = 0$, entonces $x \left(\frac{4a}{3}x^3 + b \right) = 0$.

Luego $x = \sqrt{-\frac{3b}{4a}} = \alpha$, así $F(x)$ tiene un único cero positivo.

Como $F'(x) = 4a \left(x + \sqrt{-\frac{b}{4a}} \right) \left(x - \sqrt{-\frac{b}{4a}} \right)$, $a > 0$, $x \geq \alpha > 0$, $\left(x + \sqrt{-\frac{b}{4a}} \right) > 0$

$\sqrt{\frac{-b}{4a}} < \sqrt{\frac{-3b}{4a}}$, entonces $-\alpha < -\sqrt{\frac{-b}{4a}}$, entonces $0 \leq x - \alpha < x - \sqrt{\frac{-b}{4a}}$, luego $F'(x) > 0$,

para $x \geq \alpha$, por lo tanto $F(x)$ es creciente. Como $F(x) = \frac{4a}{3}x^3 + bx$, $F(x) \rightarrow \infty$, para $x \rightarrow \infty$, entonces el sistema (3.1) tiene un ciclo límite.

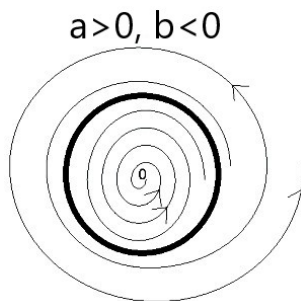


Figura 4.3 Origen estable, ciclos límite inestable.

Para $a < 0$, $b > 0$, vamos hacer el siguiente cambio

$$\tau = -t, \quad \text{entonces} \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = -\frac{dx}{dt}, \quad \text{además} \quad \frac{dy}{d\tau} = -\frac{dy}{dt},$$

$$\text{Luego} \quad \frac{dx}{d\tau} = -y + F(x) \quad \text{y} \quad \frac{dy}{d\tau} = g(x)$$

Sea $x = -x_1$, entonces $-\frac{dx_1}{dt} = -y + F(-x_1)$, y $\frac{dy}{dt} = g(-x_1)$

Luego $F(x_1) = -\frac{4a}{3}x_1^3 - bx_1$, como $a < 0$, $b > 0$, entonces $F(x_1) = \frac{4(-a)}{3}x_1^3 - bx_1$. Así que el sistema (3.1) es equivalente

$$\frac{dx_1}{d\tau} = y - F(x_1)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -g(x_1)$$

$F(-x_1) = -F(x_1)$, $g(x) = -g(x)$, son impares.

$F'(0) = -b < 0$, $F(x_1) = 0$, entonces $x_1 \left(\frac{4(-a)}{3}x_1^2 - b \right) = 0$

Luego, $x_1 = \sqrt{\frac{3b}{4(-a)}} = \beta$, por lo tanto $F(x_1)$ tiene un único cero positivo.

Como $F' = 4(-a)x_1^2 - b = 4(-a) \left(x_1 + \sqrt{\frac{b}{4(-a)}} \right) \left(x_1 - \sqrt{\frac{b}{4(-a)}} \right)$

así que, $a < 0$, $x \geq \beta > 0$, $\left(x_1 + \sqrt{\frac{b}{4(-a)}} \right) > 0$.

$\sqrt{\frac{b}{4(-a)}} < \sqrt{\frac{3b}{4(-a)}}$, entonces $-\beta < -\sqrt{\frac{b}{4(-a)}}$, luego $0 \leq x_1 - \beta < x_1 - \sqrt{\frac{b}{4(-a)}}$, por lo tanto

$F' > 0$, para $x_1 \geq \beta$, así que $F(x_1)$ es creciente. Además, como $F_1 = \frac{4(-a)}{3}x_1^3 - bx_1$, $F(x_1) \rightarrow \infty$, para $x_1 \rightarrow \infty$, entonces el sistema (3.1) tiene un ciclo límite.

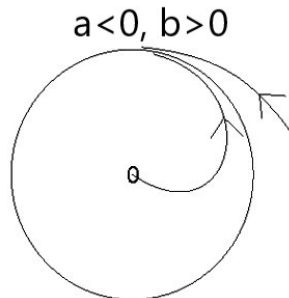


Figura 4.4 Origen inestable, ciclos límite estable

□

Bifurcación de Hopf Supercrítica, Subcrítica y Variedad Estable

En este capítulo encontraremos en primer lugar las bifurcaciones de Hopf Supercrítica y Subcrítica y por último la Variedad Estable e Inestable para la Superficie B_6 .

5.1 Bifurcación de Hopf Supercrítica y Subcrítica

En esta sección analizaremos las bifurcaciones de Hopf Supercrítica y Subcrítica que se presentan en la superficie B_1 y con parámetros $ab < 0$. A continuación daremos el siguiente resultado.

Proposición 5.1.1. *Si $b^2 + 4c < 0$, entonces:*

1. $a < 0$, $b > 0$, entonces el sistema (3.1) tiene una bifurcación de Hopf supercrítica.
2. $a > 0$, $b < 0$, entonces el sistema (3.1) tiene una bifurcación de Hopf subcrítica.

Demostración.

1. Como $b^2 + 4c < 0$, según proposición (3.2.1) ítem (1) el sistema tiene al origen como único punto crítico y $\lambda = \frac{b}{2} \pm i \frac{\sqrt{-(b^2 + 4c)}}{2}$ y $b > 0$. En el sistema original, esto significa que el origen del sistema es un punto de equilibrio inestable, el cual se encuentra rodeado por una órbita cerrada aislada (ciclo límite), según proposición (4.0.3) que es única y estable. Es decir, que todas las

órbitas que empiezan fuera o dentro del ciclo límite, sin incluir el origen, tienden a este ciclo límite cuando $t \rightarrow \infty$. Este caso hace diferencia a una bifurcación de Hopf supercrítica.

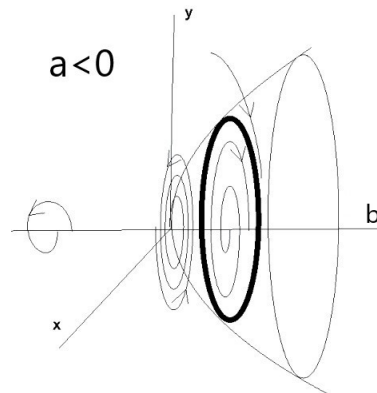


Figura 5.1 Bifurcación Hopf supercrítica.

2. Como $b^2 + 4c < 0$, según proposición (3.2.1) ítem (2) el sistema tiene al origen como único punto crítico y $\lambda = \frac{b}{2} \pm i \frac{\sqrt{-(b^2 + 4c)}}{2}$ y $b < 0$. Esto en el sistema original significa que el origen del sistema es un punto de equilibrio estable, el cual se encuentra rodeado por una órbita cerrada (ciclo límite), según proposición (4.0.3) que es única y estable. Es decir, que todas las órbitas que empiezan fuera o dentro del ciclo límite, sin incluir el origen, tienden a este ciclo límite cuando $t \rightarrow \infty$. Este caso hace diferencia a una bifurcación de Hopf subcrítica.

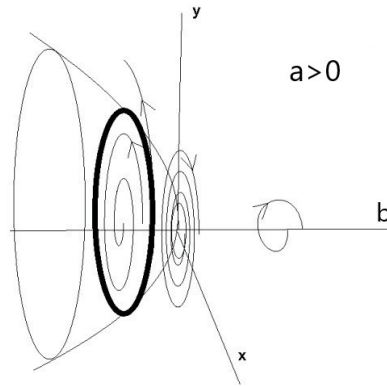


Figura 5.2 Bifurcación Hopf subcrítica.

□

5.2 Variedad Estable e Inestable de la Superficie B_6 .

En la siguiente sección analizaremos la Variedad Estable e Inestable Del Sistema (3.1) aplicando el Teorema (2.0.3) que esta definido en [2].

Dado el sistema (3.1) se tiene que la matriz jacobiana es

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8axy - 5a^2x^4 - 3abx^2 + c & 4ax^2 + b. \end{bmatrix}$$

entonces

$$A = M(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c & b. \end{bmatrix}$$

Por otra parte

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4ax^2y - a^2x^5 - abx^3 \end{bmatrix}$$

$$F(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Asimismo, existe la matriz C , tal que $B = C^{-1}AC$. Esta matriz se obtiene diagonalizando la matriz A cuyos valores propios son: $\lambda_1 = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$.

Cumpliendo con las hipótesis del teorema (2.0.3), analizamos el caso de la región B_6 , con lo cual $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 > 0$. Por lo tanto, los vectores propios asociados a cada valor propio son:

$$e_1 = \begin{bmatrix} \frac{b - \sqrt{b^2 + 4c}}{2c} \\ 1 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2c} \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz C es

$$C = \begin{bmatrix} \frac{b - \sqrt{b^2 + 4c}}{2c} & \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2c} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y su inversa

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{c}{\sqrt{b^2 + 4c}} & \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2\sqrt{b^2 + 4c}} \\ \frac{c}{\sqrt{b^2 + 4c}} & \frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2\sqrt{b^2 + 4c}} \end{bmatrix}$$

La matriz diagonal B corresponde a

$$B = \begin{bmatrix} \frac{b - \sqrt{b^2 + 4c}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

Haciendo $y = Cx$ el sistema $\dot{x} = Ax + F(x)$ puede ser transformado en el sistema $\dot{y} = By + G(y)$ con $G(y) = C^{-1}F(Cy)$.

Así, $G(y)$ queda determinada por la expresión

$$G(x, y) = \begin{bmatrix} \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2\sqrt{b^2 + 4c}} \right) (4ax^2y - a^2x^5 - abx^3) \\ \left(\frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2\sqrt{b^2 + 4c}} \right) (4ax^2y - a^2x^5 - abx^3) \end{bmatrix}$$

Además

$$U(t) = \begin{bmatrix} e^P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U(t) = \begin{bmatrix} e^{\frac{b - \sqrt{b^2 + 4c}}{2}t} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^Q \end{bmatrix} \quad V(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}t} \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La ecuación integral definida en [2], es

$$u^{(j+1)}(t, a) = U(t)a + \int_0^t U(t-s)G^j(u(s, a))ds - \int_t^\infty V(t-s)G^j(u(s, a))ds$$

Luego

$$u^0(t, \alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u^1(t, \alpha) = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{\frac{b - \sqrt{b^2 + 4c}}{2}t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u^2(t, \alpha) =$$

$$\left[\begin{array}{l} e^{\frac{b - \sqrt{b^2 + 4c}}{2}t} \left(\alpha_1 - \frac{\sqrt{b^2 + 4c} - b}{2\sqrt{b^2 + 4c}} \left(a^2 \alpha_1^5 \left(\frac{1 - e^{-2t(\sqrt{b^2 + 4c} - b)}}{2\sqrt{b^2 + 4c} - b} \right) + ab \alpha_1^3 \left(\frac{1 - e^{-t(\sqrt{b^2 + 4c} - b)}}{\sqrt{b^2 + 4c} - b} \right) \right) \right) \\ \left(\frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2\sqrt{b^2 + 4c}} e^{\frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}t} \left(a^2 \alpha_1^5 \frac{e^{-t(3\sqrt{b^2 + 4c} - 2b)}}{3\sqrt{b^2 + 4c} - 2b} + ab \alpha_1^3 \frac{e^{-t(2\sqrt{b^2 + 4c} - b)}}{\sqrt{b^2 + 4c} - b} \right) \right) \end{array} \right]$$

Por lo tanto la función $\psi_2(\alpha_1) = u_2(0, \alpha_1, 0)$ es aproximado por

$$\psi_2(\alpha_1) = \left(\frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2\sqrt{b^2 + 4c}} \left(ab \alpha_1^3 \frac{1}{\sqrt{b^2 + 4c} - b} \right) \right)$$

Si $\alpha_1 \rightarrow 0$, entonces $x \rightarrow 0$, así

$$S : y = \psi_2(x) = \left(\frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2\sqrt{b^2 + 4c}} \left(abx^3 \frac{1}{\sqrt{b^2 + 4c} - b} \right) \right)$$

Además, intercambiando t por $-t$ y y por x obtenemos la variedad inetable U , la cual queda determinada por la siguiente expresion

$$U : x = \left(\frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2\sqrt{b^2 + 4c}} \left(aby^3 \frac{1}{\sqrt{b^2 + 4c} - b} \right) \right)$$

Singularidades en el Plano Infinito y Retratos de Fases Globales

En este capítulo, en primer lugar estudiaremos las singularidades en el plano infinito de las superficies $\bigcup_{k=1}^5 B_k$ que se analizaron en el plano finito; seguidamente los retratos globales de dichas superficies.

6.1 Singularidades en el Plano Infinito

En esta sección analizaremos las singularidades en el plano infinito para el sistema (3.1), teniendo en cuenta las condiciones de las superficies $\bigcup_{k=1}^5 B_k$ que se analizaron en el plano finito.

Usando la compactificación de Poincaré se tiene que para cada carta el sistema está dado por:

Carta U_1 :

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -u^2v^4 + 4auv^2 + buv^4 - a^2 - abv^2 + cv^4 \\ \dot{v} &= -uv^5\end{aligned}\tag{6.1}$$

Carta U_2 :

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v^4 - 4au^3v^2 - buv^4 + a^2u^6 + abu^4v^2 - cu^2v^4, \\ \dot{v} &= -4au^2v^3 - bv^5 + a^2u^5v + abu^3v^3 - cuv^5\end{aligned}\tag{6.2}$$

Proposición 6.1.1. *Dado el sistema (6.1) y (6.2) con $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \leq 0$, entonces:*

1. *El sistema (6.1) no tiene puntos críticos.*

2. En el sistema (6.2), el $(0, 0)$ es una silla.

Demostración.

1. Para hallar los puntos críticos del sistema (6.1), $v = 0$ entonces, se tiene que $a^2 = 0$ ($\rightarrow \leftarrow$). Así que, el sistema no tiene puntos críticos.
2. Para hallar los puntos críticos del sistema (6.2), $v = 0$ entonces, se tiene que $a^2 u^6 = 0$ entonces $u = 0$. Así que, el único punto crítico del sistema es $(0, 0)$. Ahora la matriz Jacobiana asociada al punto crítico es:

$$M(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Ahora $u\dot{v} - v\dot{u} = -v^5 = 0 \Rightarrow v = 0$. Usaremos la técnica Blow-Up: Sea $u = u$ y $v = u\eta$, entonces

$$\begin{cases} \dot{u} &= u^4 \eta^4 - 4au^5 \eta^2 - bu^5 \eta^4 + a^2 u^6 + abu^6 \eta^2 - cu^6 \eta^4, \\ \dot{\eta} &= -u^3 \eta^5 \end{cases}$$

Dividiendo entre u^3

$$\begin{cases} \dot{u} &= u\eta^4 - 4au^2 \eta^2 - bu^2 \eta^4 + a^2 u^3 + abu^3 \eta^2 - cu^3 \eta^4, \\ \dot{\eta} &= -\eta^5 \end{cases}$$

Para $\eta = 0$, se tiene que $u = 0$. entonces el $(0, 0)$ es el único punto crítico. Ahora la matriz jacobiana asociada es:

$$M(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto los valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Luego, $u\dot{\eta} - \eta\dot{u} = -\eta(a^2 u^3) = 0 \Rightarrow \eta = 0$. Usaremos la técnica Blow-Up nuevamente: Sea $u = u$ y $\eta = u\tau$, entonces

$$\begin{cases} \dot{u} &= u^5 t^4 - 4au^4 t^2 - bu^6 t^4 + a^2 u^3 + abu^5 t^2 - cu^7 t^4, \\ \dot{t} &= -2u^4 t^5 + 4au^3 t^3 + bu^5 t^5 - a^2 u^2 t - abu^4 t^3 + cu^6 t^5 \end{cases}$$

Dividiendo entre u^2

$$\begin{cases} \dot{u} &= u (u^2 t^4 - 4aut^2 - bu^3 t^4 + a^2 + abu^2 t^2 - cu^4 t^4), \\ \dot{t} &= -t (2u^2 t^4 - 4aut^2 - bu^3 t^4 + a^2 + abu^2 t^2 - cu^4 t^4) \end{cases}$$

Para $u = 0 \Rightarrow t = 0$, luego el puntos críticos es $(0, 0)$.

Ahora la matriz jacobiana es:

$$M(u, t) = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto los valores propios son $\lambda_1 = a^2$ y $\lambda_2 = -a^2$, ahora $\lambda_1 \lambda_2 = -a^4 < 0$, así $(0, 0)$ es un punto silla.

□

6.2 Retratos de Fases Globales

En esta sección describiremos los retratos globales de las superficies estudiadas anteriormente del sistema diferencial multiparametrico (3.1).

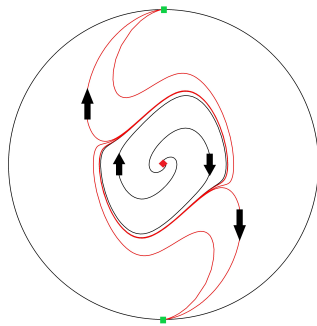


Figura 6.1 Sistema (3.1)
con $(a, b, c) \in B_1$ y $b > 0$

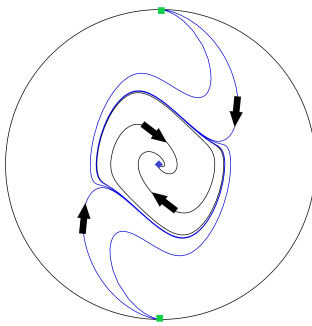


Figura 6.2 Sistema (3.1)
con $(a, b, c) \in B_1$ y $b < 0$

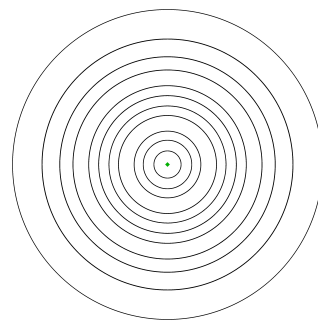


Figura 6.3 Sistema (3.1)
con $(a, b, c) \in B_1$ y $b = 0$

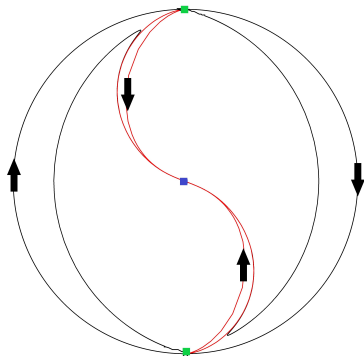


Figura 6.4 Sistema (3.1) con
 $(a, b, c) \in \bigcup_{k=2}^3 B_k$, y $b < 0$

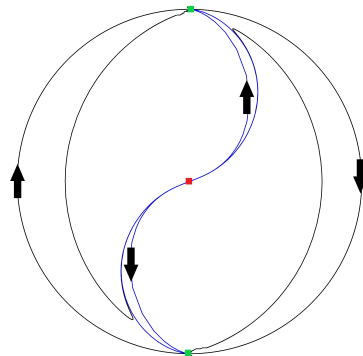


Figura 6.5 Sistema (3.1) con
 $(a, b, c) \in \bigcup_{k=2}^3 B_k$ y $b > 0$

Bibliografía

- [1] Dumortier F., Llibre J., Artes J., *Qualitative Theory Of Planar Diffrential Systems*, 2006.
- [2] PERKO,L., *Differential Equations and Dynamical Systems (New York: Springer Verlag)*, 2001.
- [3] P. B. ACOSTA-HUMÁNEZ, A. REYES-LINERO AND J. RODRÍGUEZ-CONTRERAS, *Algebraic and qualitative remarks about the family $yy' = (\alpha x^{m+k-1} + \beta x^{m-k-1})y + \gamma x^{2m-2k-1}$* , preprint 2014. Available at arXiv:1807.03551.
- [4] Guckeinheimer, J., y Holmes, P. 1983, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (New York: Springer Verlag).
- [5] Lacomba E., *los sistemas dinámicos, que son y para que sirven*, miscelaneas matemáticas 32, 2000.
- [6] Michel A., Ling H., Liu D., *Stability of Dinamical Systems Second edition*, Birkhauser, (2005).
- [7] Hirsch M., Smale S., Devaney R., *Differential Equations, dynamical systems, and Introduction to chaos*, Elsevier
- [8] Smale S., *Mathematical problems for the next century*, in *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, ed. V. Arnold M., Atiyah, P. Lax, and B. Mazur, American Math. Soc., 271-294, (2000).
- [9] Héctor Aponte Betancur *BIFURCACIONES BASICAS Y FORMAS NORMALES* (2010).
- [10] Osvaldo Osuna, Gabriel Villaseñor-Aguilar *Órbitas Periódicas de Sistemas Planos*

Harold Acosta Pineda

En este documento estudiamos el comportamiento cualitativo de las singularidades en el plano finito e infinito de la ecuación diferencial

$yy'_x = x^{n-1}y[a(2n+k)+b] + [-a^2nx^{2k} - abx^k + c]x^{2n-1}$, con parametros a, b, c , y que tiene como sistema polinomial:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = y[4ax^2 + b] + [-a^2x^4 - abx^2 + c]x, \end{cases} \quad \text{para } n=1 \text{ y } k=2.$$

La motivación de este trabajo es ver el comportamiento de cada una de las familias generadas por los parametros a, b y c .

Seguidamente a cada familia generada se le hacen estudios cualitativos en el plano finito e infinito con los puntos criticos asociados a cada una de ellas.

Respeto al plano infinito usamos la tecnica del blow-up para saber con claridad el estudio de algunas familias, en cuanto a las graficas, esta estan reflejadas en el disco de Poincaré.

Con ayuda de computadores, es decir, programas como P4 y Matlab nos facilito el trabajo, ya que con estas herramientas ilustramos las oribitas de cada familia.

Por ultimo le aplicamos la teoría de variedad estable para dichas familias que cumplan con su topico.

Departamento De Matemáticas

Universidad Del Atlántico