AUTORIZACIÓN DE LOS AUTORES PARA LA CONSULTA, LA REPRODUCCIÓN PARCIAL O TOTAL, Y PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DEL TEXTO COMPLETO

Puerto Colombia, **05 de mayo de 2020**

Señores
DEPARTAMENTO DE BIBLIOTECAS
Universidad del
Atlántico Cuidad

Asunto: Autorización Trabajo de Grado

Cordial saludo,

Yo **JESÚS DAVID MEJÍA VIANA**, identificado con **C.C. No. 1.234.090.016** de **Barranquilla**, autor del trabajo de grado titulado **DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO DEDUCTIVO UTILIZANDO SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO EN UNA INSTITUCIÓN EDUCATIVA DE BARRANQUILLA** presentado y aprobado en el año 2020 como requisito para optar al título Profesional de **LICENCIADO EN MATEMATICA** autorizo al Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico para que, con fines académicos, la producción académica, literaria, intelectual de la Universidad del Atlántico sea divulgada a nivel nacional e internacional a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios del Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico pueden consultar el contenido de este trabajo de grado en la página Web institucional, en el Repositorio Digital y en las redes de información del país y del exterior, con las cuales tenga convenio la Universidad del Atlántico.
- Permitir consulta, reproducción y citación a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato CD-ROM o digital desde Internet, Intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer.

Esto de conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

Atentamente,

Jesús Mejía

JESÚS DAVID MEJÍA VIANA
C.C No. 1.234.090.016 de **Barranquilla**

Universidad del Atlántico	CÓDIGO: FOR-DO-110
	VERSIÓN: 01
	FECHA: 02/DIC/2020

DECLARACIÓN DE AUSENCIA DE PLAGIO EN TRABAJO ACADÉMICO PARA GRADO

Puerto Colombia, **05 de mayo de 2020**

Una vez obtenido el visto bueno del director del trabajo y los evaluadores, presento al **Departamento de Bibliotecas** el resultado académico de mi formación profesional o posgradual. Asimismo, declaro y entiendo lo siguiente:

- El trabajo académico es original y se realizó sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, en consecuencia, la obra es de mi exclusiva autoría y detento la titularidad sobre la misma.
- Asumo total responsabilidad por el contenido del trabajo académico.
- Eximo a la Universidad del Atlántico, quien actúa como un tercero de buena fe, contra cualquier daño o perjuicio originado en la reclamación de los derechos de este documento, por parte de terceros.
- Las fuentes citadas han sido debidamente referenciadas en el mismo.
- El (los) autor (es) declara (n) que conoce (n) lo consignado en el trabajo académico debido a que contribuyeron en su elaboración y aprobaron esta versión adjunta.

Título del trabajo académico:	**DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO DEDUCTIVO UTILIZANDO SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO EN UNA INSTITUCIÓN EDUCATIVA DE BARRANQUILLA**
Programa académico:	**LICENCIATURA EN MATEMÁTICA**

Firma de Autor 1:	Jesús Mejía							
Nombres y Apellidos:	**JESÚS DAVID MEJÍA VIANA**							
Documento de Identificación:	**CC**	**x**	**CE**		**PA**		**Número:**	**1.234.090.016**
Nacionalidad:					**Lugar de residencia:**			
Dirección de residencia:								
Teléfono:					**Celular:**			

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO DE GRADO	DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO DEDUCTIVO UTILIZANDO SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÁMICA EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO EN UNA INSTITUCIÓN EDUCATIVA DE BARRANQUILLA
AUTOR(A) (ES)	JESÚS DAVID MEJÍA VIANA
DIRECTOR (A)	Mg. JESÚS DAVID BERRÍO VALBUENA
CO-DIRECTOR (A)	Dr. MARTÍN EDUARDO ACOSTA GEMPELER
JURADOS	EDDIE RODRÍGUEZ B. TEREMY TOVAR O.
TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TITULO DE	LICENCIADO EN MATEMÁTICA
PROGRAMA	LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
PREGRADO / POSTGRADO	PREGRADO
FACULTAD	CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
SEDE INSTITUCIONAL	SEDE NORTE
AÑO DE PRESENTACIÓN DEL TRABAJO DE GRADO	2020
NÚMERO DE PÁGINAS	89
TIPO DE ILUSTRACIONES	ILUSTRACIONES Y TABLAS
MATERIAL ANEXO (VÍDEO, AUDIO, MULTIMEDIA O PRODUCCIÓN ELECTRÓNICA)	NO APLICA
PREMIO O RECONOCIMIENTO	MERITORIA

DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO DEDUCTIVO UTILIZANDO SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO EN UNA INSTITUCIÓN EDUCATIVA DE BARRANQUILLA

JESÚS DAVID MEJÍA VIANA

UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

2019

DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO DEDUCTIVO UTILIZANDO SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO EN UNA INSTITUCIÓN EDUCATIVA DE BARRANQUILLA

JESÚS DAVID MEJÍA VIANA

ASESORES

Mg. JESÚS DAVID BERRIO VALBUENA

Dr. MARTÍN EDUARDO ACOSTA GEMPELER

UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

2019

Nota de aceptación

____

____

____

____

Evaluador 1

____

Evaluador 2

Agradecimientos

En primera instancia agradezco a Dios padre todo poderoso por darme el beneficio de estudiar lo que siempre quise y cumplir esta meta, también por darme la sabiduría, paciencia y fortaleza para superar cada adversidad presentada a lo largo de este camino. De este modo agradezco a mis padres y hermanos por el apoyo incondicional que me dieron a lo largo de mi etapa de formación, asimismo agradecer a mis asesores Jesús Berrio y Martin Acosta por sus valiosas contribuciones, asesorías y sugerencias que concurrieron en un buen trabajo de investigación. Finiquitando quiero agradecer a todas esas personas que me apoyaron a lo largo de este camino; familiares, compañera sentimental y compañeros de estudio, ya que sin ellos nada de esto sería posible. Infinitas gracias.

Jesús David Mejíatfiana

.

Dedicatoria

Nadie nunca me dijo que sería un camino fácil, pero aquí estoy logrando mis sueños. Dedico este trabajo a un ser que nunca me abandonó, que a pesar de todo siempre me mantuvo fuerte, Dios. Ofrendo este trabajo también a mi padre Adalberto Mejía y a mi madre Tatiana Viana que me ofrecieron todo de ellos para que hoy esté cumpliendo una de las tantas metas que tengo en mi vida.

Jesús David Mejíatfiana

Resumen

Aprovechando el potencial del software de geometría dinámica se interesa desarrollar en los estudiantes el uso franco de razonamientos deductivos para justificar afirmaciones (introducción a la demostración). Los estudiantes utilizando el aprendizaje por adaptación de la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (1986), construirán su propio conocimiento identificando un hecho geométrico (HG) en el que luego reforzarán con actividades diseñadas por el grupo de investigación EDUMAT de verificación, anticipación y finalmente evidenciando el razonamiento deductivo en un problema de construcción al momento de justificar por qué ésta es exacta. Todo esto bajo un paradigma socio-crítico y en un enfoque cualitativo, además como metodología de investigación la Ingeniería didáctica propuesta por Artigue (1995) en la cual sus fases son: análisis preliminar, análisis a priori de las Situaciones Didácticas, experimentación (Pilotaje) y el análisis a posteriori y evaluación.

Palabras claves: Razonamiento deductivo, Hecho geométrico (HG), Ingeniería Didáctica, Situaciones Didácticas.

Abstract

Taking advantage of the potential of dynamic geometry software, we are interested in developing in students the straight use of deductive reasoning to justify statements (introduction to the demonstration). By using the learning of adapting the theory of didactic situations of Brousseau (1986), will build their own knowledge by identifying a geometric fact (HG) in which they will reinforce with activities designed by the EDUMAT research group of verification, anticipation and finally evidencing deductive reasoning in a construction problem at the time of justifying because it is accurate. All this under a socio-critical paradigm and in a qualitative approach, as well as research methodology the Didactic Engineering proposed by Artigue (1995) in which its phases are: preliminary analysis, a priori analysis of the Didactic Situations, experimentation and analysis to posteriori and evaluation.

Keywords: Deductive reasoning, Geometric fact (HG), Didactic Engineering, Didactic Situations.

Tabla de contenidos

Tabla de contenidos vii

Lista de Tablas

Lista de Figuras

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de la geometría es de suma importancia, pues nuestro entorno está lleno de formas geométricas, haciendo estimaciones sobre formas y distancias, además se considera que esta es un área de las matemáticas donde se razona con figuras. Actualmente se busca que la enseñanza de la geometría sea basada en metodologías que faciliten la actividad de exploración y descubrimientos por parte de los estudiantes. Es por esto que esta investigación busca mostrar una manera alternativa de enseñar la geometría y fundamentar el desarrollo del Razonamiento Deductivo.

El primer capítulo provee el norte de la investigación, cuáles son las situaciones problema que la generaron, la pregunta que consolida la indagación, la justificación que da los argumentos que dan cuenta de su pertinencia y viabilidad, así como los objetivos que demarcan las tareas necesarias para su realización.

El segundo capítulo denominado Marco Referencial presenta las conceptualizaciones que permiten abordar el objeto de estudio. En un primer lugar, se encuentran los antecedentes investigativos que permiten realizar una radiografía del campo de la geometría mediada por software diseñado para tal fin. Posteriormente, se encuentran las afirmaciones de los teóricos que dan el sustento epistemológico, didáctico, curricular y evaluativo de la geometría, el razonamiento deductivo y el software de Geometría Dinámica.

El tercer capítulo se centra en explicar los procedimientos, técnicas e instrumentos utilizados para llevar a cabo la investigación los cuales se encuentran dentro de un paradigma cualitativo, un diseño descriptivo y el método de la ingeniería didáctica.

El cuarto capítulo se basa en el análisis de las actividades y su interpretación, en las cuales se aplicaron actividades adaptadas de una secuencia didáctica creadas por el grupo de investigación EDUMAT, las cuales se basan en la construcción de un hecho geométrico, luego reforzarlo y finalmente utilizarlo en una construcción.

En definitiva, en el quinto capítulo se tuvo en cuenta cada uno de los análisis para así interpretar como hicieron uso de estrategias para cumplir con cada una de las tareas propuestas y finalmente evidenciar como se produjo el desarrollo del razonamiento deductivo.

1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Descripción del problema

Los docentes esperan que sus estudiantes sepan utilizar conocimientos geométricos al resolver problemas y tengan claras las propiedades geométricas de algunas figuras. Pero no favorecen por medio de la Geometría procesos de justificación, ni tampoco sobre promover en sus clases la construcción colectiva de conocimiento (Bacares y Cruz, 2015). Además, han abandonado la enseñanza de la demostración, vista desde una perspectiva amplia, como "el proceso que incluye todos los argumentos planteados por el alumno para explicar, verificar, justificar o validar con miras a convencerse a sí mismo, a otros alumnos y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática" (Fiallo, 2011). Por lo tanto, los alumnos buscan en una demostración una explicación como herramienta para convencerse y convencer a otros.

Desde esta perspectiva, en la Geometría de las formas, Geometría de las construcciones, Geometría de las justificaciones y Geometría de las demostraciones, las cuales son las diferentes etapas de la Geometría escolar, los alumnos empiezan a construir demostraciones de acuerdo con su razonamiento y sus conocimientos, específicamente en la etapa de la justificación. Primando las demostraciones empíricas (Fiallo, 2011). En muchos casos se limitan a la constatación o enunciación de teoremas para aplicarlos en la solución de problemas de cálculo de magnitudes, lo que hace que se pierda el interés de los estudiantes y no se evidencie el proceso de razonamiento y justificación de lo que hacen. (Acosta y Fiallo, 2017). En este sentido, saber sobre diferentes tipos de justificación y reconocer la diferencia entre los empíricos (por ejemplo, inductivos y abductivos) y los formales (deductivos) debe ser parte del conocimiento de un profesor de matemáticas. Más aún, conocer diferentes tipos de tareas relativas a la justificación, cómo abordarlas y reconocer la relación entre estas y la actividad matemática (Samper y Molina, 2018).

Ahora bien, según Duval (2011), la Geometría ofrece una amplia gama de procedimientos para resolver un problema o validar una solución: percepción, manipulación, medición, razonamiento. En este caso se enfoca el procedimiento de razonamiento, ya que los estudiantes no razonan deductivamente a la hora de resolver un problema. Por su parte, cuando se habla de Razonamiento Deductivo se asocia exclusivamente con Demostración e implementar un tratamiento de los problemas de forma axiomática. Este fenómeno ocasiona el desconocimiento del razonamiento deductivo en procesos como la verificación de propiedades, la anticipación de magnitudes y la justificación de construcciones (Calderón, 2016).

Los aspectos anteriormente considerados muestran un panorama más amplio, acerca de lo que implica para el profesor integrar la Geometría dinámica a su clase, puesto que no es suficiente con su disposición, sino que requiere considerar aspectos didácticos, disciplinares y de formación (Calderón, 2016). Además, Acosta (2017) Menciona que la mayoría de los docentes tienen todas las herramientas tecnológicas para la enseñanza de la Geometría, pero las utilizan más como un elemento motivador para los estudiantes, que como una herramienta que puede contribuir y transformar el desarrollo del razonamiento deductivo de los estudiantes. (Acosta y Fiallo, 2017).

La Geometría deductiva se presenta a los estudiantes como una colección de "definiciones", para nombrar y describir figuras geométricas, y "hechos" expresando propiedades particulares (Mariotti, 2000). El hecho de que a los estudiantes nunca se les pida justificar sus conocimientos, lleva a que éstos tengan un antecedente geométrico intuitivo que debe ser reorganizado de acuerdo con un enfoque deductivo. Además, la idea que tienen los estudiantes, es que el profesor es quien tiene que "justificar" con el objetivo de "convencerlo" de la evidencia de un determinado hecho.

1.2 Formulación del problema

1.2.1 Pregunta problema

¿Cómo estimular el desarrollo del razonamiento deductivo utilizando software de Geometría Dinámica en estudiantes de séptimo grado en una Institución Educativa de Barranquilla?

1.3 Justificación

El razonamiento y la demostración no son actividades especiales reservadas para momentos determinados o temas específicos, sino que deberían constituir una parte natural y continua de las discusiones en clase, no importa cuál sea el tema de estudio. En los ambientes de clase matemáticamente productivos, debería esperarse que los alumnos expliquen y justifiquen sus conclusiones (Fiallo, 2010).

Esta investigación es pertinente, ya que, en nuestro contexto local no se ha utilizado el software de Geometría dinámica (SGD) DGPad-Colombia para trabajar la Geometría escolar, creando una serie de actividades que estimulan, promueven el razonamiento deductivo. Además, se intentará precisar el rol que puede tener DGPad-Colombia, en el desarrollo del razonamiento deductivo y en particular en el uso de dicho razonamiento para justificar que un determinado procedimiento de construcción produce efectivamente unas propiedades. (Calderón, 2016).

Ahora bien, como la Geometría es la 'ciencia de las construcciones'. Como tal, se ocupa de responder dos tipos de preguntas: ¿Cómo producir una construcción exacta? ¿Cómo justificar que una construcción es exacta? (Calderón, 2016).

Para comprender estos dos tipos de pregunta es necesario distinguir claramente entre una construcción exacta y una que no lo es. Este es un problema difícil de didáctica de la Geometría, pues el concepto de construcción exacta es un concepto abstracto, para el cual se necesitan muchos conocimientos teóricos. El SGD permite superar este problema, pues puede definirse una construcción exacta como aquella que tiene unas propiedades que se mantienen al arrastrar los objetos que componen la figura, es por esto que DGPad-Colombia permite diferenciar de manera experimental una construcción exacta de una construcción aproximada.

El SGD permite reconocer otras formas de aprendizaje en los estudiantes que van más allá de las que se imponen por la autoridad del profesor o la imitación de rutinas; propiciando la reflexión sobre las prácticas de enseñanza e impulsando al docente a restaurar el papel protagónico de los estudiantes en su aprendizaje. (Calderón, 2016).

En efecto, DGPad-Colombia favorece la interacción entre construir y demostrar, entre hacer sobre el computador y justificar por medio de argumentos teóricos. (Fiallo, 2011). Se puede afirmar que la experimentación con el software promueve la ‘construcción de Hechos Geométricos (HG) como la convicción fuerte de que el hecho de que se verifiquen unas propiedades hace que también se verifiquen otras.

En este propósito, se describe el diseño de situaciones de clase donde se utiliza el SGD para resolver problemas de construcción, con el fin de promover la construcción de HG y el uso de los mismos en razonamientos deductivos, hasta lograr la justificación de propiedades geométricas de las construcciones a partir de los protocolos de construcción. (Calderón, 2016)

Según Arzarello y Soldano (2019), la demostración se vuelve más comprensible para los estudiantes si se desarrolla una actividad de argumentación para la construcción de una conjetura. Es decir que las tareas geométricas bien diseñadas y el uso de la Geometría dinámica para explorar y experimentar, favorecen la generación de un ambiente de indagación y, si se usa para buscar ideas para la justificación, se convierte en herramienta de mediación para el aprendizaje de la demostración.

Por lo cual se plantea la tesis de Cardozo (2019), la cual se enfoca en el problema de la justificación, relacionándolo con la demostración. Cómo lograr que los estudiantes realicen razonamientos deductivos conducentes a una demostración, pero sin que sea una simple imitación del profesor.

Cabe agregar que las actividades a trabajar en esta investigación fueron diseñadas por el grupo de investigación EDUMAT perteneciente a la Universidad Industrial de Santander y que cuenta con el aval interinstitucional del Centro de Investigaciones y Desarrollo Científico de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Con el objetivo de verificar si las características del software favorecen el desarrollo del razonamiento deductivo.

1.4 Objetivos.

1.4.1 Objetivo general

Describir el desarrollo del razonamiento deductivo cuando se utiliza Software de Geometría Dinámica en estudiantes de séptimo grado en una Institución Educativa de Barranquilla.

1.4.2 Objetivos específicos

- Identificar características del software de Geometría Dinámica que favorecen el desarrollo del razonamiento deductivo.
- Analizar como esas características favorecen el desarrollo del razonamiento deductivo.
- Establecer la relación entre las bondades del software y las evidencias que se encuentran en el desarrollo del razonamiento deductivo.

2 MARCO TEÓRICO REFERENCIAL

2.1 Antecedentes

En la indagación de antecedentes que ofrezcan fundamentos a esta investigación con el interés de que alcance el objetivo anteriormente planteado, se encontró a nivel internacional un trabajo llamado "*Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica* " realizado en la Universidad de Valencia, España por Fiallo, J (2010), el cual hace un aporte significativo en esta investigación porque evidencia como la Geometría dinámica ayuda en los procesos de demostración. Pues el SGD favorece la interacción entre construir y demostrar, entre hacer sobre el computador y justificar por medio de argumentos teóricos. Un SGD conduce a analizar de manera diferente los procesos involucrados en una actividad de demostrar, pues proporciona a los estudiantes posibilidades de acceso a justificaciones teóricas a través de la mediación semiótica organizada por el profesor alrededor de dichas herramientas.

Continuando en el contorno internacional, en la ciudad de Buenos Aires-Argentina el trabajo titulado "Ingeniería didáctica para la educación primaria: estudiantes del ISFDyT Nro. 31 en Necochea desarrollan un dispositivo didáctico para enseñar Geometría con las TIC en quinto año de educación primaria", realizado por Ponce De León (2014), el cual coopera significativamente en esta investigación, ya que haciendo uso de la tecnología, los estudiantes planificaron una secuencia para la enseñanza de la Geometría y abordaron contenidos trabajando con Geometría dinámica, en el cual se evidenciaron los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos.

Finalmente, en el ámbito internacional se tiene un artículo publicado por la revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, RELIME, vol. 13, núm. 4-I, 2010, pp.

147-160; llamado "*Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de Geometría dinámica*" realizado por Víctor Larios y Noraísa González. El cual es de suma importancia en esta investigación, puesto que, presentan algunas reflexiones sobre la construcción de la demostración geométrica en el ambiente escolar del nivel medio. Así como de algunos aspectos que influyen en tal construcción como es la herramienta a utilizar (software de Geometría Dinámica), las representaciones de los objetos geométrico y los tipos de justificaciones que se pueden utilizar.

Ingresando en el entorno nacional se encuentra un trabajo de maestría de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas llamado "*Mediación de Geometría Dinámica en la Demostración*" elaborado por Santiago Cardozo (2019). El cual es demasiado importante en esta investigación, pues busca estrategias de enseñanza que aprovechen el potencial del software de Geometría dinámica para promover en los estudiantes el razonamiento deductivo para justificar afirmaciones (introducción a la demostración). Se dice que los estudiantes utilizan el razonamiento deductivo de manera implícita en la resolución de problemas.

Seguidamente en el entorno nacional se localizó un libro llamado "*Enseñando Geometría con tecnología digital: una propuesta desde la teoría de las situaciones didácticas*" el cual fue elaborado por Martin Acosta y Jorge Fiallo (2017). El cual es provechoso para esta investigación porque busca ayudar en el desarrollo de un currículo de Geometría basado en el uso del software de Geometría dinámica y presume que al incorporarlo en el aula abre un conjunto de posibilidades en el campo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, pero también nuevas necesidades de formación de los profesores de matemáticas pues esto exige el conocimiento de nuevas estrategias de enseñanza.

Finiquitando el ámbito nacional el trabajo de maestría de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas llamado *"Diseño de una ingeniería didáctica para promover el razonamiento inductivo y el razonamiento deductivo en el contexto de la construcción de paralelogramos, utilizando software de Geometría dinámica"* hecho por José Calderón (2016), este trabajo es de vital importancia en esta investigación, pues en el presenta el diseño de una secuencia de actividades desde el enfoque de la teoría de situaciones de Brousseau que aporten al currículo de matemáticas, especialmente a la enseñanza de la Geometría. Las actividades buscan a través de la experimentación incentivar el razonamiento inductivo como proceso de reconocimiento y generalización de propiedades, para paulatinamente adentrase en procesos de verificación, anticipación y justificación de propiedades, propios del razonamiento deductivo.

Ingresando al contexto local se halla en la Universidad del Atlántico, el trabajo titulado "*Ingeniería didáctica: estrategia perceptiva con dg-pad como medio para la enseñanza de la mediatriz como lugar geométrico*", elaborado por Mikel de Castro (2019), el cual ayuda mucho a esta investigación, pues utiliza el software de Geometría dinámica (DGPad) como medio para la enseñanza de los dos polos que componen la Geometría, la percepción de las figuras e intuición y los procesos de razonamientos teóricos y deducción utilizando las figuras. Además, espera que el estudiante haga un aprendizaje por adaptación, de la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau y analizar el impacto del uso de esta estrategia en la enseñanza de la mediatriz de un segmento como lugar geométrico.

Para culminar en el ámbito local, en la Universidad del Atlántico reside el trabajo titulado "*Desarrollo del pensamiento geométrico en demostraciones con cuadriláteros en estudiantes universitarios, a partir de un recurso educativo digital abierto basado en el uso del software*

Geometría", elaborado por Fuentes, Rubio y Buelvas (2016), el cual su aporte en esta investigación es como el uso del SGD sirve como medio para el proceso de visualización y este como ayuda al entendimiento de diferentes conceptos y propiedades geométricas.

2.2 Marco Teórico

2.2.1 Historia y epistemología de la Geometría

Acosta y Fiallo (2017), asumen la Geometría como el área de las matemáticas que se ocupa de razonar con figuras. Por ende, la Geometría comprende dos aspectos fundamentales: los procesos de percepción de las figuras, y los procesos de razonamiento utilizando las figuras. La Geometría se caracteriza entonces por una tensión permanente entre dos polos: el polo de la percepción – intuición y el polo de la teoría – deducción. Cada uno de ellos atrae la actividad matemática de la Geometría, pero no es posible hacer Geometría si se relega de uno de ellos. Esta idea de mutua dependencia entre los dos polos es resultado de una evolución histórica de la Geometría y de su enseñanza, la cual se analizará brevemente.

Los griegos fueron los primeros en desarrollar el aspecto teórico de la Geometría. Los Elementos de Euclides sintetizan el esfuerzo de dar un fundamento teórico-deductivo a la actividad geométrica. Durante los siglos posteriores se consideró a la Geometría como la ciencia por antonomasia, por el hecho de ser totalmente deductiva y describir o explicar al mismo tiempo la realidad. También, se consideraba la Geometría como el fundamento de las matemáticas. Los matemáticos posteriores a los griegos comenzaron a encontrar defectos en la estructura deductiva de la Geometría euclidiana. En especial, el quinto postulado de Euclides fue materia de debate y reformulación, buscando una forma de hacerlo evidente o de demostrarlo como un teorema. El resultado de estos esfuerzos condujo a la formulación de las Geometrías no euclidianas, como un intento fallido de demostrar por contradicción el quinto postulado de Euclides.

El reconocimiento de las Geometrías no euclidianas como Geometrías válidas deductivamente, pero contradictorias de la realidad produjo una profunda crisis en la comunidad científica y matemática de la época. La Geometría dejó de ser la ciencia por antonomasia, pues ya no necesariamente describía la realidad. Comenzó un proceso en el cual la percepción y la intuición generaban desconfianza. Las Matemáticas dejaron de fundamentarse en la Geometría, incluso comenzó a señalarse a la Geometría Euclidiana como fuente de errores conceptuales debido a su fuerte dependencia de la percepción y la intuición; los matemáticos se enorgullecían de poder razonar sin utilizar figuras. En síntesis, trató de eliminarse el polo de la intuición y la percepción en la actividad matemática. A raíz de esto surgieron los trabajos del grupo de Bourbaki, los cuales tuvieron una gran influencia en las matemáticas en el siglo XX y llevaron al llamado movimiento de reforma de las matemáticas modernas. Este movimiento, que fue adoptado en los currículos de matemáticas del mundo entero, que trajo como objetivo principal llegar de manera directa al polo de la deducción y la teoría evitando los errores de la percepción y la intuición.

Esta gran reforma curricular a nivel mundial llevó al abandono de la enseñanza de la Geometría Euclidiana, pues la Geometría Plana pasó a ser un capítulo del álgebra vectorial. La enseñanza de la Geometría euclidiana se consideraba inadecuada por su dependencia de las figuras, debido a la poca formalización de su lenguaje y a la multiplicidad de métodos y casos particulares que era necesario considerar en la resolución de problemas.

Dos hechos importantes produjeron un cambio de orientación de la epistemología de las matemáticas y del naciente campo de la educación matemática en el siglo XX. En primer lugar, el teorema de Gödel condujo al abandono del objetivo de rigor absoluto y de unificación definitiva de las matemáticas en una sola teoría auto-contenida y totalmente deductiva. Por otra parte, los estudios de psicología cognitiva y de psicología genética despertaron el interés por el origen cognitivo de los conceptos matemáticos, al proponer una alternativa no logicista para la fundamentación de las matemáticas.

Así es como hoy en día se reconoce la imposibilidad de independizar los dos polos de la actividad geométrica, y se resalta más bien su mutua dependencia y su complementariedad. Entonces, hoy se puede formular dos grandes objetivos de la enseñanza de la Geometría:

El primero es introducir a los alumnos en el mundo de la teoría, pero a partir del mundo de la percepción y el segundo objetivo de la enseñanza de la Geometría es lograr el equilibrio entre los dos polos de la actividad geométrica.

2.2.2 Teoría de las situaciones Didácticas

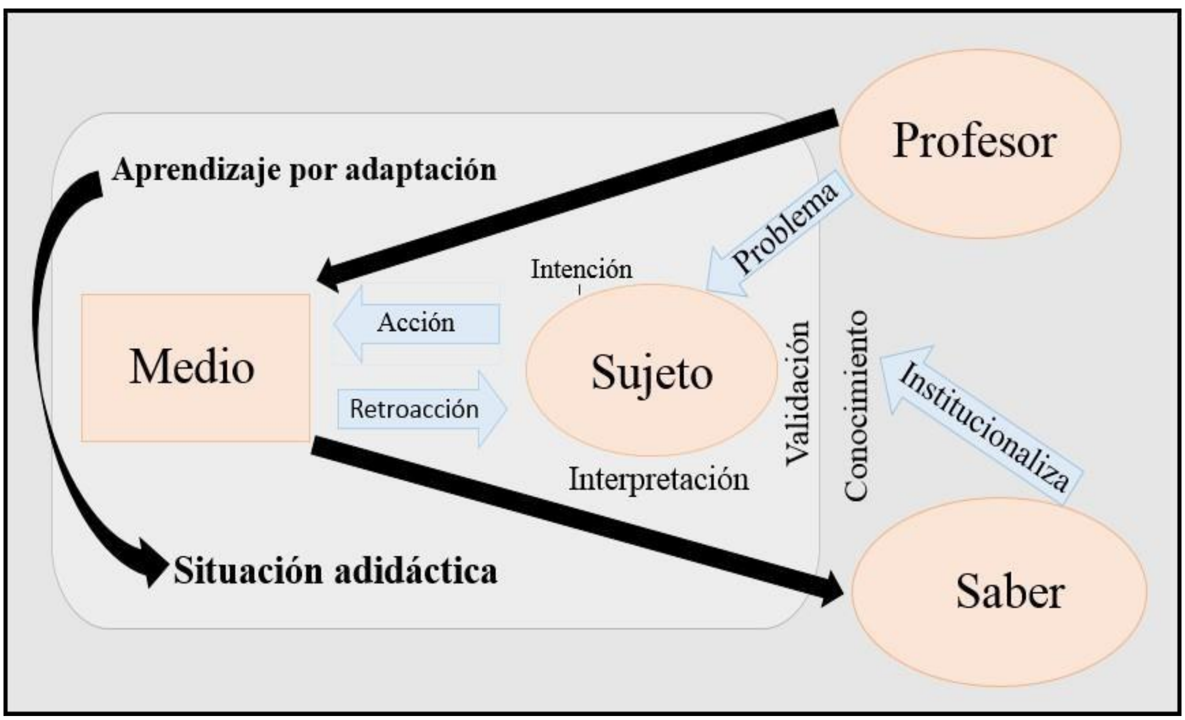


Figura 1: Teoría de las situaciones didácticas. Tomada y adaptada de Acosta y Fiallo (2017).

En esta investigación se ha tomado como marco teórico la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1986). El cual proporciona una crónica para entender el rol del software en el proceso de enseñanza al tiempo que permite observar cómo se transforma la

gestión del profesor, posibilitando una nueva forma de aprendizaje para el alumno. Los conceptos claves para entender el rol de la tecnología dentro de la teoría son: aprendizaje por adaptación, situación adidáctica, validación y devolución, medio.

2.2.2.1 Aprendizaje por adaptación

El concepto central de TSD es el aprendizaje por adaptación, pues es aquel producto de la interacción entre un sujeto y un medio. En la interacción entre el sujeto con el medio se pueden observar 5 elementos, de los cuales el primero es la **intención** del sujeto. Es decir, el sujeto tiene una necesidad, un propósito, un objetivo. El segundo elemento de la interacción es la **acción** para alcanzar su intención, el sujeto realiza una acción sobre el medio. El tercer elemento es la **retroacción**; el medio reacciona a la acción del sujeto, y esta reacción del medio recibe el nombre de retroacción. El cuarto elemento es la **interpretación**; el sujeto interpreta la retroacción del medio, que adquiere un sentido para él. Finalmente, el quinto elemento de la interacción entre el sujeto y el medio es la **validación**; el sujeto valida su acción; es decir, puede decidir si la acción realizada le sirvió para alcanzar su intención o no. Del cual surgen dos casos, afirmativo y negativo. En el caso afirmativo refuerza la acción, en caso negativo modifica su acción y empieza otro ciclo acción - retroacción, hasta que logra alcanzar lo que quería. (Brousseau, 2007).

2.2.2.2 Situación didáctica y situación adidáctica

La TSD define una situación didáctica como aquella en la que intervienen tres factores: un profesor, un alumno y un saber. Una situación es adidáctica cuando se da interacción entre un sujeto (estudiante) y un medio para resolver un problema. Como el medio no es un sujeto, no tiene ninguna intención de enseñar al estudiante. Por lo cual esta situación toma el calificativo de adidáctica. (Acosta, Monroy y Rueda., 2010).

Según la TSD se da una interacción de estas dos situaciones, en la que la situación a-didáctica puede ser parte de una situación didáctica. Pues el profesor debe usar una estrategia indirecta para transmitir el saber: crear las condiciones necesarias para que se dé un aprendizaje por adaptación. Así el ciclo de aprendizaje por adaptación pasa a ser parte de la situación didáctica, y recibe el nombre de situación adidáctica, puesto que en la relación entre el sujeto y el medio no hay ninguna intención de enseñar (Brousseau, 2007)

Por ende, el profesor prepara cuidadosamente un medio para que el estudiante interactúe con el medio para resolver un problema, el cual lo llevara a tener una intención y libere unas acciones sobre el medio. El producto de esa situación a-didáctica es un conocimiento. Se tiene entonces al interior de la situación didáctica una situación a-didáctica que el profesor utiliza para que los alumnos construyan un conocimiento, a la cual podrá referirse para exponer el saber.

Cabe agregar que bajo la TSD el conocimiento y el saber son dos conceptos totalmente diferentes, pues el conocimiento es producto de una experiencia, por lo tanto, es personal y contextualizado. Mientras que el saber es institucional, es lo que dicen los sabios, por lo tanto, tiene una estructura y una forma convencional. Durante este proceso de enseñanza se desarrollan dos subprocesos: la devolución y la institucionalización.

2.2.2.3 Devolución e institucionalización

La TSD llama **devolución** al proceso de poner en funcionamiento una situación adidáctica, al entregar al alumno un problema, un medio adecuado y acompañar el proceso para que el ciclo de aprendizaje por adaptación se desarrolle. El proceso de devolución implica no solamente la preparación del problema y del medio, sino también un determinado comportamiento del profesor durante la situación adidáctica.

Una vez haya funcionado la situación adidáctica, los alumnos deben haber construido un conocimiento personal. Entonces el profesor debe realizar la **institucionalización**, consiste en explicitar la relación entre el conocimiento construido por el alumno y el saber. (Brousseau, 2007).

2.2.3 La Geometría en el currículo

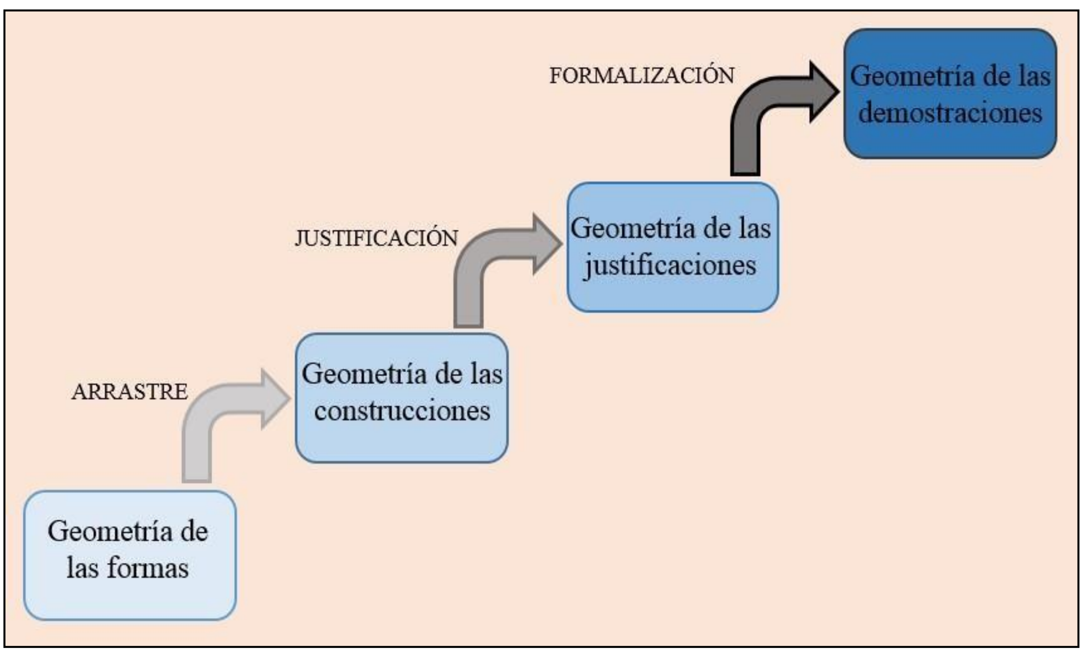


Figura 2: Etapas de la Geometría. Tomada y adaptada de Acosta y Fiallo (2017).

En la Geometría escolar se consideran cuatro etapas, las cuales se citan de la siguiente manera:

La primera de estas es la Geometría de las formas, esta se enseña en los primeros grados de primaria y está basada en identificar las figuras geométricas y distinguirlas entre sí. Aquí se busca la comparación de objetos, estableciendo semejanzas y diferencias, según las características geométricas de sus formas. Las figuras geométricas son asimiladas como formas globales correspondientes a imágenes mentales prototípicas. En la segunda etapa, Geometría de las construcciones, ya no hay una preocupación por clasificar e identificar, sino más bien por *analizar y construir*. En esta etapa las figuras no se consideran como formas globales sino compuestas por objetos más básicos, con relaciones especiales entre ellos.

En esta etapa los alumnos deben identificar las propiedades geométricas como elementos fundamentales en la definición de las figuras. Para producir ese cambio, utilizamos como herramienta didáctica el *arrastre* de validación en las construcciones: una construcción será correcta si al arrastrar los elementos que la componen no pierde sus propiedades; por el contrario, será incorrecta si dichas propiedades se pierden.

En la tercera etapa se utilizan esos procedimientos como justificación de que en una figura construida se cumplen o no algunas propiedades.

La herramienta didáctica para pasar de la Geometría de las construcciones a la Geometría de las justificaciones es la necesidad de *justificar*. Es importante que los alumnos descubran que algunas de las propiedades de las figuras construidas provienen directamente de las herramientas o procedimientos de construcción que se utilizaron, pero otras no. Estas propiedades que cumplen las figuras, pero que no fueron producidas directamente por procedimientos de construcción, conducen a desarrollar la idea de implicación lógica: si se cumplen determinadas propiedades, entonces también tienen que cumplirse otras. La enunciación de estas implicaciones constituye lo que llamamos reglas teóricas de la Geometría.

La cuarta etapa es la Geometría de las Demostraciones. En esta ya hay un énfasis en las reglas teóricas de la Geometría, es decir, en las implicaciones y su utilización en la justificación, que es lo que llamamos una demostración deductiva. La herramienta didáctica para pasar de la tercera a la cuarta etapa es la formalización, es decir el énfasis en la forma de los enunciados y las relaciones entre ellos.

La demostración deductiva es una forma de pensar que se basa en operaciones mentales sin la ayuda de ejemplos específicos, o si se usa un ejemplo, es para ayudar a organizar la demostración. En una deducción formal solamente se mencionan aspectos genéricos de la propiedad discutida.

2.2.4 DGPad-Colombia como medio

En este trabajo se utiliza el Software DGPad-Colombia como medio con el cual el estudiante interactúa para adquirir un aprendizaje por adaptación. Dicho Software recibe el nombre de Geometría dinámica, porque permite realizar construcciones geométricas por medio de la manipulación directa de objetos en la pantalla y también permite la manipulación de objetos y construidos, redibujándolos en tiempo real. Además, se tiene la garantía de que las retroacciones que ofrecerá a las acciones del sujeto fueron programadas de acuerdo con la teoría de la Geometría. Por lo tanto, los conocimientos que produzcan los alumnos en la interacción con DGPpad-Colombia, necesariamente tendrán una relación estrecha con el saber a enseñar.

DGPad-Colombia es una aplicación web de Geometría dinámica adaptada del software original DGPad, el cual fue desarrollado por Eric Hackenholz en Francia. El grupo de investigación EDUMAT, interinstitucional de la Universidad Industrial de Santander y la Universidad Distrital Francisco José de Caldas asumió el reto de utilizar DGPad como herramienta para adaptarla a las necesidades de los colegios y universidades colombianos para enseñar matemáticas.

DGPad-Colombia tiene dos modos de funcionamiento: con conexión a internet, y sin conexión a internet, además tiene dos versiones: una versión para estudiantes, con un número reducido de herramientas, las suficientes para trabajar la construcción geométrica; y una versión para profesores, que incluye además herramientas de programación.

Cabe agregar que en DGPad-Colombia se pueden perpetrar dos clases de acciones que son; acción de construcción y acción de arrastre.

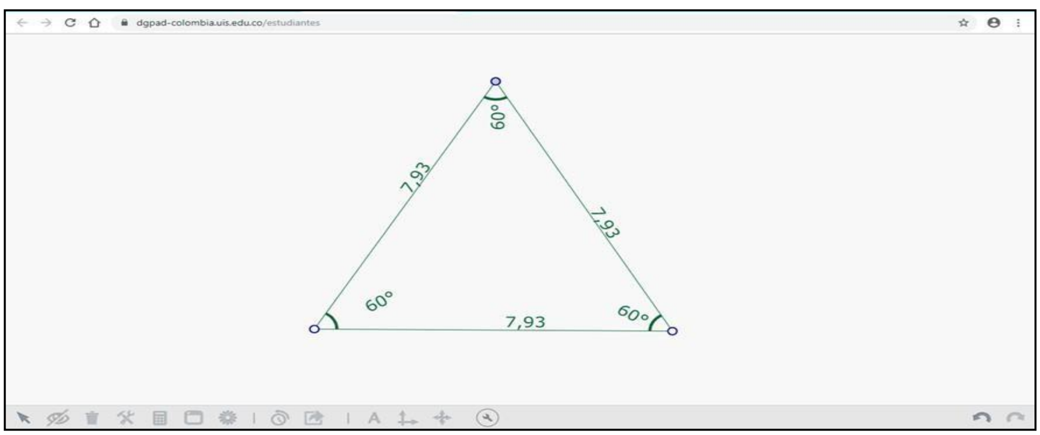


Figura 3: SGD - DGPad-Colombia.

2.2.5 Razonamiento

En este trabajo se entiende por razonamiento el procedimiento que nos permite expresar nueva información de informaciones previas, ya sean aportadas por el problema o derivadas del conocimiento anterior (Arsac, 1992).

Según sea el desarrollo de dicho proceso se distingue entre razonamiento inductivo y razonamiento deductivo.

Este trabajo se centrará en el razonamiento deductivo, el cual es un argumento donde la conclusión se infiere necesariamente de las premisas. Según Clemens et al. (1989). Existe razonamiento deductivo cuando:

- Se inicia con las condiciones dadas (hipótesis).
- Se usa definiciones, postulados o teoremas previamente probados para justificar una serie de proposiciones o pasos que den el resultado deseado.
- Se afirma el resultado (conclusión).

Para promover el razonamiento deductivo se generan una serie de estrategias las cuales son:

2.2.5.1 Verificación

Son problemas en los que el estudiante debe verificar unas propiedades que no pueden constatar de manera directa. Por lo tanto, tiene que recurrir a una implicación lógica para poder realizar la verificación. Es decir, el estudiante puede utilizar herramientas para verificar otras propiedades que están relacionadas de manera lógica con la propiedad pedida.

Por ejemplo: Para verificar que una serie de puntos se encuentran a igual distancia de otro sin poder medir, es necesario crear una circunferencia con centro en ese punto que pase por los demás.

2.2.5.2 Anticipación

Son problemas en los que el estudiante tiene que predecir una característica de un objeto con base en unas propiedades que se afirman que son verdaderas. Es decir, para poder anticipar el estudiante tiene que necesariamente utilizar una regla teórica.

2.2.5.3 Justificación

Son problemas en los cuales, dada la descripción de una construcción, el estudiante debe predecir las propiedades que se mantienen al arrastrar.

Hay dos tipos de justificaciones.

- Justificaciones donde las propiedades son producto de la aplicación directa de una herramienta de construcción.
- Justificaciones donde las propiedades no son el producto directo de una herramienta, de construcción. Para justificar que estas propiedades se conservan al arrastrar es necesario invocar una regla teórica general.

3 DISEÑO METODOLÓGICO

3.1 Diseño y metodología de investigación

Bajo una orientación cualitativa y un diseño descriptivo, se utiliza la ingeniería didáctica propuestas por Artigue, (1995) y se concentrará simplemente en los análisis preliminares, el diseño de los análisis a priori y un pilotaje con un grupo restringido de estudiantes escogidos a conveniencia. La cual está guiada por la teoría de las situaciones didácticas.

Primera Fase: Análisis preliminar.

Como su nombre lo indica, en esta fase se realiza una detección del conocimiento o situación de la temática a estudiar. Artigue (1995) distingue entre los más utilizados:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva. (p. 38)

Segunda Fase: Análisis a priori de las situaciones didácticas.

Artigue (1995) señala que el análisis a priori se presenta generalmente desde dos aspectos: una descripción de las características de la situación a-didáctica que se trabajará con los estudiantes y una predicción de las posibles actuaciones de éstos, en la cual se hace un análisis de las posibles respuestas, acciones y estrategias que utiliza el estudiante al momento de desarrollar la actividad que se le presente.

Tercera Fase: Experimentación (Pilotaje).

Consiste en ensayo aplicado a un grupo pequeño de estudiantes que se escogen a conveniencia para evidenciar que tan verás es o no el diseño y el análisis a priori.

La experimentación supone:

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación;
- El establecimiento del contrato didáctico;
- La aplicación de los instrumentos de investigación;
- El registro de observaciones realizadas durante la experimentación. (De Faria, 2016, p. 3)

Cuarta Fase: Análisis a posteriori y evaluación.

En esta etapa se contrastó la información prevista en el análisis a priori con la información registrada en la etapa de experimentación, tanto para determinar su nivel de comprensión en relación con la actuación de cada uno de los elementos del sistema didáctico, como para determinar si el diseño de la secuencia didáctica tuvo el impacto esperado en el aprendizaje de los estudiantes.

3.2 Población y Muestra

El estudio se realizó en la Institución Educativa Distrital Fundación Pies Descalzos, ubicada en la ciudad de Barranquilla, en el departamento del Atlántico.

La población objeto de estudio fue de 31 estudiantes de séptimo grado C del mencionado colegio.

Se utilizó un tipo de muestra no probabilística de cuatro estudiantes del grado mencionado, la cual Sampieri (2014) y Creswell (2014) afirman que el investigador puede seleccionarla de acuerdo a las necesidades de la investigación.

3.3 Técnicas e Instrumentos.

Para la recolección de datos de la investigación se emplearon las siguientes técnicas e instrumentos:

- **Videograbaciones:** La videograbación se realizó para colocar en manifiesto todas las acciones, respuestas y gestos que hace el estudiante al momento de resolver un problema con DGPad-Colombia, también se hizo una grabación para la puesta en común, pues los estudiantes dieron sus conclusiones de las actividades y se llegó a un acuerdo entre todos (Gil, 2011).
- **Entrevista:** La entrevista es una técnica para la recopilación de información acerca de los procesos mentales y de razonamiento, que se encuentran ocultos en el pensamiento del estudiante que no pueden ser detectados con los demás instrumentos. Esta información se recolecta por medio de videograbaciones que después serán transcritos y analizados (Clement, 2000).
- **Transcripción:** la transcripción es el proceso que se hace luego de la observación detallada de las videograbaciones, se hace para dejar evidencia por escrito de todo lo ocurrido al momento de realizar las actividades (Revuelta y Sánchez, 2005).

4 ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

4.1 Análisis preliminar.

En el análisis preliminar se pueden abordar cuestiones como el estudio epistemológico de la temática a enseñar, también una caracterización de las formas tradicionales de enseñanza y una determinación de sus efectos sobre el aprendizaje. Todo esto basándose en un análisis didáctico (Lacués E, 2013).

4.1.1 Análisis epistemológico

La Geometría de Euclides

Euclides hizo un gran aporte, tomo los saberes geométricos y los ordenó, clasificó y sistematizó para colocarlos a disposición de la comunidad en su conocido texto los Elementos, de este modo se registraron las bases de un sistema axiomático para la Geometría (Sánchez, 2012). La forma como se expone el saber geométrico en los Elementos pone de manifiesto una manera deductiva de razonar, ya que es posible ver como una afirmación es consecuencia de la anterior gracias a una cadena de razonamientos finamente articulados. El razonamiento deductivo posibilita la demostración, considerada la herramienta preferida por la comunidad matemática para validar sus declaraciones y mostrar su universalidad, manifestando de esta forma rigurosidad en sus afirmaciones (Crespo, Farfán y Lezama, 2010). Sin embargo, no hay que olvidar que los conocimientos teóricos expuestos en Los Elementos no se construyeron en su totalidad de forma deductiva.

4.1.2 Análisis Didáctico

Enseñanza de la Geometría

Según el Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998), la enseñanza de la Geometría en la educación básica es una herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es predominantemente geométrico. Este aspecto constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos matemáticos como, por ejemplo, las diversas formas de argumentación. En este caso, el desarrollo de la percepción espacial y de las intuiciones sobre las figuras bidimensionales y tridimensionales, la comprensión y uso de las propiedades de las figuras, el reconocimiento de propiedades, relaciones a partir de la observación de regularidades que conduzca al establecimiento de conjeturas y generalizaciones.

A esto se debe agregar que la forma como frecuentemente se imparte la clase de Geometría es de carácter expositivo; es decir, hay una aproximación hacia el aprendizaje como un proceso receptivo de transferencia de conocimiento, promoviéndose la argumentación en Geometría como una comunicación muy formal regulada por reglas fijas (Calderón, 2016).

En los tiempos actuales, la investigación está siendo dirigida hacia la creación innovadora de ambientes de aprendizaje que aún refieren al razonamiento deductivo como un elemento básico del aprendizaje. Sin embargo, estos ambientes de aprendizaje tratan de tomar en cuenta el punto de vista de los estudiantes diseñando situaciones de aprendizaje que ayuden a los estudiantes a sentir una necesidad personal por las explicaciones, y consecuentemente hacen la invitación a apreciar fuerza de la justificación deductiva como una herramienta de explicación, e incluso intentan producirlas. (Calderón, 2016).

La importancia de la experimentación en el aprendizaje de la Geometría mediante SGD también se reconoce en documentos de orientación curricular, al respecto el MEN (2004) menciona:

> Con el acceso a la manipulación directa, la enseñanza de la Geometría ofrece un interesante desarrollo hacia una nueva conceptualización de ésta, como el estudio de las propiedades

> invariantes de las figuras geométricas. Al permitir la posibilidad de experimentar con una especie de “materialización” de los objetos matemáticos, de sus representaciones y de sus relaciones, los estudiantes pueden vivir un tipo de experimentación matemática que otros ambientes de aprendizaje no proporcionan (p. 17)

Aprendizaje de la Geometría

La Geometría pertenece a unas de las competencias exigidas en el desarrollo de las competitividades que requiere el sistema educativo nacional, puesto que ésta, es evaluada ampliamente por las pruebas saber, a las que los educandos de primaria, secundaria y media vocacional requieren de esfuerzos mayores ya que se valora el pensamiento espacial y sistemas geométricos, en la mayoría de los casos poco trabajado por los estudiantes (Rojas, Gaviria y Valderrama. 2014).

La actitud frente al aprendizaje de la Geometría es fundamental, puesto que con disposición el estudiante puede satisfacer las necesidades epistemológicas que requiere para su desarrollo metacognitivo, donde se involucra los diferentes vínculos entre los procesos de razonamiento (deductivo) y la visualización del entorno, trayendo consigo ejes primordiales del proceso como son el sentido de la explicación, de comprensión y de argumentación (Acosta y Camargo, 2012).

4.2 Análisis a priori de las actividades:

El análisis a priori de las actividades para la construcción y uso del hecho geométrico: “si dos puntos o más están sobre la misma circunferencia entonces equidistan del centro” comenzará con la caracterización de los saberes envueltos. Estos son:

- ***Circunferencia****:* Es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan a otro punto llamado centro.
- ***Lugar geométrico****:* Es un conjunto de puntos que tienen una característica en común o que cumplen una determinada propiedad.
- ***Hecho geométrico:*** Llamamos Hecho Geométrico a una afirmación (implicación) que asegura que cuando se cumplen determinadas propiedades también se cumplen otras.
- ***Segmento:*** Porción de una recta que está delimitada por dos puntos, sus extremos.
- ***Distancia entre dos puntos***: Es la longitud del segmento que los une.
- ***Equidistancia:*** Igualdad de distancia entre dos o más puntos.
- ***Triángulo isósceles:*** Es un tipo de triangulo que tiene dos lados con igual longitud.
- ***Construcción exacta:*** Aquella que tiene unas propiedades que se mantienen al arrastrar los objetos que componen la figura.

Se diseñó la siguiente situación didáctica utilizando el SGD DGPad-Colombia, en la cual se compone de una serie de actividades para que los estudiantes razonen deductivamente haciendo uso de las definiciones anteriores.

Actividad de la construcción del hecho geométrico

Con la ayuda de DGPad-Colombia se realizará esta actividad y será a través de la construcción del hecho geométrico.

Objetivo: Construir la circunferencia como lugar geométrico por medio del método del hilvanado y luego reconocer que todos los puntos sobre esa circunferencia están a una misma distancia del centro de ella.

Descripción de la actividad

Se propone el reconocimiento y la institucionalización de la circunferencia como lugar geométrico utilizando el método del hilvanado, además construir el hecho geométrico. El cual se parte de un dibujo aproximado.

4.2.1 Análisis a priori Tarea 1

Dados dos puntos A y B, construir 20 puntos P tales que AP=AB y luego identificar como es la disposición de esos puntos P.

Objetivo: Utilizar la percepción de cada uno para determinar que esos puntos P están formando una circunferencia.

Se sugiere aplicar el método del hilvanado que consiste en los siguientes pasos:

1. Construir los puntos A y B
2. Construir un punto P libre
3. Medir AB y AP
4. Arrastrar P hasta que AP=AB
5. Construir otro punto P
6. Repetir desde el paso 3

Para identificar la forma de círculo es necesario que los estudiantes hayan construido puntos en todo el rededor de A. Si se concentran en ubicar puntos unos muy cerca de otros, no tendrán una visión global de un círculo (necesidad de intervención del profesor). También puede suceder que como para mostrar la distancia tienen que trazar los segmentos AP, estos segmentos los lleven a pensar en una estrella y no en un círculo; otros identificarán un polígono y puede que hasta en unos casos una llanta de una bicicleta por los segmentos trazados. En estos casos, el profesor puede sugerir que oculten los segmentos después de constatar que AP=AB. También que con el dedo recorran todos los lugares donde pueden construirse los puntos que cumplirán la condición. El hecho de realizar un movimiento continuo con el dedo moviliza la imagen mental del círculo.

Tabla 1: Análisis a priori de la Tarea 1.

Intención 1	Acción	Construir el punto P y medir AB y AP
AP = AB	Retroacción	AP no es igual a AB
	Interpretación	El punto P no está bien ubicado
	Validación	Negativa
Intención 1	Acción	Arrastrar P hasta que AP sea aproximadamente igual a AB
AP = AB	Retroacción	AP se aproxima a AB
	Interpretación	Se aproximó – AP es casi igual a AB
	Validación	Positiva
Intención 2	Acción	Observar que están formando los puntos P
Identificar como es la disposición de esos puntos P	Retroacción	Ubica los puntos muy pegados y no se ve claro la idea de círculo. (parábola, arco)
	Interpretación	Construir los puntos P en toda el área donde cumplan la condición.

	Validación	Negativa
Intención 2	Acción	Observar que están formando los puntos P
Identificar como es la disposición de esos puntos P	Retroacción	Ubica los puntos regados, o sea en toda el área donde cumplen la condición.
	Interpretación	Los puntos están formando un círculo.
	Validación	Positiva

Se espera que las dos primeras acciones se repitan durante la construcción de los siguientes puntos y que luego de que los estudiantes lleven varios puntos y estén llegando a los 20puntos P, a través de su percepción puedan afirmar que esos puntos están formando un círculo/circunferencia.

4.2.2 Análisis a priori Tarea 2

Dados los puntos A y B, Construir la circunferencia que contienen los puntos P.

Objetivo: El objetivo de esta tarea es que los estudiantes construyan de manera exacta la circunferencia que contienen los puntos P.

Tabla 2: Análisis a priori de la Tarea 2.

Intención 3	Acción	Utilizar la herramienta del menú contextual Circulo(centro/punto), el estudiante tomara como centro el punto A y uno de los puntos P
Construir la circunferencia que contiene los puntos P	Retroacción	Todos los puntos P están sobre ese círculo.
	Interpretación	Es la circunferencia que forman los puntos P
	Validación	Positiva
Intención 4	Acción	Utilizar la herramienta del menú contextual Circulo(centro/punto), ubicando como centro el punto A pero no ubica B como punto por el que pasara la circunferencia sino

		que de manera visual observa que la circunferencia pasa por B y crea otro punto.
Hacer una construcción exacta de la circunferencia sobre la que estarán todos los puntos P que cumplen la condición.	Retroacción	Los puntos P están sobre la circunferencia
	Interpretación	Al momento de arrastrar los puntos A y B ya esos puntos P no cumplen la condición
	Validación	Negativa
Intención 4	Acción	Utilizar la herramienta del menú contextual Circulo (centro/punto), ubicando como centro el punto A y el Puntos B por donde pasará el círculo. Luego ubicará los puntos P.
Hacer una construcción exacta de la circunferencia sobre la que estarán todos los puntos P que cumplen la condición.	Retroacción	Los puntos P están sobre la circunferencia
	Interpretación	Construcción exacta de la circunferencia sobre la que están los puntos P porque al arrastrar siempre se mantiene la condición.
	Validación	Positiva

En la tercera intención, se espera que los estudiantes construyan esa circunferencia que dicen, pero aquí entra en juego otra intervención del docente, en la que les pedirá que hagan zoom o arrastren uno de los puntos iniciales y se darán cuenta que al momento de realizar eso no es una construcción exacta. Lo que generara expresiones como “pero eso fue porque movimos B”. Entonces el docente propondrá crear la circunferencia sobre la que estarán todos los puntos que cumplen la condición de que AP = AB. Al momento de realizar esta parte de la tarea 2, también se puede decir que los estudiantes pueden crear puntos P y luego arrastrarlo hasta que a manera perceptiva se vea que están sobre la circunferencia, en lo cual se debe hacer una intervención del profesor.

Finalmente, se le sugiere a los estudiantes que escriban un pequeño texto de conclusión de esta actividad y lo compartan con toda la clase. Inmediatamente entra en juego **la puesta en**

común, donde los estudiantes hacen un pequeño texto de conclusión sobre las tareas realizadas y luego se socializan. El docente retoma las propuestas de los estudiantes y escribe una que sea aceptable por todos, donde debe hacer la institucionalización resaltando el hecho geométrico de la siguiente manera: "*si dos o más puntos están sobre una circunferencia, entonces equidistan del centro*".

Actividades de verificación y anticipación

En estas actividades el estudiante debe verificar propiedades que no se puede constatar de manera directa, además en otra actividad el estudiante debe predecir una característica de un objeto con base a unas propiedades que se cumplen.

Objetivo: El objetivo de estas actividades es que los estudiantes recuerden y utilicen el hecho geométrico mencionado en la puesta en común para poder resolver los problemas que se piden en las siguientes tareas.

4.2.3 Análisis a priori Tarea 3

Se tienen 4 puntos. K, M, X y T, si no se tiene la posibilidad de medir la distancia entre ellos, cómo verificar si los puntos K, M y T están a igual distancia de X.

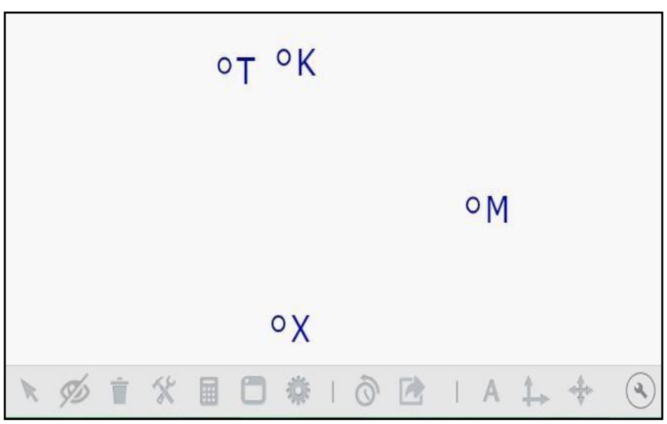


Figura 4: Imagen de la actividad 1 de verificación

Objetivo: En esta actividad se pretende que los estudiantes creen un círculo con centro en X que pase por uno de los puntos K, M y T para verificar que los puntos están a igual distancia de X, ya que no se podía medir distancias de forma directa.

Tabla 3: Análisis a priori de la Tarea 3.

Intención	Acción	Circunferencia con centro en X, pero no pasa por ninguno de los puntos dados, sino que de manera visual observa que la circunferencia pasa por los puntos K, M y T.
Verificar que la distancia de los puntos K, M y T están a igual distancia de X	Retroacción	Los puntos están sobre la circunferencia, pero de manera visual porque al momento de arrastrar X se puede observar.
	Interpretación	No es una circunferencia exacta que permite verificar lo esperado
	Validación	Negativa
Intención	Acción	Circunferencia con centro en X que pasa por uno de los puntos K, M y T.
Verificar que la distancia de los puntos K, M y T están a igual distancia de X	Retroacción	Los puntos están sobre la circunferencia
	Interpretación	Al momento de arrastrar X se verifica que los puntos K, M y T efectivamente están sobre la circunferencia.
	Validación	Positiva

Luego de realizar esta actividad 1 de verificación, seguimos con la siguiente actividad.

4.2.4 Análisis a priori Tarea 4

Si no se puede arrastrar, como verificar si los puntos A, P, N, F y D están sobre la circunferencia de centro C.

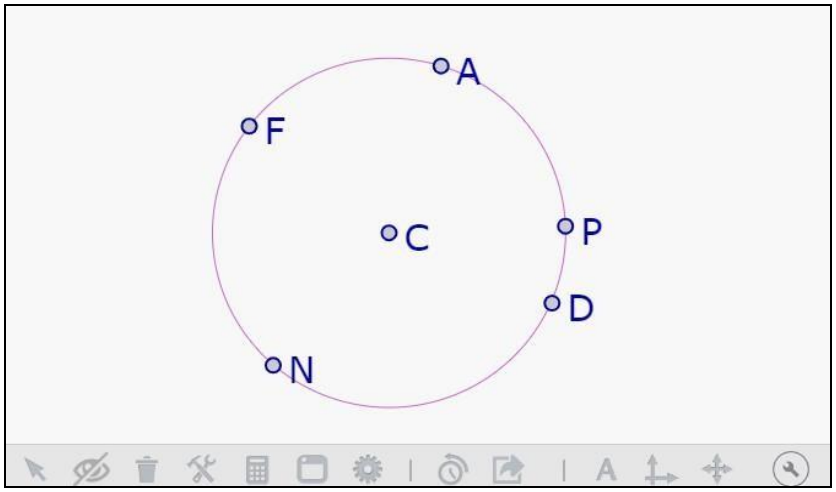


Figura 5: Imagen de la actividad 2 de verificación.

Objetivo: El objetivo de esta actividad es que los estudiantes midan la distancia de cada uno de esos puntos al centro de la circunferencia y así verificar si todos esos puntos están sobre la circunferencia.

Tabla 4: Análisis a priori de la actividad 4.

Intención	Acción	Medir la distancia de los puntos A, F, N, P y D hasta C
Verificar si todos los puntos están sobre la circunferencia.	Retroacción	Las distancias no son iguales
	Interpretación	Los puntos no están sobre la circunferencia
	Validación	Positiva

Después de realizar las actividades de verificación y constatar que los estudiantes cumplen con los objetivos planteados, pasamos a realizar las actividades de anticipación.

4.2.5 Análisis a priori Tarea 5

Esta actividad en DGPad-Colombia se plantea una construcción en la cual consta de 5 puntos, donde a partir de un punto C se desprenden unos segmentos con sus medidas hasta unos puntos M, X, Y y Z.

Decir si los puntos M, X, Y y Z estarán sobre una misma circunferencia con centro en C, justificar ¿por qué?

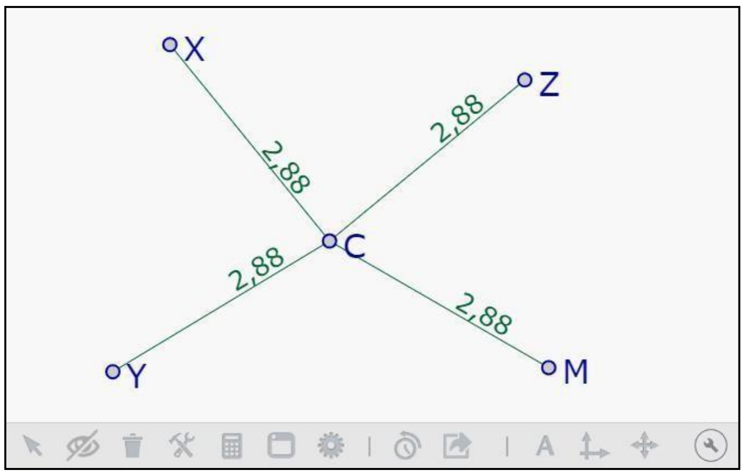


Figura 6: Imagen de la actividad 1 de anticipación.

Objetivo: En esta actividad se busca que los estudiantes digan que esos puntos estarán sobre una misma circunferencia porque las medidas de esos puntos hasta C son iguales.

Tabla 5: Análisis a priori de la Tarea 3.

Intención	Acción	luego de su respuesta, verificar creando esa circunferencia de centro C
Decir si los puntos M, X, Y y Z estarán sobre la misma circunferencia.	Retroacción	Los puntos efectivamente están sobre la circunferencia
	Interpretación	Justificar el por qué esos puntos quedaron sobre la circunferencia.
	Validación	Positiva

Luego de terminar esta actividad se prosigue a realizar la segunda actividad de anticipación.

4.2.6 Análisis a priori Tarea 6

En esta actividad se tienen una serie de puntos que llamamos M, N, O, P, Q y R los cuales R y N están sobre la circunferencia, los puntos O y P están por fuera del circulo y los puntos M y Q están dentro del círculo.

Kenny dice que los puntos M, N, O, P, Q y R están sobre la circunferencia de centro C. y que las distancias de esos puntos a C son iguales. Qué opinas tú y ¿por qué?

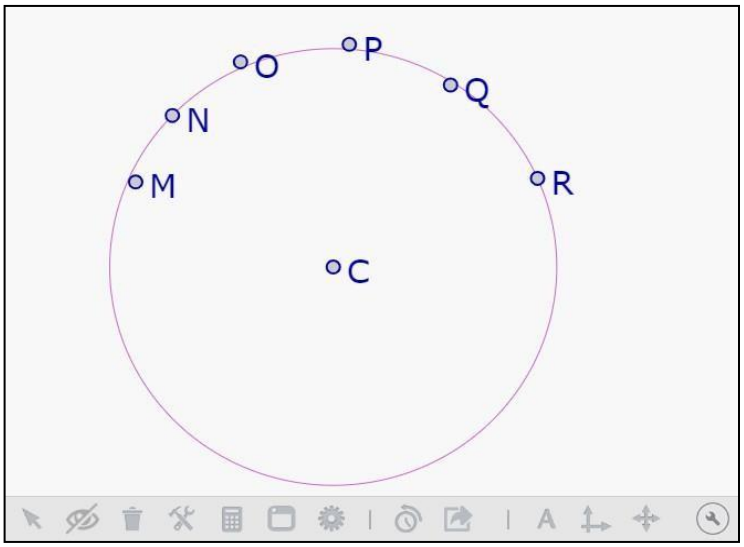


Figura 7: Imagen de la actividad 2 de anticipación.

Objetivo: En esta actividad el objetivo es que los estudiantes digan que los puntos en el interior tienen menor distancia hasta el centro que los puntos sobre la circunferencia hasta el centro, además que los puntos en el exterior tienen mayor distancia hasta el centro que los puntos sobre la circunferencia hasta el centro.

Luego de decir algo sobre las distancias, se les pedirá a los estudiantes que verifiquen lo dicho, midiendo las distancias y confrontar con lo dicho previamente.

Tabla 6: Análisis a priori de la Tarea 6.

Intención	Acción	Medir las distancias
Decir algo sobre la distancia de todos los puntos hasta el	Retroacción	Distancias distintas

centro del círculo.	Interpretación	Efectivamente las distancias de los puntos en el exterior con el centro son mayores que las distancias de los puntos que están sobre la circunferencia y el centro. Así mismo con los puntos que están en el interior.
	Validación	Positiva

Cabe resaltar que los estudiantes podrán decir sobre la actividad que hay puntos sobre la circunferencia y otros que no están sobre ella, para eso es necesario la intervención del docente y hacerlo caer encuentra en la relación de distancias entre esos puntos con respecto al centro para cumplir con el objetivo.

Luego de terminar este ejercicio, pasamos a la actividad número 3 de anticipación.

4.2.7 Análisis a priori Tarea 7

Esta actividad en DGPad-Colombia se plantea una construcción en la cual consta de 5 puntos, donde a partir de un punto C se desprenden unos segmentos con sus medidas hasta unos puntos W, X, Y y Z.

Decir si los puntos W, X, Y y Z estarán sobre una misma circunferencia con centro en C, justificar ¿por qué?

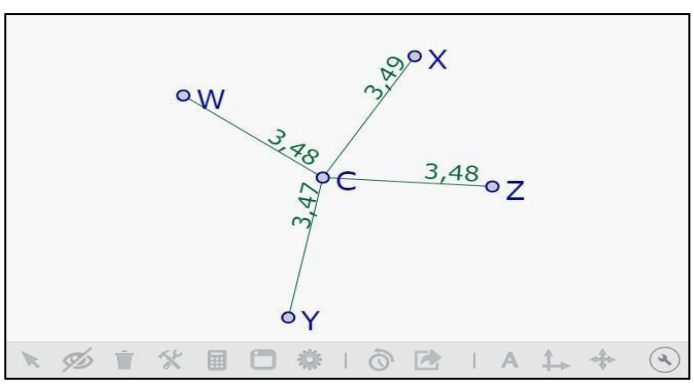


Figura 8: Imagen de la actividad 3 de anticipación.

Objetivo: En esta actividad se busca que los estudiantes digan que esos puntos no estarán sobre una misma circunferencia porque las medidas de esos puntos hasta C no son iguales.

Tabla 7: Análisis a priori de la tarea 7.

Intención	Acción	Luego de su respuesta, verificar creando varias circunferencias con centro en C que pasen por cada uno de los puntos.
Decir si los puntos W, X, Y y Z estarán sobre la misma circunferencia.	Retroacción	Los puntos efectivamente no se encuentran sobre una misma circunferencia.
	Interpretación	Justificar el por qué esos puntos no quedaron sobre una misma circunferencia.
	Validación	Positiva

Finalmente, al realizar todas estas tareas de manera satisfactoria, se procede a la siguiente actividad que consiste en el uso del hecho geométrico para construir.

Actividad del uso del Hecho geométrico para construir.

En esta actividad, el estudiante debe utilizar el hecho geométrico construido previamente para poder resolver un problema de construcción. El cual consiste en construir un triángulo isósceles de manera exacta, Según Duval, R (2011) posible dificultad para aceptar el doble rol de un segmento: radio de un círculo y lado de un triángulo

4.2.8 Análisis a priori Tarea 8

Construir un triángulo isósceles.

Objetivo: En esta actividad se busca que el estudiante utilice el hecho geométrico y pueda construir un triángulo isósceles. Creando una circunferencia y colocando dos puntos sobre ella, así creando los dos segmentos iguales que se necesitan y luego unir con otro segmento.

Tabla 8: Análisis a priori de la actividad de Construcción.

Intención	Acción	Construcción de dos puntos, segmento de esos dos puntos. Luego a partir de uno de esos puntos crear otro segmento. Medir los dos segmentos y arrastrar los puntos hasta que las medidas sean iguales. Luego con otro segmento unir los dos segmentos iguales. Finalmente se concluye que ese es el triángulo isósceles.
Construir un triángulo isósceles	Retroacción	Arrastrar uno de los puntos.
	Interpretación	No es una construcción exacta de un triángulo isósceles.
	Validación	Negativa
Intención	Acción	Círculo de centro que pase por un punto, luego crear dos puntos sobre la circunferencia. Además, trazar los dos segmentos desde el centro del círculo hasta esos puntos sobre la circunferencia. Unir luego los dos puntos sobre la circunferencia con un segmento. Ese es el triángulo isósceles,
Construir un triángulo isósceles.	Retroacción	Al arrastrar se mantiene la construcción
	Interpretación	Ese es el triángulo isósceles porque los dos lados iguales son los que se forman a partir del centro del círculo hasta los puntos sobre la circunferencia.
	Validación	Positiva

En esta actividad se debe direccionar a los estudiantes a través de preguntas para que logren resolver el problema, se les pedirá que justifiquen cada paso que hacen.

4.3 Análisis a posteriori local de la actividad

Se efectúa el análisis a posteriori con el objetivo de determinar la autenticidad y eficacia de la actividad propuesta en esta investigación. Por lo cual se presenta una serie de observaciones que expondrán el contraste entre las acciones previstas en el análisis a priori y las acciones, comportamientos de los estudiantes durante la experimentación.

Esta actividad se llevó a cabo en la I.E.D Fundación Pies Descalzos, con el acompañamiento, supervisión y orientación del investigador Jesús Mejía (I). Donde intervinieron los estudiantes de séptimo grado; Mariana Contreras (E1), Natalia Warner (E2), Gabriela Charris (E3) y Danna Betancourt (E4). Cabe resaltar que estas actividades se realizaron en parejas, es decir la pareja 1 estaba formada por E1 junto E2 y la pareja 2 por E3 junto E4.

Los convenios utilizados para la transcripción de los videos son:

- ✓ Letra negra, para identificar lo que decían las personas que intervenían en la actividad.
- ✓ Letra roja, para identificar las acciones de los estudiantes, durante los momentos que permanecían en silencio.
- ✓ Letra verde, para resaltar lo que el investigador observaba tanto en el comportamiento de los estudiantes y en el software.
- ✓ Letra azul, para resaltar lo que decían, justificaban y escribían los estudiantes mientras interactuaban con el medio o señalaban con las manos.
- ✓ *Letra negra: en cursiva,* para representar algunas observaciones del profesor con respecto a las acciones de los estudiantes.

Actividad de la construcción del hecho geométrico

Con la ayuda de DGPad-Colombia se realizará esta actividad y será a través de la construcción del hecho geométrico.

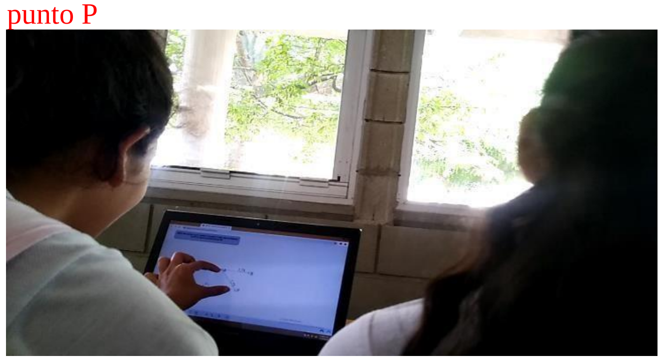
Objetivo: Construir la circunferencia como lugar geométrico por medio del método del hilvanado y luego reconocer que todos los puntos sobre esa circunferencia están a una misma distancia del centro de ella.

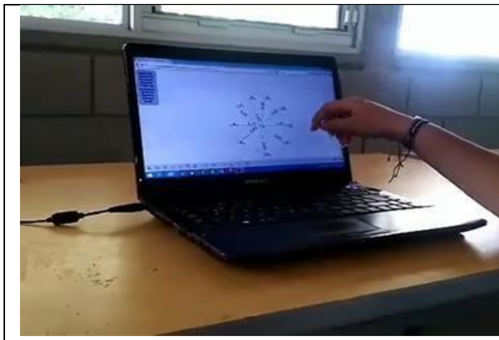
4.3.1 Análisis a posteriori de la tarea 1

Tarea 1

Dados dos puntos A y B, construir 20 puntos P tales que AP=AB y luego identificar como es la disposición de esos puntos P.

Tabla 9: Transcripción.

Pareja 1 formada por E1 y E2	Pareja 2 formada por E3 y E4
[1] E2: Construyen los puntos A y B [2] E2: Construye un punto P, más o menos a una distancia igual que AB [3] E1 y E2: Observan y escuchan lo que pasa con E3 y E4 [4] E1 y E2: Observan y escuchan lo que pasa con E3 y E4 [5] E1: Construye los segmentos AB y AP, luego miden esos segmentos. AB= 7,75 y AP=7,69 [6] E1 y E2: Escuchan a E3 [7] E1: ¿Podemos moverlo? *[8] I: ¿para qué?* [9] E1: Para hacer que midan lo mismo. *[10]* I: Claro que sí. *AP debe medir lo mismo que AB o aproximadamente, o sea casi lo mismo.* [11] E2: Arrastra P hasta que AP=7,75 *[12] E1: ¡Ya profe!* *[13] I: Bueno, recuerden que son 20 puntos P* [14] I: Luego los estudiantes repitieron este procedimiento una cantidad de veces (9), colocaron puntos P. midieron la distancia de AP y arrastraron P hasta que las medidas de AP fueran iguales a AB o se aproximaran.	[1] E3: Construyen los puntos A y B [2] E3: Coloca los dedos en la pantalla, el dedo índice en el punto A y el dedo pulgar en el punto B, luego mueve un poco el dedo pulgar y ahí construye un punto P  *[3] I: ¿Por qué coloca los dedos en los puntos A y B?* [4] E3: Porque así sabemos la medida desde A hasta B y rodamos, podemos colocar el punto P. [5] E3: Construye los segmentos AB y AP, luego miden esos segmentos. AB= 3,43 y AP=3,47 [6] E3: Pero no miden lo mismo. [7] E3 y E4; Escuchan a E1 *[8] I: ¿para qué?* [9] E3 y E4: Escuchan a E1 *[10]* I: Claro que sí. *AP debe medir lo mismo que AB o aproximadamente, o sea casi lo mismo.* [11] E4: Arrastra P hasta que AP=3,43 [12] E4: Listo! *[13] I: Bueno, recuerden que son 20 puntos P*

 [15] I: Después de esa cantidad de puntos los estudiantes comenzaron a decir [16] E1 y E2: Escuchan a E3 [17] E2: No, Esos puntos crean un círculo porque a medida que vamos colocando puntos se va viendo más estructurado. [18] E1 y E2: Escuchan a E4.	[14] I: Luego los estudiantes repitieron este procedimiento una cantidad de veces (12), colocaron puntos P. midieron la distancia de AP y arrastraron P hasta que las medidas de AP fueran iguales a AB o se aproximaran. [15] I: Después de esa cantidad de puntos los estudiantes comenzaron a decir [16] E3: Profe, esos puntos están creando una figura, como una especie de octágono, esos que son así con bastantes lados pero no sé cómo se llamaría [17] E3 y E4: Escuchan a E2 [18] E4: Sí, sí. Un círculo.

En el análisis a priori se pronosticó que los estudiantes para iniciar la actividad podían utilizar directamente el método del hilvanado, así mismo la necesidad de que construyeran los puntos P en todo el rededor de A.

En el inicio de esta actividad, los estudiantes comenzaron a realizar la tarea colocando todos los puntos con el método del hilvanado hasta tener una buena suma de puntos ([14]) y se pudo observar que colocaban los puntos en todo el rededor de A y no se concentraban en una sola parte de la pantalla, además colocándolos con un espacio a simple vista constante.

Se logró evidenciar que pensaron en una especie de polígono en la cual en el análisis a priori se dijo que el docente debía hacer una intervención, pero que en este caso no fue necesaria porque un estudiante logro darse cuenta cual era la disposición de los puntos que tenían y de los que iban a colocar. ([16]).

Conclusiones de los análisis a posteriori de la tarea 1

El objetivo de esta tarea era que los estudiantes utilizaran la percepción para determinar que esos puntos P están formando una circunferencia. Para esto había que tener en cuenta los obstáculos de visualización y poder intervenir para que los estudiantes cumplieran el objetivo.

Esto se debía al poder tener una buena cantidad de puntos P que cumplieran la condición de que AP=AB.

El objetivo de esta tarea fue cumplido, pues los estudiantes lograron identificar que esos puntos formaban un círculo/circunferencia, ya que, el software permitió el arrastre de los puntos que estaban colocando para de manera perceptiva lograr el objetivo. Esto a su vez autorizó seguir con la tarea 2.

4.3.2 Análisis a posteriori de la tarea 2

Tarea 2

Dados los puntos A y B, Construir la circunferencia que contienen los puntos P y luego hacer una construcción exacta.

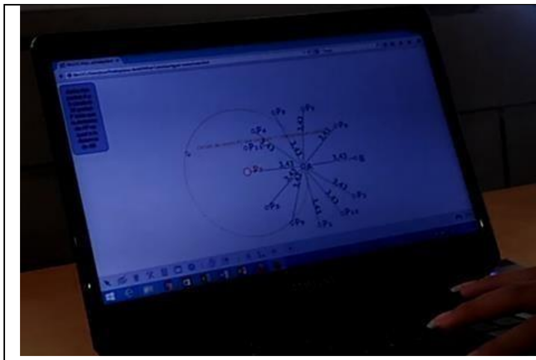
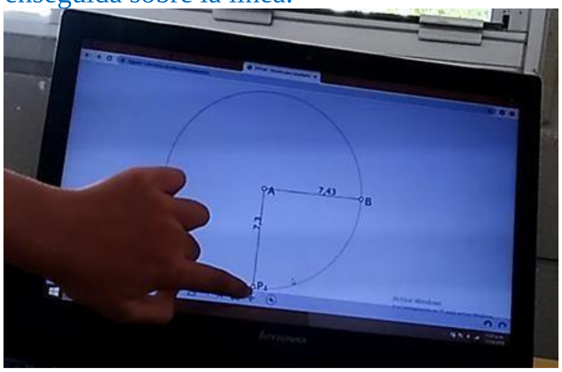
Objetivo: El objetivo de esta tarea es que los estudiantes construyan de manera exacta la circunferencia que contienen los puntos P.

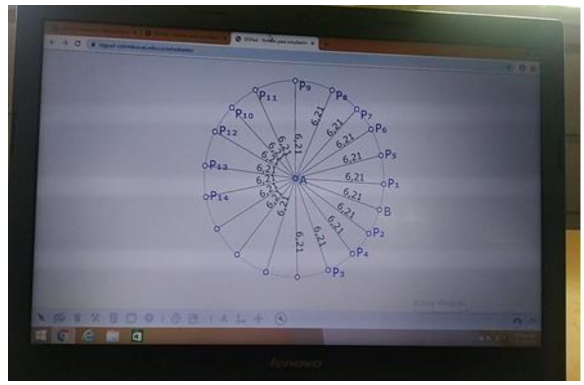
Trascripción

Luego de una buena cantidad de puntos P, los estudiantes dijeron que la disposición de esos puntos formaba un Círculo/Circunferencia.

Tabla 10: Transcripción.

Pareja 1 formada por E1 y E2	Pareja 2 formada por E3 y E4
[1] I: ¿Pueden crear ese círculo? [2] E2: Si [3] E1: Toca uno de los puntos P y selecciona la herramienta Círculo (centro, punto) del menú contextual, arrastra y se da cuenta que ese círculo que se va formando no es el que conforman los puntos P, lo elimina y toca el punto A, selecciona la herramienta Círculo (centro, punto) y arrastra hasta uno de los puntos P.	*[1] I: ¿Pueden crear ese círculo?* [2] E3: Si profe [3] E4: Toca el punto A. Selecciona la herramienta Círculo (centro, punto) y arrastra hasta uno de los puntos P. [4] E3 y E4: Escuchan a E2 *[5] I: Arrastren el punto B* [6] E3: Arrastra B *[7]* I: *¿por qué ahora las medidas de AP no son iguales a AB?* [8] E3: pero eso pasa solo si arrastramos B porque como estaba ahorita si se cumplía

 [4] E2: Ese es, ese es el círculo que forman esos puntos. *[5] I: Arrastren el punto B* [6] E2: Arrastra B *[7]* I: *¿por qué ahora las medidas de AP no son iguales a AB?* [8] E1 y E2. Escuchan a E3 *[9]* I: *Regresen B donde estaba, ahora Arrastren el punto A* [10] E2: Arrastra B hasta que AB=7,75. Luego arrastra A *[11] I: ¡y ahora! ¿Por qué AP no mide lo mismo que AB?* [12] E1, E2, E3 y E4: Se quedan mirando y hacen un gesto de tensión. *[13] I: Abran otra pestaña del software, clic derecho en la pestaña actual y le dan en duplicar.* [14] E1: Abre una nueva pestaña del software *[15]* I: *Dados los mismos puntos A y B, construir el círculo sobre el que estarán todos los puntos que cumplen la condición del problema.* [16] E2: Toca el punto A, selecciona la herramienta Círculo (centro, punto) del menú contextual. Arrastra, pero no selecciona B como punto por donde pasará ese círculo, sino que de manera visual observa que la circunferencia pasa por B y crea otro punto. [17] E2: Mide AB=6,03 *[18] I: E1 y E2, ¿Dónde deben ubicar los puntos P que cumplan la condición?* [19] E1: sobre el círculo [20] E1: Ubica varios puntos sobre la circunferencia y miden las distancias AP [21] E1 y E2: escuchan a E4 [22] E1 y E2: escuchan a I. [23] E1 y E2: escuchan a E3 *[24] I: ¡Aja! ¿Por qué esos puntos P no cumplen la condición? Arrastra B* [25] E2: Arrastra B [26] I: Si ese es el círculo sobre el que están todos	*[9]* I: *Regresen B donde estaba, ahora Arrastren el punto A* [10] E4: Arrastra B hasta que AB=3,43 Luego arrastra A *[11] I: ¡y ahora! ¿Por qué AP no mide lo mismo que AB?* [12] E1, E2, E3 y E4: Se quedan mirando y hacen un gesto de tensión. *[13] I: Abran otra pestaña del software, clic derecho en la pestaña actual y le dan en duplicar.* [14] E4: Abre una nueva pestaña del software *[15]* I: *Dados los mismos puntos A y B, construir el círculo sobre el que estarán todos los puntos que cumplen la condición del problema.* [16] E3: Toca el punto A, selecciona la herramienta Círculo (centro, punto) del menú contextual, arrastra hasta el punto B y suelta. [17] E4: Mide AB=7,43 [18] E4: Crea un punto P y lo arrastra hasta que quede sobre la circunferencia. Mide AP=7,3 [19] E3: Señala la pantalla del PC y dice: pero mira E4, si es un círculo y esto (señala A) está en el medio y tú vas a medir acá (señala la circunferencia) te va a dar la misma medida (señala A y hace el recorrido con el dedo hasta B), para que no lo tengas que mover colócalo enseguida sobre la línea.  [20] E4: Comienzan a ubicar puntos sobre la circunferencia y a medir las distancias AP [21] E4: Sí, ahora si miden lo mismo que AB. *[22] I: ¿Por qué?* [23] E3: Porque estamos colocando los puntos sobre la línea [24] E3 y E4: Escuchan a I [25] E3 y E4: Observan a E2 [26] E3 y E4: Escuchan a I [27] E3 y E4: Escuchan a E1 [28] E4: Coloca puntos P [29] E3 y E4 escuchan a I

los puntos P que cumplen la condición. ¿Por qué las distancias AP no son iguales a AB? Observen allá (PC de E3 y E4). E3 arrastra B. gracias. ¿Por qué a ellas que arrastraran B se les siguen manteniendo las mismas distancias? [27] E1: ¡Ah ya profe! Porque el círculo de nosotros no pasa por B, ya me acordé. Nosotras no colocamos que el círculo pasara por B. recuerdas que tenemos que seleccionar el punto (Le dice a E2) [28] E1: Elimina toda la construcción, crea los puntos A y B. Selecciona A y en el menú contextual utiliza la herramienta círculo (centro, punto) y selecciona B como punto por el que pasa ese círculo de centro A [29] I: ¿Dónde deben colocar los puntos P que cumplan la condición? [30] E2: Sobre la circunferencia profe [31] A partir de este momento las dos parejas comienzan a crear puntos sobre la circunferencia y a medir AP *[32] I: Arrastren A* [33] E1: Arrastra A [34] E2: Se sigue manteniendo (AP = AB) *[35] I: Arrastren B* [36] E2: Arrastra B [37] E2: Es una construcción exacta profe	[30] E3 y E4 escuchan a E2 [31] A partir de este momento las dos parejas comienzan a crear puntos sobre la circunferencia y a medir AP *[32] I: Arrastren A* [33] E3: Arrastra A [34] E3 y E4: Escuchan a E2 *[35] I: Arrastren B* [36] E4: Arrastra B [37] E3: Se siguen manteniendo 

NOTA: Cabe agregar que E2 habla de construcción exacta porque en la introducción del software el profesor habló sobre la diferencia que existe entre una construcción exacta y una construcción no exacta.

Análisis a posteriori de tarea 2: En el análisis a priori se pronosticó que los estudiantes utilizarían la herramienta del menú contextual Círculo (centro punto) ubicando como centro A qué pasaría por uno de los puntos P, luego hacerlos caer en cuenta que esa no era una construcción exacta y proponerles construir de manera exacta un círculo sobre el que estarían todos esos puntos P que cumplieran la condición, previendo que en esta etapa de la tarea los estudiantes podían crear el círculo con centro en A y que no pasara por B, también que luego de construir el círculo podían crear los puntos no sobre la circunferencia sino por fuera y luego arrastrarlo que de manera visual se observaran sobre esta.

En esta actividad se logró evidenciar que efectivamente los estudiantes hicieron la construcción aproximada ubicando el centro del circulo en A y que pasara por uno de los puntos, también en el momento de hacer la construcción exacta la pareja 2 creó el circulo con centro en A y seleccionando B como punto por el que pasaría el círculo ([16]); en cambio la otra pareja 1 ubicó A como el centro, pero no seleccionó B como punto por el que pasaría ese círculo, sino que de manera visual observó que el círculo pasaba por B y creo otro punto ([16]), el cual fue el inconveniente que tuvo al momento de realizar la construcción exacta, agregando que las parejas tenían claro que los puntos P que cumplirían la condición debían ubicarlos sobre la circunferencia, pero luego de una serie de intervenciones la pareja 1 logró hacer una construcción exacta ([28]).

Conclusiones de los análisis a posteriori de la tarea 2

El objetivo de esta tarea era que los estudiantes construyeran de manera exacta la circunferencia que contienen los puntos P. Para eso debían realizar una serie de procedimientos que se lograron anticipar en el análisis a priori y que se dejó en evidencia con la trascripción de esta actividad, pues los estudiantes a través de la característica del arrastre se podían dar cuenta que si arrastraban B la construcción no era exacta, esto en el caso de la pareja 1, aunque luego aplicando el mismo arrastre se dieron cuenta del porque la construcción si era exacta. . Pero en el caso de la pareja 2 los estudiantes de manera inmediata aplicando el arrastre concluyeron que la construcción si era exacta. Se pudo llegar a concluir que el objetivo de esta actividad se consiguió.

Puesta en común con los estudiantes.

Al finalizar las tareas 1 y 2, se decidió que las estudiantes realizaran un breve escrito a manera de conclusión sobre las tareas realizadas, luego socializarlas y a manera final el docente reescribir una que sea aceptada por todas resaltando el Hecho Geométrico el cual consiste en "*sí dos o más puntos están sobre una circunferencia, entonces equidistan del centro*"

Transcripción

[1] E1: "Debemos ubicar los puntos sobre el círculo para que la construcción sea exacta del punto A al punto P sea igual de AB"

[2] I: ¿Están de acuerdo con lo que dice Mariana?

[3] E2, E3 y E4: Si

[4] E2: "Aprendí sobre la plataforma, como hacer una circunferencia, como ubicar los puntos para que dieran la medida igual de AB"

[5] I: ¿Están de acuerdo con lo que dice Natalia?

[6] E1, E3 y E4: Si

[7] E3: "Hicimos un Círculo sobre B y empezamos a colocar P en todo el círculo, estos cumplían la misma medida que AB"

[8] I: ¿Están de acuerdo con lo que dice Gabriela?

[9] E1, E2 y E4: Si

[10] E4: "En la actividad hicimos una circunferencia con puntos P que daban la misma medida que AB. Aprendí que para que los puntos P den la misma medida tienen que estar en la circunferencia, ya que como es un círculo tiene la misma medida"

[11] I: ¿Están de acuerdo con lo que dice Danna?

[12] E1, E2 y E3: Si

[13] I: Está perfecto lo que han planteado, pues es su conocimiento el cual se logró a través de su experiencia, ahora yo uniré todo lo que ustedes me han dicho y lo resumiré de manera general. Lo diré sin decir puntos P y sin decir punto A y B, y ustedes me dirán si están de acuerdo con lo que expresare. "sí dos o más puntos están sobre una circunferencia, entonces equidistan del centro"

[14] E3: ¿Cómo así equidistan?

[15] I: *O sea "si dos o más puntos están sobre una circunferencia, entonces tendrán la misma distancia hasta el centro" ¿están de acuerdo?*

[16] E1: Si profe, eso es lo que hemos trabajado.

Al terminar las tareas 1 y 2 se podría reafirmar la importancia del software, pues como se pudo evidenciar es este una herramienta la cual juega un rol significativo en la interacción entre los alumnos y el problema, y otro rol en la interacción entre los alumnos, el profesor y el problema.

Hay dos funciones importantes del software, una es que al dar la posibilidad de hacer construcciones aproximadas crea la posibilidad de un reconocimiento perceptivo de las propiedades y la otra es poder diferenciar entre una construcción exacta y una que no lo es.

En el proceso de exploración del problema que en este caso es la construcción del hilvanado, condujo al estudiante a percibir la circunferencia, puede que haya unos obstáculos a esa percepción (observar unos segmentos que lo hacen pensar en otra forma diferente al círculo o que colocaran los puntos sobre una misma zona y no en todo alrededor de A) entonces se previeron estas maneras de intervenir para superar dichos obstáculo: Se le dice que recorra con el dedo todas las posiciones de los puntos o que oculten los segmentos para que no hubiera interferencia de los objetos presentes en la pantalla con la visualización de la circunferencia. En este caso no tuvimos la necesidad porque una de las estudiantes convenció a la otra de que los puntos formaban un círculo. Acá funcionó el software como una herramienta de exploración que le permitió a los estudiantes visualizar la propiedad importante que en este caso es “si coloco puntos a igual distancia eso puntos estarán sobre la circunferencia” y luego se planteó el problema de una construcción exacta y en el momento en el que los estudiantes la realizan verificando con el arrastre es donde se construye con más fuerza la convicción sobre el hecho geométrico. Por qué dicen “Si, se mantienen iguales” y entonces al hacer esa constatación es como decir “ya sé que si yo quiero que dos distancias sean iguales tengo que colocarlas sobre el círculo y eso lo va a garantizar” y es lo que se va a reforzar con las tareas de verificación y anticipación.

4.3.3 Análisis a posteriori de la tarea 3

Tarea 3

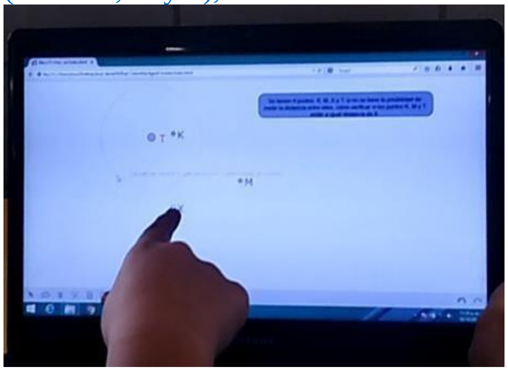
Se tienen 4 puntos. K, M, X y T, si no se tiene la posibilidad de medir la distancia entre ellos, cómo verificar si los puntos K, M y T están a igual distancia de X.

Objetivo: En esta actividad se pretende que los estudiantes creen un círculo con centro en X que pase por uno de los otros puntos.

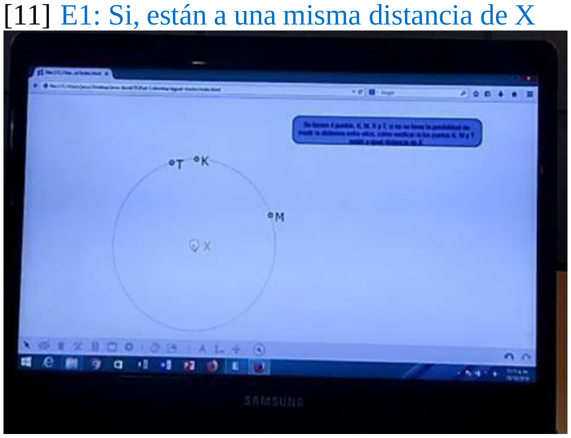
Tabla 11: Transcripción.

Pareja 1 formada por E1 y E2	Pareja 2 formada por E3 y E4
[1] E2: Toca T, selecciona la herramienta segmento [2] *I: Recuerden que no pueden medir las distancias.* [3] E2: Elimina el segmento [4] E1: Con una circunferencia	[1] E4: Toca X, coloca cursor sobre la herramienta segmento [2] *I: Recuerden que no pueden medir las distancias.* [3] E3 y E4: Observan a E2 [4] E3 y E4: Escuchan a E1

[5] I: Como así que con una circunferencia
[6] E1: De acá (señala X) a todos estos puntos (señala K, M y T), del centro a los demás.

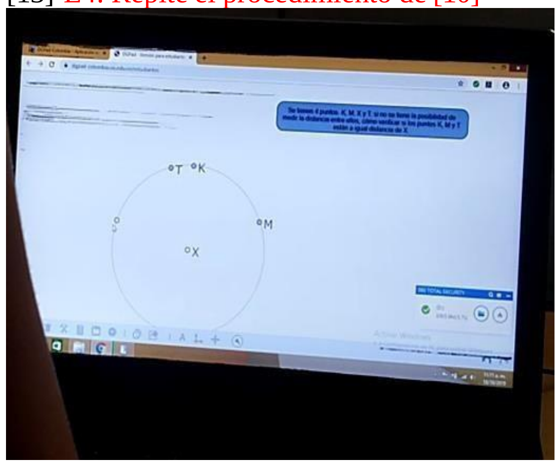


[7] I: ¿Cuál centro?
[8] E1: la X. Del centro a los demás deberían tener una misma distancia y si todos quedan a esa misma distancia entonces todos están…
[8] E2: Toca X, Selecciona la herramienta Círculo (centro, punto) del menú contextual, arrastra hasta M y suelta
[9] I: Arrastra X
[10] E2: Arrastra X
[11] E1: Si, están a una misma distancia de X



[12] I: a partir de aquí E1 y E2 observaban a E3 y E4

[5] E3 y E4: Escuchan a I
[6] E3 y E4: Escuchan a E1
[7] E3 y E4: Escuchan a I
[8] E3: sobre el mismo circulo
[9] E3: Toca acá (señala X) le dice a E4
[10] E4: Toca X, selecciona la herramienta Círculo (centro, punto) del menú contextual. Arrastra, pero no selecciona K, M y T como puntos por los que pasara el círculo, sino que de manera visual observa que la circunferencia pasa por esos puntos y crea otro, pero inmediatamente elimina ese círculo.
[11] I: ¿Por qué lo eliminaste?
[12] E4: iba a ocultar el punto
[13] E4: Repite el procedimiento de [10]



[14] I: *Arrastra X*
[15] E4: Selecciona X y arrastra
[16] I: ¿Por qué no se cumple?
[17] E3: porque no pasa por acá (señala los puntos K, M y T)
[18] I: ¿Por qué no pasa por dónde?
[19] E3: Porque no pasa por K ni T
[20] E3: Elimina la circunferencia creada por E4, toca X y selecciona la herramienta círculo (centro punto), arrastra
[21] E3: Si coloco la circunferencia acá (señala M) no se va a cumplir para los otros puntos.
[22] E4: O sea que los puntos queden en la circunferencia
[23] I: Ustedes dicen que con una Circunferencia pueden verificar que esos puntos están a una misma distancia, si se cumple con uno entonces se debería cumplir con los otros.
[24] E3: No
[25] I: Hazlo a ver
[26] E3: construye Circulo con centro en X que pasa por M

	[27] E4: Entonces no tienen la misma medida [28] E4: ¿Cómo sabes? ¿Cómo puedes verificarlo? [29] E3: Como se colocó acá (señala M) pasa por acá (señala K y T) pero no queda exacto [30] I: Arrastra X [31] E3: Arrastra X [32] I: Aja que pasa ahí [33] E3 y E4: si tienen la misma medida [34]I: La misma medida de qué [35] E4: De esos puntos (señala K, M y T) a X

Análisis a posteriori de tarea 3: En el análisis a priori se pronosticó que los estudiantes para cumplir con el objetivo de la actividad podían crear una circunferencia pero que no pasara por ninguno de los puntos K, M y T, la cual no era la manera correcta de resolver el problema y justamente eso fue lo que pasó, la pareja 2 construyó una circunferencia con centro en X pero no seleccionó ninguno de los puntos dados y de manera perceptiva vio que la circunferencia estaba sobre esos puntos, creando otro punto ([10]), luego de unas intervenciones del docente se logró evidenciar lo esperado.

Conclusiones de los análisis a posteriori de la tarea 3

El objetivo de esta actividad era que los estudiantes crearan un círculo con centro en X que pasaría por uno de los puntos K, M y T para poder verificar que esos puntos estaban a la misma distancia de X, ya que no se podía medir distancias de forma directa, evidenciando el rol del software ya que por medio del arrastre le permitió a la pareja 1 darse cuenta de que había cometido un error y así poder razonar y cumplir la tarea. Se pudo llegar a concluir que el objetivo de esta actividad se consiguió.

4.3.4 Análisis a posteriori de la tarea 4

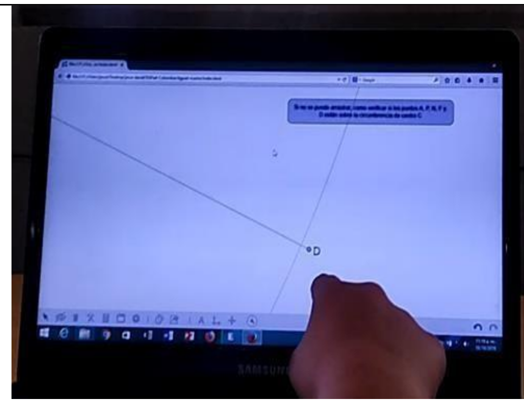
Tarea 4

Si no se puede arrastrar, como verificar si los puntos A, P, N, F y D están sobre la circunferencia de centro C

Objetivo: El objetivo de esta actividad es que los estudiantes midan la distancia de cada uno de esos puntos al centro de la circunferencia y así verificar si todos esos puntos están sobre la circunferencia.

Tabla 12: Transcripción.

Pareja 1 formada por E1 y E2	Pareja 2 formada por E3 y E4
[1] E1: Con segmentos *[2] I: ¿Por qué con segmentos?* [3] E1 yE2: Escuchan a E4 [4] E1: crea el segmento CF [5] E2: Crea el segmento CA [6] E2: Crea el segmento CP [7] E2: Crea el segmento CD [8] E1: Crea el segmento CN  [9] E1: Mide CF= 3,62 [10] E1: Mide CA= 3,62 [11] E2: Mide CP= 3,62 [12] E2: Mide CD= 3,64 [13] E2: Mide CN= 3,63 *[14] I: ¿Están todos esos puntos sobre la circunferencia de centro C?* [15] E1 y E2: No *[16] I: ¿Por qué?* [17] E2: Porque no miden lo mismo [18] E1 y E2: Escuchan y observan a E4 *[19] I: Pero yo estoy viendo que D y N si están sobre la circunferencia*	[1] E3 y E4 escuchan a E1 *[2] I: ¿Por qué con segmentos?* [3] E4: Es la forma de medir, por ejemplo, si tienen la misma medida y uno está en la circunferencia entonces todos van a estar [4] E3: Crea el segmento CA [5] E3: Mide CA= 3,62 [6] E3: Crea el segmento CF [7] E3: Mide CF= 3,62 [8] E4: Crea el segmento CP [9] E4: Mide CP=3,62 [10] E4: Crea el segmento CD [11] E4: Mide CD= 3,64 [12] E4: Crea el segmento CN [13] E4: Mide CN= 3,63 *[14] I: ¿Están todos esos puntos sobre la circunferencia de centro C?* [15] E3 y E4: No *[16] I: ¿Por qué?* [17] E4: Porque no tienen las mismas medidas [18] E4: Por ejemplo, la que más se repite es 3,62, estas tres (señala CA, CF y CP) si están sobre la circunferencia, pero las otras no *[19] I: Pero yo estoy viendo que D y N si están sobre la circunferencia* [20] E3: Tal vez si se vean sobre la circunferencia, pero si ahí salen las medidas entonces no *[21] I: Hagan zoom sobre uno de los puntos* [22] E3: Hace zoom [23] E3: Si está afuera el D

[20] E1 y E2: Escuchan a E3 *[21] I: Hagan zoom sobre uno de los puntos* [22] E2: Hace zoom [23] E1: Anda si, está afuera (Punto N)	

Análisis a posteriori de tarea 4: En el análisis a priori se pronosticó que los estudiantes para cumplir con el objetivo de la actividad inmediatamente pensarían en crear segmentos y luego medir esas distancias para verificar si esos puntos estaban todos sobre una misma circunferencia. Como se pudo observar en la actividad fue lo que rápidamente hicieron los estudiantes, crear segmentos y luego medir esas distancias para saber si todos los puntos estaban sobre la misma circunferencia, luego hicieron zoom para poder verificar de manera perceptiva que esos puntos en realidad no estaban sobre la circunferencia y que para eso solo se debía creer en las medidas que encontraron ya que de manera visual todos los puntos estaban sobre la circunferencia.

Conclusiones de los análisis a posteriori de la tarea 4

El objetivo de esta actividad era que los estudiantes midieran las distancias de cada uno de esos puntos al centro de la circunferencia y así verificar si todos esos puntos estarían sobre la misma circunferencia, se evidencio que luego de medir los segmentos creados desde el centro hasta esos puntos los estudiantes inmediatamente dijeron que todos los puntos no estaban sobre la circunferencia, verificando con una de las bondades que permite el software que es haciendo zoom sobre algunos elementos y así poder verificar que efectivamente no todos los puntos estaban sobre la circunferencia. Incluso la pareja 2 se anticipó y dijo que 3 puntos de esos podrían estar sobre una circunferencia porque las medidas desde esos puntos hasta el posible centro eran iguales ([18]). Se pudo llegar a concluir que el objetivo de esta actividad se consiguió.

4.3.5 Análisis a posteriori de la tarea 5

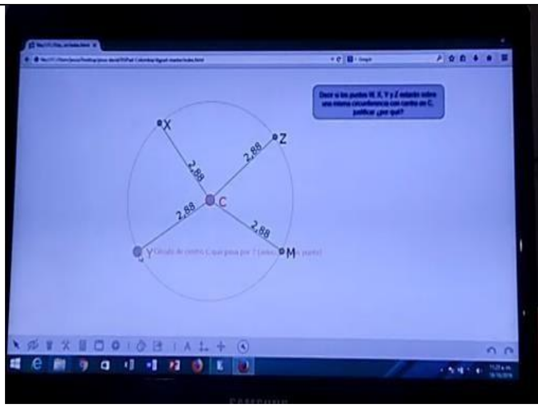
Tarea 5

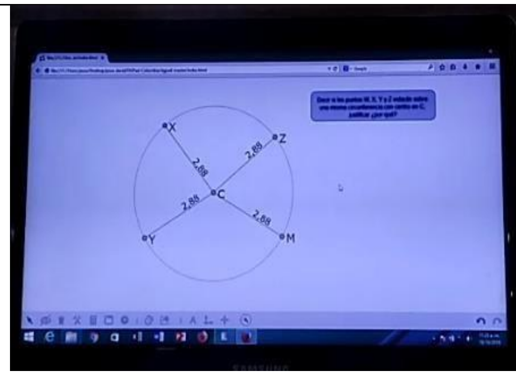
Decir si los puntos M, X, Y y Z estarán sobre una misma circunferencia con centro en C, justificar ¿por qué?

Objetivo: En esta actividad se busca que los estudiantes digan que esos puntos estarán sobre una misma circunferencia porque las medidas de esos puntos hasta C son iguales.

Tabla 13: Transcripción.

Pareja 1 formada por E1 y E2	Pareja 2 formada por E3 y E4
[1] I: ¿Qué dice la actividad? [2] E1: Decir si los puntos W, X, Y y Z estarán sobre una misma circunferencia con centro en C, justificar ¿por qué? *[3] I: Entonces, ¿ustedes que dicen?, ¿será que esos puntos estarán sobre una misma circunferencia?* [4] E1: Si porque tienen la misma medida desde el centro C hasta esos puntos. (Señala los puntos W, X, Y, Z) [5] E2: Toca C, selecciona la herramienta circulo (Centro, punto) del menú contextual. Arrastra hasta Y.	*[1] I: ¿Qué dice la actividad?* [2] E3 y E4: Escuchan a E1 *[3] I: Entonces, ¿ustedes que dicen?, ¿será que esos puntos estarán sobre una misma circunferencia?* [4] E3 y E4: Escuchan y con la cabeza afirman lo que dice E1 [5] E3 y E4: Observan a E2 [6] E3 y E4: Escuchan a I [7] E3 y E4: Observan a E1 [8] E3: Toca C, selecciona la herramienta circulo (Centro, punto) del menú contextual. Arrastra hasta X [9] I: Haz zoom [10] E3: Hace zoom [11] E4: Todos están sobre la circunferencia *[12] I: Ustedes dijeron que esos puntos iban a estar sobre la circunferencia ¿por qué?* [13] E3: Porque tienen la misma medida desde esos puntos hasta el centro C

<table>
<tr>
<td>


[6] I: Hás zoom.
[7] E1: Hace zoom
[8] E2: Se puede ver que todos los puntos están sobre la circunferencia.
[9] E1 y E2: escuchan a I
[10] E1 y E2: Observan a E3
[11] E1 y E2: Escuchan a E4
[12] E1 y E2: Escuchan a I
[13] E1 y E2: Escuchan a E3
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

Análisis a posteriori de tarea 5: En el análisis a priori se pronosticó que los estudiantes en el preciso momento de leer y observar la actividad inmediatamente dirían que esos puntos si iban a estar sobre una misma circunferencia por la igualdad de todas las medidas de esos puntos respecto a C. luego para verificar eso los estudiantes crearon ese círculo con centro en C y además hicieron zoom para verificar que todos los puntos estaban sobre la misma circunferencia, siendo esta una de las ventajas de trabajar con el software.

Conclusiones de los análisis a posteriori de la tarea 5

El objetivo de esta actividad era que los estudiantes dijeran que esos puntos estarían sobre una misma circunferencia porque las medidas de esos puntos hasta C son iguales, creando ese círculo con centro en C y además hicieron zoom para verificar que todos los puntos estaban sobre la misma circunferencia, siendo esta una de las ventajas de trabajar con el software. Luego de analizar la actividad y como se puede observar en la transcripción de ella, se puede concluir que el objetivo se consiguió.

4.3.6 Análisis a posteriori de la tarea 6

Tarea 6

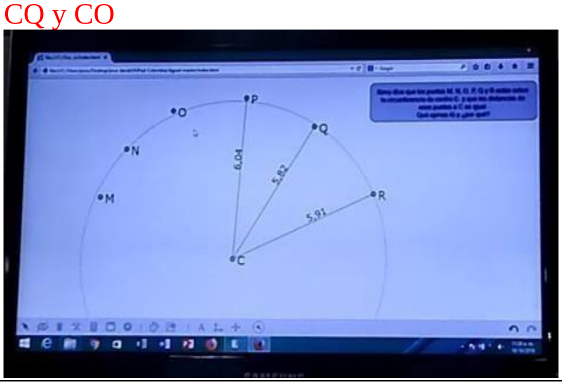
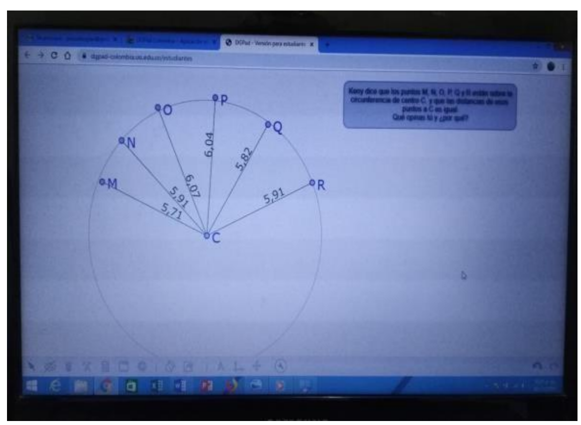
En esta actividad se tienen una serie de puntos que llamamos M, N, O, P, Q y R los cuales R y N están sobre la circunferencia, los puntos O y P están por fuera del circulo y los puntos M y Q están dentro del círculo.

Kenny dice que los puntos M, N, O, P, Q y R están sobre la circunferencia de centro C. y que las distancias de esos puntos a C son igual. Qué opinas tú y ¿por qué?

Objetivo: El objetivo es que los estudiantes digan que los puntos en el interior tienen menor distancia hasta el centro que los puntos sobre la circunferencia hasta el centro, además que los puntos en el exterior tienen mayor distancia hasta el centro que los puntos sobre la circunferencia hasta el centro.

Tabla 14: Transcripción.

Pareja 1 formada por E1 y E2	Pareja 2formada por E3 y E4
[1] E2: Kenny dice que los puntos M, N, O, P, Q y R están sobre la circunferencia de centro C. y que las distancias de esos puntos a C son iguales. Qué opinas tú y ¿por qué? *[2] I: ¿Están de acuerdo con Kenny?* [3] E1: No *[4] I: ¿Por qué?* [5] E1: Se puede notar desde aquí (señala P) *[6]* E2: Porque no están en la circunferencia [7] *I: ¿Qué puntos no están en la circunferencia?* [8] E2: P, O y M [9] E2: Hace zoom y arrastra [10] E1: y Q *[11] I: ¿Cómo es la distancia entre esos puntos hasta C?*	[1] E3 y E4: Escuchan a E2 *[2] I: ¿Están de acuerdo con Kenny?* [3] E4: No profe *[4] I: ¿Por qué?* [5] y [6] E3: Porque todos no están en la circunferencia *[7] I: ¿Qué puntos no están en la circunferencia?* [8] E3 y E4: Escuchan a E2 [9] E3 y E4-. Observan a E2 [10] E3 y E4: Escuchan a E1 *[11] I: ¿Cómo es la distancia entre esos puntos hasta C?* [12] E3: O sea que al no estar en la circunferencia no van a tener la misma medida al medio (señala C). en cambio, N y R si

[12] E1: Solo R y N tienen la misma medida *[13] I: ¿Qué pasa con los puntos que están por fuera de la circunferencia?* [14] E1 y E2: Escuchan a E3 [15] E1 y E2: Escuchan a I [16] E1 y E2: Escuchan a E3 [17] E1 y E2: Escuchan a I [18] E1: O sea mayores a esas [19] E1 y E2: Escuchan a E3 *[20] I: ¿y qué pasa con los que están por dentro de esa circunferencia?* [21] E1 y E2: Escuchan a E4 *[22] I: ¿Dónde están los puntos N y R?* [23] E2: Sobre *[24] I: Entonces ¿qué pasa con los puntos que están por fuera de la circunferencia?* [25] E2: Serán mayores que esta (señala Q) que esta fuera de la circunferencia, pero está dentro, tiene menor medida y que esta (señala R) que esta sobre la circunferencia que tendrá la misma medida que N *[26] I: Entonces los puntos que están por fuera* [27] E1: Tienen mayor medida *[28] I: ¿Qué cuáles?* [29] E1: que los que están en la circunferencia *[30] I: y que pasa con los puntos que están por dentro de la circunferencia* [31] E1: Tendrán menor medida que los que están sobre la circunferencia *[32] I: Verifiquen midiendo* [33] E2: Crea los segmentos CM, CP, CR, CN, CQ y CO 	*[13] I: ¿Qué pasa con los puntos que están por fuera de la circunferencia?* [14] E3: Van a tener distintas medidas *[15] I: ¿Cómo así distintas?* [16] E3: Por ejemplo, una puede tener 2 centímetros y otro 1 centímetro *[17] I: ¿Pero distintas medidas respecto a quienes?* [18] E4: Diferentes a NC o RC [19] E3: Aja mayores a esas *[20] I: ¿y qué pasa con los que están por dentro de esa circunferencia?* [21] E4: Van a tener menor medida que NC y RC *[22] I: ¿Dónde están los puntos N y R?* [23] E3: Sobre la circunferencia *[24] I: Entonces ¿qué pasa con los puntos que están por fuera de la circunferencia?* [25] E3 y E4: escuchan y observan a E2 [26] E3 y E4: Escuchan a I [27] E3 y E4: Escuchan a E1 [28] E3 y E4: Escuchan a I [29] E3 y E4: Escuchan a E1 [30] E3 y E4: Escuchan a I [31] E3 y E4: Escuchan a E1 *[32] I: Verifiquen midiendo* [33] E4: E2: Crea los segmentos CR, CQ, CP, CO, CN y CM 

Análisis a posteriori de tarea 6: En el análisis a priori se pronosticó que los estudiantes en el preciso momento de leer y observar la actividad inmediatamente dirían que algunos de esos puntos estaban sobre la circunferencia y otro que no. Efectivamente eso fue lo que pasó, de hecho, dijeron hasta los nombres de los puntos que estaban por fuera de la circunferencia y los que estaban por dentro. Inmediatamente el docente intervino y los estudiantes dijeron de manera general que los puntos que estaban por fuera tenían mayor distancia que los que estaban sobre la circunferencia y los que estaban por dentro de la circunferencia con respecto al centro y además dijeron que los puntos que estaban dentro de la circunferencia tenían menor distancia que los puntos sobre la circunferencia y los que estaban por fuera de ella con respecto al centro.

Conclusiones de los análisis a posteriori de la tarea 6

El objetivo de esta actividad era que los estudiantes dijeran que los puntos en el interior tienen menor distancia hasta el centro que los puntos sobre la circunferencia hasta el centro, además que los puntos en el exterior tienen mayor distancia hasta el centro que los puntos sobre la circunferencia hasta el centro, también que los estudiantes verificaran lo dicho midiendo las distancias y confrontando con lo expresado previamente. Es por esto que los estudiantes sin utilizar las herramientas del software se anticipan a lo que sucederá si miden esas distancias, luego de anticipar los estudiantes verifican lo dicho haciendo zoom sobre todos esos puntos y evidenciando que efectivamente se cumple lo que predijo antes.

Luego de analizar la actividad y como se puede observar en la transcripción de ella, se puede concluir que el objetivo se consiguió.

4.3.7 Análisis a posteriori de la tarea 7

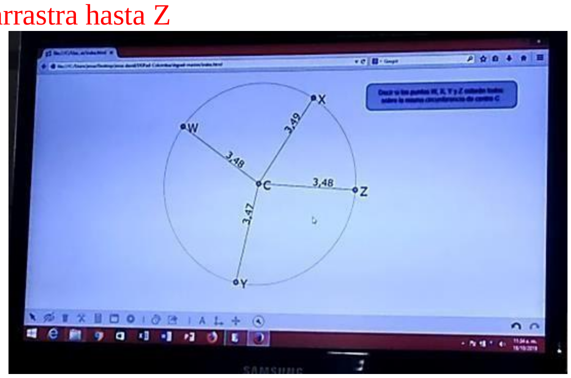
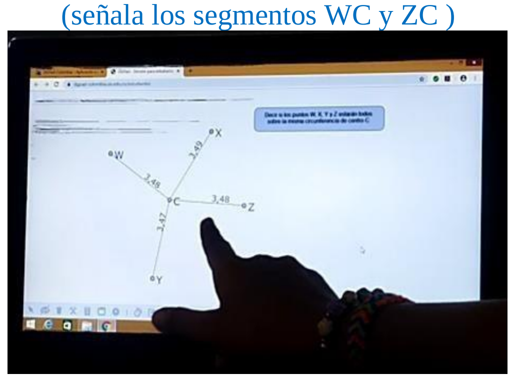
Tarea 7

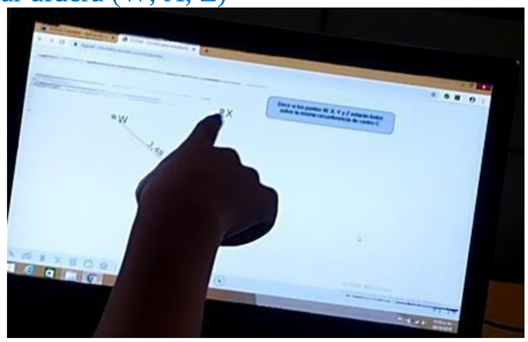
Esta actividad en DGPad-Colombia se plantea una construcción en la cual consta de 5 puntos, donde a partir de un punto C se desprenden unos segmentos con sus medidas hasta unos puntos W, X, Y y Z.

Decir si los puntos W, X, Y y Z estarán sobre una misma circunferencia con centro en C, justificar ¿por qué?

Objetivo: En esta actividad se busca que los estudiantes digan que esos puntos no estarán sobre una misma circunferencia porque las medidas de esos puntos hasta C no son iguales.

Tabla 15: Transcripción.

Pareja 1 formada por E1 y E2	Pareja 2 formada por E3 y E4
[1] E1 y E2: Escuchan a E4 [2] E1 y E2: Escuchan a E3 [3] E1 y E2: Escuchan a I [4] E1 y E2: Escuchan a E3 y E4 [5] E1 y E2: Escuchan a I [6] E1 y E2: Escuchan y observan a E4 [7] E1 y E2: Escuchan a I [8] E1 y E2: Escuchan a E4 [9] E1: Toca el punto C, utiliza la herramienta círculo (centro, puntos) del menú contextual y arrastra hasta Z  [10] E1: Hace zoom [11] E1 y E2: observan los puntos X, W, Y, Z al hacer zoom [12] E1 y E2: Escuchan y observan a E3 *[13] I: ¿Sera que esos puntos van a estar sobre la misma circunferencia?* [14] E2: No porque tienen diferentes medidas.	[1] E4: Decir si los puntos W, X, Y y Z estarán sobre una misma circunferencia con centro en C, justificar ¿por qué? [2] E3: No porque tienen diferentes medidas y se puede ver que si colocamos la circunferencia unos puntos van a estar adentro y otros van a estar afuera y también unos van a estar sobre la circunferencia. Y la medida que más se repite es el 3,48 *[3] I: Entonces ¿esos puntos estarán o no sobre la circunferencia?* [4] E4 y E3: Dos no y dos si. *[5] I: Dos no y dos si ¿Por qué?* [6] E4: Porque mira estas dos medidas se repiten (señala los segmentos WC y ZC)  *[7] I: y que pasa si yo creo la circunferencia hasta X* [8] E4: Pues no va a salir bien porque solo estará sobre X ya que estos (señala los segmentos WC, YC y CZ) tienen diferentes medidas, puede que W y Z si queden sobre una misma circunferencia porque tienen la misma medida, pero los otros puntos no. *[9] I: Entonces ¿todos los Puntos estarán sobre una circunferencia?* [10] E3: No porque tienen diferente medida, si yo

	[11] I: ¿Por qué? [12] E3: Por ejemplo, si la colocamos aquí (señala X) todos los puntos van a estar adentro (señala W, Y, Z), si lo colocamos acá (señala W y Z), estos dos (Y, X) van a estar este afuera (X) y este adentro (Y) y si la colocamos aquí (Y) estos van a estar afuera (W, X, Z)  [13] E3 y E4: Escuchan a I [14] E3 y E4: Escuchan a E2

Análisis a posteriori de tarea 7: En el análisis a priori se pronosticó que los estudiantes en el preciso momento de leer y observar la actividad inmediatamente dirían que esos puntos no quedarían sobre una misma circunferencia porque las distancias de esos puntos hasta C no era la misma. Efectivamente eso fue lo que pasó, de hecho, dijeron que había dos puntos que si podían quedar sobre una misma circunferencia porque si tenían las distancias hasta C iguales pero que los demás puntos no.

Conclusiones de los análisis a posteriori de la tarea 7

El objetivo de esta actividad era que los estudiantes dijeran que esos puntos no estarían sobre una misma circunferencia porque las medidas de esos puntos hasta C no son iguales.

Luego de analizar la actividad y como se puede observar en la transcripción de ella, se puede concluir que el objetivo se consiguió.

Es importante resaltar que con estas actividades de Verificación y anticipación se reforzó el hecho geométrico de que "si dos puntos o más están sobre la misma circunferencia entonces equidistan del centro". En el preciso momento de realizar estas actividades se pudo observar evidenciar que fueron resueltas de manera eficiente y rápida lo que indica que los estudiantes tienen una convicción fuerte del hecho.

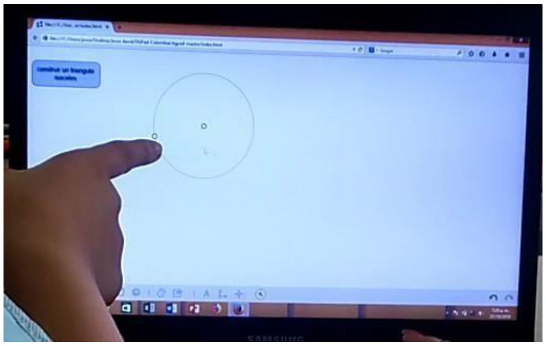
4.3.8 Análisis a posteriori de la tarea 8.

Tarea 8

Construir un triángulo isósceles.

Objetivo: En esta actividad se busca que el estudiante utilice el hecho geométrico y pueda construir un triángulo isósceles. Creando una circunferencia y colocando dos puntos sobre ella, así creando los dos segmentos iguales que se necesitan y luego unir con otro segmento.

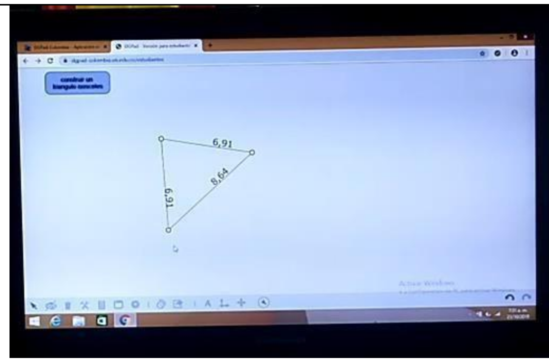
Tabla 16: Transcripción.

Pareja 1 formada por E1 y E2	Pareja 2 formada por E3 y E4
[1] I: construir un triángulo isósceles [2] E1: No me cuerdo cual es el triángulo isósceles *[3] I: Un triángulo isósceles es el que tiene dos lados iguales* [4] E1: Te acuerdas cuando hacíamos una circunferencia y ahí sacábamos los grados [5] E2: Las medidas [6] E1: Aja las medidas y hacíamos las figuras *[7] I: ¿Cómo así? Realiza en el software lo que dices* [8] E2: Crea un punto, lo toca y selecciona la herramienta Círculo (centro, punto) del menú contextual y arrastra hasta cualquier parte de la pantalla.  [9] E2: O sea tú dices que hagamos un triángulo ahí en esa circunferencia *[10] I: ¿y eso para qué? ¿Para qué haces una*	*[1] I: construir un triángulo isósceles* [2] E3 y E4: Escuchan a E1 *[3] I: Un triángulo isósceles es el que tiene dos lados iguales* [4] E4: Crea 2 puntos [5] E4: Crea un segmento con esos dos puntos [6] E4: Mide ese segmento = 6,91 [7] E4: Crea otro punto [8] E4: Crea un segmento a partir de ese punto nuevo con uno de los puntos del primer segmento [9] E4: Mide ese nuevo segmento = 6,98 [10] Crea un segmento con los dos puntos que faltan sin unir para formar un triángulo [11] E4: Elimina ese segmento [12] E4: Arrastra el segmento = 6,98 *[13] I: ¿qué hacen?* [14] E3: Estamos colocando segmentos para que dos lados tengan la misma medida y el otro no [15] E4: Arrastra el segmento = 6,98 hasta que mide 6,91 [16] E4: Crea el segmento faltante para completar el triángulo [17] E4: Mide ese segmento= 8,64

circunferencia?
[11] E2: Para que salga el triángulo isósceles
[12] I: ¿Por qué te sirve la circunferencia para construir el triángulo isósceles? Piensen un poco
[13] E1: Elimina todo
[14] E1 y E2: Escuchan a E3
[15] E1 y E2: Observan a E4
[16] E1 y E2: Observan a E4
[17] E1 y E2: Observan a E4
[18] E1 y E2: Escuchan a E4
[19] I: ¿Por qué eliminaron todo?
[20] E1: Porque estábamos pensando en colocar los puntos y unir con segmentos para que tengan la misma medida.
[21] I: O sea ¿lo que hicieron E3 y E4?
[22] E1 y E2: Si
[23] E2: Crea 3 puntos, Crea dos segmentos a partir de uno de esos puntos con respecto a los otros, mide esos segmentos y arrastra hasta que los dos segmentos = 5,55. Crea el segmento faltante para completar el triángulo
[24] I: ¿Ese es un triángulo isósceles?
[25] E2: Si porque tiene dos lados iguales

[26] I: Arrastra uno de los puntos
[27] E1: arrastra un punto

[28] I: ¿Por qué ahora no es un triángulo isósceles?
[29] E1: Porque tienen diferentes medidas los lados
[30] I: ¿cómo harían ustedes para lograr que dos de los lados siempre tengan la misma medida?
[31] E1 y E2: Escuchan a I

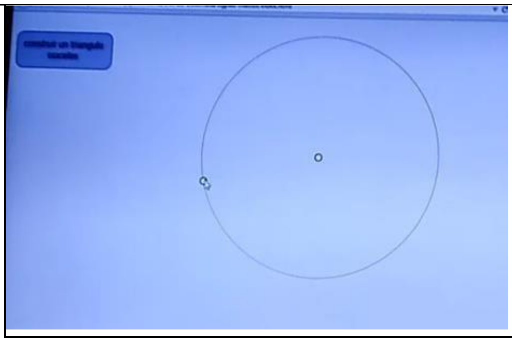


[18] E4: Ya
[19] E3 y E4: Escuchan a I
[20] E3 y E4: Escuchan a E1
[21] E3 y E4: Escuchan a I
[22] E3 y E4: Escuchan a E1
[23] E3 y E4: Observan a E2
[24] E3 y E4: Escuchan a I
[25] E3 y E4: Escuchan a E2
[26] E3 y E4: Reacomodan las medidas (arrastraron sin querer uno de los puntos)
[27] E3 y E4: Reacomodan las medidas porque arrastraron sin querer uno de los puntos.
[28] E3 y E4: Reacomodan las medidas (arrastraron sin querer uno de los puntos)
[29] E3 y E4: Reacomodan las medidas (arrastraron sin querer uno de los puntos)
[30] E3 y E4: Reacomodan las medidas (arrastraron sin querer uno de los puntos)
[31] I: Arrastra uno de los puntos
[32] E3: Arrastra el punto P_2

[33] I: Ahora ¿por qué no es un triángulo isósceles?
[34] E3: Porque ya no tienen las mismas medidas
[35] I: ¿cómo harían ustedes para lograr que dos de los lados siempre tengan la misma medida?
[36] E3: ¿Colocar una circunferencia?
[37] I: y ¿por qué?
[38] E4: Porque podemos hacer un triángulo dentro de la circunferencia
[39] I: ¿Y eso que garantiza? O sea ¿Por qué lo

[32] E1 y E2: Observan a E3
[33] E1 y E2: Escuchan a I
[34] E1 y E2: Escuchan a E3
[35] E1 y E2: Escuchan a I
[36] E1 y E2: Escuchan a E3
[37] E1 y E2: Escuchan a I
[38] E1 y E2: Escuchan a E4
[39] E1 y E2: Escuchan a I
[40] E2: Tienen las mismas medidas
[41] I: ¿Cómo así? ¿Qué tienen las mismas medidas?
[42] I: ¿Cómo hacen para que dos de los lados sean siempre iguales?
[43] E1: Con una circunferencia
[44] E2: Para que queden los puntos iguales tiene que ser desde el círculo
[45] I: ¿Desde el círculo?
[46] E2: Si, desde la circunferencia hasta el centro pero no daría
[47] E1: Pero vamos a intentarlo
[48] E1 y E2: Piensan
[49] E1 y E2: Piensan
[50] E1 y E2: Piensan
[51] E1 y E2: Piensan
[52] E1 y E2: Piensan
[53] E1 y E2: Piensan
[54] E1 y E2: Piensan
[55] E1 y E2: Piensan
[56] E1 y E2: Escuchan a I
[57] E1 y E2: Escuchan a E4
[58] E1 y E2: Escuchan a I
[59] E1 y E2: Escuchan a E4
[60] E1 y E2: Escuchan a I
[61] E1 y E2: Observan a E4
[62] E1 y E2: Escuchan a I
[63] E1 y E2: Observan a E4
[64] E1 y E2: Escuchan a I
[65] E1 y E2: Observan a E4
[66] E1 y E2: Escuchan a I
[67] E1 y E2: Observan a E4
[68] E1: Crea dos puntos
[69] E1: Toca uno de los puntos, selecciona la herramienta círculo (centro, punto) del menú contextual y arrastra hasta el otro punto

van hacer?
[40] E4: Porque siempre en la circunferencia…
[41] I: ¿Cómo así? ¿Qué tienen las mismas medidas?
[42] E3: los puntos que están en la circunferencia al centro van a tener la misma medida.
[43] E3: Elimina los segmentos y deja los puntos P_1, P_2, P_3
[44] E3: Toca el punto P_1, selecciona la herramienta círculo (centro, punto) del menú contextual y arrastra hasta P_3
[45] E3: Elimina P_2
[46] I: ¿Por qué lo eliminaste?
[47] E3: Porque no estaba en la circunferencia
[48] E3: Toca la circunferencia y crea un punto
[49] E3: Crea el segmento desde P_1 y ese nuevo punto y mide el segmento = 6,78
[50] E3: Crea el segmento P_1P_3 y mide ese segmento = 6,78
[51] I: ¿Tienen la misma medida?
[52] E4: Si
[53] I: ¿Por qué?
[54] E3: Porque como al ser una circunferencia todos los puntos que estén en la circunferencia al centro van a tener la misma medida
[55] E4: Crea el segmento faltante para completar el triángulo.



[70] I: ¿Para qué hacen eso?

[71] E2: Para hacer un triángulo isósceles en la circunferencia

[72] E2: Crea un punto sobre la circunferencia

[73] I: ¿Por qué colocas ese punto?

[74] E1: Estamos tratando de que haya un triángulo dentro de la circunferencia para que dos lados tengan la misma medida

[75] I: Cuales son esos dos lados. Nombra los puntos

[76] E1: Nombra los puntos P_2, P_3

[77] E1: Crea otro punto sobre la circunferencia nombrándolo P_4

[78] E1: Crea los segmentos P_2P_3 y P_3P_4

[79] E1: Mide los segmentos P_2P_3= 7,6 y P_3P_4= 7,74

[80] E2: Pero no miden lo mismo

[81] I: ¿para qué están haciendo ustedes la circunferencia?

[82] E2: O sea como vimos en la clase pasa que cuando poníamos los puntos en la circunferencia…

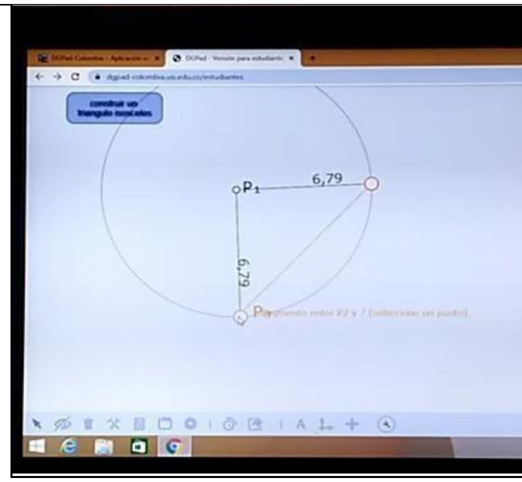
[83] I: ¿Qué vieron la clase pasada?

[84] E2: Ah es que era hasta el centro

[85] I: ¿cómo así? Explícame

[86] E1: Elimina el segmento P_3P_4

[87] E1: O sea hacer un triángulo desde acá del centro hacia acá (señala la circunferencia haciendo el movimiento del triángulo con las dos manos) porque del centro hacia la circunferencia las medidas siempre van a tener… los segmentos



[56] I: ¿Y eso es un triángulo isósceles?

[57] E4: Si

[58] I: ¿Por qué?

[59] E4: Porque tiene dos lados iguales

[60] I: Dale nombre a ese punto

[61] E4: Toca el punto sin nombrar y le coloca la etiqueta P_2

[62] I: Arrastra P_2

[63] E4: Arrastra P_2

[64] I: Arrastra P_3

[65] E4: Arrastra P_3

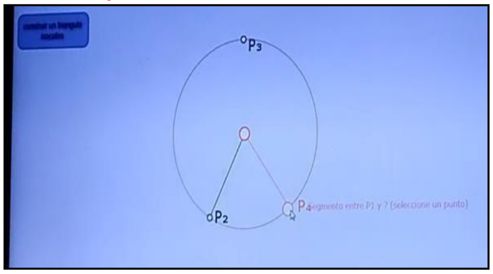
[66] I: Arrastra P_1

[67] E4: Arrastra P_1

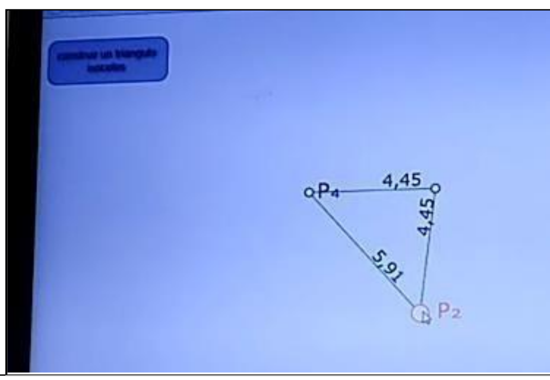
[68] I: ¿Sigue siendo un triángulo isósceles?

[69] E3: Si porque se mantienen los dos lados iguales cuando arrastramos.

van a tener la misma medida
[88] E1: Arrastra los puntos P_2 y P_4
[89] E1: Crea los segmentos desde el centro hasta los puntos P_2 y P_4



[90] E2: Mide los segmentos formados desde el centro hasta los puntos P_2 y P_4 siendo esos = 4,35
[91] Crea el segmento P_2P_4
[92] I: ¿Es un triángulo isósceles?
[93] E2: Si porque tiene dos lados iguales
[94] I: Arrastra P_4
[95] E1: Arrastra P_4
[96] E2: Se mantiene
[97] I: Arrastra P_2
[98] E2: Arrastra P_2
[99] E2: Igual se sigue manteniendo



Análisis a posteriori de tarea 8: En el análisis a priori se pronosticó que los estudiantes para iniciar la actividad podrían comenzar dibujando un triángulo cualquiera y luego medir los segmentos para ir arrastrando y observar que dos de los lados eran iguales. Efectivamente fue lo que sucedió en esta tarea, para eso fue necesario la intervención del docente para hacerlos caer en cuenta que esta no era una construcción exacta y que pudieran realizar una construcción del triángulo isósceles que aguantara el arrastre. Luego de varias preguntas como "¿Qué aprendimos en la clase pasada?, ¿Cómo te ayudaría eso?" los estudiantes se dieron cuenta que creando una circunferencia ayudaría a resolver el problema y justificaron que si hacían una circunferencia y creaban un triángulo dentro de ella podían cumplir el objetivo, ya que según los segmentos que se forman desde el centro con cualquier punto sobre la circunferencia tienen la misma medida. Se había previsto que podían tener un poco de inconveniente a la hora de aceptar el doble rol de un segmento: radio de un círculo y lado de un triángulo. Pero se pudo evidenciar que no hubo ningún inconveniente respecto a lo indicado. Construyendo así los estudiantes un triángulo isósceles de manera exacta, puesto que aguantaba el arrastre de sus objetos.

Conclusiones de los análisis a posteriori de la tarea 8

El objetivo de esta actividad era que los estudiantes utilizaran el hecho geométrico para poder construir de manera exacta el triángulo isósceles. Creando una circunferencia y colocando dos puntos sobre ella, así creando los dos segmentos iguales que se necesitan y luego unir con otro segmento.

Luego de analizar la actividad y como se puede observar en la transcripción de ella, se puede concluir que el objetivo se consiguió.

5 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 Conclusiones.

A lo largo de las actividades se pudo resaltar el rol del del software, haciendo énfasis en sus características como el arrastre y el zoom, ya que de manera perceptiva los estudiantes accionando sobre el medio lograron primeramente apropiarse de un Hecho geométrico, aplicando el método del hilvanado.

Como se evidenció en la pareja 1 formada por E1 y E2 en la trascripción de la terea 2 de los renglones [24] – [36]. Donde primeramente el docente pregunta el por qué no se cumple una condición para unos puntos creados y por medio del arrastre que permite el software interpretan esa retroacción para poner en marcha una nueva acción, y logrando concluir que los puntos efectivamente están sobre la circunferencia y mantienen siempre una misma distancia hasta un punto llamado centro, lo que se pudo institucionalizar en una puesta en común donde los estudiantes primeramente plasmaron su conocimiento para finalmente entre todos llegar a un saber.

Seguidamente se puede observar el comienzo de su razonamiento y la importancia del rol del software, ya que a través de sus características los estudiantes comprobaron lo dicho anteriormente razonando y respondiendo a las tareas de verificación y anticipación.

Como lo registró la pareja 2 en la transcripción de la tarea 7 del renglón [1] – [2], donde los estudiantes anticipan que dichos puntos no quedarán sobre una misma circunferencia porque no tienen una misma distancia hasta un punto que los relacionaba, luego para comprobar crearon una circunferencia tomando como centro ese punto que se relacionaba a través de segmentos con los demás y utilizando una de las características muy importante del software comprobaron que no todos los puntos estaban sobre la circunferencia.

Finalmente, los estudiantes razonaron deductivamente al momento construir y justificar que una construcción propuesta por el docente y realizada por ellos era exacta. Donde también se resaltó el rol del software ya que los estudiantes al finalizar emplean el arrastre que permite DGPad-Colombia para verificar, comprobar que dicha construcción es Exacta. Registrándose en la transcripción de la tarea 8.

Es de suma importancia agregar que al interactuar con el software DGpad-Colombia los estudiantes crearon su propio conocimiento respecto a un hecho geométrico (HG), lo que evidenció que los estudiantes razonaron deductivamente, resolviendo unos problemas de verificación y anticipación y finalmente, haciendo una construcción de un triángulo isósceles y justificando por qué esa construcción es exacta. En la cual también se pudo resaltar el rol que cumplió el software DGPad-Colombia a lo largo de todas las tareas, infiriendo que las actividades funcionaron como se esperaban, ya que estimularon a los estudiantes paso a paso a razonar deductivamente creando espacios de discusión o puestas en común.

5.2 Recomendaciones.

Con los resultados obtenidos en esta investigación se recomienda a futuros trabajos implementar:

- No intervenir de manera reiterada en las tareas. En caso de hacerlo, que sea con preguntas que coloquen al estudiante a razonar.
- Garantizar el aprendizaje por adaptación.
- Hacer uso del software para la enseñanza de otros hechos geométricos.

- Protocolo de construcción donde los estudiantes deban predecir si determinadas propiedades se mantendrán al arrastrar o no.
- Proponer actividades donde los estudiantes escriban el protocolo basándose en una construcción realizada, lo que implica llegar a una situación fundamental de demostración.
- Crear espacios de discusión o puestas en común donde los estudiantes puedan unificar diferentes puntos de vista.

BIBLIOGRAFÍA

Acosta, M. y Camargo, L. (2012). La Geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 32, 4-8

Acosta, M. y Fiallo, J. (2017). *Enseñando Geometría con tecnología digital: una propuesta desde la teoría de las situaciones didácticas*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Acosta, M., Monroy, L., & Rueda, K. (2010). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio. *Revista Integración Escuela de Matemáticas, 28*(2), 173–189

Arsac, G. (1992) *Iniciación al pensamiento deductivo*, Presses Universitaires de Lyon.

Artigue, M., Regine, D., Moreno, L., & Gomez, P. (1995). Ingeniería didáctica en Educación Matemática. En *Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá: Iberoamerica.

Arzarello, F., & Soldano, C. (2019). Approaching Proof in the Classroom Through the Logic of Inquiry. In *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (pp. 221-243). Springer, Cham.

Bacares, J., y Cruz, M. (2015) Argumentación de estudiantes del ciclo IV, apoyada en un software de Geometría dinámica. En Perry, P (Eds.), *22* Encuentro *de Geometría y sus aplicaciones* (EGA). Simposio llevado a cabo en el encuentro de investigación en educación matemática, Bogotá, Colombia.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 33-115. 59

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros de Zorzal.

Calderón, J. (2016). *Diseño de una ingeniería didáctica para promover el razonamiento inductivo y el razonamiento deductivo en el contexto de la construcción de paralelogramos, utilizando software de Geometría dinámica.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José De Caldas.

Cardozo, S. (2019). *Mediación de Geometría Dinámica en la Demostración*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José De Caldas.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. (R. Lesh, & A. Kelly, Edits.) Handbook of research methodologies for science and mathematics education, 341.385.

Clemens, S., O‟ Daffer, P., & Cooney, T. (1989). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas.* U.S.A. Addison-Wesley Iberoamericana.

Crespo, C., Farfán, R., & Lezama, J. (2010). Argumentaciones y demostraciones: una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. *Revista latinoamericana de Investigación en matemática Educativa, 13* (3), 283-306.

Creswell, J. (2014). *Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches.* Londres: SAGE.

Duval R., 2011. *Du mot au concept. Preuve*. 33-68. Grenoble : Presses Universitaires.

Fiallo, J. (2011). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia.

Fiallo, Jorge (2008). *Lineamientos curriculares, demostración, uso de tecnologías y textos escolares en trigonometría.* En Bonilla, Martha (Ed.), Memorias del 9º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (pp. 125-130). Bogotá, Colombia: Gaia

Fuente, E., Rubio, H., & Buelvas, J. (2016). *Desarrollo del pensamiento geométrico en demostraciones con cuadriláteros en estudiantes universitarios, a partir de un recurso educativo digital abierto basado en el uso del software Geometría.* Barranquilla: Universidad del Atlántico.

Gil, M. E. G. (2011). El vídeo como herramienta de investigación: Una propuesta metodológica para la formación de profesionales en Comunicación. *Revista del CES Felipe II*, 13(7).

González-López, M. J. (2001). *La gestión de la clase de Geometría utilizando sistemas de Geometría dinámica.* Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro. Granada: Universidad de Granada, 277-290.

Hernández Sampieri, R. (2014). *Metodología de la investigación.* México D.F.: McGRAWHILL / INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V

Lacués Apud, E. M. (2013). Análisis preliminar para una ingeniería didáctica sobre la enseñanza del condicional. *Actas del VII CIBEM ISSN*, *2301*(0797), 2300.

Larios, V., & González, N. G. (2010). Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de Geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *RELIME*, *13*(4), 147-160.

Mariotti, M. A. (2006). Demostración y demostrar en educación matemática. *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, 173-204.

MEN. (1998). Lineamientos curriculares en matemáticas. En M. d. Nacional, *Lineamientos curriculares.*

Molina, O., & Samper, C. (2018). Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 32(62).

Ponce De León, C. (2014). Ingeniería Didáctica para la Educación Primaria: estudiantes del ISFDyT Nro. 31 en Necochea desarrollan un dispositivo didáctico para enseñar Geometría con las TIC en quinto año de Educación Primaria. En *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación.* Buenos Aires.

Revuelta Domínguez, F. I., & Sánchez Gómez, M. C. (2005). *El proceso de transcripción en el marco de la metodología de investigación cualitativa actual.*

Rojas Pajoy, D. P., Gaviria Sterling, A., & Valderrama Cuellar, J. A. (2014). *Aprendizaje de la Geometría mediada con herramientas didácticas.* Manizales: Universidad Católica de Manizales.

Sánchez., C. H. (2012). La historia como recurso didáctico: el caso de los elementos. *Tecné, Episteme y Didaxis,* 32, 71-92

Sua, C. (2019). Saber suficiente no es suficiente: comportamientos metacognitivos al resolver problemas de demostración con el apoyo de la Geometría dinámica. *Tecné, Episteme y Didaxis: ted, 45, 121-142.*