

ÍNDICES DE CAPACIDAD MULTIVARIADOS

Roberto José Herrera Acosta

Roberto José Herrera Acosta

ÍNDICES DE CAPACIDAD MULTIVARIADOS

Nuevas propuestas

Escanee el código QR para conocer
más títulos publicados por el Sello
Editorial Universidad del Atlántico



ISBN 978-958-5525-15-3



**ÍNDICES
DE CAPACIDAD
MULTIVARIADOS**
Nuevas propuestas



ÍNDICES DE CAPACIDAD MULTIVARIADOS

Nuevas propuestas

Roberto José Herrera Acosta



Catalogación en la publicación. Universidad del Atlántico. Departamento de Bibliotecas
Herrera Acosta, Roberto José
Índices de capacidad multivariados : nuevas propuestas / Roberto José Herrera Acosta – Barranquilla: Sello Editorial Universidad del Atlántico, 2018.
83 páginas. Tamaño 21 x 27 cm. Ilustraciones. Incluye bibliografía.
ISBN 978-958-5525-15-3 (Libro descargable PDF)
1. Análisis multivariado 2. Estadísticas matemáticas. I. Roberto José Herrera Acosta. Tit..
CDD: 519.535 H565

**Índices de capacidad multivariados
Nuevas propuestas**

Autoría: Roberto José Herrera Acosta

© Universidad del Atlántico, 2018

Edición:

Sello Editorial Universidad del Atlántico
Km 7 Vía Puerto Colombia (Atlántico)
www.uniatlantico.edu.co
publicaciones@mail.uniatlantico.edu.co

Este libro es producto del proyecto de investigación “Índice de Capacidad Multivariante”, en el área de control estadístico de procesos

Impresión:

Calidad Gráfica S.A.
Av. Circunvalar Calle 110 No. 6QSN-522
PBX: 336 8000
lsalcedo@calidadgrafica.com.co
Barranquilla, Colombia

Publicación Electrónica
Barranquilla (Colombia), 2018

Nota legal: Reservados todos los derechos. No se permite la reproducción total o parcial de esta obra, ni su transmisión en cualquier forma o por cualquier medio (electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros medios conocidos o por conocerse) sin autorización previa y por escrito de los titulares de los derechos patrimoniales. La infracción de dichos derechos puede constituir un delito contra la propiedad intelectual. La responsabilidad del contenido de este texto corresponde a sus autores.
Depósito legal según Ley 44 de 1993, Decreto 460 del 16 de marzo de 1995, Decreto 2150 de 1995 y Decreto 358 de 2000.

Cómo citar este libro:

Herrera Acosta, R. J. (2018). *Índices de capacidad multivariados. Nuevas propuestas*. Barranquilla: Sello Editorial Universidad del Atlántico.

DEDICATORIA

A mis esposa Karime Maestre Pérez

A G R A D E C I M I E N T O S

Nuestro agradecimiento a la Universidad del Atlántico, por
brindar su apoyo en el proceso investigativo..

CONTENIDO

DEDICATORIA	5
AGRADECIMIENTOS	7
ÍNDICE DE FIGURAS	11
ÍNDICE DE TABLAS	12
APÉNDICE: TABLA DE PARÁMETROS	13
PRÓLOGO	15
INTRODUCCIÓN	17
EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DE LOS PROCESOS	19
MONITOREO DE LA CALIDAD DE UN PROCESO	19
ANTECEDENTES DE LOS INDICES DE CAPACIDAD MULTIVARIANTES.....	21
CAPACIDAD E ÍNDICE DE CAPACIDAD UNIVARIADO DE PROCESOS	23
ÍNDICE DE CAPACIDAD DE PROCESO	23
Índice de capacidad univariado paramétrico, muestras con perfiles lineales	23
Índice de capacidad univariado paramétrico con valor objetivo T, muestras con perfiles lineales	24
ÍNDICE DE CAPACIDAD MULTIVARIADO	27
ÍNDICE DE CAPACIDAD MULTIVARIADO DE PROPORCIÓN DE PRODUCTOS NO CONFORMES.....	28
ÍNDICE DE CAPACIDAD MEDIANTE RAZÓN DE REGIONES.....	32
ÍNDICE DE CAPACIDAD MEDIANTE EL MÉTODO DE ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES	35
ÍNDICE DE CAPACIDAD MEDIANTE EL MÉTODO DE PERFILES LINEALES.....	36
CASO DE ESTUDIO: INDICE DE CAPACIDAD DE PERFIL LINEAL.....	40

ÍNDICE DE CAPACIDAD COMERCIAL MULTIVARIADO 43

PROPUESTA DE ÍNDICE DE CAPACIDAD COMERCIAL MULTIVARIADO
 PARAMÉTRICO Y NO PARAMÉTRICO 43

Propuesta de índice de capacidad comercial multivariado paramétrico..... 43

Propuesta de índice de capacidad multivariado utilizando datos funcionales FDA..... 44

NUEVA PROPUESTA DE ÍNDICE DE CAPACIDAD COMERCIAL MULTIVARIADO 48

Índice de capacidad comercial multivariado paramétrico 48

INDICADOR DE CAPACIDAD MULTIDIMENSIONAL SEIS SIGMA
 UNA NUEVA PROPUESTA PARA EMPRESAS DE SERVICIO 50

CASO DE ESTUDIO 53

DESEMPEÑO DEL INDICADOR DE CAPACIDAD MULTIVARIANTE EN UNA COMPAÑÍA FARMACEUTICA 53

CASO DE ESTUDIO: DETERMINACIÓN DEL ÍNDICE DE CAPACIDAD UNIVARIADO PARAMÉTRICO..... 55

CASO DE ESTUDIO: DETERMINACIÓN DEL ÍNDICE DE CAPACIDAD MUTIVARIADO PARAMÉTRICO 59

CASO DE ESTUDIO: DETERMINACIÓN DEL ÍNDICE DE CAPACIDAD CON PERFIL POLINOMICO..... 61

CASO DE ESTUDIO: DETERMINACIÓN DEL ÍNDICE DE CAPACIDAD MULTIDIMENSIONAL EN LA METODOLOGIA SEIS SIGMA 65

DISCUSIÓN Y RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN EN R DE LAS DIFERENTES PROPUESTAS MULTIVARIADOS..... 67

PROCEDIMIENTO PARA EL CASO MULTIVARIADO 68

RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN 68

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 71

ANEXOS 77

VALORES DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULATIVA NORMAL ESTÁNDAR..... 79

LISTA DE GRÁFICAS

Gráfica 1.	Región de tolerancia, región de contorno y la región del proceso.....	32
Gráfica 2.	Índice de capacidad para la variable Concentración $C_p = 0.5932$	41
Gráfica 3.	Índice de capacidad para la variable pH $C_p = 0.6626$	41
Gráfica 4.	Comportamiento, variable pH	56
Gráfica 5.	Comportamiento de contenido de sacarosa.....	57
Gráfica 6.	Cuantiles del contenido de sacarosa basado en una distribución empírica.	57
Gráfica 7.	Cuantiles del contenido de sacarosa basado en la distribución Gamma Generalizada	58
Gráfica 8.	Cuantiles del contenido de sacarosa basado en la distribución Lognormal.....	58
Gráfica 9.	Cuantiles del contenido de sacarosa basado en la distribución Weibull	58
Gráfica 10.	Índice de capacidad para la variable Brix.....	62
Gráfica 11.	Índice de capacidad para la variable Cloruro	62

LISTA DE TABLAS

Tabla 1.	Diversos valores de MC_{pk}^T para diferentes rendimientos del proceso	28
Tabla 2.	Variable pH y concentración de un producto alimenticio.....	40
Tabla 3.	Intervalos de confianza, variable pH y concentración de un producto alimenticio.....	41
Tabla 4.	Información del proceso de fabricación de la Levocetirizina.....	53
Tabla 5.	Especificaciones de las variables de la Levocetirizina	54
Tabla 6.	Resumen de resultados de las propuestas de indicadores multivariantes de las especificaciones de las variables de la Levocetirizina Jarabe 2.5.....	60
Tabla 7.	Mediciones de °Brix y cloruro en un producto alimenticio.....	61
Tabla 8.	Intervalo de confianza de cada uno de los coeficientes del modelo.....	63
Tabla 9.	Propuesta de índices de capacidad comercial multivariante Herrera, caso de estudio.....	64
Tabla 10.	Resumen de resultados de las propuestas de indicadores multivariantes.....	65
Tabla 11.	Consolidado de datos relacionados al servicio en Entornos Virtuales de Aprendizaje	66
Tabla 12.	Valores de índice de capacidad multivariante para diferentes propuestas.....	69
Anexo 1.	Tabla de la distribución normal estandar	79
Anexo 2.	Distribución ji-cuadrada.....	82

APÉNDICE: TABLA DE PARÁMETROS

Signos	Descripción
CEP	Un conjunto de técnicas estadísticas que aplicadas en forma adecuada permiten monitorear y evaluar las características de calidad de un producto o proceso.
USL	Límite de especificación superior
LSL	Límite de especificación inferior
MC_p	Índice de capacidad multivariado a corto plazo.
MC_{pk}	Índice de capacidad variabilidad total o a largo plazo
MC_{pm}	Índice de capacidad multivariante con valor objetivo T.
σ	Desviación estándar entre los subgrupos
s	Desviación estándar global de la información omitiendo la estabilidad estadística del proceso
T	Valor objetivo del proceso
ν	Número de variables evaluadas en la matriz de datos
ϕ	Función acumula de la distribución normal estándar
U	Número de servicios
O	Oportunidad de error
N	Dimensión de calidad no conformes
Y	Métrica de rendimiento del servicio del centro de llamadas
DPMO	Métrica de defectos por millón de oportunidades

PRÓLOGO

Este texto de investigación que tengo el enorme agrado de presentar pretende motivar a aquellos investigadores o ingenieros responsables en el área de control estadístico de procesos, de aplicar nuevos conceptos de indicadores de calidad desde la perspectiva multivariante. Estas nuevas propuestas de indicadores de capacidad, en el control estadístico de procesos, permitirán un análisis más asertivo del comportamiento de los procesos; de esta manera detectar las señales o factores involucrados en el aumento de la variabilidad; esto se realiza con formulaciones sencillas que permitan a los lectores sin conocimientos específicos del tema, comprender sin mayores dificultades. Esta investigación se ha realizado con aportes financieros, de la Facultad de Ingeniería específicamente la Especialización en Gestión de la Calidad de la Universidad del Atlántico.

Roberto José Herrera Acosta

INTRODUCCIÓN

EL análisis de la capacidad de un proceso es una herramienta esencial en ingeniería para evaluar su desempeño de un producto con respecto a una(s) tolerancia(s) o especificación(es). Esta capacidad de proceso permite estimar las condiciones de calidad del producto, monitoreando históricamente o en línea la(s) variable(s) que permite identificar si un producto cumple o no los requisitos de calidad.

En las dos últimas décadas, normas han realizado una estandarización en el dimensionamiento geométrico de los productos y sus especificaciones GD&T, mediante normas internacionales como la ANSI Y14.5M-1994¹, proporcionando una terminología y metodología adecuada para describir las características del producto con respecto a la zona de especificaciones, Jeh-Nan Pan y Chung (2014). En la literatura de control estadístico de la calidad, se han presentado propuestas de indicadores de capacidad multivariantes, con el objetivo de proporcionar una medida del rendimiento del proceso con respecto a las especificaciones de diseño de cada una de las variables involucradas en el producto o proceso.

Inicialmente estas propuestas se enfocaron al monitoreo de una característica de calidad a la vez, es decir un enfoque netamente univariado. Estos indicadores univariados en el transcurso del desarrollo tecnológico de los programas estadísticos y las necesidades de monitorear las variables sensibles de la calidad de un producto, han sufrido modificaciones para su medición. Así como también, las expectativas de calidad pertinente a las necesidades de los clientes, relacionadas con el desarrollo tecnológico de la época. Inicialmente surgieron propuestas univariadas, tales es el caso de los índices C_p y C_{pk} , Kane (1986), Hsiang y Taguchi, (1985). Posteriormente Chan et al. (1988) y Pearn et al. (1992) presentan modificaciones de estos índices utilizando valores objetivos, Choi y Owen (1990) muestran índices univariados, C_{pm} y C_{pmk} , basados en límites de tolerancia equidistantes de un valor nominal. Boyles (1994) propone un indicador de capacidad cuyos límites de tolerancia son asimétricos. Estos indicadores univariados anteriormente mencionados, parte del supuesto de normalidad e indepen-

1 http://members.marticonet.sk/jkuba/normy/ASME_Geometry_Dimension%20and%20Tolerances_Handouts.pdf

dencia de las variables monitoreadas. Si esta hipótesis no se cumple, estos indicadores no son fiables, Chan et al. (1988b), Gunter (1989a), Gunter (1989b); Somerville y Montgomery (1997), Chen y Pearn (1997), Zwick (1995), Schneider et al. (1995), Pearn y Chen (1995), (1997) presentaron índices de capacidad en el cual no se cumple el criterio de normalidad.

Las propuestas de índice de capacidad multivariante, en conjunto con el desarrollo del lenguaje de programación, han facilitado la adopción de indicadores con medidas estadísticas complejas, sensibles a cambios pequeños de la variabilidad. El análisis de estos índices subyace en la hipótesis de que la distribución de las v características de calidad evaluadas poseen una distribución normal multivariante $X \sim N(\mu, \Sigma)$ con parámetros conocidos, entre estos investigadores se destacan Kane (1986), Kotz et al. (1993), Pearn y Chen (1996).

EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DE LOS PROCESOS

MONITOREO DE LA CALIDAD DE UN PROCESO

Guevara y Vargas J.A. (2015), define el monitoreo de un proceso de producción, como un sistema que consta de una serie de etapas que es influenciada por varios factores que generan una serie de variaciones. La literatura de control de calidad, evidencian las variaciones a divisiones de las siguientes categorías: materia prima, máquina, método, mano de obra, medio ambiente y medición. Este sistema desde el punto de vista de la ingeniería de proceso debe ser controlado y evaluado. El control se realiza de dos maneras: a) Ajuste mediante herramientas matemáticas de procesos en donde confluye los balances de materia y energía que permite obtener condiciones ideales de las variables o factores involucradas, b) desde el punto de vista de la gestión de la calidad en donde el control es realizado mediante técnica estadísticas. En esta última se encuentra como indicador de rendimiento la capacidad del proceso ICP, esta monitorea el desempeño en forma sistemática de los requisitos de la tolerancia del proceso basada en las condiciones de diseño del producto o exigidos por el cliente. Desde el criterio estadístico tradicional, en la teoría del control estadístico de calidad CEP un proceso es capaz cuando el porcentaje de elementos no conformes disminuye en forma considerable, generalmente se toma como valor referente 0.0027 como medida de probabilidad máxima de no cumplimiento. En cuanto a los juicios establecidos en la metodología Six Sigma, estos valores se modifican a un referente de calidad más riguroso; un no cumplimiento de aproximadamente cuatro (4) partes por cada millón de unidades fabricadas.

Pignatiello y Ramberg (1993) presentan los supuestos básicos para evaluar la capacidad de un proceso:

- a) El supuesto de normalidad, en donde el comportamiento de la variable monitoreada se distribuye normal $N \sim (\mu, \sigma^2)$.
- b) Independencia entre las observaciones monitoreadas: donde X_1, \dots, X_n son independientes si para cualquier sucesión de subíndices (i_1, \dots, i_h) , $h \leq k$, se tiene que, $P(i_h \cap i_k) = P(i_h)P(k)$.
- c) El proceso debe encontrarse en estabilidad estadística, es decir la no existencia de causas especiales en el comportamiento de la variable o variables monitoreadas.
- d) En el monitoreo de la característica de calidad, las muestras seleccionadas deben reflejar las condiciones reales del proceso, es decir muestras representativas que estén sujetas a un número de unidades previamente establecido en el monitoreo, como también a un intervalo de tiempo especificado.

En el caso específico del monitoreo simultaneo de las v variables, el índice de capacidad multivariante es una medición adecuada para la evaluación del desempeño, determina si dicho producto en su aspecto global cumple: con las características físicoquímicas, se ajusta a las especificaciones de diseño. Estos indicadores multivariantes generalmente son aplicados bajo el supuesto de multinormalidad, en las características de calidad monitoreadas con parámetros conocidos, estimados en la fase II de control. Existen inconvenientes en el procedimiento de monitoreo y evaluación de la capacidad de cumplimiento de las características de calidad de un producto, entre estos se encuentra:

- 1) El supuesto de normalidad de todas las características evaluados en difícil de cumplir en el caso univariado, se hace más complejo, cuando se monitorea v características de calidad simultáneamente, un comportamiento normal multivariante.
- 2) La multicolinealidad de cada una de las características de calidad no es no es poco frecuente como se asume generalmente.
- 3) En procesos productivos específicamente en el sector químico, especialmente el farmacéutico, eliminar o reducir el número de variables desde el punto de vista de la ingeniería de procesos es inconveniente. En esta área en particular, todas las variables del proceso son esenciales para la elaboración de un producto en particular.
- 4) El difícil obtener un indicador de capacidad fiable cuando la materia prima utilizada para elaborar los productos es de tipo a granel. Estos elementos desafortunadamente por sus condiciones físicoquímicas poseen una gran variabilidad, lo que dificulta que las actuales herramientas estadísticas estimen valores de indicadores reales.
- 5) Los indicadores univariados y multivariados propuestos en la literatura parten del paradigma de en los procesos productivos o de servicio, existen productos conformes y no conformes, omitiendo de hecho las condiciones reales de los mismos y el concepto relativo de calidad. Existen productos que a pesar de no cumplir con algunas de las especificaciones establecidos en el

diseño cumplen con ciertas condiciones de funcionalidad que el cliente encuentra ajustado a sus necesidades, este tipo de producto el autor de este texto de investigación lo denomina producto con calidad comercial.

ANTECEDENTES DE LOS INDICES DE CAPACIDAD MULTIVARIANTES

A través de los años y en la medida que la globalización ha impactado fuertemente los mercados mundiales, formando consumidores más analistas y exigentes, es indispensable que las empresas cumplan con todas las especificaciones requeridas por el diseño y las necesidades demandadas por los clientes; ofreciendo productos robustos, con el objetivo de fidelizarlos, de lograr un éxito económico y financiero y mantenerse en el mercado. Por este motivo, las empresas, con el fin de mejorar los procesos productivos implementan control estadístico en los procesos de producción para así ofrecer productos realmente competitivos.

Los autores de calidad tales como Genichi Taguchi, Edwards Deming, Kaoru Ishikawa, Walter Andrew Shewhart, entre otros destacados, coinciden en la necesidad de usar técnicas estadísticas que proporcionen un real estimativo del grado de cumplimiento de los requisitos y especificaciones. Para cubrir esta necesidad existe un conjunto de técnicas estadísticas que aplicadas en forma adecuada se denomina el Control Estadístico del Proceso CEP y dentro de éstas herramientas se encuentran los índices de capacidad de procesos.

Los índices de capacidad de proceso han sido utilizados en la industria manufacturera para proporcionar medidas numéricas sobre el potencial de proceso y rendimiento del proceso¹ generalmente seleccionando una característica de calidad. Estas propuestas se han investigado suficientemente en el campo paramétrico, a diferencia de los índices de capacidad para procesos con múltiples características de calidad evaluadas simultáneamente, que ha surgido con gran impulso en los últimos treinta años. Pearn, W. L. et al. (1992) propusieron el índice de capacidad del proceso C_{pmk} , que combina las ventajas de los índices anteriores C_{pk} , Kane (1986) y C_{pm} Chan et al. (1988b). El índice C_{pmk} , avizora al usuario si la varianza del proceso se incrementa y/o el promedio del proceso se desvía de su valor objetivo T y es un índice diseñado para controlar los procesos cuyo comportamiento se distribuye en forma normal o procesos cuasi normales. El índice de capacidad C_{pmk} se considera posiblemente como el de mayor utilidad hasta el momento en los procesos con especificaciones de tipo unilateral. Chen S.M. y Hsu N.F. (1995) muestra un estimador C_{pmk} asintóticamente insesgado, como también muestra, en condiciones generales, que este indicador converge a una distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$.

Los índices de capacidad multivariantes aparecieron en la literatura de control de calidad, a partir de la década de los años noventa. Durante este periodo las propuestas planteadas en su mayoría asumieron normalidad multivariante, el cálculo de este indicador de capacidad es una generalización de sus

1 European Journal of Operational Research. Volume 173, Issue 2, 1 September 2006, Pages 637-647

análogos univariantes, Wang, C.H. (2005) analizaron en detalle tres métodos multivariantes, Taam, W. et al (1993), Chen, H. (1994) y Shahriari, H. et al (1995).

Taam et al. (1993) presentaron tanto un índice de capacidad C_p y un índice multivariante con valor objetivo C_{pm} (MC_p y MC_{pm}) y formularon un índice de capacidad multivariante en una aplicación de fabricación de cajas, se presenta el área de un hiperrectángulo como las especificaciones de diseño. Shahriari, H. et al (1995) reconoció la necesidad de evaluar las medidas de capacidad multivariante, presenta un indicador multivariante que cuenta con tres componentes para evaluar el desempeño.

CAPACIDAD E ÍNDICE DE CAPACIDAD UNIVARIADO DE PROCESOS

ÍNDICE DE CAPACIDAD DE PROCESO

Índice de capacidad univariado paramétrico, muestras con perfiles lineales

Kane (1986) presenta los índices de capacidad univariado, asumiendo la característica de calidad X_i con distribución normal e independiente, como la razón de dos intervalos: los límites de especificaciones y la medida de dispersión de la curva normal, mediante la siguiente formulación:

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \quad (1)$$

donde USL es el límite de especificación superior, LSL es límite de especificación inferior, σ es la desviación del proceso estimada en la fase I de monitoreo, $\sigma = [E(X - \mu)^2]^{\frac{1}{2}}$ y $\mu = E(X)$ son las desviaciones estándar y el promedio del proceso obtenida en la fase I o fase de estabilización estadística del proceso.

La desviación de la muestra x_1, x_2, \dots, x_n es $s = \left[\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \right]^{\frac{1}{2}}$, es una estimación de la desviación del proceso. En un monitoreo en línea, el valor del índice de capacidad para perfiles lineales es evaluado mediante $\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6s}$.

La **ecuación (1)** es aplicada con eficiencia en procesos en donde la media μ coincide con el valor medio de las especificaciones o tolerancia, pero cuando existe un descentramiento de la media el índice de capacidad C_p no es un buen estimador del rendimiento del proceso. Este inconveniente se

logra al minimizar, propuesta de Kane V.E., dos indicadores C_{pu} y C_{pl} donde se computa el descentramiento superior e inferior respectivamente, a través de:

$$C_{pk} = \min\{C_{pu}; C_{pl}\} \quad (2)$$

donde el índice de capacidad de centramiento o de localización para el límite superior se define como:

$$C_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\sigma} \quad (3)$$

para el límite inferior es

$$C_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\sigma} \quad (4)$$

Es menester indicar que el índice de capacidad C_p puede expresarse en función del índice de capacidad de localización, a través de la siguiente expresión:

$$C_p = \frac{1}{2}(C_{pu} + C_{pl}) \quad (5)$$

Índice de capacidad univariado paramétrico con valor objetivo T, muestras con perfiles lineales

Chan et al.(1988), Shinde, R.L y Khadse, K.G.(2009) proponen un indicador de capacidad utilizando valor objetivo T,

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sigma^T} \quad (6)$$

donde USL es el límite de especificación superior, LSL es límite de especificación inferior, $\sigma^T = [E(X - T)^2]^{\frac{1}{2}}$, T es el valor objetivo del proceso. El parámetro σ^T es conocido, evaluado en la fase I del monitoreo del proceso, siendo la desviación estándar $\hat{\sigma}^T = \left[\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - T)^2}{n-1} \right]^{\frac{1}{2}}$ consecuentemente un estimador para C_{pm} es el indice de capacidad:

$$\hat{C}_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}^T} \quad (7)$$

La **ecuación (6)** permite estimar una relación entre el índice de capacidad clásico y el índice de capacidad con valor objetivo.

$$\begin{aligned}
 C_{pm} &= \frac{USL - LSL}{6\sigma^T} = \frac{USL - lei}{6[E(X - T)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{USL - LSL}{6[E(X - \mu + \mu - T)^2]^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{USL - LSL}{6\{E[(X - \mu)^2 + (\mu - T)^2 - 2(X - \mu)(\mu - T)]\}^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{USL - LSL}{6\{[E(X - \mu)^2 + (\mu - T)^2 - 2(\mu - T)E(X - \mu)]\}^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{USL - LSL}{6\{[\sigma^2 + (\mu - T)^2 - 2(\mu - T)(E(X) - \mu)]\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{USL - LSL}{6\{\sigma^2 + (\mu - T)^2\}^{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned}$$

por tanto, el indicador de capacidad con valor objetivo se define como,

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\{\sigma^2 + (\mu - T)^2\}^{\frac{1}{2}}} \quad (7)$$

El esquema del índice de capacidad de localización con valor objetivo es similar a las propuestas clásicas de índices de capacidad:

$$C_{pmk} = \min\{C_{pmu} ; C_{pml}\} \quad (8)$$

donde $C_{pmu} = \frac{USL - \mu}{3\{\sigma^2 + (\mu - T)^2\}^{\frac{1}{2}}}$ y $C_{pml} = \frac{\mu - LSL}{3\{\sigma^2 + (\mu - T)^2\}^{\frac{1}{2}}}$, la relación del índice de capacidad clásico C_p con respecto al índice de capacidad con valor objetivo C_{pm} se presenta en la siguiente demostración:

$$\begin{aligned}
 C_{pm} &= \frac{USL - LSL}{6\{\sigma^2 + (\mu - T)^2\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{USL - LSL}{\sigma}}{6\left\{\frac{\sigma^2 + (\mu - T)^2}{\sigma^2}\right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{USL - LSL}{6\sigma}}{\left\{1 + \frac{(\mu - T)^2}{\sigma^2}\right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{C_p}{\left\{1 + \frac{(\mu - T)^2}{\sigma^2}\right\}^{\frac{1}{2}}} \\
 C_{pm} &= \frac{C_p}{\left\{1 + \frac{(\mu - T)^2}{\sigma^2}\right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (9)
 \end{aligned}$$

El desarrollo teórico, muestra claramente un $C_{pm} \leq C_p$ para cualesquiera valores de T como referente.

Por otro lado, se han realizado modificaciones de los índices de capacidad con el propósito de estimar un indicador de precisión, es decir la diferencia entre el promedio del proceso μ y las especificaciones de diseño, esta investigación se limita a casos con límites de especificación bilateral:

$$C_a = 1 - \frac{\left| \mu - \frac{[USL + LSL]}{2} \right|}{\frac{[USL - LSL]}{2}} = 1 - \frac{|\mu - m|}{d} \quad (10)$$

En las **ecuaciones (1), (2), (3), (4)**, los parámetros μ y σ son respectivamente el promedio y la desviación estándar del proceso en fase II, USL es el límite de especificación superior, LSL es el límite de

especificación inferior, $m = (USL + LSL)/2$, $d = (USL - LSL)/2$, y T es el valor objetivo o target. Juran J.M.(1974) propuso el índice C_p , donde se considera la relación existente entre la tolerancia de ingeniería y tolerancia natural del proceso, es decir este indicador expresa la precisión del proceso.

Chan, Cheng y Spiring (1988), agregan en la propuesta C_{pm} , **ecuación (7)**, una penalización para modificaciones del proceso cuando este se aleja del valor objetivo. Pearn, Kotz y Johnson (1992) proponen el índice C_{pmk} más sensible al rendimiento del proceso de las mediciones tradicionales C_p , C_{pk} o C_{pm} como desviación de la media del proceso con respecto al valor objetivo. Para medir el centramiento del proceso Pearn, Lin y Chen (1988) propusieron C_a como el índice de precisión del proceso. Lin y Pearn (2003) señalaron una relación entre los índices de las **ecuaciones (1), (2), (3), (4)** como,

$$C_{pk} = C_p(1 - C_a) \quad (11)$$

Vargas A. (2007), define el intervalo de confianza para estos índices de capacidad univariados mediante la distribución chi cuadrado $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1, \alpha}^2$ de la siguiente forma:

$$P \left[\frac{(USL - LSL)}{6S} \sqrt{\frac{\chi_{(n-1, \frac{\alpha}{2})}^2}{n-1}} \leq \frac{1}{6\sigma} \leq \frac{(USL - LSL)}{6S} \sqrt{\frac{\chi_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})}^2}{n-1}} \right] = 1 - \alpha \quad (12)$$

el intervalo $100(1 - \alpha)\%$ de confianza para C_p es,

$$\left[\hat{C}_p \sqrt{\frac{\chi_{(n-1, \frac{\alpha}{2})}}{n-1}}, \hat{C}_p \sqrt{\frac{\chi_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})}}{n-1}} \right] \quad (13)$$

ÍNDICE DE CAPACIDAD MULTIVARIADO

En el caso multivariado, se tiene la matriz de datos X de orden nv , donde v es el número de características de calidad medidas en un producto y n es el número de productos monitoreados. Se asume que las n observaciones son independientes y representan una muestra aleatoria de una distribución multivariada con correlaciones entre las variables.

Cada una de las v variables del producto posee especificaciones técnicas de cumplimiento, es conocido el vector de medias μ_0 de los valores objetivos para cada una de las características de calidad medidas. En el caso del índice de capacidad univariado los intervalos de las especificaciones son medidas de longitudes, por otro lado, si asumimos una distribución normal multivariada, el análogo a los intervalos, son los contornos elípticos o elipsoides.

En términos generales según Shinde R.L. y Khadse K.G. (2009) existen cuatro formas de definir los índices de capacidad multivariado.

- 1) Aquéllos basados en la razón de la región de tolerancia y una región de proceso, tal como el propuesto por Taam et al. (1993).
- 2) Un segundo grupo que utiliza la proporción de productos no conformes, como los que presentan Taam et al. (1993), Castagliola P. et al. (2009), Bothe, D. (1991). y Wierda, S.J. (1994).
- 3) Otro grupo basado en la aplicación de la técnica de análisis de componentes principales, como lo sugieren Wang F.K. y Chen. J. (1998) y Chan L.K. et al. (1998).
- 4) Un cuarto grupo que incluye otras propuestas, como la presentada por Shahriari, H. y Abdollahzadeh, M. (2009) y Cumea G. (2013).
- 5) Índices de capacidad paramétricos y no paramétricos aplicando datos funcionales FDA, Clements, J.A. (1989), Guevara R. (2011).

ÍNDICE DE CAPACIDAD MULTIVARIADO DE PROPORCIÓN DE PRODUCTOS NO CONFORMES

Para el cálculo del índice de capacidad para un proceso que cuenta con v variables, Bothe, D. (1991) considera una manera sencilla de evaluarlo: se selecciona el porcentaje mínimo de no conformes de cada una de las características P_1, P_2, \dots, P_v . Por lo que en todo el proceso la medida mínima es $P = \min\{P_1, P_2, \dots, P_v\}$

Krishnamoorthi (1990) propuso los índices PC_p y PC_{pk} extensiones de los índices C_p y C_{pk} , donde se asume que el promedio del proceso μ es igual al valor objetivo T . Por otra parte, Davis, Kaminsky y Saboo (1992) propuso un índice $R = U/r$, donde U es el radio de la región de especificación r es la desviación estándar de la característica de calidad. Posteriormente Karl, Morisette y Taam (1994) ampliaron el concepto de capacidad multivariante propuesta inicialmente por este último autor.

K. S. Chen, et al. (2003) presentan índices de capacidad multivariados para evaluar v características asumiendo normalidad e independencia. Basado en las características del proceso se seleccionó el índice de capacidad para múltiples características de MC_{pk}^T , el cual se obtiene como se muestra a continuación:

$$MC_{pk}^T = \frac{1}{3} \Phi^{-1} \left\{ \frac{\left[\prod_{j=1}^v (2\Phi(3C_{pkj}) - 1) + 1 \right]}{2} \right\} \quad (13)$$

28

dónde C_{pkj} denota el valor de la j -ésima característica para $j: 1, 2, \dots, N$ y v es el número de características, $C_{pkj} = \min\{C_{puj}; C_{plj}\}$ es el índice de capacidad de localización calculado como muestra las ecuaciones (2), (3) y (4).

Tabla 1. Diversos valores de MC_{pk}^T para diferentes rendimientos del proceso

MC_{pk}^T	Rendimiento del Proceso
1.00	0.997 300 204
1.24	0.999 800 777
1.33	0.999 933 927
1.50	0.999 993 205
1.67	0.999 999 456
2.00	0.999 999 998

Fuente: K. S. Chen, W. L. Pearn and P. C. Lin. (2003)

La propuesta del índice global está definida como $MC_p^T = \frac{1}{3} \Phi^{-1} \left\{ \left[\prod_{j=1}^v (P) \right] \right\}$ donde P es la medida de probabilidad de cumplir con las especificaciones, considerando que las observaciones del proceso poseen una distribución normal $N \sim (\mu, \sigma^2)$. Esta medida de probabilidad está definida: $P = \left\{ \left[\prod_{j=1}^v p(LSL \leq x \leq USL)_j \right] \right\} = \left\{ \left[\prod_{j=1}^v p(z_l \leq Z \leq z_u)_j \right] \right\}$. Bothe (2006) consideró la distan-

cia radial como la diferencia entre el target o valor objetivo T y el valor real, como criterio de calidad para evaluar la capacidad de un proceso.

Shahriari, H. y Abdollahzadeh, M. (2009) propone un vector de características de calidad $x \sim N_p(\mu, \Sigma)$, en donde la medida de probabilidad de que un proceso produzca unidades conformes está definida como,

$$\theta = \int_{U,L} n_p \left(\frac{x}{\mu, \Sigma} \right) dx \tag{14}$$

donde $n_p \left(\frac{x}{\mu, \Sigma} \right)$ es la función de densidad de medida de probabilidad del comportamiento de las características del producto. El índice de capacidad multivariante propuesto por Shahriari, H. y Abdollahzadeh, M. (2009) está definido mediante $MC_p = \frac{1}{3} \phi^{-1}(\theta)$. El estimador insesgado de varianza mínima θ , cuando se desconocen los parámetros μ y Σ es la siguiente:

$$\hat{\theta} = \int_{U,L} \left(\frac{m}{m-1} \right)^{\frac{1}{2}v} \frac{\Gamma \left(\frac{m-1}{m} \right) \pi^{-\frac{1}{2}v}}{\Gamma \left(\frac{m-v-1}{2} \right)} |S|^{-\frac{1}{2}} \times \left[1 - \left(\frac{m}{m-1} \right) (y - \bar{X})^t S^{-1} (y - \bar{X}) \right]^{(m-v-3)} I_{G(y)} dy \tag{15}$$

la función indicatriz,

$$I_{G(y)} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < (y - \bar{X})^t S^{-1} (y - \bar{X}) < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ebadi M. y Amirib A. (2012) propone un método de monitoreo de calidad, aplicada a procesos o productos con un comportamiento de modelo lineal simple en dos o más variables consideradas como respuestas, es decir estas variables dependientes poseen un perfil de regresión lineal simple. En este caso existe una relación entre las variables dependientes y_1, y_2, \dots, y_v y alguna variable explicativa x . El esquema presentado por Ebadi M. y Amirib A. (2012) es el siguiente:

$$Y_k = XB_k + E_k \quad k = 1, 2, \dots, m \tag{16}$$

su equivalente matricial,

$$\begin{bmatrix} Y_{11k} & \cdots & Y_{1vk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1k} & \cdots & Y_{nvk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{01k} & \cdots & \beta_{0vk} \\ \beta_{11k} & \cdots & \beta_{1vk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11k} & \cdots & \epsilon_{1vk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{n1k} & \cdots & \epsilon_{nvk} \end{bmatrix}$$

donde $Y_k = (y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{nk})^T$ es una matriz $n \times p$ de la variable respuesta para las k th muestras seleccionadas, y $X = [1 \ x]$ es una matriz $n \times 2$ de la variable explicativa, asumida para x valores fijos

y seleccionados de un conjunto de valores para cada muestra. Según Ebadi M y Amirib A. (2012) el vector de errores posee una distribución normal multivariante con media cero y matriz de varianza covarianza $v \times v$ conocida Σ :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1v} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{v1} & \cdots & \sigma_{vv} \end{bmatrix} \quad (17)$$

donde el término σ_{ij} representa la covarianza entre i th y j th del vector de errores de cada observación. Ebadi M. y Amirib A. (2012) realizan la estimación de los coeficientes $\hat{B}_k = (X^T X)^{-1} X^T Y_k$ basado una estimación insesgada de la covarianza $cov(y_i) = \Sigma$, presentada por Rencher (2002):

$$S_e = \frac{(Y - X\hat{B})^T (Y - X\hat{B})}{n-2} = \frac{Y^T Y - \hat{B}^T X^T Y}{n-2} \quad (18)$$

La evaluación de la capacidad multivariante, según esta metodología, es realizada mediante el porcentaje promedio de no conformes presentes en cada una de las v variables respuestas involucradas en el monitoreo de calidad. El cálculo del porcentaje de no conformes la j th variable respuesta es determinada mediante la siguiente expresión:

$$P_j = P_{L,j} + P_{U,j} = \frac{\sum_{i=1}^n P_{L,i,j} + \sum_{i=1}^n P_{U,i,j}}{n} \quad j = 1, 2, \dots, v \quad (19)$$

donde $P_{L,i,j}$ es el porcentaje de no conformes por debajo del límite de especificación inferior LSL, $P_{U,i,j}$ es el porcentaje de no conformes por encima del límite superior de especificación USL. Estas medidas de probabilidad son determinadas mediante las siguientes expresiones:

$$P_{L,i,j} = p(y_{ij} < LSL_{ij}) = p\left(Z < \frac{LSL_{ij} - \hat{\mu}_{y_{ij}}}{\hat{\sigma}_{y_{ij}}}\right) \quad (20)$$

mientras la medida de probabilidad por encima del límite de especificación superior está definida mediante,

$$P_{L,i,j} = p(y_{ij} > USL_{ij}) = p\left(Z > \frac{\hat{\mu}_{y_{ij}} - USL_{ij}}{\hat{\sigma}_{y_{ij}}}\right) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, v \quad (21)$$

donde $\hat{\mu}_{y_{ij}} = \hat{\beta}_{0j} + \beta_{1j}x_i$, $\hat{\sigma}_{y_{ij}}$ es obtenida de la **ecuación (16)**, LSL_{ij} y USL_{ij} son los límites de especificación inferior y superior respectivamente de la i th niveles de j th variables respuestas, facilitando el cálculo posterior del índice C_{pk} , Boyles, R.A. (1994). Este porcentaje de no conformes, medida de desempeño del proceso, es evaluado mediante la expresión,

$$2\Phi(3C_{pkj}) - 1 = 1 - P_j \quad (22)$$

El valor de P_j es obtenida de la **ecuación (19)**, esto indica la evaluación individual de cada una de las C_{pkj} de cada una de las variables respuestas. Una vez obtenida este indicador, se aplica la metodología presentada por K. S. Chen, et al. (2003) de la **ecuación (13)**

Jeh Nan Pan y Chung Li (2014) proponen un indicador multivariante, asumiendo en el proceso con v características de calidad una distribución normal multivariante, en donde la región de tolerancia es esférica definida como,

$$(X_1 - t_1)^2 + \dots + (X_v - t_v)^2 \leq U^2 \quad (33)$$

donde (X_1, X_2, \dots, X_v) son los resultados reales del proceso de producción, U es el radio de especificación y (t_1, t_2, \dots, t_v) es la posición del valor objetivo. Asumiendo que la muestra seleccionada (X_1, X_2, \dots, X_v) son variables independientes, entonces la media de la distancia cuadrada entre la ubicación real y la ubicación de destino es dada por,

$$E((X_1 - t_1)^2 + \dots + (X_v - t_v)^2) = \sum_{j=1}^v (\mu_j - t_j)^2 + \sum_{j=1}^v \sigma_j^2 \quad (24)$$

La anterior ecuación presenta el término a la izquierda como una medida de rendimiento con respecto a una tolerancia de posición, mientras al lado derecho se divide en dos partes, la primera es la exactitud del proceso y la segunda la precisión de este, Jeh Nan Pan y Chung Li (2014) proponen medir la precisión del proceso mediante,

$$NPS_a = \frac{\sum_{j=1}^v (\mu_j - t_j)^2}{U^2} \quad (25)$$

Este valor NPS_a es grande (pequeño) si la distancia entre la media del proceso y su ubicación con respecto al objetivo es grande (pequeño). Para medir el rendimiento o capacidad del proceso, Pan y Lee (2010) presentan esta medida mediante:

$$NPS_p = \frac{U^2}{S_p \sum_{j=1}^v \sigma_j^2} \quad (26)$$

donde $MC_p = \frac{(\chi^2_{v,0.9973})^2}{v}$ es el índice de capacidad con percentil chi cuadrado $\chi^2_{v,0.9973}$ con v grados de libertad.

El intervalo de confianza $100(1 - \alpha)\%$ para este indicador de capacidad multivariante de proceso está definido como,

$$\left[\widehat{NPS}_p \frac{\chi^2_{f,1-\alpha/2}}{\hat{f}} \leq NPS_p \leq \widehat{NPS}_p \frac{\chi^2_{f,\alpha/2}}{\hat{f}} \right] \quad (27)$$

donde $\hat{f} = \left((n - 1) \left(\sum_{j=1}^v s_j^2 \right)^2 \right) / \left(\sum_{j=1}^v s_j^4 \right)$.

ÍNDICE DE CAPACIDAD MEDIANTE RAZÓN DE REGIONES.

La propuesta de Hubele N. y Shariari. H. (2000) define un vector con tres componentes; dos componentes usan el supuesto que los datos del proceso provienen de una distribución normal multivariada Peña, D. (2002) con contornos elípticos definiendo regiones de medida de probabilidad. El tercer componente se basa en el conocimiento geométrico de la región del proceso, relativo a la región de especificación. El primer componente es análogo a la razón de longitudes en el caso univariado.

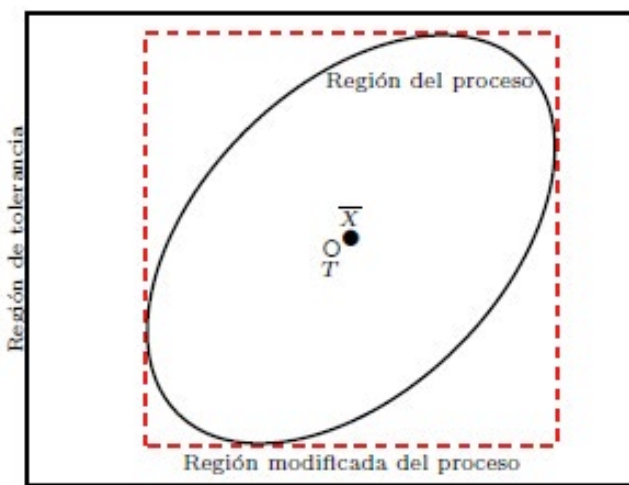
$$MC_{pM} = \left[\frac{\text{volumen de tolerancia}}{\text{volumen de la region}} \right]^{\frac{1}{v}} \quad (28)$$

Hubele N. y Shariari. H. (2000) define el numerador como la región de tolerancia, en el caso bidimensional es el área o el volumen en tres dimensiones y el denominador es el área o volumen de una región modificada del proceso.

En la Gráfica 1, se presenta la región modificada del proceso, más pequeña pero similar en forma a la región de tolerancia circunscrita alrededor de un contorno de medida de probabilidad específico. Los bordes del rectángulo, como límite inferior del proceso y límite superior del proceso (LSP_v y LIP_v $j = 1, 2, \dots, v$ respectivamente), se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones de primeras derivadas con respecto a x_j , de la forma cuadrática.

$$T^2 = (X - \mu_0)^t \Sigma^{-1} (X - \mu_0) = \chi_{\alpha, v}^2 \quad (29)$$

Siendo $\chi_{\alpha, v}^2$ es el percentil superior 100(α)% de la distribución chi cuadrado con v grados de libertad, μ_0 el vector de promedio estándar. La tolerancia de posición es una tolerancia de ingeniería que describe, en el caso multivariante, una región entre la ubicación real de los resultados del proceso y la región modificada.



Gráfica 1. Región de tolerancia, región de contorno y la región del proceso

$$MC_{pM} = \left[\frac{\prod_{j=1}^v [USL_j - LSL_j]}{\prod_{j=1}^v [LSP_j - LIP_j]} \right]^{\frac{1}{v}} \quad (30)$$

Los límites de la región modificada están denotados según Hubele N. y Shariari. H. (2000) como:

$$LSP_j = \mu_j + \sqrt{\frac{\chi_{\alpha,v}^2 |\Sigma_j^{-1}|}{|\Sigma_j^{-1}|}} \quad y \quad LIP_j = \mu_j - \sqrt{\frac{\chi_{\alpha,v}^2 |\Sigma_j^{-1}|}{|\Sigma_j^{-1}|}} \quad (31)$$

La matriz $|\Sigma_j^{-1}|$, se obtiene borrando la fila y columna j , $\chi_{\alpha,v}^2$ es el valor superior del percentil $100\alpha\%$ de una distribución chi cuadrada con v grados de libertad, μ_j es el promedio de la variable j .

Ebadi M. y Amirib A. (2012) aplica los límites de la región modificada de proceso presentada por Hardle, W. y Simar, L (2007):

$$LSP_{ij} = \mu_{ij} + \sqrt{\chi_{\alpha,v}^2 \times \sigma_{ij}^2} \quad y \quad LIP_{ij} = \mu_{ij} - \sqrt{\chi_{\alpha,v}^2 \times \sigma_{ij}^2} \quad (32)$$

donde μ_{ij} y σ_{ij}^2 es la media y la varianza de cada uno de los i th niveles de los j th variables respuestas, $\chi_{\alpha,v}^2$ es el percentil superior $100\alpha\%$ de una distribución chi cuadrado con v grados de libertad; obteniendo las siguiente expresión para medir el índice de capacidad multivariante de razón de regiones:

$$\widehat{MC}_{pM} = \left[\frac{\prod_{j=1}^v \prod_{i=1}^n (USL_{ij} - LSL_{ij})}{2^{nv} (\chi_{\alpha,v}^2)^{\frac{nv}{2}} \prod_{j=1}^v \prod_{i=1}^n \sigma_{ij}} \right]^{\frac{1}{vn}} \quad (33)$$

Ebadi M. y Amirib A. (2012) proponen un segundo componente similar al presentado por Hubele N. y Shariari. H. (2000), mide el nivel de significancia del valor observado de las respuestas basadas en la estadística T^2 de Hotelling, **ecuación (28)**, como una variación de perfiles lineales simples multivariantes:

$$T^2 = m(Y_i - T_i)^T S^{-1} (Y_i - T_i) \quad (34)$$

Cumea G. (2013) presenta una región de especificación, construida en intervalos de especificación para cada una de las variables o característica de calidad evaluada. La región de especificación es un hiperrectángulo representado por la siguiente ecuación Vargas, A. y Guevara R. (2011) y Pearn, W. L. y Kotz, S. (2006): $\prod_{i=1}^p (LSL \leq X_i \leq USL)$. En el caso univariado el índice de capacidad no indica en donde está localizado el proceso, por lo que supone un proceso centrado, de manera que $\mu_c = \frac{LSL+USL}{2}$.

Por otra parte, el índice de capacidad univariado C_p se puede reescribir de la siguiente forma $C_p = \frac{[USL - LSL]}{3\sigma}$, se tiene que $(USL - LSL)/2 = (USL - \mu_c) = (\mu_c - LSL)$, por tanto, el índice de capacidad univariado es,

$$C_p = \frac{[USL - LSL]}{3\sigma} = \frac{(USL - \mu_c)}{3\sigma} = \frac{(\mu_c - lei)}{3\sigma} = \frac{(\mu_c - LSL)/\sigma}{3} = \frac{\phi_c}{3}$$

$$C_p = \frac{\phi_c}{3} = \sqrt{\left(\frac{\phi_c}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{\phi_c^2}{9}} = \sqrt{\frac{\chi_{c,1}^2}{9}} \quad (35)$$

donde ϕ^2 está asociada a la distribución normal estándar con media cero y varianza la unidad, si se tiene v de estas variables $\phi_1^2, \phi_2^2, \dots, \phi_v^2$ entonces la variable $\phi_1^2 + \phi_2^2, \dots, + \phi_v^2$ está definida como una chicuadrado con un grado de libertad y el valor de nueve (9) corresponde a una chi-cuadrado con nueve grados de libertad y una confiabilidad del 0.9973. Esta ecuación de índice de capacidad univariada se relacionará con el caso multivariante a través de la distancia de Mahalanobis, cuya distribución de probabilidad corresponde a una chi-cuadrado con grados de libertad ajustado al número de variables o características de calidad del proceso.

Toda curva de nivel en una distribución normal multivariada de proceso está definida como un elipsoide que abarca una región de confianza de $(1 - \alpha)100\%$ con una distribución chi cuadrado con v grados de libertad y que a todo valor de las variables aleatorias se puede asociar a un elipsoide con una confianza $(1 - \beta_j)$. Cumea, G. (2013) propone entonces la siguiente ecuación para el cálculo del índice de capacidad multivariante,

$$MC_{pm} = \min \left\{ \sqrt{\frac{\chi_{\beta_j}^2}{\chi_{0.0027, v}^2}} / j = 1, 2, \dots, v \right\}$$

donde $\chi_{\beta_j}^2 = \frac{(lei_j - \mu_{c_j})^2}{|\Sigma| |\Sigma_j^{-1}|}$, (36)

En forma similar se determina el índice de capacidad con valor objetivo MC_{pmk} , su formulación se define como,

$$MC_{pmk} = \min \left\{ \sqrt{\frac{\chi_{1\beta_j}^2}{\chi_{0.0027, v}^2}}, \sqrt{\frac{\chi_{2\beta_j}^2}{\chi_{0.0027, v}^2}} / j = 1, 2, \dots, v \right\} \quad (37)$$

siendo los valores percentiles de la chi cuadrado: $\chi_{1\beta_j}^2 = \frac{(lei_j - \mu_{c_j})^2}{|\Sigma| |\Sigma_j^{-1}|}$. y $\chi_{2\beta_j}^2 = \frac{(USL_j - \mu_{c_j})^2}{|\Sigma| |\Sigma_j^{-1}|}$

La propuesta de Taam et al (1993):

$$NMC_P = \left[\frac{|A|}{|\Sigma|} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (38)$$

Los elementos de la matriz A están definidos por,

$$\rho_{ij} \left(\frac{les_i - lei_i}{2\sqrt{\chi_{v,0.9973}^2}} \right) \left(\frac{les_j - lei_j}{2\sqrt{\chi_{v,0.9973}^2}} \right) \quad i, j = 1, \dots, v.$$

donde ρ_{ij} representa el coeficiente de correlación en la i y j característica de calidad, v el número de características de calidad y Σ es la matriz de varianza covarianza.

ÍNDICE DE CAPACIDAD MEDIANTE EL MÉTODO DE ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES

Para el caso de productos con especificaciones bilateral Wang F.K. y Chen. J. (1998); Xekalaki, E. y Perakis M. (2000), García, T. et al. (2007), proponen la siguiente formulación para las r iniciales componentes,

$$MC_p = \left(\prod_{i=1}^r C_p^{Y_i} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (39)$$

$$MC_{pk} = \left(\prod_{i=1}^r C_{pk}^{Y_i} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (40)$$

En el caso que en el proceso se tome valores objetivos T los indicadores de capacidad se presentan como,

$$MC_{pm} = \left(\prod_{i=1}^r C_{pm}^{Y_i} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (41)$$

$$MC_{pmk} = \left(\prod_{i=1}^r C_{pmk}^{Y_i} \right)^{\frac{1}{r}}$$

donde $C_{pm} = \frac{[USL - LSL]}{6\sqrt{\sigma^2 + [T - \mu]^2}}$ y $C_{pmk} = \min\{C_{pmu}; C_{pml}\}$, siendo

$$C_{pmu} = \frac{USL - \mu}{3\sqrt{\sigma^2 + [T - \mu]^2}}; C_{pml} = \frac{\mu - LS}{3\sqrt{\sigma^2 + [T - \mu]^2}} \quad (42)$$

Para el caso de especificación unilateral Wang F.K. y Chen. J. (1998), García, T. et al. (2007), Jackson, J. E. (1980), Wang F.K. y D.T. (2000) proponen las siguientes formulaciones, en el caso del límite de especificación superior,

$$MC_{PU}^T = \left[\prod_{i=1}^r C_{pu}^{Y_i} \right]^{\frac{1}{r}} \quad (43)$$

el límite de especificación inferior,

$$MC_{PL}^T = \left[\prod_{i=1}^r C_{pl}^{Y_i} \right]_r^{\frac{1}{r}} \quad (44)$$

donde $C_{pu}^{Y_i}$ y $C_{pl}^{Y_i}$ son los valores de los índices de capacidad para cada uno de los i th componentes principales. Los índices de capacidad C_{pu} y C_{pl} son los índices de capacidad univariados definidos como $C_{pu} = (USL - \mu)/3\sigma$ y $C_{pl} = (\mu - lei)/3\sigma$.

Ebadi M., Amirib A., (2012) presentan una modificación a la propuesta de índice de capacidad multivariante mediante componentes principales propuesta por Wang F.K. y Chen. J. (1998); García, T. et al. (2007), en donde determinan los valores y vectores propios de la matriz de varianza covarianza Σ obtenida en la **ecuación (17)**:

$$M\hat{C}_p = \left(\prod_{j=1}^r \prod_{i=1}^n \hat{C}_{p,pcif} \right)_{rn}^{\frac{1}{rn}} \quad (45)$$

$$\hat{C}_{p,pcif} = \frac{USL_{pcif} - LSL_{pcif}}{6s_{pcif}} \text{ y las especificaciones son } USL_{pcif} = e_j^T USL_i, LSL_{pcif} = e_j^T LSL_i,$$

$$s_{pcif} = e_j^T s_{ej} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, r$$

donde r es el número de componentes principales, USL_i y LSL_i son los vectores de los límites de especificación superior e inferior del i th nivel de la variable exploratoria X , respectivamente y es la matriz de varianza covarianza, $\hat{C}_{p,pcif}$ representa el índice de capacidad univariado para los i th niveles de j th componente. Las nuevas variables de respuesta, componentes principales, están distribuidos normalmente por tanto el intervalo para una confianza $(1 - \alpha)100\%$ es:

$$\left[\left(\prod_{j=1}^r \prod_{i=1}^n \hat{C}_{p,pcif} \sqrt{\frac{\chi_{1-\alpha/2, m-1}^2}{m-1}} \right)_{rn}^{\frac{1}{rn}} \leq C_{pc} \leq \left(\prod_{j=1}^r \prod_{i=1}^n \hat{C}_{p,pcif} \sqrt{\frac{\chi_{\alpha/2, m-1}^2}{m-1}} \right)_{rn}^{\frac{1}{rn}} \right] \quad (46)$$

ÍNDICE DE CAPACIDAD MEDIANTE EL MÉTODO DE PERFILES LINEALES

La mayoría de las investigaciones sobre el monitoreo de perfil hacen referencia al perfil lineal simple. Un perfil lineal simple solo define una variable independiente. Noorossana, R., et al. (2011). Generalmente se deben considerar dos fases en el monitoreo de perfil, como es el caso de las cartas de control donde en la fase I el objetivo principal es estimar los parámetros del perfil una vez estabilizado estadísticamente el proceso, dichas estimaciones permiten evaluar la capacidad del proceso en la fase II o monitoreo en línea, en la cual se detecta de manera inmediata los cambios en los parámetros del proceso. El modelo lineal se presenta en la siguiente ecuación,

$$y_{ij} = A_0 + A_1 X_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (47)$$

donde ε_{ij} son variables aleatorias independientes distribuidas normalmente con media cero y varianza σ^2 . La pendiente y la intersección de la línea se denominan coeficientes de regresión o de perfil. Se supone que los valores x son fijos y toman el mismo conjunto de valores para cada muestra, Shahriari, H. y Sarafian, M. (2009).

Existen otros tipos de índices de capacidad de proceso, Shahriari, H y Sarafian, M (2009) propusieron un método para un índice de capacidad de proceso cuando se está monitoreando un perfil lineal simple. Ellos consideran la variable respuesta como una característica de desigualdad con distribución limitada y límites de especificación conocidos. El C_{pk} de la variable respuesta se calcula en cada nivel de la variable explicativa y, luego, el C_{pk} se introduce como el índice de capacidad del proceso en un perfil lineal simple. Ebadi y Shahriari, H (2012) reemplazaron la variable de respuesta de Shahriari y Sarafian, M. (2009) por una variable de respuesta pronosticada en cada nivel de la variable explicativa, y luego utilizaron un índice de capacidad de proceso múltiple para medir la capacidad del proceso. También mencionaron que el C_{pk} en los niveles de variable explicativa conduce a un índice de capacidad del proceso subestimado. Motivo por el cual sugirieron un método basado en el método de Bothe, que utiliza una proporción de elementos no conformes, Mestek, O., Pavlik, J. and Suchanek, M. (1994).

Hosseini-fard et al. (2012), se concentró en el índice de capacidad de proceso de un perfil lineal simple bajo el supuesto de no normalidad de la variable respuesta. Introdujeron la distribución Burr XII¹ en la variable de respuesta de cada nivel de la variable explicativa, y luego, usaron el método Clements para calcular C_p , C_{pu} , y C_{pl} , para la variable respuesta en cada nivel de la variable explicativa. En dicho método el C_{pk} de la variable respuesta se calcula en n niveles de la variable explicativa, y el C_{pk} se introduce como el índice de capacidad del proceso en el perfil lineal simple. Por lo que el C_p , y C_{pk} , se calcula de la siguiente manera:

$$C_p = \frac{1}{6} [\Phi^{-1}(1 - P_U) - \Phi^{-1}(P_L)] \quad (48)$$

$$C_{pk} = \frac{1}{3} \min[\Phi^{-1}(1 - P_U) - \Phi^{-1}(P_L)] \quad (49)$$

donde P_U se estima con la ecuación:

$$P_U = 1 - \prod_{i=1}^n P_r(y_{ij} < USL) \quad (50)$$

entonces:

$$P_U = 1 - \prod_{i=1}^n \Phi\left(\frac{USL_i - \mu_i}{\sigma}\right) \quad (51)$$

1 I. W. Burr, (1973). Parameters for a general system of distribution to match a grid of α_3 a α_4 . Commun Stat. 2:1, 1-21.

P_L se estima con las **ecuaciones (52) y (53)**

$$P_L = 1 - \prod_{i=1}^n P_r(y_{ij} > LSL) \quad (52)$$

por consiguiente

$$P_L = 1 - \prod_{i=1}^n \left[1 - \Phi \left[\frac{LSL_i - \mu}{\sigma} \right] \right] \quad (53)$$

Los parámetros μ y σ , en las son respectivamente la media y la desviación estándar de la variable respuesta, en diferentes niveles de la variable explicativa. USL_i y LSL_i son los límites de especificación superior e inferior para la variable respuesta en el nivel i -ésimo de la variable explicativa, considerando n mezcla de puntos de diseño. dentro de un perfil lineal simple.

El índice de capacidad del proceso C_p que se definió en la **ecuación (48)** es una comparación entre los límites de tolerancia natural y los límites de especificación de un proceso. En un perfil lineal simple $y = A_0 + A_1X$ es la línea de referencia del proceso, $a_0 + a_1x$ es la media condicional de y y x , entonces, μ se calcula de la siguiente manera $\mu = a_0 + a_1x$.

donde y es una variable aleatoria normal con media de $a_0 + a_1x$ y varianza de σ^2 , a_0 y a_1 son estimaciones de A_0 y A_1 , de la forma $a_0 = (\sum_j^k a_{0j})/k$ y $a_1 = (\sum_j^k a_{1j})/k$, respectivamente. a_{0j} y a_{1j} son los interceptos estimados en el j -ésimo perfil de muestra.

38

La varianza del proceso σ^2 se estima utilizando MSE y se calcula como $MSE = (\sum_j^k MSE_j)/k$, donde MSE_j es la varianza estimada en el j -ésimo perfil de muestra. Por lo tanto, definidas mediante UNTL y LNTL en las ecuaciones:

$$UNTL_j = \mu + 3\sigma = a_0 + a_1x + 3\sigma \quad (54)$$

$$LNTL_j = \mu - 3\sigma = a_0 + a_1x - 3\sigma \quad (55)$$

$UNTL$ y $LNTL$ son dos líneas paralelas donde la distancia entre ellos es igual a 6σ , mencionada anteriormente con parámetro μ , además estos valores son funciones de x , como $\mu_y(x) = a_0 + a_1x$, $UNTL_y(x) = a_0 + a_1x + 3\sigma$, y $LNTL(x) = a_0 + a_1x - 3\sigma$. Suponga que los límites de especificación de la variable y son dos funciones de x , tal como las obtiene las ecuaciones:

$$USL_y(x) = a_{0u} + a_{1u}x \quad (56)$$

$$LSL_y(x) = a_{0l} + a_{1l}x \quad (57)$$

Actualmente, C_p de un perfil lineal simple tiene una forma funcional, como se presenta en la siguiente expresión,

$$C_{p(x)} = \frac{USL_y(x) - LSL_y(x)}{UNTL_y(x) - LNTL(x)} \quad x \in [x_1, x_2] \quad (58)$$

Al usar $C_{p(x)}$ como el índice de capacidad del proceso del perfil lineal simple, es posible evaluar la capacidad en cada nivel de X . la capacidad del proceso en cada nivel de la variable explicativa propone información detallada del proceso. Sin embargo, es necesario tener un valor único del índice de capacidad del proceso para un perfil lineal simple en todos los rangos de la variable explicativa para dar un juicio general sobre la capacidad del proceso. Por lo que se recomienda utilizar el área limitada entre USL_y y LSL_y , para calcular $USL_y(x)$ y $LSL_y(x)$ y, también el área limitada entre $UNTL_y$ y $LNTL_y$ para calcular $UNTL_y(x)$ y $LNTL(x)$. Por lo que lo propuesto por los autores para determinar un valor único para el C_p de un perfil lineal simple es:

$$C_{p(\text{profile})} = \frac{\int_{x_1}^{x_u} [USL_y(x) - LSL_y(x)] dx}{\int_{x_1}^{x_u} [UNTL_y(x) - LNTL(x)] dx} \quad x \in [x_1, x_u] \quad (59)$$

$UNTL_y(x)$ y $LNTL(x)$ son dos líneas paralelas; en forma idéntica los valores de las especificaciones $USL_y(x)$ y $LSL_y(x)$, son:

$$USL_y(x) = a_{0u} + a'_1 x, \quad (60)$$

$$LSL_y(x) = a_{0l} + a'_1 x. \quad (61)$$

donde a_{0u} , a_{0l} , a'_1 son la intercepción de $USL_y(x)$, la intercepción de $LSL_y(x)$ y la pendiente de $USL_y(x)$ y $LSL_y(x)$. La distancia de estas líneas paralelas se puede considerar como su diferencia. Por lo que $C_{p(\text{profile})}$ se calcula de la siguiente manera:

$$C_{p(\text{profile})} = \frac{a_{0u} - a_{0l}}{6\sigma} \quad (62)$$

$C_{pk}(x)$ se determina en la siguiente ecuación:

$$C_{pk}(x) = \min \left\{ \frac{USL_y(x) - \mu_y(x)}{UNTL_y(x) - \mu_y(x)}, \frac{\mu_y(x) - LSL_y(x)}{\mu_y(x) - LNTL(x)} \right\} \quad x \in [x_l, x_u] \quad (63)$$

$\mu_y(x)$ es la función de la línea de referencia $C_{pk}(x)$, genera el valor de C_{pk} de un proceso simple para cada nivel de x . El C_{pk} de un perfil lineal simple, se calcula:

$$C_{pk(\text{profile})} = \min \left\{ \frac{\int_{x_1}^{x_u} [USL_y(x) - \mu_y(x)] dx}{\int_{x_1}^{x_u} [UNTL_y(x) - \mu_y(x)] dx}; \frac{\int_{x_1}^{x_u} [\mu_y(x) - LSL_y(x)] dx}{\int_{x_1}^{x_u} [\mu_y(x) - LNTL(x)] dx} \right\} \quad (64)$$

El índice de capacidad del proceso C_{pk} cuando solo se encuentra disponible los límites de especificación funcional superior o inferior, se puede calcular mediante las siguientes ecuaciones:

$$C_{pu}(\text{profile}) = \frac{\int_{x_l}^{x_u} [USL_y(x) - \mu_y(x)] dx}{\int_{x_l}^{x_u} [UNTL_y(x) - \mu_y(x)] dx} \quad (65)$$

$$C_{pl}(\text{profile}) = \frac{\int_{x_l}^{x_u} [\mu_y(x) - LSL_y(x)] dx}{\int_{x_l}^{x_u} [\mu_y(x) - LNTL(x)] dx} \quad (66)$$

Si $USL_y(x)$ es más grande que $\mu_y(x)$ en $[x_l, x_m]$ y menor que $\mu_y(x)$ en $[x_m, x_u]$.

entonces el índice de capacidad mínimo es calculado de la siguiente forma:

$$C_{pk}(\text{profile}) = \min \left\{ C_{pu}(\text{profile}) = \frac{\int_{x_l}^{x_m} [USL_y(x) - \mu_y(x)] dx - \int_{x_m}^{x_u} [\mu_y(x) - USL_y(x)] dx}{\int_{x_l}^{x_u} [UNTL_y(x) - \mu_y(x)] dx}, C_{pl}(\text{profile}) = \frac{\int_{x_l}^{x_u} [\mu_y(x) - LSL_y(x)] dx}{\int_{x_l}^{x_u} [\mu_y(x) - LNTL(x)] dx} \right\} \quad (67)$$

CASO DE ESTUDIO: ÍNDICE DE CAPACIDAD DE PERFIL LINEAL

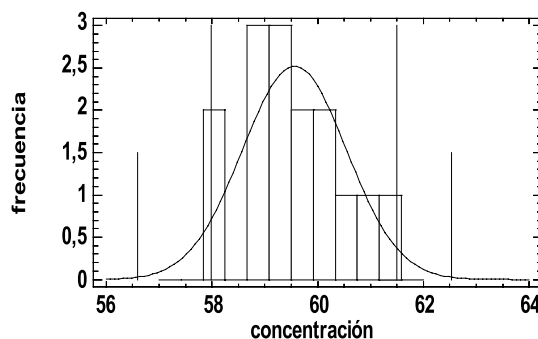
El siguiente problema práctico, es tomado en la fabricación de un producto alimenticio relacionado con una bebida refrescante; las variables relacionadas o de interés para el área de control de calidad son: la concentración de uno de los componentes del producto y el pH.

Tabla 2. Variable pH y concentración de un producto alimenticio

No.	Concentración (Y)	pH (X)
1	59.51	14.790
2	58.01	14.640
3	59.00	14.730
4	60.17	14.160
5	61.50	14.970
6	61.02	14.625
7	59.63	15.660
8	60.24	14.025
9	58.95	15.030
10	57.98	14.340
11	60.44	14.700
12	58.91	14.190
13	59.18	15.030
14	59.46	14.640
15	59.42	14.640

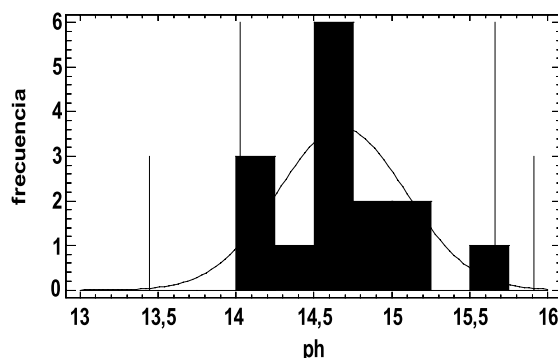
Fuente: Elaboración de los autores

En la ecuación (1), inicialmente evalúan los índices de capacidad univariados tradicionales para cada una de las variables seleccionadas en el proceso. Los resultados muestran, por ejemplo, la concentración con un indicador C_p de 0.5932 y el C_p del pH es de 0.6626.



Gráfica 2. Índice de capacidad para la variable Concentración $C_p = 0,5932$

Fuente: Elaboración propia de los autores



Gráfica 3. Índice de capacidad para la variable pH $C_p = 0,6626$

Fuente: Elaboración propia de los autores

Los índices de capacidad que arrojaron las variables menores a la unidad, por lo que el proceso no cumple con las especificaciones de diseño. El factor de correlación dio un valor muy bajo (0,0038) lo que indica que la relación entre las variables es débil. Por lo tanto, la ecuación de regresión línea de $y = 57.37 + 0.14x$, o, en otras palabras, $= 57.37 + 0.14pH$ no brindará un modelo eficiente para predecir la correspondencia entre el pH y la concentración del proceso de fungicidas.

El cálculo del índice de capacidad lineal inicia en la determinación de los límites de especificación superior e inferior (USL y LSL) y los límites de proceso superior e inferior (UNTL y LNTL). De la siguiente manera, los límites de especificación se obtienen con los intervalos de confianza del proceso los cuales se mostrarán en la siguiente tabla:

Tabla 3. Intervalos de confianza, variable pH y concentración de un producto alimenticio

Parámetro	Estimación	Error Estándar	Límite Inferior	Límite Superior
CONSTANTE	57,3712	9,77517	36,2532	78,4892
pH	0,149211	0,665731	-1,28902	1,58744

Fuente: Elaboración propia de los autores

Obteniendo las ecuaciones $USL = 78,481 + 0,5874x$ y $LSL = 36.253 - 1.289x$, **ecuaciones (60), (61)** donde μ es la ecuación de la variable y , σ es la raíz del cuadrado medio del error la cual es 0.8717 Los límites

del proceso están determinados por las siguientes ecuaciones: para el límite superior UNTL= 78.48 + 0.1492 y para el límite inferior LNTL= 36.25 + 0.1492x. Se calcula el índice de capacidad del proceso teniendo en cuenta las especificaciones de la variable de pH las cuales son LSL= 2.4 y USL= 3, el índice de capacidad del proceso es:

$$C_{p(\text{profile})} = \frac{\int_{2.4}^3 [78.489 + 1.587x - 36.253 + 1.289x] dx}{\int_{2.4}^3 [78.489 + 0.149x - 36.2532 - 0.149x] dx} = 1.183$$

Lo que indica que el proceso cumple satisfactoriamente con las especificaciones establecidas. es calculado el $C_{pk(\text{profile})}$, con el fin de identificar hacia donde se encuentra desplazado el proceso.

$$C_{pk(\text{profile})} = \min \left[C_{pu(\text{profile})} = \frac{\int_{2.4}^3 [78,4892 + 1,58744x - 57,3712 - 0,14211x] dx}{\int_{2.4}^{x_u} [78,4892 + 0,149211x - 57,3712 - 0,14211x] dx}, C_{pl(\text{profile})} = \frac{\int_{2.4}^3 [57,3712 - 0,14211x - 36,2532 + 1,28902x] dx}{\int_{2.4}^3 [57,3712 - 0,14211x - 36,2532 - 0,149211x] dx} \right]$$

por tanto

$$C_{pk(\text{profile})} = \min\{1.1; 1.1\}$$

El índice de capacidad $C_{pk(\text{profile})}$ está mostrando un proceso de fabricación centrado en esta característica de calidad.

ÍNDICE DE CAPACIDAD COMERCIAL MULTIVARIADO

PROPUESTA DE ÍNDICE DE CAPACIDAD COMERCIAL MULTIVARIADO PARAMÉTRICO Y NO PARAMÉTRICO

Propuesta de índice de capacidad comercial multivariado paramétrico

La metodología multivariante, propone dos procedimientos: el primer procedimiento consiste en modificar de la propuesta de Chen, et al., (2003) en la **ecuación (13)**; el segundo, utiliza el análisis de la propuesta no paramétrico de Clements.

En este contexto es necesario especificar de las v variables monitoreadas del producto seleccionado, como también identificar la(s) variable(s) h considerada(s) no relevante(s) para la calidad del producto, pero con aceptable comercialización, como además identificar la especificación, superior o inferior, que cualifique esa no relevancia. Sea en este caso h variables no relevantes de la cuales i poseen calidad comercial en el límite superior de especificación USL y de las cuales $h - i$ poseen la calidad comercial en el límite inferior de especificación LSL, la ecuación (13) propuesta por Chen K.S, et al. (2003) es transformada de la siguiente manera,

$$MC_{pCRk} = \frac{1}{3} \phi^{-1} \frac{A}{2} \quad (68)$$

la constante A está definida como,

$$A = \left[\prod_{j=1}^{-h} (2\phi(3C_{pkj}) - 1) \prod_i^h (2\phi(3C_{pCRui}) - 1) \prod_i^{h-i} (2\phi(3C_{pCRIi}) - 1) \right] + 1$$

Los valores de C_{pkj} se determinan mediante el concepto tradicional presentada en las **ecuaciones (2), (3)**. En este caso el índice de capacidad comercial paramétrico es el resultante de la siguiente razón:

$$MC_{pCRk} = \frac{1}{3} \Phi^{-1} \left[\frac{\prod_{j=1}^{v-h} (2\Phi(3C_{pkj}) - 1) \prod_i^h (2\Phi(3C_{pCRui}) - 1) \prod_i^{h-i} (2\Phi(3C_{pCRli}) - 1)}{2} \right] + 1 \quad (69)$$

Sin embargo, este indicador puede ser mejorado, usando una distancia estadística que potencialice la asociación entre las variables monitoreadas en el proceso; esta distancia seleccionada es la de Camberra, obteniendo la siguiente expresión para el indicar multivariante comercial,

$$MC_{pCRk} = \frac{1}{3} \Phi^{-1} \left\{ \frac{B}{2} \right\} \quad (70)$$

en este caso, la constante B se define mediante la siguiente expresión,

$$B = \left[\prod_{j=1}^{v-h} \left(2\Phi \left(\frac{USL - \bar{x}}{\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^p |x_{ik} - x_{jk}|}{n-1} \rightarrow |V|}} \right) - 1 \right) \prod_i^h \left(2\Phi \left(\frac{USL - \bar{x}}{\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^p |x_{ik} - x_{jk}|}{n-1} \rightarrow |V|}} \right) - 1 \right) \prod_i^{h-i} \left(2\Phi \left(\frac{USL - \bar{x}}{\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^p |x_{ik} - x_{jk}|}{n-1} \rightarrow |V|}} \right) - 1 \right) \right] + 1 \quad (71)$$

Propuesta de índice de capacidad multivariado utilizando datos funcionales FDA

La identificación de un producto con calidad comercial es una tarea complicada cuando el producto posee una gran cantidad de variables que desde el punto de vista de ingeniería no contribuyen en mayor grado a desechar el producto no conforme. Esta situación es más compleja, cuando las variables monitoreadas poseen un comportamiento no lineal, es el caso de datos funcionales FDA, lo que induce a utilizar herramientas estadísticas que modelen este comportamiento. Por lo tanto, el desarrollo de modelos cuantitativos de rendimiento de este tipo de comportamiento está justificado, además es de utilidad en el control estadístico de procesos obtener un indicador de este desempeño mediante un índice de capacidad multivariante.

Las investigaciones deben evaluar en el futuro más de dos estados o categorías de calidad del producto para determinar un indicador de capacidad multivariante que sea acorde con la situación real del proceso y su comercialización. Esta valoración se realiza a través del tiempo, bajo condiciones no lineales de la información seleccionada, por lo que se requiere un tratamiento mediante técnicas para datos longitudinales o datos funcionales discretizados FDA seleccionando una adecuada base funcional.

Para comprender la teoría de datos funcionales, se parte de Ramsay, J.O. & Silverman, B.W. (2002), Ferraty & Vieu, (2006); Cuevas, et al., (2006), que presentan una función suavizada de datos funcionales discretizados según una base finita,

$$y(t) = X(t) + \epsilon(t) = \sum_k^n C_k \Phi_k(t) + \epsilon(t) \quad (72)$$

Donde $\Phi_k(t)$, con $k \in \mathbb{N}$, es un conjunto de funciones conocidas e independientes tales que cualquier función puede ser aproximada, mediante la combinación lineal de K de ellas (elementos de la base). Las bases escogidas de ensayo son en su orden: las b-splines y b-splines penalizados, ya que ambas bases proporcionan la estructura flexible.

El ajuste según una base b-splines tiene la forma:

$$S(t) = \sum_{k=1}^{m+L-1} c_k B_k(t, \tau) \quad (73)$$

donde m es el orden del polinomio, L los puntos de corte de los subintervalos y k el número de elementos de la base.

Aplicar los b-splines penalizados, proporcionan además de una estructura flexible, la determinación de la suma de residuos del ajuste mediante la siguiente expresión:

$$PRSS = \|Y - X\beta\|^2 + \lambda \int (f_j(x))^2 dx \quad (74)$$

donde Y son los datos para ajustar, X es el ajuste según la base b-splines, $f_j(x)$ la derivada segunda del ajuste y λ es el parámetro de suavización, penaliza la segunda derivada, es decir, restringe la varianza interna que pueda tener el ajuste. El número de elementos del base óptimo se basa en el criterio de validación cruzada generalizada, en donde se ensaya un número de elementos de la base hasta seleccionar el GCV mínimo en cada dato funcional, de esta manera no se reduce el riesgo de sobreesuavizado:

$$GCV(\text{nbasis}) = \frac{n}{n - \text{df}(\text{nbasis})} \frac{(y - \hat{x}_{\text{nbasis}})^T W (y - \hat{x}_{\text{nbasis}})}{n - \text{df}(\text{nbasis})} \quad (75)$$

Este método no paramétrica kernel para datos funcionales ($K - \text{NPFDA}$) utiliza el estimador Nadaraya Watson funcional que incorpora en su expresión un kernel Gaussiano K , Nadaraya, E.A. (1964), Watson, G.S. (1964). En condiciones normales pesos grandes son asignados a y_i 's cuyos x 's son los más próximos al punto que se desea estimar (t). El estimador Nadaraya Watson se define de la siguiente manera:

$$\hat{x}_h^{NW}(t) = \frac{\sum_{j=1}^n y_j K\left(\frac{t-t_j}{h}\right)}{\sum_{j=1}^n K\left(\frac{t-t_j}{h}\right)} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (76)$$

donde K es la función kernel, diseñada para tener la mayoría de la masa concentrada cerca del cero, y decae rápidamente o desaparece para $|u| \geq 1$. En el caso del kernel Gaussiano:

$$K(u) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{u^2}{2}} \quad (77)$$

siendo h es el parámetro de suavizamiento y controla la suavidad de $\hat{x}_h^{NW}(t)$, como también controla el suavizamiento del promedio móvil.

Por tanto, considerando una nueva curva $(x = x(t))$, obtenida a partir de muestras de una de las categorías evaluadas, el estimador de las probabilidades a posteriori de pertenencia a una clase g determinada es,

$$\hat{r}_{gh} = \frac{\sum_{i=1}^n I_{\{Y_i=g\}} K\left(\frac{\|x-X_i\|}{h}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{\|x-X_i\|}{h}\right)} \quad (78)$$

donde las curvas observadas, $X_i = X_i(t)$, son muestras de variables explicativas, Y_i variable respuesta discreta aleatoria toma valores ente 0,1, ..., G correspondiente a la categoría evaluada, h es el parámetro de suavizamiento que minimiza la probabilidad de clasificación incorrecta de una observación ulterior. Se lleva a cabo utilizando el método de validación cruzada, L^2 la norma denotada por $\|\cdot\|$, empleada para medir distancias entre curvas:

$$d(f, g) = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx \quad (79)$$

donde $[a, b]$ es uno intervalo cerrado cualquiera entre las curvas evaluadas $f(x)$ y $g(x)$. La estandarización de datos funcionales se realiza mediante la siguiente transformación,

$$\hat{f}(x) = \alpha f(x) + \beta \quad (80)$$

donde

$$\alpha = \frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{\int_a^b \left[f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(s) d(s) \right]^2 dt}}$$

y

$$\beta = 1 - \frac{\int_a^b f(t) dt}{\sqrt{\int_a^b \left[f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(s) d(s) \right]^2 dt}} \quad (81)$$

dado que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \hat{f}(t) dt = 0 \quad (82)$$

Tambien

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \left[\hat{f}(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b \hat{f}(s) d(s) \right]^2 dt = 0 \quad (83)$$

El índice de capacidad para datos funcionales, generalizando el primer método presentado por Vargas, A. y Guevara R. (2011), se presenta la siguiente propuesta de índice de capacidad univariados no paramétricos, seleccionado en la especificación inferior la calidad comercial:

$$C_{pR(\text{prf})} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{USL(t_i) - LSL(t_i)}{Y_{0.99865}(t_i) - Y_{0.00135}(t_i)} + \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s w(t_i) \frac{USL(t_i) - Y_{0.5}(t_i)}{Y_{0.99865}(t_i) - Y_{0.5}(t_i)} =$$

$$\frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{USL(t_i) - Y_{0.5}(t_i)}{Y_{0.99865}(t_i) - Y_{0.5}(t_i)} [1 + w(t_i)] = C_{pu(\text{prf})} \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s [1 + w(t_i)] \quad (84)$$

donde

$$C_{pu(\text{prf})} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{USL(t_i) - Y_{0.5}(t_i)}{Y_{0.99865}(t_i) - Y_{0.5}(t_i)} \quad (85)$$

En caso de que esta calidad comercial se ubique en el límite de especificación superior, el índice de capacidad comercial se definirá como,

$$C_{pCR(\text{prf})} = C_{pl(\text{prf})} \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s [1 + w(t_i)] \quad (86)$$

donde

$$C_{pl(\text{prf})} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{Y_{0.5}(t_i) - lei(t_i)}{Y_{0.5}(t_i) - Y_{0.00135}(t_i)} \quad (87)$$

Vargas A. y Guevara R. (2011) presentan las funciones no paramétricas que permite evaluar las especificaciones $[lei(t_i), USL(t_i)]$, utilizando las siguientes ecuaciones,

$$USL(t) = S_{pu} [Y_{0.99865}(t) - Y_{0.5}(t)] + Y_{0.5}(t) \quad (88)$$

$$LSL(t) = Y_{0.5}(t) - S_{pl} [Y_{0.5}(t) - Y_{0.00135}(t)] \quad (89)$$

donde Y_p es el p th percentil de la distribución que se considere en la información, los límites de especificación superior e inferior como una función de profundidad: $USL(t) = \tilde{y}(t) + 3\hat{\sigma}(t)$ y $LSL(t) = \tilde{y}(t) - 3\hat{\sigma}(t)$, Ramsay J.O y Silverman B.W. (2005) muestra la medida de variabilidad de la función, en el punto t como:

$$\hat{\sigma}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{N=24} [y_i(t) - \tilde{y}(t)]^2}{N-1} \quad (90)$$

NUEVA PROPUESTA DE ÍNDICE DE CAPACIDAD COMERCIAL MULTIVARIADO

Índice de capacidad comercial multivariado paramétrico

En el caso multivariante, se propone modificar la propuesta de Chen, et al., (2003) en la **ecuación (13)**, adicionando además la fiabilidad $R(t)$ como un aspecto importante en la evaluación del desempeño del proceso. Este importante criterio de calidad que aquí se considera, no abordado en las propuestas actuales de índices de capacidad multivariante.

La propuesta es presentada de la siguiente forma:

$$MC_{pCRk} = \frac{1}{3} \left\{ w_1 \Phi^{-1} \left[\frac{A}{2} \right] + w_2 \Phi^{-1} [R(t)] \right\} \quad (91)$$

donde constante A está definida como,

$$A = \left[\prod_{j=1}^v (2\Phi(3C_{pkj}) - 1) \right] + 1 \quad (92)$$

$R(t)$ es la fiabilidad del producto, los valores de C_{pkj} se determinan mediante el concepto tradicional presentado en la **ecuaciones (1), (2) y (3)**, w_i es la ponderación asignada para el cumplimiento de las especificaciones, así como también en la fiabilidad del producto, donde $\sum_{i=1}^2 w_i = 1$.

48

En este contexto de calidad comercial, es necesario especificar cuál de las v variables monitoreadas del producto, se identifican como no relevante(s) h para la calidad del producto, en sincronía con la especificación, superior o inferior, que cualifique este criterio. En este caso existen h variables no relevantes de la cuales i poseen calidad comercial en el límite superior de especificación USL y $h - i$ poseen calidad comercial en el límite inferior de especificación LSL ; la **ecuación (69)** se modifica en:

$$A = \left[\prod_{j=1}^{v-h-k} (2\Phi(3C_{pkj}) - 1) \prod_i^h (2\Phi(3C_{pCRui}) - 1) \prod_l^k (2\Phi(3C_{pCRli}) - 1) \right] + 1 \quad (93)$$

entonces, el índice de capacidad comercial multivariante se modifica de la siguiente forma:

$$MC_{pCRk} = \frac{1}{3} \left\{ w_2 \Phi^{-1} \left[\frac{\prod_{j=1}^{v-h-k} (2\Phi(3C_{pkj}) - 1) \prod_i^h (2\Phi(3C_{pCRui}) - 1) \prod_l^k (2\Phi(3C_{pCRli}) - 1) + 1}{2} \right] + w_1 \Phi^{-1} [R(t)] \right\} \quad (94)$$

Por otra parte, el valor de la **ecuación (87)**, modificada bajo el criterio de la propuesta de Taam et al (1993), **ecuación (38)**, de la siguiente forma,

$$MC_{pCRk} = w_1 \left[\frac{|B|}{|\Sigma|} \right]^{\frac{1}{2}} + w_2 \left\{ \Phi^{-1} [R(t)] / 3 \right\} \quad (95)$$

Los elementos modificando la propuesta de Tamm et al. (1993), de la matriz B están definidos por la siguiente formulación,

$$\rho_{ij} \left(\frac{\min (les_i - \mu, \mu - lei_i)}{\sqrt{\chi_{v,0.9973}^2}} \right) \left(\frac{\min (les_j - \mu, \mu - lei_j)}{\sqrt{\chi_{v,0.9973}^2}} \right) \quad i, j = 1, \dots, v. \quad (96)$$

donde ρ_{ij} representa el coeficiente de correlación en la i y j característica de calidad, v el número de características de calidad, w_i es la ponderación asignada para el cumplimiento de las especificaciones, así como también en la fiabilidad del producto, donde $\sum_{i=1}^v w_i = 1$.

La estimación de este indicador es de la forma

$$\widehat{MC}_{pCRk} = w_1 \left[|B^*| / |S| \right]^{\frac{1}{2}} + w_2 \left\{ \phi^{-1}[R(t)] / 3 \right\} \quad (97)$$

donde $S = (n - 1)^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X})(X_j - \hat{X})^r$ y $\hat{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ representa la matriz de varianza covarianza y la media de la muestra respectivamente. El r ésimo momento de \widehat{MC}_{pCRk} se expresa de la siguiente forma:

$$E(\widehat{MC}_{pCR})^r = \frac{1}{b_r} (MC_{pCR})^r = 1/b_r \left\{ w_1 |B^*|^{r/2} E[|S|]^{-r/2} + w_2 / 3 E\{\phi^{-1}[R(t)]\}^r \right\} \quad (98)$$

siendo:

$$E(|S|)^{-r/2} = \left(\frac{|\Sigma|}{(n - 1)^v} \right)^{-r/2} \prod_{i=1}^v E(\chi_{n-i}^2)^{-r/2}$$

$$E(\chi_{n-i}^2)^{-r/2} = 2^{-r/2} \frac{\Gamma\{(n - i - r)/2\}}{\Gamma\{(n - i)/2\}}$$

y:

$$b_r = \left(\frac{2}{n - 1} \right)^{rv/2} \prod_{i=1}^v \left(\frac{\Gamma\{(n - i)/2\}}{\Gamma\{(n - i - r)/2\}} \right)$$

entonces, el valor esperado y la varianza de \widehat{MC}_{pCRk} pueden ser escritos de la siguiente forma:

$$E(\widehat{MC}_{pCR}) = \frac{1}{b_1} MC_{pCR}$$

$$\begin{aligned} Var(\widehat{MC}_{pCR}) &= E(\widehat{MC}_{pCR})^2 - [E(\widehat{MC}_{pCR})]^2 = \frac{1}{b_2} (MC_{pCR})^2 - \left[\frac{1}{b_1} MC_{pCR}\right]^2 \\ &= \frac{1}{b_2} (MC_{pCR})^2 - \frac{1}{b_1^2} (MC_{pCR})^2 = \left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_1^2}\right) (MC_{pCR})^2 \end{aligned}$$

obsérvese que $b_1 \widehat{MC}_{pCR}$ es un estimador insesgado del índice de capacidad MC_{pCR} .

Tomando en cuenta que el cociente $MC_{pCR} / \widehat{MC}_{pCR}$ es igual $(|S|/|\Sigma|)^{1/2}$ y que la razón $|S|/|\Sigma|$ sigue una distribución del tipo $W = \prod_{i=1}^v \chi_{n-i}^2 / (n-i)^v$, se tiene:

$$\begin{aligned} P\{w_{\alpha/2} < W < w_{1-\alpha}\} &= P\{w_{\alpha/2} < |S|/|\Sigma| < w_{1-\alpha}\} \\ &= P\{\sqrt{w_{\alpha/2}} < MC_{pCR} / \widehat{MC}_{pCR} < \sqrt{w_{1-\alpha/2}}\} = 1 - \alpha \end{aligned}$$

entonces

$$P\{\widehat{MC}_{pCR} \sqrt{w_{\alpha/2}} < MC_{pCR} < \widehat{MC}_{pCR} \sqrt{w_{1-\alpha/2}}\} = 1 - \alpha$$

50

así que un intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)\%$ para estimar el índice de capacidad MC_{pCR} viene dado por:

$$\left(\widehat{MC}_{pCR} \sqrt{w_{\alpha/2}}, MC_{pCR} \sqrt{w_{1-\alpha/2}}\right) \quad (99)$$

INDICADOR DE CAPACIDAD MULTIDIMENSIONAL SEIS SIGMA UNA NUEVA PROPUESTA PARA EMPRESAS DE SERVICIO

El indicador de capacidad multivariante presentado por K. S. Chen, et al. (2003) para evaluar v características se modifica para evaluar las dimensiones de un servicio, basado en el desempeño de niveles Seis Sigma, denominado $MSSC_p$, el cual se obtiene como se muestra a continuación:

$$MSSC_p = \frac{1}{3} \phi^{-1} \left\{ \frac{\left[\prod_{j=1}^v \left(\frac{P_1 + P_2 + \dots + P_k}{k} \right) + 1 \right]}{2} \right\} \quad (100)$$

La evaluación de la capacidad multivariante, según esta metodología, se realiza mediante el porcentaje promedio de no conformes presentes en las v dimensiones involucradas en el monitoreo de calidad. El cálculo del porcentaje promedio de no conformes la j th dimensiones es determinada mediante las métricas de Seis Sigma.

$$P_j = \frac{\sum_{i=1}^k P_k}{k} \quad j = 1, 2, \dots, v \quad (101)$$

donde P_j es el porcentaje promedio de no conformes en la dimensión j th y P_k son las medidas de probabilidad de cada una de las categorías o modalidades de la dimensión evaluada, es decir $P_i = P\left(1 - \frac{N_i}{U_i x O_i}\right)$ con $i = 1, 2, \dots, k$

$$MSSC_p = \frac{1}{3} \phi^{-1} \left\{ \frac{\left[\prod_{j=1}^v \left(\frac{P\left(1 - \frac{N_1}{U_1 x O_1}\right) + \dots + P\left(1 - \frac{N_k}{U_k x O_k}\right) \right)}{k} \right)^j + 1 \right]}{2} + 0.000034 \right\} \quad (102)$$

En correspondencia con los indicadores de capacidad en los casos univariados, se espera un proceso con optimo desempeño, cuando los valores de este indicador sean superiores a la unidad.

CAPÍTULO V

C A S O D E E S T U D I O**DESEMPEÑO DEL INDICADOR DE CAPACIDAD MULTIVARIANTE EN UNA COMPAÑÍA FARMACEUTICA**

La Levocetirizina está indicado para el tratamiento de síntomas asociados a enfermedades alérgicas como: Rinitis Alérgica Estacional (incluyendo síntomas oculares), Rinitis Alérgica crónica idiopática desde los 6 meses de edad. El desarrollo de pruebas analíticas para la determinación de pH densidad, valoración de principio activo y contenido de sacarosa en la elaboración de productos farmacéuticos tiene como principal objetivo determinar el cumplimiento de las especificaciones establecidas para cada una de estas variables según las normativas. A continuación, se presenta en la tabla 4-5, una muestra de estas características de calidad.

Tabla 4. Información del proceso de fabricación de la Levocetirizina

pH	Densidad	Valoración	Contenido de sacarosa	Estado de cumplimiento
2.51	0.998	99.534	62.072	Calidad comercial
2.58	0.9941	99.523	63.939	Cumple
2.63	10.816	99.512	65.045	Cumple
2.72	10.339	99.492	67.261	Cumple
2.74	10.403	99.462	68.022	Cumple
2.74	10.615	99.616	68.075	Cumple
2.82	12.663	99.492	68.103	No cumple
2.76	10.555	99.571	67.965	Cumple
2.75	10.385	99.417	67.827	Cumple
2.75	10.801	99.502	68.021	Cumple
2.78	10.152	99.406	68.212	Cumple
2.78	0.9972	99.416	68.394	Calidad comercial
2.79	10.913	99.465	68.883	Cumple
2.79	10.497	99.451	67.972	Cumple
2.79	10.668	99.426	68.049	Cumple

pH	Densidad	Valoración	Contenido de sacarosa	Estado de cumplimiento
2.8	10.421	99.54	67.789	Cumple
2.81	10.458	99.439	67.902	Cumple
2.81	10.285	99.517	67.759	Cumple
2.81	10.762	99.67	67.063	Cumple
2.82	12.779	99.546	67.259	No cumple
2.83	11.324	99.315	67.85	Cumple
2.83	0.9943	99.441	67.936	Calidad comercial
2.84	10.969	99.499	67.959	Cumple
2.85	10.643	99.617	68.198	Cumple
2.86	10.377	99.477	68.459	Cumple
2.86	11.016	99.412	68.625	Cumple
2.86	10.588	99.599	68.816	Cumple
2.87	10.507	99.479	68.953	Cumple
2.88	1.276	99.557	69.006	No cumple
2.88	1.081	99.562	69.062	Cumple
2.9	10.252	99.326	69.742	Calidad comercial
2.92	1.093	99.406	69.919	Cumple
2.93	10.345	99.345	70.294	Cumple
2.98	11.337	99.695	71.013	Cumple
3.15	10.712	99.62	70.863	Cumple
3.22	1.386	99.464	70.212	No cumple
3.2	0.9971	99.29	70.158	Calidad comercial
3.25	10.813	99.417	69.899	Cumple
3.15	10.432	99.373	68.112	Cumple
3.05	11.309	99.491	67.927	Cumple
2.95	10.809	99.351	67.873	Cumple
2.93	10.852	99.559	67.032	Cumple
2.92	11.046	99.316	66.873	Cumple
2.9	1.058	99.523	66.902	Cumple
2.88	10.633	99.57	67.945	Cumple
2.81	10.692	99.46	68.009	Cumple
2.72	10.955	99.467	67.887	Cumple
2.65	1.285	99.508	70.044	No cumple

Tabla 5. Especificaciones de las variables de la Levocetirizina

Variable	Criterio de aceptación	Unidades
pH	2.5 - 3.5	
Densidad	1.000 - 1.260	g/ml
Valoración	90.0 - 110	
Contenido de Sacarosa	65 - 70	%

Los parámetros obtenidos en la fase I en este proceso son los siguientes,

$$\Sigma = \begin{vmatrix} 0.00261019 & 0.00180074 & -0.000412963 & 0.0238486 \\ 0.00180074 & 0.00789406 & 0.000936882 & 0.106449 \\ -0.000412963 & 0.000936882 & 0.00952551 & 0.0535141 \\ 0.0238486 & 0.106449 & 0.0535141 & 3.22977 \end{vmatrix} \quad \mu = \begin{bmatrix} 2.85000 \\ 1.08674 \\ 99.4811 \\ 67.5000 \end{bmatrix}$$

CASO DE ESTUDIO: DETERMINACIÓN DEL ÍNDICE DE CAPACIDAD UNIVARIADO PARAMÉTRICO.

El índice de capacidad univariado paramétrico seleccionando las características de calidad evaluadas en la producción del medicamento Levocetirizina, monitoreando en línea la estimación de este índice de capacidad para cada una de las variables cuyo comportamiento se visualizan en las gráficas 4 y 5:

$$\widehat{C}_p(\text{pH}) = \frac{3.5 - 2.5}{6 \times 0.152371} = 1.09382$$

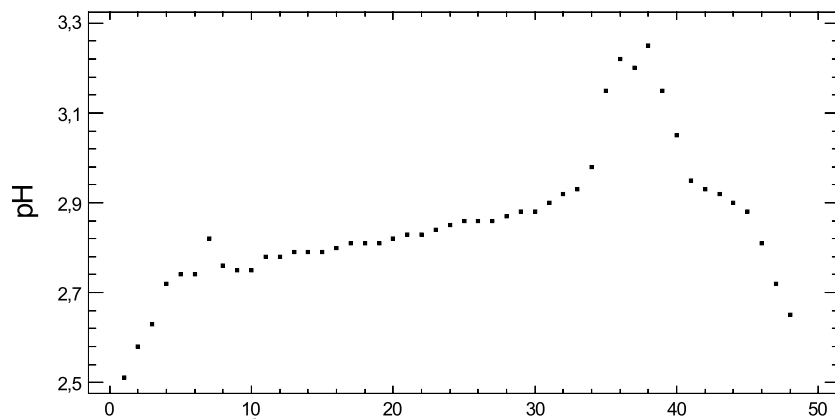
El índice de capacidad, de las restantes variables presentan los siguientes resultados: \widehat{C}_p (densidad) = 0.52, \widehat{C}_p (valoración) = 35.9692 y \widehat{C}_p (cont, de sacarosa). En cuanto a las expresiones de los índices de capacidad de centramiento, **ecuaciones (13) y (14)**, el índice de capacidad de centramiento del pH , es determinado de la siguiente forma:

$$\widehat{C}_{pk} = \min \left\{ \widehat{C}_{pu} = \frac{USL - \widehat{\mu}}{3\widehat{\sigma}}; \widehat{C}_{pl} = \frac{\widehat{\mu} - LSL}{3\widehat{\sigma}} \right\}$$

$$\widehat{C}_{pk}(\text{pH}) = \min \left\{ \widehat{C}_{pu} = \frac{3.50 - 2.85}{3(0.152371)}; \widehat{C}_{pl} = \frac{2.85 - 2.50}{3(0.152371)} \right\} = \min \{ \widehat{C}_{pu} = 1.421; \widehat{C}_{pl} = 0.765 \} = 0.765.$$

El resultado $\widehat{C}_{pl}(\text{pH}) = 0.765$ induce a valores de pH desplazados hacia el límite de especificación inferior; la medida de probabilidad de unidades no conformes con pH por debajo de 2.50 es mayor a las no conformidades presentes por encima del límite de especificación superior. El índice de capacidad de centramiento de la variable densidad del medicamento, es calculado de la siguiente manera:

$$\widehat{C}_{pk}(\text{densidad}) = \min \left\{ \widehat{C}_{pu} = \frac{1.26 - 1.08}{3(0.0824)}; \widehat{C}_{pl} = \frac{1.08 - 1.00}{3(0.0824)} \right\} = \min \{ \widehat{C}_{pu} = 0.728; \widehat{C}_{pl} = 0.323 \} = 0.323.$$



Gráfica 4. Comportamiento, variable pH

Fuente: El autor

Por otro lado, un \hat{C}_{pl} (densidad) = 0.323 indica valores de densidad está descentrados hacia el límite de especificación inferior 1.0 e incumplimiento las especificaciones de diseño; es decir, en este proceso existen unidades no conformes con una mayor probabilidad, que se presente unidades no conformes por debajo de este límite, en contraste al límite de especificación superior.

En la variable valoración, el índice de centramiento es definido como:

56

$$\begin{aligned} \hat{C}_{pk}(\text{valoración}) &= \min \left\{ \hat{C}_{pu} = \frac{110.000 - 99.482}{3(0.09267)}; \hat{C}_{pl} = \frac{99.482 - 90.000}{3(0.09267)} \right\} \\ &= \min \{ \hat{C}_{pu} = 37.83; \hat{C}_{pl} = 34.10 \} = 34.10 \end{aligned}$$

La valoración presentó un índice de capacidad con un valor de \hat{C}_{pl} (valoración) = 34.10; resalta el hecho de un cumplimiento amplio de las especificaciones de diseño, como además revela un desplazamiento que resulta poco significativo hacia el límite de especificación inferior 90.0. El índice de capacidad de centramiento para la variable cantidad de sacarosa, es definida de la siguiente forma, asumiendo un proceso completamente centrado, el valor del índice de capacidad esta dado:

$$\hat{C}_p(\text{cant. de sacarosa}) = \hat{C}_{pu}(\text{cant. desacarosa}) = \hat{C}_{pl}(\text{cant. desacarosa}) = \frac{70 - 65}{6(1.5267)} = 0.545$$

En cuanto a procesos descentrados, inicialmente se estima el promedio del proceso $\hat{\mu}$, por tanto, el índice de capacidad de localización se define como,

$$\hat{C}_{pk}(\text{cant. desacarosa}) = \min \left\{ \hat{C}_{pu} = \frac{70 - 68.1496}{3(1.5267)}; \hat{C}_{pl} = \frac{68.1496 - 65}{3(1.5267)} \right\}$$

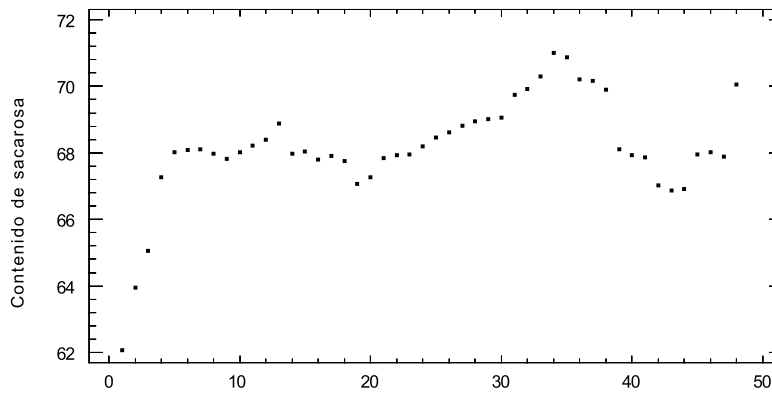
El resultado alcanzado del indicador de capacidad de centramiento \hat{C}_{pk} (cant. desacarosa) = min {0.40; 0.66} = 0.40, indica un desplazamiento hacia el límite superior de especificación. Otro tanto son las variables con desempeño deficiente, es decir no cumplen con la capacidad exigida: la densidad y el contenido de sacarosa, el procedimiento tradicional de mejoramiento indica la realización

de un ajuste a la desviación del proceso con el propósito de adecuarlo a las tolerancias de diseño. Sin embargo, para el caso de este medicamento, asumiendo un contenido de sacarosa por debajo del límite de especificación inferior; se considera un estado donde el producto puede activarse comercialmente, calidad comercial.

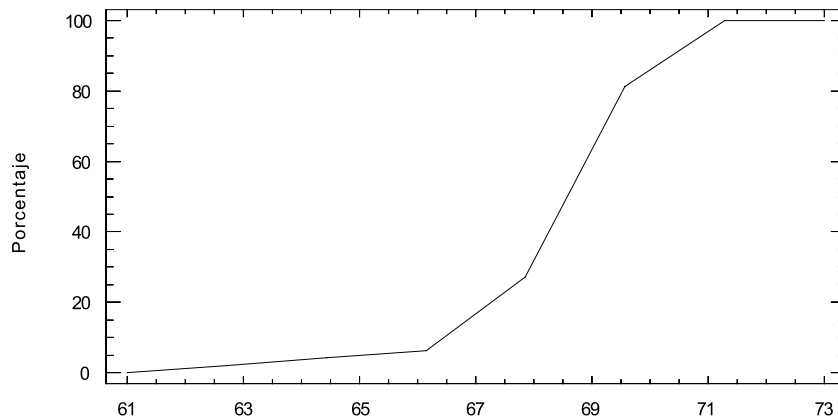
Si el interés, es solo una de las especificaciones, entonces la evaluación del desempeño del proceso se efectúa mediante índice de capacidad de centramiento C_{pk} , en el caso de estudio el objetivo es ajustar el proceso por debajo del límite de especificación superior \hat{C}_{pu} definido en la ecuación (2), es claro la no existencia de un control en el límite de especificación inferior si no es del interés del evaluador. En este caso la estimación de este indicador se define para el contenido de sacarosa con límite unilateral, procesos centrados $\hat{C}_p(\text{cant. de sacarosa}) = 0.545$, si el proceso es descentrado estimando la media del proceso se tiene:

$$\hat{C}_{pu}(\text{cant. de sacarosa}) = \frac{USL - \hat{\mu}}{3\hat{\sigma}} = \frac{70 - 68.1496}{3 \times 1.5267} = 0.4040$$

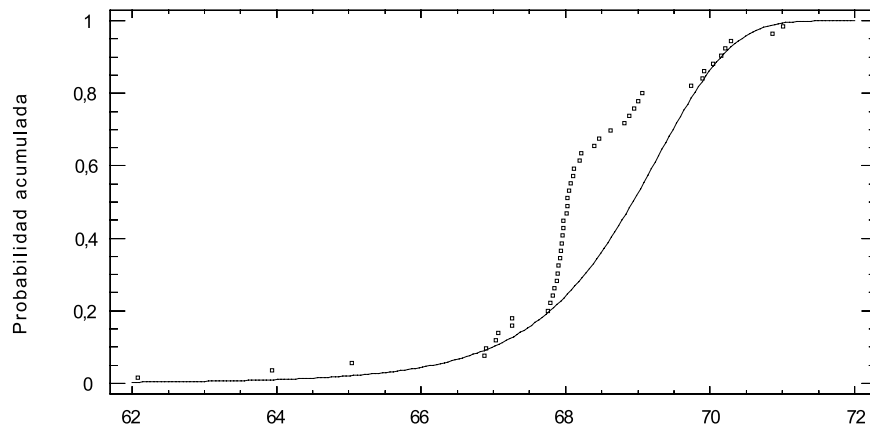
El índice de capacidad de la variable de interés $\hat{C}_p(\text{cont. de sacarosa}) = 0.4040$ no se ajusta a las condiciones reales del proceso debido a la omisión del número de unidades con calidad comercial.



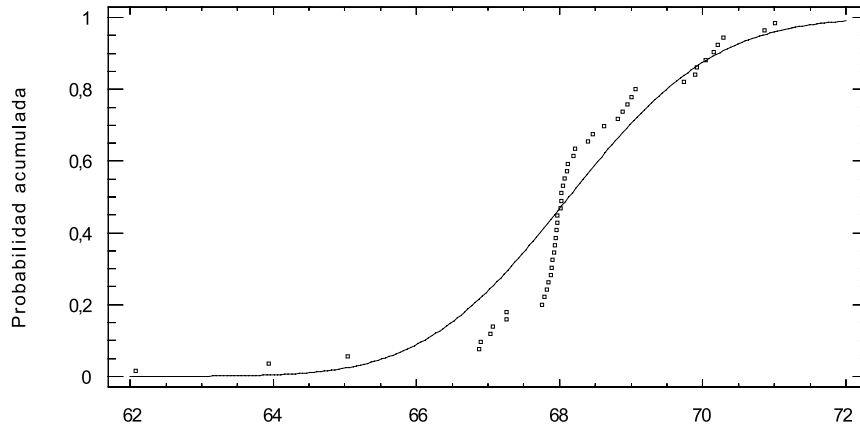
Gráfica 5. Comportamiento de contenido de sacarosa
Fuente: El autor



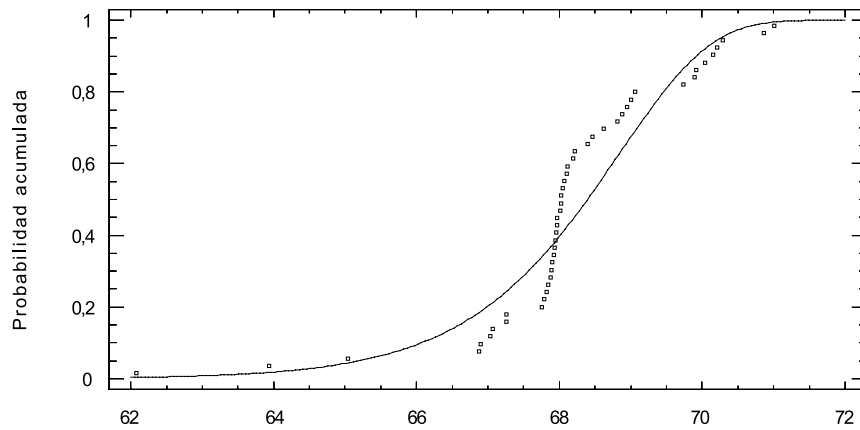
Gráfica 6. Cuantiles del contenido de sacarosa basado en una distribución empírica.
Fuente: Del autor



Gráfica 7. Cuantiles del contenido de sacarosa basado en la distribución Gamma Generalizada
Fuente: Del autor



Gráfica 8. Cuantiles del contenido de sacarosa basado en la distribución Lognormal
Fuente: Del autor



Gráfica 9. Cuantiles del contenido de sacarosa basado en la distribución Weibull
Fuente: Del autor

CASO DE ESTUDIO: DETERMINACIÓN DEL ÍNDICE DE CAPACIDAD MUTIVARIADO PARAMÉTRICO

El cálculo del índice de capacidad según Castagliola P. et al (2009), Bothe D. (1991) y Wierda S.J. (1994),

$$MC_{pk}^T = \frac{1}{3} \Phi^{-1} \left\{ \frac{[(1 \times 0,6711 \times 1 \times 0,773) + 1]}{2} \right\} = \frac{1}{3} \Phi^{-1} \{0,759\} = 0,23,$$

este índice de capacidad de 0.23 indica que este proceso no es capaz de cumplir con las especificaciones de diseño, se debe aclarar que la línea base de esta propuesta está sujeta al número de variables evaluadas, para el caso cuatro variables monitoreadas el índice de capacidad mínimo exigido es aproximadamente de 0.85

Aplicando la propuesta de Shahriari, Hubele y Lawrence (1995) los límites de proceso para cada una de las características de calidad están denotados con la siguiente formulación para la primera variable, que en este caso es pH.

$$LSP_1 = 1,08483 + \sqrt{\frac{12,85 \times 144050}{5209200}} = 1,2733 \quad LIP_1 = 1,08483 - \sqrt{\frac{12,85 \times 144050}{5209200}} = 0,8963$$

El índice de capacidad multivariante de proceso de razón de volumen, **ecuación (13)**, es calculado de la siguiente forma,

$$MC_{pM} = \left[\frac{1 \times 0,26 \times 20 \times 15}{0,37700 \times 0,65553 \times 0,2196 \times 12,8858} \right]^{\frac{1}{4}} = 3,25,$$

el valor de $PV = P(T^2 > 0,884) = 0,4813$, indica que el proceso se encuentra relativamente centrado.

En cuanto al tercer componente obsérvese que la región modificada está incluida dentro de la región de tolerancia $LI = 1$, confirma la capacidad de cumplimiento del proceso. El índice de capacidad mediante la propuesta de Wang y Chen (1998), utilizando análisis de componentes principales ACP inicialmente los valores propios arrojados con esta técnica $\lambda_1 = 2,041$ $\lambda_2 = 1,135$, $\lambda_3 = 0,538$ y $\lambda_4 = 0,286$ el 79.394% de la variabilidad total es explicada por las dos primeras componentes principales y los correspondientes vectores propios normalizados son $\hat{u}_1 = (0,688 \ 0,886 \ 0,162 \ 0,863)$ y $\hat{u}_2 = (-0,498 \ 0,00 \ 0,910 \ 0,243)$. Realizando los cálculos de las combinaciones lineales del vector de medias y el vector de especificaciones con los coeficientes de los vectores normalizados se tiene lo siguiente por ejemplo para el primer componente, para la medida de localización $\mu_{Y_1} = (2,84472 \times 0,688 + 1,08674 \times 0,886 + 99,4811 \times 0,162 + 67,8284 \times 0,863) = 77,5718$ y los límites de especificación de ACP inferior $L_{Y_1} = (2,50 \times 0,688 + 1,00 \times 0,886 + 90,00 \times 0,162 + 65,00 \times 0,863) = 73,281$ y la especificación superior $U_{Y_1} = (3,50 \times 0,688 + 1,26 \times 0,886 + 110,00 \times 0,162 + 70,00 \times 0,863) = 81,754$

El resultado del índice de capacidad global es $MS_p^T = [0.9884 \times 2.96]^{\frac{1}{2}} = 1.710$, donde $C_p^{Y_1} = [(81.754 - 73.281)/6 \times 1.4286] = 0.9884$ y $C_p^{Y_2} = [(115.367 - 96.45)/6 \times 1.065] = 2.960$. Este valor global indica cumplimiento de las especificaciones en el proceso.

Por otra parte el método de Xekaki E. y Perakis M. (2000) modifica el índice de capacidad propuesto por Wang y Chen (1998), para la evaluación de índices de capacidad unilateral (límite inferior o superior de especificación) arrojando los siguientes resultados para el límite superior de especificación: para la primera componente $C_{pku} = [(81.754 - 77.5718)/3 \times 1.4286] = 0.9758$ y para la segunda componente es $C_{pku} = [(115.367 - 105.5934)/3 \times 1.065] = 3.0590$, el resultado para este indicador es $MC_{pU}^T = [0.9758 \times 3.059]^{\frac{1}{2}} = 1.7277$.

Según la propuesta de Cumea G. (2013) el índice de capacidad multivariante para este proceso productivo está definido de la siguiente manera,

para el caso del pH

$$\chi_{\beta_{pH}}^2 = \frac{(2.5 - 3)^2}{(1.9197 \times 10^{-8}) \times (144050)} = 90.4051$$

$$MC_{pm} = \min \left\{ \sqrt{\frac{90.4051}{16.251}}, \dots, \sqrt{\frac{2.0214}{16.251}} \right\} = 0.3454$$

60

En la tabla 6, se presenta los resultados obtenidos para las propuestas presentadas en el desarrollo del ejemplo. Se muestra que el índice de Shahriari, Hubele and Lawrence (1995) posee un valor por encima de las propuestas de Wang y Chen (1998) y Xekaki E. y Perakis M. (2000), lo que muestra poca sensibilidad de este índice de capacidad. Caso contrario se presenta en la propuesta de Castagliola P. et al (2009) que para este proceso manifiesta no cumplimiento.

Tabla 6. Resumen de resultados de las propuestas de indicadores multivariantes de las especificaciones de las variables de la Levocetirizina Jarabe 2.5

Propuestas	Aplicación	Índice de capacidad	Cálculo obtenido	PV	LI	Resultados
Castagliola P. et al (2009)	Proporciones	MC_{pk}^T	0.230			El proceso no es capaz
Shahriari, Hubele and Lawrence (1995)	Razón de regiones	MC_{pM}	3.250	0.4813	1	El proceso es capaz
Wang y Chen (1998)	Análisis multivariante	MC_p^T	1.710			El proceso es capaz
Xekaki E. y Perakis M. (2000)	Análisis multivariante	MC_{pU}^T	1.727			El proceso es capaz
Cumea G. (2013)	Otros	MC_{pm}	0.3454			El proceso no es capaz

CASO DE ESTUDIO: DETERMINACIÓN DEL ÍNDICE DE CAPACIDAD CON PERFIL POLINOMICO

Es pertinente conocer el índice de capacidad multivariado del proceso proponiendo la aplicación de una regresión polinómica realizando una modificación a la propuesta por R. Nemat Keshtelia, et. al. (2014), quienes aplicaron una regresión lineal simple. Se tomaron datos de una empresa de alimentos, las variables objeto de estudio fueron ° Brix y Cloruro mostrados en la tabla 7, cuyas especificaciones son: °Brix 29.0 – 32.0 y cloruro 2.30 - 2.80

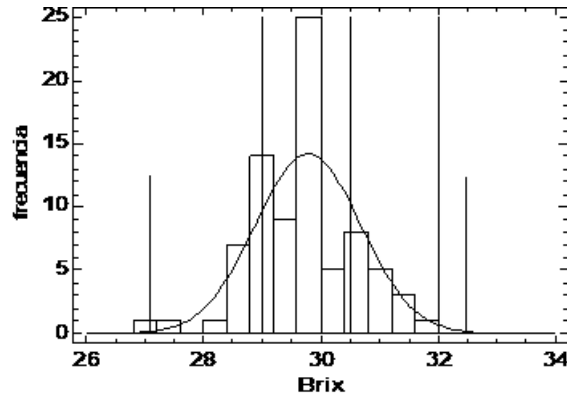
Tabla 7. Mediciones de °Brix y cloruro en un producto alimenticio

No.	°Brix	Cloruro	No.	°Brix	Cloruro
1	29,8	2,61	41	28,8	2,32
2	29,2	2,46	42	30,0	2,32
3	29,3	2,46	43	28,5	2,46
4	30,2	2,46	44	29,0	2,61
5	29,9	2,61	45	28,4	2,61
6	29,9	2,48	46	29,3	2,60
7	29,0	2,46	47	27,2	2,60
8	30,0	2,61	48	30,0	2,60
9	29,7	2,75	49	30,3	2,61
10	29,9	2,36	50	30,0	2,60
11	29,2	2,46	51	29,9	2,59
12	31,5	2,46	52	28,5	2,61
13	29,2	2,46	53	29,5	2,60
14	30,6	2,46	54	31,5	2,61
15	29,8	2,32	55	29,4	2,61
16	30,6	2,61	56	28,5	2,46
17	29,6	2,32	57	28,8	2,32
18	28,9	2,46	58	31,0	2,46
19	29,6	2,46	59	29,4	2,61
20	30,0	2,60	60	29,1	2,62
21	29,0	2,65	61	27,3	2,61
22	29,0	2,61	62	31,2	2,50
23	30,8	2,61	63	30,8	2,32
24	29,0	2,61	64	29,0	2,35
25	29,5	2,61	65	28,6	2,61
26	30,8	2,46	66	30,2	2,75
27	29,8	2,61	67	30,7	2,73
28	29,9	2,32	68	31,1	2,03
29	29,0	2,32	69	30,0	2,03
30	29,0	2,46	70	30,0	2,61
31	30,6	2,46	71	30,0	2,46
32	29,2	2,46	72	30,0	3,70
33	28,5	2,46	73	30,0	3,72
34	30,0	2,61	74	30,0	3,70
35	31,8	2,46	75	31,5	3,71
36	30,0	2,46	76	31,0	3,70
37	30,4	2,61	77	30,0	2,75

38	29,6	2,46	78	30,0	2,60
39	30,2	2,61	79	30,0	2,60

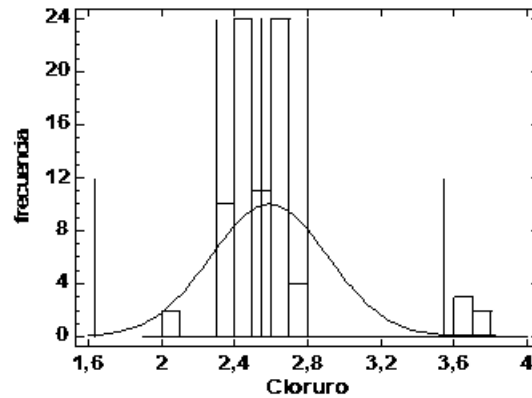
Fuente: Elaboración de los autores

Los índices capacidad para cada variable de forma independiente como se observa en la gráfica 10 y 11, cuyos resultados son $C_{p(Brix)} = 0.59$ y $C_{p(Cloruro)} = 0.777$.



Gráfica 10. Índice de capacidad para la variable Brix

Fuente: Elaboración por los autores



Gráfica 11. Índice de capacidad para la variable Cloruro

Fuente: Elaboración por los autores

El indicador de capacidad univariante indica, que las variables no cumplen con las especificaciones. Para calcular el índice de capacidad multivariado se tomará la propuesta de Chen, et al., (2003) **ecuación (13)**. Efectuando el cálculo se obtiene un valor de $MC_{pk}^T = 0,269$ lo que indica que por ser menor que la unidad, el proceso no cumple las especificaciones requeridas. Se identifica que las variables tienen relación fuerte con un coeficiente de correlación estimado de 0.975, lo que garantiza una alta correspondencia entre las mismas. El modelo lineal polinómico ajustado presenta la siguiente ecuación:

$Brix = 26,948 + 1,666 \times Cloruro - 0,218 \times Cloruro^2$. El Brix es la variable dependiente la cual denotaremos como y , mientras el Cloruro es la variable independiente la cual se denotará como x quedando la ecuación de la siguiente manera:

$$y = 26,948 + 1,66607x - 0,218416x^2$$

El cálculo del índice de capacidad general del proceso C_p para tal fin se debe primero hallar los límites de especificación superior e inferior del proceso (USL y LSL) y los límites de tolerancia superior e inferior UNTL y LNTL de la siguiente manera. USL y LSL se obtiene con los intervalos de confianza del proceso los cuales de acuerdo con el software son:

Tabla 8. Intervalo de confianza de cada uno de los coeficientes del modelo

Parámetro	Estimado	Error Estándar	Límite Inferior	Límite Superior
CONSTANTE	26,948	1,08723	24,7831	29,113
Cloruro	1,66607	0,493219	0,683946	2,6482
Cloruro^2	-0,218416	0,0287842	-0,275733	-0,1611

Fuente: Elaboración de los autores

Los límites de especificación global del modelo polinómico son los siguientes: $USL = 29,113 + 2,6482 x - 0,1611 x^2$ y $LSL = 24,7831 + 0,683946 x - 0,275733 x^2$.

El UNTL y LNTL se obtiene resolviendo lo siguiente las ecuaciones $UNTL = \mu + 3\sigma$ y $LNTL = \mu - 3\sigma$.

donde μ es la ecuación de la variable respuesta y , encontrada anteriormente y σ es la raíz del cuadrado medio del error es $\sigma = \sqrt{0,855877}$, entonces el valor de la desviación es $\sigma = 0,9251$. Por lo que las ecuaciones se modifican de la siguiente forma:

$$UNTL = 26,948 + 1,66607x - 0,218416x^2 + 3(0,9251) = 29,723 + 1,66607x - 0,218416x^2$$

$$LNTL = 26,948 + 1,66607x - 0,218416x^2 - 3(0,9251) = 24,172 + 1,66607x - 0,218416x^2$$

El Índice de capacidad del proceso teniendo en cuenta las especificaciones de la variable cloruro:

$$C_{p(\text{perfil})} = \frac{\int_{2,3}^{2,8} [29,113 + 2,6482 x - 0,1611 x^2 - 24,7831 - 0,683946 x + 0,275733 x^2] dx}{\int_{2,3}^{2,8} [29,723 + 1,66607x - 0,218416x^2 - 24,172 - 1,66607x + 0,218416x^2] dx}$$

$$C_{p(\text{perfil})} = \frac{\int_{2,3}^{2,8} [4,3299 + 1,964254x + 0,114633x^2] dx}{\int_{2,3}^{2,8} 5,551 dx} = 1,816$$

El índice de capacidad resultante es mayor a la unidad, indica que el proceso cumple satisfactoriamente las especificaciones. Por otra parte, el cálculo del índice de capacidad de localización C_{pk} con el fin de identificar hacia donde se encuentra desplazado el proceso.

$$C_{pk(perfil)} = \min \left\{ \frac{\int_{x_1}^{x_2} [USL_y - \mu_y(x)] dx}{\int_{x_1}^{x_2} [UNTL_y(x) - \mu_y(x)] dx}, \frac{\int_{x_1}^{x_2} [\mu_y(x) - LSL_y(x)] dx}{\int_{x_1}^{x_2} [\mu_y(x) - LNTL_y(x)] dx} \right\}$$

$$C_{pk(perfil)} = \min \left\{ \frac{\int_{2,3}^{2,8} [29.113 + 2.6482x - 0.1611x^2 - 26.948 - 1.66607x + 0.218416x^2] dx}{\int_{2,3}^{2,8} [29.723 + 1.66607x - 0.218416x^2 - 26.948 - 1.66607x + 0.218416x^2] dx}, \frac{\int_{2,3}^{2,8} [26.948 + 1.66607x - 0.218416x^2 - 24.7831 - 0.683946x + 0.275733x^2] dx}{\int_{2,3}^{2,8} [26.948 + 1.66607x - 0.218416x^2 - 24.172 - 1.66607x + 0.218416x^2] dx} \right\}$$

$$C_{pk(perfil)} = \min \left\{ \frac{\int_{2,3}^{2,8} [2.165 + 0.982x + 0.057x^2] dx}{\int_{2,3}^{2,8} 2.775 dx}, \frac{\int_{2,3}^{2,8} [2.164 + 0.982x - 0.057] dx}{\int_{2,3}^{2,8} 2.776 dx} \right\} = \min\{1.816, 1.814\} = 1.81$$

Los valores de 1.816 en los indicadores de localización, muestra además del cumplimiento de las especificaciones, un proceso centrado con respecto a las especificaciones de diseño.

Las propuestas multivariante del índices de capacidad comercial multivariantes se presenta en la tabla 9, **ecuaciones (91), (95)**, asumen una distribución Weibull para la variable caducidad, con parámetros de forma 43.2069 y escala 2.2041.

Tabla 9. Propuesta de índices de capacidad comercial multivariante Herrera, caso de estudio

Parámetros	Forma	Escala	Tiempo en años
	43,2069	2,20241	2
Estabilidad del medicamento			
Fiabilidad R(2)	0,984596		
Ponderación			
Especificación (w1)	0,5		
Fiabilidad (w2)	0,5		
Modificación	$\left[\prod_{j=1}^{v-h} (2\Phi(3C_{pkj}) - 1) \prod_i^h (2\Phi(3C_{pCRui}) - 1) \prod_i^{h-i} (2\Phi(3C_{pCRli}) - 1) \right] + 1$		$\hat{\rho}_{ij} \left(\frac{\min(\text{les}_i - \mu, \mu - \text{lei}_i)}{\sqrt{\chi_{v,0.9973}^2}} \right)$ $\left(\frac{\min(\text{les}_j - \mu, \mu - \text{lei}_j)}{\sqrt{\chi_{v,0.9973}^2}} \right)$
Índice de calidad comercial MCCp(est)	Modificación propuesta de Chen		Modificación propuesta de Taam
	0,477190732		0.87614913

En la tabla 10 se presentan los resultados obtenidos para las propuestas presentadas en el desarrollo del caso de estudio. Los índices propuestos por Shahriari y por Taam arrojan valores por encima, 3.250 y 3.174 respectivamente, mientras que los propuestos por Wang y Chen, por Xekaki y Perakis, y por Castagliola, con valores de 0.2373, 0.1886, 0.234, muestran mucha sensibilidad en el cálculo del indicador.

Tabla 10. Resumen de resultados de las propuestas de indicadores multivariantes

Propuestas	Aplicación	Índice de capacidad	Cálculo obtenido	PV	LI	Resultados
Castagliola P. et al (2009)	Proporciones	MC_{pk}^T	0.234			El proceso no es capaz
Shahriari, Hubele and Lawrence (1995)	Razón de regiones	MC_{pM}	3.250	0.4813	1	El proceso es capaz
Wang y Chen (1998)	ACP	MC_p^T	0.238			El proceso no es capaz
Xekaki E. y Perakis M. (2000)	ACP	MC_{pU}^T	0.189			El proceso no es capaz
Cumea G. (2013)	Otros	MC_{pm}	0.345			El proceso no es capaz
Bothe (1991)	Proporciones		0.319			El proceso no es capaz
Taam (1993)	Análisis multivariante		3.174			El proceso es capaz
Herrera R (2018)	Generalización	MCC_p	0.477			El proceso no es capaz
			0.876			El proceso no es capaz

Esta propuesta de investigación muestra un índice de capacidad multivariante moderado, 0.47719, 0.8761, es decir valores intermedios con respecto a los valores obtenidos por los otros autores; lo que refleja que un comportamiento poco sensible para muestras con valores extremos, como se confirma en las simulaciones realizadas. Adicionalmente, en este contexto, un elemento esencial en la evaluación del desempeño de algunos productos es la inserción de la fiabilidad; sin duda una condición de calidad que debe ser considerada en la evaluación de la capacidad de los procesos.

CASO DE ESTUDIO: DETERMINACIÓN DEL ÍNDICE DE CAPACIDAD MULTIDIMENSIONAL EN LA METODOLOGÍA SEIS SIGMA

Un estudio desea evaluar la calidad del servicio percibida por los estudiantes de Entornos virtuales de Aprendizaje EVA, en una Entidad de Educación Superior, mediante un constructo multidimensional, los investigadores seleccionaron tres dimensiones, en su orden son: El servicio de docencia, Servicios administrativos y el Servicios de apoyo; ver la tabla 11, además se presenta la consolidación de la información relacionados con el servicio en tres atributos, evaluados en el rendimiento de la metodología Seis Sigma.

Tabla 11. Consolidado de datos relacionados al servicio en Entornos Virtuales de Aprendizaje

Dimensiones de calidad del servicio	Atributos	DPMO	Nivel Sigma (Z)	Rendimiento	Rendimiento promedio
Servicio esencial la docencia	Competencias	1658,374793	5,1	0,998342	0,995443
	Resolución de problemas	9803,921569	4,9	0,990196	
	Tutorías	2207,505519	5,1	0,997792	
Servicio administrativos	Problemas administrativos	10869,565217	4,9	0,989130	0,995019
	Amabilidad del personal	3003,003003	5,0	0,996997	
	Cumplimiento de plazo	1071,811361	5,2	0,998928	
Servicio de apoyo	Servicios suplementarios	963,391137	5,2	0,999037	0,999048
	Actividades sincrónicas	0,00000000	6,0	1,000000	
	Actividades presencial con el estudiante	1893,939394	5,1	0,998106	

La propuesta de indicador de capacidad multidimensional en la metodología Seis Sigma, para este caso de estudio, según las **ecuaciones (100)** en el servicio de Entornos Virtuales de Aprendizaje es presentada en la siguiente expresión:

66

$$\begin{aligned}
 MC_{pk}^T &= \frac{1}{3} \phi^{-1} \left\{ \frac{\left[\prod_{j=1}^y \left(\frac{0,998342 + \dots + 0,997792}{3} \right) \times \dots \times \left(\frac{0,998928 + \dots + 0,998106}{3} \right)_j + 1 \right]}{2} \right. \\
 &\quad \left. + 0,000034 \right\} \\
 &= \frac{1}{3} \phi^{-1} \left\{ \frac{[(0,995443 \times 0,995019 \times 0,999048) + 1]}{2} + 0,000034 \right\} \\
 &= \frac{1}{3} \phi^{-1} \left\{ \frac{[(0,34779) + 1]}{2} + 0,000034 \right\} = 0,854
 \end{aligned}$$

El valor es 0.854 muestra un valor conservador, alejado del valor mínimo ideal, en este caso la unidad. Esto induce a establecer acciones urgentes, una oportunidad de mejora para la organización, específicamente en los atributos de Resolución de problemas en la dimensión de docencia, Problemas administrativos en la dimensión Servicio Administrativo. Estos resultados están acordes con los niveles Seis Sigma evaluados.

CAPÍTULO VI

DISCUSIÓN Y RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN EN R DE LAS DIFERENTES PROPUESTAS MULTIVARIADOS

Las ecuaciones teóricas presentadas en este trabajo de investigación muestran indicadores de calidad comercial superiores a los valores expuestos en las ecuaciones tradicionales de capacidad, estas diferencias de los indicadores propuestos con respecto a los tradicionales son evidenciadas en la simulación. El resultado teórico de asumir productos una dualidad inexistente: cumplir o no cumplir las especificaciones de diseño, en contraste con la realidad, en la cual se presentan productos no conformes con ciertos criterios técnicos de diseño comercialmente válido para algunos clientes.

Es imperativo en el área de control estadístico de la calidad, se tenga a corto plazo un indicador consensuado, además de práctico; con la intención de evaluar el comportamiento del proceso acorde con los criterios de calidad actualmente esgrimidos en el rendimiento de los procesos. Un desplazamiento casi completo del proceso en algunos de los límites de especificaciones induce a valores negativos de los indicadores de capacidad de centramiento, en este caso se sugiere aplicar el valor absoluto en este indicador.

Las propuestas basadas en porcentaje de no conformes: presenta la relación entre el indicador de la variable y el porcentaje de no conformes, evalúa los requerimientos mínimos del proceso, ignora las relaciones entre las características de calidad.

Las propuestas basadas en la razón de regiones: separa el análisis entre la dispersión y la centralidad del proceso, determina niveles no centrados, no existe un único indicador porque está sujeta de la forma de la región

Las propuestas mediante análisis de componentes principales: reduce la dimensión y sustituyen las variables correlacionadas por nuevas variables independientes, se deriva el intervalo de confianza para la capacidad del proceso, no es considerada la medida de localización del proceso.

PROCEDIMIENTO PARA EL CASO MULTIVARIADO

Metodología aplicada para el cálculo de la propuesta de índice de capacidad comercial multivariado paramétrico. La comparación de los indicadores de capacidad multivariante se realizó por simulación, se inicia con las siguientes condiciones:

- a) Los límites de especificaciones para cada una de las v variables seleccionadas, en esta investigación se trabajó con tres (3) variables.
- b) Se supuso que los esquemas trabajan en las condiciones de fase II de control, es decir en la fase de control.
- c) El proceso de simulación llevó a cabo mediante un programa de computación diseñado en lenguaje R, el cual compara los esquemas simultáneamente, realizando quince mil simulaciones (15000) de una muestra n .

En caso, de que se establezcan los límites de especificaciones; para cada una de las v variables, el procedimiento sugerido es el siguiente:

68

- a) Generar subgrupos cuyas observaciones provienen de una distribución normal con media μ y desviación estándar σ conocida e independientes, para cada una de las v variables, realizando posteriormente una prueba de multinormalidad de Mardia (1970) (1980), para el conjunto de variables.
- b) Modificar la dispersión σ_i para cada una de las v variables en el mismo porcentaje, aplicando la siguiente expresión $\sigma_a = (1 + \delta)\sigma$, donde δ es el porcentaje de incremento de la desviación objetivo.
- c) Determinar el valor promedio estimado para cada uno de los esquemas de indicadores de capacidad, evaluando el indicador con menor valor, como el indicador de capacidad multivariante más sensible al incremento de la variabilidad de las variables involucradas en la simulación.

RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN

La simulación de los indicadores de capacidad para un proceso con tres variables o características de calidad, donde los límites de especificaciones son fijados en el proceso, Los indicadores de capacidad multivariante, tomando un valor fijo, en este caso uno (1), el proceso simulado cuenta con tres variables, donde se presentan las especificaciones de cada una de las variables, asumiendo distribución normal multivariante, los cálculos de se presentan en la tabla 12.

Tabla 12. Valores de índice de capacidad multivariante para diferentes propuestas

Propuestas	Aplicación	Índice de capacidad	δ	Cálculo obtenido	PV	LI	Resultados
Herrera R (2018)	Indicadores comerciales	MC_{pCR}	0.0	1.213			
			0.05	1.152			
Castagliola P. et al (2009)	Proporciones	MC_{pk}^T	0.0	0.343			El proceso no es capaz
			0.05	0,214			
Shahriari, Hubele and Lawrence (1995)	Razón de regiones	MC_{pM}	0.0	2.745	0.453	1	El proceso es capaz
			0.05	2.245	0.324	1	
Wang y Chen (1998)	Análisis multivariante	MC_p^T	0.0	1.324			El proceso es capaz
			0.05	1.123			
Xekaki E. y Perakis M. (2000)	Análisis multivariante	MC_{PU}^T	0.0	1.352			El proceso es capaz
			0.05	1.114			
Cumea G. (2013)	Otros	MC_{pm}	0.0	0.567			El proceso no es capaz
			0.05	0.435			

Fuente: Elaboración propia

En el caso multivariante la investigación se evidencia los siguientes aspectos:

- a) No existe un consenso que permita evaluar este indicador, evidenciando los diferentes aspectos que se toman para construir este indicador.
- b) Aún subsisten diversos paradigmas en el desarrollo de la evaluación de un proceso, como es el caso de separar las unidades en conformes y no conformes.
- c) En la construcción de los índices de capacidad multivariante de calidad comercial realiza mediciones de escenarios reales de los procesos, como es el caso de unidades que se consideran de calidad comercial, que no son considerados en los actuales indicadores multivariantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. http://members.marticonet.sk/jkuba/normy/ASME_Geometry_Dimension%20and%20Tolerances_Handouts.pdf
2. Jeh-Nan Pan and, Chung-I Li. (2014). *New capability indices for measuring the performance of a multidimensional machining process*.
3. Kane V.E. (1986) *Process capability indices*. Journal of Quality Technology. 18:41–52.
4. Hsiang, T. C. y Taguchi, G. (1995). *A tutorial on quality control and assurance the Taguchi methods*. ASA Annual Meeting. Las Vegas, Nevada.
5. Chan LK, Cheng S.W y Spiring F.A. (1988). *A new measure of process capability C_{pm}* . Journal of Quality Technology 20(3):162–175.
6. Pearn WL, Kotz S y Johnson NL (1992). *Distributional and inferential properties of process capability indices*. Journal of Quality Technology 24(4):216–233.
7. Choi BC, Owen DB. (1990). A study of a new process capability index. *Communications in Statistics: Theory and Methods*; **19**(4):1231–1245.
8. Boyles, R.A., (1994). *Process capability with asymmetric tolerances*. Communications in Statistics: Computation and Simulation, 23, pp. 615–643.
9. Chan, L.K., Cheng, S.W. and Spiring, F.A. (1988a). *A new measure of process capability: C_{pm}* . Journal of Quality Technology, Vol. 20 No. 3, pp. 162-75.
10. Gunter, B.H. (1989a). *The use and abuse of C_{pk} , part 2*. Quality Progress, Vol. 22 No. 3, pp. 108-9.
11. Gunter, B.H. (1989b). *The use and abuse of C_{pk} , part 3*. Quality Progress, Vol. 22 No. 5, pp. 79-80.
12. Somerville, S. & Montgomery, D. (1996). *Process capability indices and non-normal distributions*. *Qual. Eng.*, 19(2): 305-316.
13. Chen, K.S. and Pearn, W.L. (1997). *An application of non-normal process capability indices*. Quality and Reliability Engineering International, Vol. 13, pp. 355-60.
14. Zwick, D. (1995). *A hybrid method for fitting distributions to data and its use in computing process capability indices*. Quality Engineering, Vol. 7 No. 3, pp. 601-13.
15. Schneider, H., Pruett, J. and Lagrange, C. (1995). *Uses of process capability indices in the supplier certification process*. Quality Engineering, Vol. 8 No. 2, pp. 225-35.

16. Pearn, W.L. and Chen, K.S. (1995). *Estimating process capability indices for non-normal Pearsonian populations*. Quality and Reliability Engineering International, Vol. 11 No. 5, pp. 386-8.
17. Chen, K.S. and Pearn, W.L. (1997). *An application of non-normal process capability indices*. Quality and Reliability Engineering International, Vol. 13, pp. 355-60.
18. Kane, V. E. (1986). *Process capability indices*. Journal of Quality Technology, 18, 41-52.
19. Kotz, S., Pearn, W.L. and Johnson, N.L. (1993). *Some process capability indices are more reliable than one might think*. Journal of the Royal Statistical Society, Series C: Applied Statistics, Vol. 42 No.1, pp. 55-62.
20. Pearn, W.L. and Chen, K.S. (1996). *A Bayesian-like estimator of Cpk*. Communications in Statistics-Simulation and Computation. Vol. 25 No. 2, pp. 321-9.
21. Guevara, R.D. and Vargas, J.A. (2015). *Process capability analysis for nonlinear profiUSL using depth functions*. Quality and Reliability Engineering International, Vol. 31, No. 3, 465-487.
22. Pignatiello JJ, Ramberg J. (1993). *Process capability indices: just say no*. In Transactions of ASQC 47th Annual Quality Congress; 92-104.
23. Taam, W., Subbaiah, P. y Liddy, J. W. (1993). *A note on multivariate capability indices*. Journal of Applied Statistics, 20(3), pp. 339-351.
24. Shahriari, H., Hubele, N.F. y Lawrence, F.P. (1995). *A multivariate process capability vector*. In: Proceedings of the 4th Industrial Engineering Research Conference, vol. 1, pp. 304-309.
25. Boyles, R. A. (1997). *Using the chi-square statistic to monitor compositional process data*. Journal of Applied Statistics 24(5), 589-602.
26. Montgomery, Douglas C. (2004). *Control estadístico de la calidad*. Tercera Edición. México.
27. European Journal of Operational Research. Volume 173, Issue 2, 1 September 2006, Pages 637-647.
28. Pearn WL, Kotz S, Johnson NL. (1992). *Distributional and inferential properties of process capability indices*. Journal of Quality Technology; 24(4):216-231.
29. Kane, V. E. (1986). *Process capability indices*. Journal of Quality Technology, 18, 41-52.
30. Chan, L.K., Cheng, S.W. and Spiring, F.A. (1988b), *The robustness of the process capability index Cp to departures from normality*. in Matusita, K. (Ed.), Statistical Theory and Data Analysis II, North Holland, Amsterdam, pp. 223-39.
31. Chen S.M. y Hsu NF (1995). *The asymptotic distribution of the process capability index C_{pmk}* . Communications in Statistics: Theory and Methods 24(5):1279-1291.
32. Wang, C.H. (2005). *Constructing multivariate process capability indices for short-run production*. Int. J. Adv. Manuf. Technol. 26, 1306-1311.
33. Taam, W., Subbaiah, P. y Liddy, J. W. (1993). *A note on multivariate capability indices*. Journal of Applied Statistics, 20(3), pp. 339-351.
34. Chen, H. (1994). *A multivariate process capability index over a rectangular solid zone*. Statistica Sinica. 4, 749-758.

35. Shahriari, H., Hubele, N.F. y Lawrence, F.P. (1995). *A multivariate process capability vector*. In: Proceedings of the 4th Industrial Engineering Research Conference, vol. 1, pp. 304–309.
36. Taam, W., Subbaiah, P. y Liddy, J. W. (1993). *A note on multivariate capability indices*. *Journal of Applied Statistics*, 20(3), pp. 339-351.
37. Shahriari, H., Hubele, N.F. y Lawrence, F.P. (1995). *A multivariate process capability vector*. In: Proceedings of the 4th Industrial Engineering Research Conference, vol. 1, pp. 304–309.
38. Kane, V. E. (1986). Process capability indices. *Journal of Quality Technology*, 18, 41–52.
39. Kane, V. E. (1986). Process capability indices. *Journal of Quality Technology*, 18, 41–52.
40. Chan, L.K., Cheng, S.W. and Spiring, F.A. (1988a). *A new measure of process capability: C_{pm}* . *Journal of Quality Technology*, Vol. 20 No. 3, pp. 162-75.
41. Shinde R.L y Khadse K.G. (2009). *Multivariate process capability using principal component analysis*. John Wiley & Sons, Ltd. Quality and Reliability Engineering International. Volume 25, Issue 1, pages 69–77.
42. Juran JM. (1974). *Juran's Quality Control Handbook*. McGraw-Hill, 3rd edition.
43. Chan, L.K., Cheng, S.W. and Spiring, F.A. (1988a). A new measure of process capability: C_{pm} . *Journal of Quality Technology*, Vol. 20 No. 3, pp. 162-75.
44. Chan, L.K., Cheng, S.W. and Spiring, F.A. (1988b). The robustness of the process capability index C_p to departures from normality. in Matusita, K. (Ed.), *Statistical Theory and Data Analysis II*, North Holland, Amsterdam, pp. 223-39.
45. Pearn WL, Kotz S y Johnson NL (1992). *Distributional and inferential properties of process capability indices*. *Journal of Quality Technology* 24(4):216–233.
46. Pearn, W. L., Lin, G. H., & Chen, K. S. (1998). *Distributional and inferential properties of process accuracy and process precision indices*. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 27, 985–1000. Pearn (2003).
47. Lin, G. H., & Pearn, W. L. (2003). *Distributions of the estimated process capability index C_{pk}* . *Economic Quality Control*, 18, 263–279.
48. Vargas A. (2007). *Control Estadístico de la Calidad*. Universidad del Nacional de Colombia. Bogotá. Unibiblos.
49. Chan, L.K., Cheng, S.W. and Spiring, F.A. (1988b). The robustness of the process capability index C_p to departures from normality. in Matusita, K. (Ed.), *Statistical Theory and Data Analysis II*, North Holland, Amsterdam, pp. 223-39.
50. Gunter, B.H. (1989a). *The use and abuse of C_{pk} , part 2*. *Quality Progress*, Vol. 22 No. 3, pp. 108-9.
51. Gunter, B.H. (1989b). *The use and abuse of C_{pk} , part 3*. *Quality Progress*, Vol. 22 No. 5, pp. 79-80.
52. Somerville, S. & Montgomery, D. (1996). *Process capability indices and non-normal distributions*. *Qual. Eng.*, 19(2): 305-316.
53. Chen, K.S. and Pearn, W.L. (1997). *An application of non-normal process capability indices*. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 13, pp. 355-60.

54. Zwick, D. (1995). *A hybrid method for fitting distributions to data and its use in computing process capability indices*. Quality Engineering, Vol. 7 No. 3, pp. 601-13.
55. Pearn, W.L. and Chen, K.S. (1995). *Estimating process capability indices for non-normal Pearsonian populations*. Quality and Reliability Engineering International, Vol. 11 No. 5, pp. 386-8.
56. Chen, K.S. and Pearn, W.L. (1997). *An application of non-normal process capability indices*. Quality and Reliability Engineering International, Vol. 13, pp. 355-60.
57. Tong, L.I. and Chen, J.P. (1998). *Lower confidence limits of process capability indices for nonnormal process distributions*. International Journal of Quality & Reliability Management, Vol. 15 No. 8/9, pp. 907-19.
58. Clements, J.A. (1989). *Process capability calculations for non-normal distributions*. Quality Progress. September, pp. 95-100.
59. Vännman K. (1995). *A unified approach to capability indices*. Statistica Sinica; 5:805–820.
60. Chen, K.S. and Pearn, W.L. (1997). *An application of non-normal process capability indices*. Quality and Reliability Engineering International, Vol. 13, pp. 355-60.
61. Tong, L.I. and Chen, J.P. (1998). *Lower confidence limits of process capability indices for nonnormal process distributions*. International Journal of Quality & Reliability Management, Vol. 15 No. 8/9, pp. 907-19.
62. Jann-Pygn Chen, Cherng G. Ding (2000). *A new process capability index for non-normal distributions*. International Journal of Quality & Reliability Management, Vol. 18 No. 7, pp. 762-72.
63. Chen, J.P. (2000). *Reevaluating the process capability indices for non-normal distributions*. International Journal of Production Research, Vol. 38 No. 6, pp. 1311-24.
64. Pearn, W.L. and Chen, K.S. (1995). *Estimating process capability indices for non-normal Pearsonian populations*. Quality and Reliability Engineering International, Vol. 11 No. 5, pp. 386-8.
65. Ramsay J.O, Silverman B.W., (1997). *Functional data analysis*. Springer.
66. Ramsay J.O, Silverman B.W., (1997). *Functional data analysis*. Springer.
67. Ramsay, J. O. and Silverman, B. (2005). *Functional Data Analysis*. New York.
68. Ramsay y Dalzell (1991). *Some tools for functional data analysis*. Journal Royal Statistical Society, 53:539{572.
69. Liu, P. & Chen, F., (2006). *Process Capability Analysis on Non-normal Process Data Using the Burr XII Distribution*. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 27; 975-984.
70. López-Pintado S, Romo J. (2009). *On the concept of depth for functional data*. Journal of the American Statistical Association; 104(486):718–734.
71. López-Pintado S, Romo J. (2011). *A half-region depth for functional data*. Computational Statistics and Data Analysis. 55:1679–1695.
72. Sun Y, Genton M.G. (2011). *Functional boxplots*. Journal of computational and graphical statistics; 20:316–334.
73. Clements, J.A. (1989). *Process capability calculations for non-normal distributions*. Quality Progress. September, pp. 95-100.

74. López-Pintado S, Romo J. (2009). *On the concept of depth for functional data*. Journal of the American Statistical Association; 104(486):718–734.
75. Vargas, A. y Guevara R. (2011). *Process Capability Analysis Plot for a Product with Bilateral Specifications*. Revista Colombiana de Estadística. Junio 2011, volumen 34, no. 2, pp. 287 a 301.
76. Shinde R.L y Khadse K.G. (2009). *Multivariate process capability using principal component analysis*. John Wiley & Sons, Ltd. Quality and Reliability Engineering International. Volume 25, Issue 1, pages 69–77.
77. Taam, W., Subbaiah, P. y Liddy, J. W. (1993). *A note on multivariate capability indices*. Journal of Applied Statistics, 20(3), pp. 339-351.
78. Taam, W., Subbaiah, P. y Liddy, J. W. (1993). *A note on multivariate capability indices*. Journal of Applied Statistics, 20(3), pp. 339-351.
79. Castagliola P, Maravelakis P, Psarakis S. y Vännman K. (2009). *Monitoring capability indices using run ruUSL*. Journal of Quality in Maintenance. Engineering. 15(4):358–370.
80. Bothe, D.(1991). *A Capability study for an entire product*. ASQC Quality Control Transactions.
81. Wierda, S.J. (1994). *Multivariate statistical process control - recent results and directions for future research*. Statistica Neerlandica, vol 48 (2) 147-168.
82. Wang F.K. y Chen. J. (1998). *Capability index using principal component analysis*. Quality Engineering.
83. Chan, L.K., Cheng, S.W. and Spiring, F.A. (1988b). The robustness of the process capability index Cp to departures from normality. in Matusita, K. (Ed.), Statistical Theory and Data Analysis II, North Holland, Amsterdam, pp. 223-39.
84. Shahriari, H. y Abdollahzadeh, M. (2009). *A new multivariate process capability vector*. Quality Engineering, 21, 290-299.
85. Cumea G. (2013). *Índices de Capacidad Multivariados*. Congreso internacional de arquitectura e ingeniería sostenible 2013. México.
86. Clements, J.A. (1989). *Process capability calculations for non-normal distributions*. Quality Progress. September, pp. 95-100.
87. Bothe, D.(1991). *A Capability study for an entire product*. ASQC Quality Control Transactions.
88. Krishnamoorthi, K. S. (1990). *Capability indices for processes subject to unilateral and positional tolerances*. Quality Engineering, 2, 461–471.
89. Davis, R. D., Kaminsky, F. C., & Saboo, S. (1992). *Process capability analysis for process with either a circular or a spherical tolerance zone*. Quality Engineering, 5, 41–54.
90. Karl, D. P., Morisette, J., & Taam, W. (1994). *Some applications of a multivariate capability index in geometric dimensioning and tolerancing*. Quality Engineering, 6, 649–665.
91. Chen K.S, W. Pearn L. and Lin P.C., (2003). *Capability Measures for Processes with Multiple Characteristics*. Quality and Reliability Engineering International Qual. Reliab. Engng. Int.; 19:101–110 (DOI: 10.1002/qre.513).

92. Chen K.S, W. Pearn L. and Lin P.C., (2003). *Capability Measures for Processes with Multiple Characteristics*. Quality and Reliability Engineering International Qual. Reliab. Engng. Int. 2003; 19:101-110 (DOI: 10.1002/qre.513).
93. Bothe, D. R. (2006). *Assessing capability for hole location*. Quality Engineering, 18,325-331.
94. Shahriari, H. y Abdollahzadeh, M. (2009). *A new multivariate process capability vector*. Quality Engineering, 21, 290-299.
95. Shahriari, H. y Abdollahzadeh, M. (2009). *A new multivariate process capability vector*. Quality Engineering, 21, 290-299.
96. Ebadi M, Shahriari H., (2012). *A process capability index for simple linear profile*. International Journal of Advanced Manufacturing Technology; doi:10.1007/s00170-012-4066-7.
97. Ebadi M, Shahriari H., (2012). *A process capability index for simple linear profile*. International Journal of Advanced Manufacturing Technology; doi:10.1007/s00170-012-4066-7.
98. Ebadi M, Shahriari H., (2012). *A process capability index for simple linear profile*. International Journal of Advanced Manufacturing Technology; doi:10.1007/s00170-012-4066-7.
99. Ebadi M, Shahriari H., (2012). *A process capability index for simple linear profile*. International Journal of Advanced Manufacturing Technology; doi:10.1007/s00170-012-4066-7.
100. Noorossana, R., Saghaie, A. and Amiri, A. (2011) *Statistical Analysis of Prole Monitoring*, John Wiley and Sons.
101. Shahriari, H. y Sarafian, M. (2009). *Evaluación del proceso - Evaluación capacidad en perfiUSL líneas*, Internacional de Ingeniería Industrial Conferencia, Teherán, Irán.
102. Ebadi, M. y Shahriari, H. (2012). *La capacidad de proceso índice para perfiUSL lineal simple*. La Revista Internacional de Manufactura Avanzada y Tecnología, 64 (5- 8), pp. 857-865.
103. I. W. Burr, (1973). *Parameters for a general system of distribution to match a grid of α_3 a α_4* . Commun Stat. 2:1, 1-21.
104. R. Nemati Keshtelia, R. Baradaran Kazemzadeha, A. Amiri and R. Noorossana. (2014). *Developing functional process capability indices for simple linear profile*. Scientia Iranica, Sharif University of Technology.

A n e x o s

Anexo 1. Tabla de la distribución normal estándar
VALORES DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULATIVA NORMAL ESTÁNDAR

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-4.5	0,0000033976	0,0000032413	0,000003091	0,0000029491	0,000002812	0,0000026822	0,000002557	0,000002438	0,0000023248	0,0000022162
-4.4	0,000004293514	0,000005168531	0,000004935045	0,000004711654	0,000004497943	0,000004293514	0,000004097982	0,000003910979	0,000003732152	0,000003561157
-4.3	0,000008539905	0,000008162727	0,000007801460	0,000007455467	0,000007124135	0,000006806876	0,000006503122	0,000006212326	0,000005933965	0,000005667530
-4.2	0,000013345749	0,000012768534	0,0000122151159	0,000011684565	0,0000111759893	0,000010688525	0,000010221345	0,000009773648	0,000009344665	0,000008933655
-4.1	0,000020657506	0,000019782955	0,000018943619	0,0000181381617	0,0000173652911	0,000016623763	0,000015912379	0,000015229981	0,000014575454	0,000013947722
-4.0	0,0000316712418	0,000030359373	0,000029099070	0,000027888426	0,000026725600	0,000025608816	0,000024536358	0,000023506568	0,000022517850	0,000021568659
-3.9	0,000048096344	0,000046148060	0,000044274484	0,000042472930	0,000040740804	0,000039075596	0,000037474881	0,000035936315	0,000034457634	0,000033036647
-3.8	0,000072348043	0,000069483395	0,000066725837	0,000064071629	0,0000615171552	0,000059058912	0,000056693512	0,000054417676	0,000052228232	0,0000501221110
-3.7	0,000107799733	0,000103629623	0,000099611389	0,000095739885	0,000092010127	0,000088417285	0,000084956678	0,000081623773	0,000078414179	0,000075323642
-3.6	0,000159108590	0,000153098502	0,000147301507	0,0001417106099	0,000136319020	0,0001311201544	0,0001261076241	0,000121275234	0,0001166169768	0,0001121270260
-3.5	0,000232629079	0,000224053347	0,000215773393	0,000207779833	0,000200063516	0,000192615575	0,000185427396	0,000178490613	0,0001717971037	0,000165338980
-3.4	0,000336929265	0,000324814397	0,000313105678	0,00030301790624	0,000290857093	0,000280293276	0,000270087694	0,000260229182	0,000250706891	0,000241510273
-3.3	0,000483424142	0,000466479856	0,000450087240	0,000434229920	0,000418891949	0,000404057801	0,000389712362	0,000375840918	0,000362429149	0,000349463118
-3.2	0,000687137937	0,000663674861	0,000640952983	0,000618951090	0,000597648497	0,000577025042	0,000557061069	0,000537737421	0,000519035433	0,0005009366913
-3.1	0,000967603213	0,000935436719	0,000904255199	0,000874031515	0,000844739173	0,0008154202	0,000788845694	0,000762194688	0,000736375261	0,000711363968
-3.0	0,001349898031	0,001306238448	0,001263873427	0,001222768693	0,0011828907431	0,0011442068310	0,0011106684957	0,001070293854	0,001035002974	0,001000782476
-2.9	0,001865813300	0,001807143780	0,001750156928	0,0016948100193	0,0016410612342	0,001588869647	0,0015381952117	0,001488998745	0,0014412419173	0,001394887235
-2.8	0,002555130330	0,002477074998	0,002401182474	0,002327400206	0,002255676691	0,002185961454	0,002118205040	0,002052358994	0,001988375854	0,001926209132
-2.7	0,003466973803	0,003364160407	0,003264095815	0,003166716277	0,003071959218	0,002979763235	0,002899068076	0,002802814632	0,002717944922	0,002635402077
-2.6	0,004661188023	0,004527111330	0,004396488348	0,004269243409	0,0041453013610	0,004024588542	0,003907032574	0,003792562347	0,003681108009	0,003572600952
-2.5	0,006209665325	0,006036558080	0,005867741715	0,005703126333	0,005542623443	0,005386145954	0,005233608163	0,005084925749	0,004940015757	0,004798796597
-2.4	0,008197535924	0,007976260260	0,007760253550	0,0075494114163	0,007343630955	0,007142810735	0,006946850788	0,006755652607	0,0065691191355	0,006387154764
-2.3	0,0107241100217	0,010444077062	0,010170488668	0,009903075559	0,009641869945	0,009386705534	0,009137467530	0,008894042630	0,008656319025	0,008424186399
-2.2	0,013903447513	0,0135525811464	0,013209388807	0,012873721438	0,012545461435	0,012224472655	0,0119106254185	0,0116037915219	0,011303844238	0,0110106583244
-2.1	0,017864420562	0,017429177937	0,017003022647	0,016585806683	0,016177383372	0,0157776073911	0,015386334783	0,015003422973	0,014628730776	0,0142621184107
-2.0	0,02275013194	0,02221559442	0,02169169376	0,02117826964	0,02067516286	0,02018221540	0,01969927040	0,01922617222	0,01876276643	0,01830889985
-1.9	0,028716559816	0,028066606659	0,027428949703	0,026803418877	0,026189844940	0,025588059521	0,024997895148	0,024419185280	0,023851764341	0,023295467750
-1.8	0,0359303191129	0,035147893584	0,034379502445	0,033624969419	0,032884118659	0,032156774795	0,031442762980	0,030741908929	0,030054038961	0,029378980040
-1.7	0,044565462758	0,043632936524	0,042716220791	0,0418151376136	0,0409259508978	0,040059156863	0,039203903287	0,038363570362	0,037537980348	0,036726955698
-1.6	0,054799291699	0,053698928148	0,052616139454	0,051507448490	0,050502583474	0,049471468033	0,048457226266	0,047459681802	0,046478657863	0,045513977321
-1.5	0,066807201268	0,065521712089	0,064255487818	0,063008364464	0,0617801767118	0,060520758002	0,059379940594	0,058207555638	0,057053433237	0,055917402519
-1.4	0,080756659233	0,079269841453	0,077803840526	0,076358509536	0,074933699534	0,073529259609	0,072145306965	0,070780876991	0,069436623333	0,0681121179667

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-1.3	0.096800484585	0.095097917795	0.093417508993	0.091759135650	0.090122672464	0.088507991437	0.0869149619471	0.085343450822	0.083793322415	0.082264438677
-1.2	0.115066970221	0.113139446444	0.111232437447	0.109348552425	0.107487697074	0.105649773666	0.103833468112	0.102042315074	0.100272567954	0.098525329049
-1.1	0.135666060946	0.133499513242	0.131356881042	0.129238112240	0.127143150562	0.125071935637	0.123024403051	0.121000484421	0.119000107455	0.117023196202
-1.0	0.158655253931	0.156247645021	0.153864230372	0.151505002788	0.149169950331	0.146859056375	0.144572299663	0.142300965435	0.140071090088	0.137856572032
-0.9	0.184060125346	0.18141125489	0.178786379614	0.176185542245	0.173608780338	0.171056126308	0.16852760746	0.16602324606	0.163543059327	0.161087059510
-0.8	0.211855398583	0.208970087871	0.206108053585	0.203269391828	0.200454193260	0.197662543122	0.194894521251	0.192150202103	0.189429654776	0.186732943037
-0.7	0.241963652223	0.238852068090	0.235762497779	0.232695092300	0.2296649997164	0.2266627352376	0.223627292437	0.220649946342	0.217695437585	0.214763884163
-0.6	0.274253117501	0.270930903783	0.267628893469	0.264347292115	0.261086299692	0.257846110805	0.254626914671	0.251428895095	0.248252230453	0.245097093674
-0.5	0.308537538726	0.305025730897	0.301531787547	0.298055965394	0.294598516215	0.291159686788	0.287739718849	0.284338849046	0.280957308898	0.277595324753
-0.4	0.344578258389	0.340902973772	0.337242726848	0.333597820595	0.329968553660	0.326355220287	0.322758110250	0.319177508782	0.315613696516	0.312066494947
-0.3	0.382088577811	0.378280478178	0.374484165276	0.370699981059	0.366928263964	0.363169348824	0.3594243566782	0.355691245199	0.351972707575	0.348268273464
-0.2	0.420740290560	0.416833836517	0.412935577358	0.409045884858	0.405165128302	0.40129367431	0.397431886798	0.393580126802	0.389738752444	0.38590811880
-0.1	0.460172162723	0.456204687457	0.452241573979	0.448283213345	0.444329995194	0.440382307629	0.4364440537108	0.432505068325	0.428576284099	0.424654565265
-0.0	0.500000000000	0.496010643685	0.492021686283	0.488033526585	0.484046563147	0.48006119416	0.47607781734	0.472096829819	0.468118627986	0.464143607414
0.0	0.500000000000	0.503989356314	0.5079783137169	0.5119664734141	0.5159534368528	0.5199388058384	0.5239221826541	0.5279031701805	0.5318813720	0.5358563925852
0.1	0.539827937277	0.54379531254	0.547758426020	0.551716786654	0.555670004805	0.559617692370	0.563559462891	0.567494931675	0.571423715900	0.575345434734
0.2	0.579259709439	0.58316616348	0.587064422648	0.590954115142	0.594834871697	0.598706325682	0.602568113201	0.606419873198	0.610261247555	0.61409188119
0.3	0.61791142218	0.62171952182	0.625515834723	0.629300018940	0.633071736036	0.636830651175	0.640576433218	0.644308754800	0.648027292424	0.651731726536
0.4	0.655421741610	0.659097026227	0.662757273151	0.666402179404	0.670031446339	0.673644779712	0.677241889749	0.680822491217	0.684386303483	0.687933050582
0.5	0.691462461274	0.694974269102	0.698468212453	0.701944034605	0.705401483784	0.708840313211	0.71226028115	0.715661150953	0.719042691101	0.722404675246
0.6	0.725746882249	0.729069096217	0.732371106531	0.735652707884	0.738913700307	0.74215388919	0.745373085328	0.748571104904	0.75174776954	0.754902906325
0.7	0.758036347776	0.76114793191	0.764237502220	0.767304907699	0.770350002835	0.77332647623	0.776372707562	0.779350053657	0.782304562414	0.785236115836
0.8	0.788144601416	0.791029912128	0.793891946414	0.796730608171	0.799545806739	0.802337456877	0.805105478748	0.807849797896	0.810570345223	0.813267056968
0.9	0.815939874653	0.818588745108	0.821213620385	0.823814457754	0.826391219661	0.828943873691	0.831472392533	0.833976753936	0.836456940672	0.838912940489
1.0	0.841344746068	0.843752354978	0.846135769627	0.848494997211	0.8508300049669	0.853140943624	0.855427700336	0.857690345644	0.859928909911	0.862143427968
1.1	0.864333939053	0.866500486757	0.868643118957	0.870761887760	0.872856849437	0.874928064362	0.876975596948	0.878999515579	0.88099892544	0.882976803976
1.2	0.884930329773	0.886860553556	0.888767562552	0.890651447574	0.892512302925	0.894350226333	0.896165318878	0.897957684925	0.899727432045	0.901474670950
1.3	0.903199515414	0.904902082204	0.906582491006	0.908240864349	0.909877327535	0.911492008562	0.913085038052	0.914656549178	0.916206677585	0.917735561322
1.4	0.919243340766	0.920730158546	0.922196159473	0.923641490463	0.925066300465	0.926470740390	0.927854963034	0.929219123008	0.930563376666	0.931887882033
1.5	0.93319279873	0.93447828791	0.93574451218	0.936991635536	0.938219823288	0.939429241997	0.940620059405	0.941792444361	0.942946566762	0.944082597480
1.6	0.945200708300	0.946301071851	0.947383861545	0.948449251509	0.9494947416525	0.950528531966	0.951542773733	0.95254031819	0.953521342136	0.954486202678
1.7	0.955434537241	0.956367063476	0.957283779208	0.958184862386	0.959070491021	0.959940843136	0.960796096712	0.961636429637	0.962462019651	0.963273044301
1.8	0.964069680887	0.964852106416	0.965620497554	0.966375030580	0.967115881340	0.967843225204	0.968557237019	0.969258091070	0.969945961038	0.970621019959
1.9	0.971283440184	0.971933393340	0.972571050296	0.973196581122	0.973810155059	0.974411940478	0.975002104851	0.975580814719	0.976148235658	0.976704532249
2.0	0.977249868051	0.977784405570	0.978308306232	0.978821730357	0.979324837133	0.979817784594	0.980300729590	0.980773827772	0.981237233565	0.98169110014
2.1	0.982135579437	0.982570822062	0.982996977352	0.9834141493316	0.983822616627	0.984222392608	0.98461366521	0.984996577026	0.985371269224	0.985737881589

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.2	0.986096552486	0.986447418853	0.986790616192	0.987126278561	0.987454538564	0.98775527345	0.988089374585	0.988396208478	0.988696155761	0.988989341675
2.3	0.989275889978	0.989555922938	0.989829561331	0.990096924440	0.990358130054	0.990613294465	0.990862532469	0.991105957369	0.991343680974	0.991575813600
2.4	0.991802464075	0.992023739739	0.992239746449	0.992450588583	0.992656369044	0.992857189264	0.993053149211	0.993244347392	0.993430880864	0.993612845235
2.5	0.993790334674	0.9939634441919	0.994132258284	0.994296873667	0.994457376556	0.994613854045	0.994766391836	0.994915074251	0.995059984242	0.995201203402
2.6	0.995338811976	0.995472888867	0.995603511651	0.995730756590	0.995854698639	0.995975411457	0.996092967425	0.9962074376523	0.996318891990	0.996427399047
2.7	0.996333026197	0.9964635839593	0.9965904184	0.996723283722	0.9968528040781	0.9969720236764	0.997109931923	0.997197185367	0.997282055077	0.997364597922
2.8	0.997444869669	0.997522925001	0.997598817525	0.99767599793	0.997744323308	0.997814038545	0.997881794959	0.997947641005	0.99801162414	0.998073790867
2.9	0.998134186699	0.998192856219	0.998249843071	0.998305189980	0.998358938765	0.998411130352	0.998461804788	0.998511001254	0.998558758082	0.998605112764
3.0	0.998650101968	0.998693761551	0.998736126572	0.998777231306	0.998817109256	0.998855793169	0.998893315042	0.998929706145	0.998964997025	0.998999217523
3.1	0.999032396786	0.999064563280	0.999095744800	0.999125968484	0.999155260826	0.999184845797	0.999211154305	0.999237805311	0.999263624738	0.999288636031
3.2	0.999312862062	0.999336325138	0.999359047016	0.999381048909	0.999402351502	0.999422974957	0.999442938931	0.999462262578	0.999480964566	0.999499063086
3.3	0.999516575857	0.999533520143	0.999549912759	0.999565770079	0.999581108050	0.999595942198	0.999610287637	0.999624159081	0.999637570851	0.999650536881
3.4	0.999663070734	0.999675185602	0.999686894321	0.999698209375	0.999709142906	0.999719706723	0.999729912306	0.999739770817	0.999749293108	0.999758489726
3.5	0.999767370921	0.999775946653	0.999784226600	0.999792220166	0.999799936484	0.999807384424	0.999814572603	0.999821509386	0.999828202896	0.999834661019
3.6	0.999840891409	0.999846901497	0.999852698492	0.999858289390	0.999863680979	0.999868879845	0.999873892375	0.999878724765	0.999883383023	0.999887872974
3.7	0.999892200266	0.999896370376	0.999900388611	0.999904260114	0.999907989872	0.999911582714	0.999915043321	0.999918376226	0.999921585820	0.999924676357
3.8	0.999927651956	0.999930516604	0.999933274163	0.999935928370	0.999938482844	0.999940941087	0.999943306487	0.999945582323	0.999947771767	0.999949877889
3.9	0.999951903656	0.999953851939	0.999955725515	0.99995737069	0.999959259195	0.999960924403	0.999962525118	0.999964063684	0.999965542365	0.999966963352
4.0	0.999968328758	0.999969640626	0.999970900929	0.999972111573	0.999973274399	0.999974391183	0.999975463642	0.999976493431	0.999977482149	0.999978431340
4.1	0.999979342493	0.999980217044	0.999981056381	0.999981861838	0.999982634708	0.999983376236	0.999984087620	0.999984770018	0.999985424545	0.999986052277
4.2	0.999986654251	0.999987231465	0.999987784884	0.999988315434	0.99998882400	0.999989311474	0.999989778654	0.999990226351	0.999990655334	0.999991066344
4.3	0.999991460094	0.999991837272	0.999992198540	0.999992544532	0.999992875864	0.999993193123	0.999993496877	0.99999378767	0.999994066034	0.999994332467
4.4	0.999995706485	0.999994831469	0.999995064954	0.999995288345	0.999995502056	0.999995706485	0.999995902017	0.99999608902	0.999996267848	0.999996438841
4.5	0.999996602326	0.999996758618	0.999996908018	0.999997050815	0.999997187288	0.999997317704	0.999997442318	0.999997561378	0.999997675120	0.999997783769

Anexo 2. Distribución ji-cuadrada

V	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	0.1015	0.4549	1.3233	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794	10.8276
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	0.5754	1.3863	2.7726	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103	10.5966	13.8155
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	1.2125	2.3660	4.1083	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	12.8382	16.2662
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	1.9226	3.3567	5.3853	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	14.8603	18.4668
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	2.6746	4.3515	6.6237	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496	20.5150
6	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	3.4546	5.3481	7.8408	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476	22.4577
7	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	4.2549	6.3458	9.0371	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777	24.3219
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	5.0706	7.3441	10.2189	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902	21.9550	26.1245
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	5.8988	8.3428	11.3888	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5894	27.8772
10	2.1559	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	6.7372	9.3418	12.5489	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093	25.1882	29.5883
11	2.6032	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	7.5841	10.3410	13.7007	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7568	31.2641
12	3.0738	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	8.4384	11.3403	14.8454	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995	32.9095
13	3.5650	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	9.2991	12.3398	15.9839	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882	29.8195	34.5282
14	4.0747	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	10.1653	13.3393	17.1169	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412	31.3193	36.1233
15	4.6009	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	11.0365	14.3389	18.2451	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013	37.6973
16	5.1422	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	11.9122	15.3385	19.3689	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672	39.2524
17	5.6972	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	12.7919	16.3382	20.4887	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185	40.7902
18	6.2648	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	13.6753	17.3379	21.6049	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1565	42.3124
19	6.8440	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	14.5620	18.3377	22.7178	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909	38.5823	43.8202
20	7.4338	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	15.4518	19.3374	23.8277	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968	45.3147
21	8.0337	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	16.3444	20.3372	24.9348	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322	41.4011	46.7970
22	8.6427	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	17.2396	21.3370	26.0393	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7957	48.2679
23	9.2604	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	18.1373	22.3369	27.1413	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384	44.1813	49.7282
24	9.8862	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	19.0373	23.3367	28.2412	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798	45.5585	51.1786
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	19.9393	24.3366	29.3389	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9279	52.6197
26	11.1602	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	20.8434	25.3365	30.4346	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417	48.2899	54.0520
27	11.8076	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	21.7494	26.3363	31.5284	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629	49.6449	55.4760
28	12.4613	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	22.6572	27.3362	32.6205	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782	50.9934	56.8923
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	23.5666	28.3361	33.7109	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879	52.3356	58.3012
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	24.4776	29.3360	34.7997	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922	53.6720	59.7031
35	17.1918	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967	29.0540	34.3356	40.2228	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421	60.2748	66.6188
40	20.7065	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	33.6603	39.3353	45.6160	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907	66.7660	73.4020
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886	42.9421	49.3349	56.3336	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900	86.6608
60	35.5345	37.4849	40.4817	43.1880	46.4589	52.2938	59.3347	66.9815	74.3970	79.0819	83.2977	88.3794	91.9517	99.6072

V	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
80	51,1719	53,5401	57,1532	60,3915	64,2778	71,1445	79,3343	88,1303	96,5782	101,8795	106,6286	112,3288	116,3211	124,8392
90	59,1963	61,7541	65,6466	69,1260	73,2911	80,6247	89,3342	98,6499	107,5650	113,1453	118,1359	124,1163	128,2989	137,2084
100	67,3276	70,0649	74,2219	77,9295	82,3581	90,1332	99,3341	109,1412	118,4980	124,3421	129,5612	135,8067	140,1695	149,4493
200	152,2410	156,4320	162,7280	168,2786	174,8353	186,1717	199,3337	213,1022	226,0210	233,9943	241,0579	249,4451	255,2642	267,5405
300	240,6634	245,9725	253,9123	260,8781	269,0679	283,1353	299,3336	316,1384	331,7885	341,3951	349,8745	359,9064	366,8444	381,4252
400	330,9028	337,1553	346,4818	354,6410	364,2074	380,5767	399,3336	418,6969	436,6490	447,6325	457,3055	468,7245	476,6064	493,1318
500	422,3034	429,3875	439,9360	449,1468	459,9261	478,3230	499,3335	520,9505	540,9303	553,1268	563,8515	576,4928	585,2066	603,4460
600	514,5289	522,3651	534,0186	544,1801	556,0560	576,2859	599,3335	622,9876	644,8004	658,0936	669,7692	683,5156	692,9816	712,7712
700	607,3795	615,9075	628,5772	639,6131	652,4974	674,4128	699,3335	724,8607	748,3591	762,6607	775,2107	789,9735	800,1314	821,3468
800	700,7250	709,8969	723,5126	735,3624	749,1853	772,6694		826,6040	851,6712	866,9114	880,2753	895,9843	906,7862	929,3289
900	794,4750	804,2518	818,7560	831,3702	846,0746	871,0321		928,2413	954,7819	970,9036	985,0320	1.001,6296	1.013,0364	1.036,8260
1000	888,5635	898,9125		927,5944	943,1326				1.057,7239	1.074,6794	1.089,5309	1.106,9690	1.118,9481	1.143,9171