Fundamentos de
Análisis Matemáticos

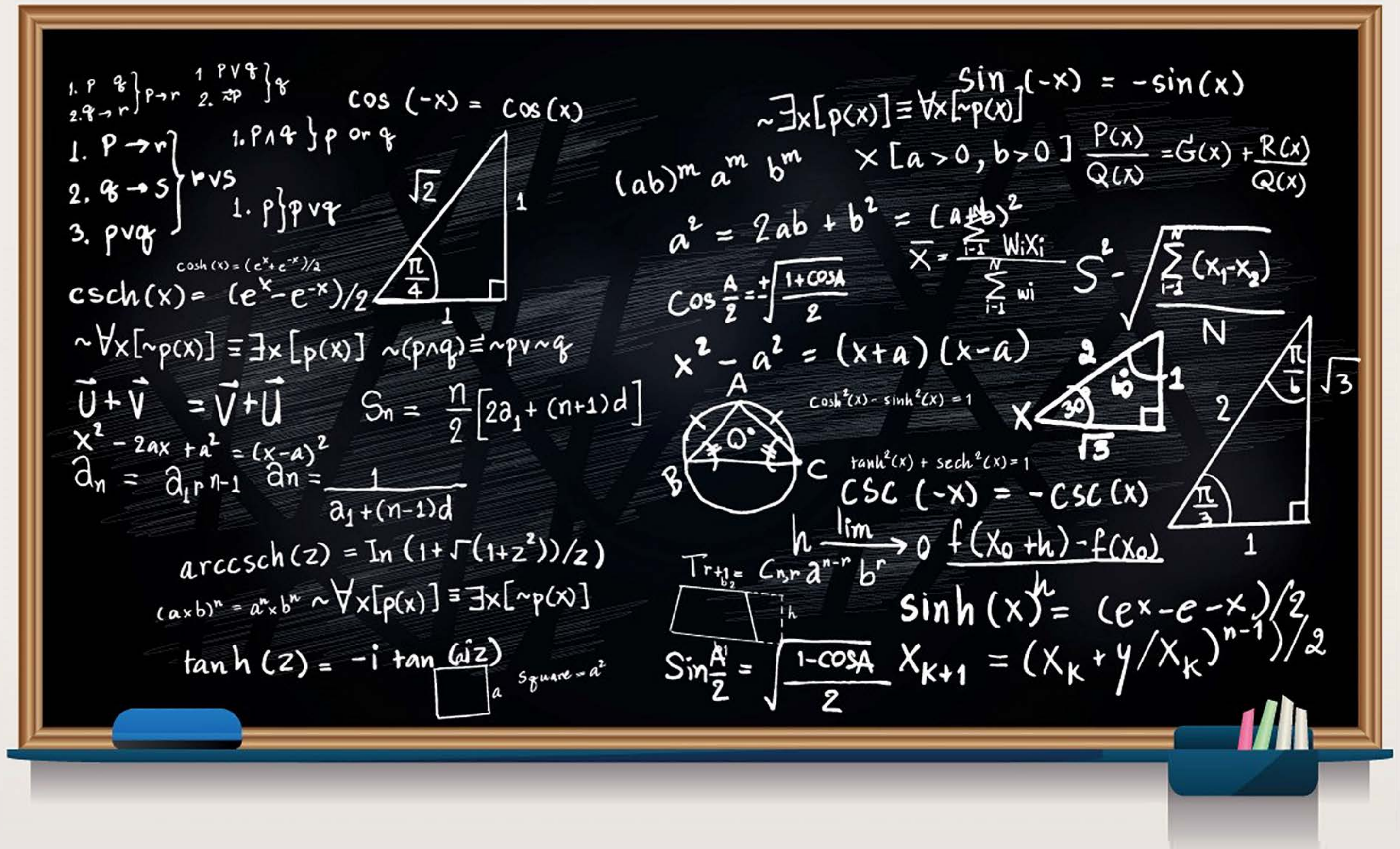
Escanée el código QR para conocer más títulos publicados por el Sello Editorial Universidad del Atlántico

ISBN: 978-958-5173-79-8

Universidad del Atlántico

Fundamentos de Análisis Matemáticos

Sello Editorial
UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO



Fundamentos de Análisis Matemáticos

JULIO CÉSAR ROMERO PABÓN
ROBERTO ENRIQUE FIGUEROA
GABRIEL MAURICIO VERGARA RÍOS

Fundamentos de
Análisis Matemáticos

Romero Pabón, Julio Cesar -- Figueroa Molina, Roberto Enrique -- Vergara Ríos, Gabriel Mauricio.

Fundamentos de análisis matemático. / Julio Cesar Romero Pabón, Roberto Enrique Figueroa Molina, Gabriel Mauricio Vergara Ríos – 1 edición. – Puerto Colombia, Colombia: Sello Editorial Universidad del Atlántico, 2021.

Incluye bibliografía. Ilustraciones.

ISBN: 978-958-5173-79-8 (Digital)

1. Análisis matemáticos – Problemas, ejercicios. I. Autor. II. Título.

CDD: 510 R763

Los datos consignados en la catalogación fueron tomados del registro del título en la Cámara del Libro en fecha 2021-12-22, bajo radicado No. 427273 [Consultado el 8 de enero de 2022 según registro adjunto a la solicitud de catalogación].

FUNDAMENTOS DE ANÁLISIS MATEMÁTICOS
Autoría: Julio César Romero Pabón - Roberto Enrique Figueroa
Gabriel Mauricio Vergara Ríos

Edición:
Sello Editorial Universidad del Atlántico
Km 7 Vía Puerto Colombia (Atlántico)
www.uniatlantico.edu.co
publicaciones@mail.uniatlantico.edu.co

Producción Editorial:
Calidad Grá ca S.A.
Av. Circunvalar Calle 110 No. 6QSN-522
PBX: 336 8000
lsalcedo calidadgra ca.com.co
Barranquilla, Colombia

Publicación Electrónica
Barranquilla (Colombia), 2021

Cómo citar este libro:
Romero Pabón, J. C., Figueroa, R. E. y Vergara Ríos, G. (2021). *Fundamentos de análisis matemáticos.* Barranquilla: Sello Editorial Universidad del Atlántico.

Universidad del Atlántico

Fundamentos de **Análisis Matemáticos**

JULIO CÉSAR ROMERO PABÓN
ROBERTO ENRIQUE FIGUEROA
GABRIEL MAURICIO VERGARA RÍOS

Sello Editorial
UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

CONTENIDO

PRESENTACIÓN 9

PRÓLOGO 11

INTRODUCCIÓN 13

1. ESPACIOS MÉTRICOS Y ESPACIOS NORMADOS 15
1.1. Espacios métricos 15
1.1.1. Definición 16
1.1.2. Ejemplos 16
1.1.3. Definición 16
1.1.4. Definición 17
1.1.5. Ejemplos de espacios métricos 17

PRÁCTICA Nº 1 26

2. TOPOLOGÍA EN ESPACIOS MÉTRICOS 29
2.1. Definiciones 29
2.2. Ejemplos 29
2.3 Definiciones 30
2.4. Ejemplos 31
2.5. Teorema 31
2.6. Teorema 33
2.7. Definición 33
2.8. Ejemplos 34
2.9. Teorema 34
2.10. Teorema 35
2.11. Definición 35

2.12. Ejemplos ... 36
2.13. Definición ... 36

PRÁCTICA Nº 2 ... 37

3. ESPACIOS Y CONJUNTOS COMPACTOS ... 39
3.1. Definición ... 39
3.2. Ejemplos ... 40
3.3. Teorema ... 40
3.4. Teorema ... 40
3.5. Definición ... 41
3.6. Teorema ... 41

4. ESPACIOS Y CONJUNTOS CONEXOS ... 43
4.1. Definición ... 43
4.2. Ejemplos ... 43
4.3. Teorema ... 44
4.4. Definición ... 44
4.5. Teorema de conexidad en $\mathbb{R}$ ... 44

5. SUCESIONES Y ESPACIOS COMPLETOS ... 47
5.1. Definiciones ... 47
5.2. Teorema ... 47
5.3. Teorema ... 48
5.4. Teorema ... 48
5.5. Definición ... 49
5.6. Ejemplo ... 49
5.7. Definición ... 49
5.8. Teorema ... 49
5.9. Ejemplos ... 50
5.10. Definición ... 50

PRÁCTICA Nº 3 ... 51

6. FUNCIONES ENTRE ESPACIOS MÉTRICOS ... 53
6.1. Definiciones ... 53

7. LÍMITE ... 55
7.1. Definición ... 55
7.2. Teorema ... 55
7.3. Teorema ... 56
7.4. Teorema ... 57
7.5. Definición ... 57

7.6. Teorema 58
7.7. Ejemplos 58

8. CONTINUIDAD 59
8.1. Definición 59
8.2. Ejemplos 59
8.3. Definición 60
8.4. Teorema 60
8.5. Teorema 60
8.6. Ejemplo 61
8.7. Teorema (continuidad y compacidad) 61
8.8. Definiciones 62
8.9. Teorema 62
8.10. Teorema 62
8.11. Teorema (continuidad y conexidad) 63
8.12. Corolario (propiedad de los valores intermedios) 63

9. CONTINUIDAD UNIFORME 65
9.1. Definición 65
9.2. Ejemplos 65
9.3. Teorema 66
9.4. Definición 66

10. TEOREMA DEL PUNTO FIJO 67
10.1. Definiciones 67
10.2. Teorema 67
10.3. Teorema (punto fijo) 67
10.4. Corolario 69

PRÁCTICA Nº 4 71

11. ESPACIOS NORMADOS 73
11.1. Definición 73
11.2. Teorema 74
11.3. Definición 75

12. ESPACIOS CON PRODUCTO ESCALAR 77
12.1. Definición 77
12.2. Teorema 77
12.3. Teorema 78
12.4. Definición 80
12.5. Ejemplo 81

13. DERIVACIÓN 83

13.1. Definición 84

13.2. Teorema 85

13.3. Ejemplos 85

13.4. Cálculo de derivadas 85

13.5. Teorema 86

13.6. Definición 87

13.7. Teorema 87

13.8. Teorema (Teorema de la función inversa) 87

13.9. Ejemplo 88

13.10. Teorema (regla de la cadena) 89

13.11. Ejemplo 90

13.12. Definición 90

13.13. Teorema 90

13.14. Teorema (Teorema de Rolle) 91

13.15. Teorema 91

13.16. Teorema (Teorema de Cauchy) 92

13.17. Teorema (Teorema del valor medio) 92

13.17. Teorema 93

13.18. Teorema 93

13.19. Teorema 94

13.20. Teorema (Regla de L'Hˆopital) 94

BIBLIOGRAFÍA 97

ACERCA DE LOS AUTORES 99

PRESENTACIÓN

Esta obra está orientada a fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje del análisis real en las instituciones de educación superior. Para que los estudiantes y docentes dispongan de un material bibliográfico cuando estén solucionando un problema en sus investigaciones o en el trabajo, el libro contempla reglas, leyes y teoremas que son útiles para todos los campos del conocimiento, porque con ellos es posible comprender y aplicar tópicos relacionados con el análisis matemático y sus aplicaciones.

La intención de esta obra es presentar un material sobre análisis real completo y fácil de comprender, para llegar no solo a los interesados en entender el análisis matemático, que tanto se usa y se aplica en la realidad, sino también a los estudiantes que no estén interesados en el análisis matemático como disciplina, pero sí como herramienta útil en otras áreas de conocimiento.

El mayor esfuerzo de este proyecto sobre la enseñanza y aprendizaje sobre el análisis matemático dirigido al estudiante, pues en el libro los temas son presentados con una gran variedad de estrategias encaminadas a brindar un escenario significativo para el aprendizaje del análisis real. Es por estas razones que los ejemplos fueron diseñados y seleccionados para que el estudiante o lector comprenda y aplique fácilmente cada uno de los tópicos tratados en esta obra.

Docentes expertos en la materia se encargaron de la revisión de: la teoría, los ejemplos, las demostraciones, los talleres y aplicaciones, que contribuyeran con potenciar este proyecto de matemáticas. Es por esto, que hoy consideramos conveniente presentar esta obra, porque cada uno de sus capítulos fue elaborado para que el lector conciba y aplique cada uno de los temas sobre la lógica tratados en este libro.

PRÓLOGO

Esta obra sobre los fundamentos de análisis matemático fue diseñada como una guía de estudio para los estudiantes y docentes universitarios que estén cursando o necesiten aplicar los tópicos sobre análisis real. Los conceptos, ejemplos y los problemas resueltos son explicados y demostrados estratégicamente, lo cual se puede evidenciar cuando se analiza o demuestra un problema o teorema, el cual es realizado paso a paso en cada uno de los temas tratados en esta obra. Además, se incorporan definiciones, reglas, leyes y teoremas que son fundamentales para abordar la solución de los problemas.

Mi experiencia como docente de matemática durante muchos años, me ha enseñado que esta materia es difícil de aprender sin analizarla y comprenderla, por ello es necesario practicarla y aplicarla; por tal motivo, se han incorporado al final de cada capítulo un grupo de problemas propuestos, con el fin de que el estudiante y el docente los realicen, para que así pueden reconstruir un aprendizaje sólido sobre el análisis real, a través de las situaciones significativas que son expresadas en los conceptos, ejemplos, ejercicios o talleres de aplicación.

LOS AUTORES

INTRODUCCIÓN

Este libro ha sido elaborado a partir de las notas de clase de los cursos de análisis real que he impartido en las instituciones de educación superior. El objetivo de esta obra es servir como material de apoyo académico para la orientación de los estudiantes acerca del análisis matemático y sus aplicaciones. Es por esta razón que se ha seleccionado este material para la construcción de esta obra académica, la forma como se ha diseñado y ordenado este libro están encaminados a un modelo didáctico que facilite al estudiante la comprensión de temas tan importantes y complejos tratados aquí.

Esta obra está dirigida principalmente a los estudiantes universitarios que cursan o estudian el análisis matemático, pero puede ser útil también a alumnos de otras titulaciones afines con la matemática y sus aplicaciones. Este trabajo ha surgido de la experiencia docente del autor. En función de estas circunstancias, se ha procurado un estilo de exposición detallado y pedagógico, incluyendo numerosos conceptos, teoremas, ejercicios, aplicaciones y talleres.

En lo referente a los contenidos, se han diseñado diez grandes tópicos que comprenden los siguientes temas: espacios métricos y espacios normados, topología en espacios métricos, espacios y conjuntos compactos, espacios y conjuntos conexos, sucesiones y espacios completos, funciones entre espacios métricos, límite, continuidad, continuidad uniforme y el análisis e importancia del teorema del punto fijo. En cada una de estos temas están presente los siguientes aspectos: las teorías fundamentales, teoremas, demostraciones, ejemplos o ejercicios para reafirmar los conceptos y los talleres para desarrollar las competencias adquiridas en cada una de estas unidades. Todo este trabajo se ha redactado con una especial dedicación para que el lector se sienta bien ilustrado en los diferentes tópicos que conforman este libro de Análisis Matemático.

1. ESPACIOS MÉTRICOS Y ESPACIOS NORMADOS

La idea de espacios abstractos fue introducida en 1906 por Fréchet, con el objeto de tratar de forma unificada problemas procedentes de distintas áreas que mostraban características y propiedades similares. En esta parte del curso estudiaremos los espacios métricos y los espacios normados, espacios básicos en todo el análisis matemático, no pretendemos hacer un estudio exhaustivo de ellos, pero estudiaremos los aspectos necesarios para abordar algunos problemas que serán tratados posteriormente.

Los espacios métricos surgen al hacer la abstracción de ciertas propiedades de los números reales, las cuales dan origen a la definición de distancia o métrica sobre un conjunto. Los espacios normados son una clase particular de espacios métricos. Se trata de espacios de fundamental importancia en toda la matemática, ya que en ellos se hallan superpuestas las estructuras básicas del álgebra lineal "espacio vectorial" y la estructura básica del análisis matemático "espacio métrico".

1.1. Espacios métricos

Sea X un conjunto no vacío. Se llama distancia o métrica en X a toda aplicación:

$$d: X \times X \rightarrow R, tal\ que\ , \forall\ x, y, z \in X\ se\ tiene:$$

$$\begin{array}{llll} (D.1) & d(x,y) = 0\ si, y\ solo\ si\ \ x = y & \\ (D.2) & d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y). & (Desigualdad\ triangular) \\ (D.3) & d(x,y) = d(y,x) & (Simetría) \end{array}$$

El par (X,d) es llamado espacio métrico y a los elementos de X se les llama puntos. Cuando no haya confusión hablaremos de espacio métrico X en vez de (X,d).

Como consecuencia inmediata de la definición de espacio métrico, se obtiene:

$$(D.4) \quad d(x,y) > 0 \; si \; x \neq y \qquad\qquad (Definida\ positiva)$$

1.1.1. Definición

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$.

- Si A está acotado superiormente, llamaremos supremo de A y lo denotaremos por $sup(A)$ a la mínima o menor cota superior de A.
- Si A está acotado inferiormente, llamaremos ínfimo de A y lo denotaremos por $inf\,(A)$, a la máxima o mayor cota inferior de A.

1.1.2. Ejemplos

Consideremos en $\mathbb{R}$ al subconjunto $A = \left\{\frac{1}{n} \quad / \quad n \in \mathbb{N}\right\}$. Es claro que el conjunto A está acotado superior o inferiormente y se tiene que: $\sup(A) = 1 \in A$, mientras que $inf\ (A) = 0 \notin A$

1.1.3. Definición

Sea (X,d) un espacio métrico.

- Si A es un subconjunto no vacío de X, llamaremos diámetro de A al elemento de $\mathbb{R}^{\infty}\left(= \mathbb{R} \cup (-\infty,\infty)\right)$ definido por:

  $$\delta = sup\{d(x,y) \quad / \quad x,y \in A\}$$

  Si $\delta(A) < \infty$, se dice que A es acotado. Resulta evidente, entonces, que la unión finita de conjuntos acotados es un conjunto acotado.

- Si A y B son subconjuntos de X, se llama distancia o separación entre A y B al número real no negativo definido por:

  $$d(A,B) = inf\ \{d(x,y)\ /\ x \in A, y \in B\}$$

1.1.4. Definición

Sean (X, d_x) y (Y, d_y) espacios métricos. Se llama espacio métrico producto al espacio $(X \times Y, d)$, cuyos puntos son elementos del conjunto $X \times Y = \{(x,y) \,/\, x \in X, y \in Y\}$ y donde la métrica $d : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$ está definida por:

$$d[(x_1,y_1),(x_2,y_2)] = \left\{|d_x(x_1,x_2)|^2 + \left|d_y(y_1,y_2)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

1.1.5. Ejemplos de espacios métricos

A continuación se presentan una serie de ejemplos de espacios métricos con los cuales nos estaremos tropezando en el desarrollo del curso.

a. Sea X un conjunto no vacío. Definimos la función $d: X \times X \to \mathbb{R}$ por:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}$$

Esta función define una métrica en X, pues las propiedades (D.1), (D.2) y (D.3) resultan fácilmente comprobables. Esta métrica es llamada la métrica discreta y el espacio métrico (X, d) se conoce como **el espacio métrico discreto**.

b. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la métrica dada por la distancia del valor absoluto, es un espacio métrico, esto es: (X, d) donde $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ viene dado por: $d(x,y) = |x - y|$ Es un espacio métrico, ya que si $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$, cumpliéndose así la propiedad (D.1). La propiedad (D.3) resulta inmediata. Probemos ahora (D.2), es decir, si $x, y, z \in \mathbb{R}$ debemos ver que $d(x,y) \leq d(x,z) + d(x,z)$. En efecto, $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$ por desigualdad triangular del valor absoluto en $\mathbb{R}$.

c. Consideremos a $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R},\ \boldsymbol{n}\ veces$ con la métrica producto:

$$d(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}, donde$$

$$x = (x_1, x_{2,\ldots,}x_n)$$

$$y = (y_1, y_{2,\ldots,}y_n)$$

Claramente, d cumple con las propiedades (D.1) y (D.3). Probemos entonces la propiedad (D.2), esto es, si $x, y, z \in \mathbb{R}^n$;

$$x = (x_1, x_{2,\dots,} x_n), y = (y_1, y_{2,\dots,} y_n), z = (z_1, z_{2,\dots,} z_n)$$

Entonces:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

Sustituyendo:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

En efecto, si llamamos $a_i = x_i - z_i$ y $b_i = z_i - y_i$, entonces $a_i + b_i = x_i - y_i$. Luego:

$$[d(x,y)]^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 + \sum_{i=1}^{n} {b_i}^2$$

$$+2\left|\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 + \sum_{i=1}^{n} {b_i}^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

Tomando raíz cuadrada a ambos lados, resulta la propiedad (D.2). Así $(\mathbb{R}^n, d)$ resulta un espacio métrico.

NOTA: La desigualdad

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Utilizada en la prueba de la propiedad (D.2) es llamada: ***Desigualdad de Cauchy-Shwarz***, para $\mathbb{R}^n(|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|)$

d. Consideremos el espacio de las funciones reales, continuas sobre un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$:

$$C[a,b] = \{f: [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, continuas\}$$

La función:

$$d: C[a,b] \times C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, definida\ por:$$

$$d(f,g) = \max_{x\in[a,b]}\{|f(x) - g(x)|\}$$

Define una métrica sobre $C[a,b]$. En efecto, la propiedad (D.1) y la (D.3) son claras. Para la propiedad (D.2), obsérvese que si $f, g, h \in C[a,b]$:

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|,$$

$$\forall x \in [a,b], además\ si\ \varphi\ y\ \psi\ \in C[a,b], entonces,$$

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \max_{x\in[a,b]}\{\varphi(x) - \psi(x)\}$$

Así que:

$$\max_{x\in[a,b]}\{f(x) - g(x)\} \leq \max_{x\in[a,b]}\{f(x) - h(x)\} + \max_{x\in[a,b]}\{h(x) - g(x)\},$$

$$esto\ es:$$

$$d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$$

e. El espacio $(C_b[a,b], d)$ de las funciones reales, acotadas sobre un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$, con la métrica del supremo, es también un espacio métrico, esto es:

$$C_b[a,b] = \{f: [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, acotadas\}$$

$$d(f,g) = \max_{x\in[a,b]}\{|f(x) - g(x)|\}$$

f. Consideremos sobre $C[a,b]$ la función definida por:

$$d_1(f,g)=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

Esta función define una métrica $C[a,b]$, pues (D.1) y (D.3) son fáciles de comprobar. Para ver (D.2) obsérvese que:

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx \leq \int_a^b (|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|)dx$$
$$=\int_a^b |f(x)-h(x)|\,dx+\int_a^b |h(x)-g(x)|\,dx, \qquad así,$$
$$d(f,g)\leq d(f,h)+d(h,g)$$

g. Consideremos, ahora, sobre $C[a,b]$ la función:

$$d_2(f,g)=\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Entonces $(C_b[a,b],d_2)$ es un espacio métrico. La prueba (D.1) y (D.3) son como en el caso anterior. Para la comprobación de (D.2), hay que ver que:

$$\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b |f(x)-h(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b |h(x)-g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Para ello, se tiene que:

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|^2\,dx \tag{1}$$
$$=\int_a^b |f(x)-g(x)+h(x)-g(x)|^2\,dx$$
$$\leq \int_a^b [|f(x)-g(x)|^2+|h(x)-g(x)|^2+2|f(x)-h(x)|\cdot|h(x)-g(x)|]\,dx$$

Ahora bien,

$$\varphi(x) = f(x) - h(x), \qquad \psi(x) = h(x) - g(x) \text{ y } \lambda \in \mathbb{R}$$

Entonces:

$$0 \leq \int_a^b |\varphi(x) - \psi(x)|^2 \, dx$$
$$= \lambda^2 \int_a^b \psi^2(x)\, dx + 2\lambda \int_a^b \varphi(x) \cdot \psi(x)\, dx + \int_a^b \varphi^2(x)\, dx$$

Como este polinomio en λ es siempre no negativo (≥ 0) su discriminante debe ser siempre no positiva (≤ 0), resultando:

$$\int_a^b \varphi(x) \cdot \psi(x)\, dx \leq \left(\int_a^b \varphi^2(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b \psi^2(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(2)}$$

Aplicando (2) en (1) obtenemos:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx$$
$$\leq \int_a^b |f(x) - h(x)|^2 \, dx + \int_a^b |h(x) - g(x)|^2 \, dx$$
$$+2 \left(\int_a^b |f(x) - h(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b |h(x) - g(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left[\left(\int_a^b |f(x) - h(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b |h(x) - g(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

Tomando ahora la raíz cuadrada a ambos lados de esta última desigualdad, obtenemos la propiedad (D.2)

NOTA: La desigualdad (2) probada anteriormente, es la ***Desigualdad de Cauchy-Shwarz***, para integrales.

h. Sea (X, d) un espacio métrico. Definimos la función $d^*: X \times X: \to \mathbb{R}$, mediante:

$$d^*(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

Esta función, también define una métrica sobre X. En efecto, la propiedad (D.1) y la (D.3) resultan inmediatas tomando en cuenta las propiedades para d. Probemos entonces (D.2), esto es $d^*(x,y) \leq d^*(x,z) + d^*(z,y), \forall\, x,y,z \in X$. En otras palabras, debemos probar que:

$$\frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)}{1 + d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1 + d(z,y)} \qquad \textbf{(3)}$$

Probaremos, primeramente, que si tenemos tres números reales $a, b, c \geq 0$ y $c \leq a + b$ entonces:

$$\frac{c}{1 + c} \leq \frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b} \qquad \textbf{(4)}$$

Para ello, consideraremos la función: $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Definida por:

$F(x) = \frac{1}{1+x}, \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$, así que f es estrictamente creciente, y como $c \leq a + b \Longrightarrow f(c) \leq f(a + b)$, de donde:

$$\frac{c}{1 + c} \leq \frac{a + b}{1 + a + b} = \frac{a}{1 + a + b} + \frac{b}{1 + a + b} \leq \frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b}$$

Para finalizar observemos que, por ser d métrica sobre X se cumple: $\mathrm{d(x,y)} \leq \mathrm{d(x,z)} + \mathrm{d(z,y)}, \forall\, \mathrm{x,y,z} \in \mathrm{X}$. Ahora si tomamos como $c = d(x,y),\ a = d(x,z)$ y $b = d(z,y)$ se tiene las condiciones para la desigualdad (4) y en consecuencia la desigualdad (3).

NOTA: Obsérvese que en el espacio métrico (X, d^*) todo subconjunto $A \subset X$ es un conjunto acotado, pues, el diámetro de A es (definición 1.2.3-i)

$$\delta(A) = sup\{d^*(x,y)/x, y \in A\} \leq sup\left\{\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} / x, y \in A\right\} < 1$$

i. Consideremos el espacio de todas las sucesiones de números reales de cuadrado sumable:

$$l_2 = \left\{x = (x_n)_{n=1}^{\infty}/x_n \in \mathbb{R}, \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty\right\}$$

Definimos $d: l_2 \times l_2 \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$d(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Para: $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2$

Entonces (l_2, d) es un espacio métrico.

En efecto, probemos primeramente que la función d está bien definida, esto es, que $d(x,y)$ define un número real $\forall\, x, y \in l_2$, en otras palabras, se tiene que probar que:

$$\forall\, x, y \in l_2 \Rightarrow x - y = (x_n - y_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2$$

Para probar esto, obsérvese que si $a, b \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq (|a| - |b|)^2 = a^2 + b^2 - 2|a| \cdot |b| \Rightarrow |a| \cdot |b| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

De modo que si $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n$ es absolutamente convergente y por lo tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 - 2\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n$$

Es una serie convergente, ya que las tres series del lado derecho son absolutamente convergentes. Así que $d(x,y) \in \mathbb{R}$.

Probemos ahora que d define una métrica sobre l_2. Probaremos la propiedad (D.2), ya que (D.1) y (D.3) son inmediatas. Se quiere probar que:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \forall\, x, y, z \in l_2$$

Esto es:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - z_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n - y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(5)}$$

Al igual como se hizo en el ejemplo g), si $\alpha, \beta \in l_2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \lambda \cdot \beta_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + 2\lambda \cdot \alpha_n \beta_n + \lambda^2 \cdot \beta_n^2)^2$$

$$= \lambda^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 + 2\lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \qquad \textbf{(6)}$$

Luego el discriminante del polinomio en λ (6) debe ser no positivo (≤0), y resulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(7)}$$

Ahora bien, si en (5) hacemos:

$$\alpha_n = x_n - z_n \quad \text{y} \quad \beta_n = z_n - y_n \Longrightarrow \alpha, \beta \in l_2$$

y se tiene que:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n - \beta_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Pero

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n - \beta_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2 + 2\alpha_n\beta_n + \beta_n^2)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n + \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2$$

Aplicando el resultado (7), se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n - \beta_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2 + 2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

Aplicando raíz cuadrada ambos lados de la desigualdad anterior, obtenemos (D.2).

PRÁCTICA Nº 1

1. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que $\forall\ x, y, z, w \in X$, se cumple la desigualdad tetraédrica:

$$|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(y,w)$$

2. Determine cuál de las siguientes funciones define una métrica sobre $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{d(x,y)} = |x^2 - y^2|$$
$$\mathrm{d(x,y)} = |x^3 - y^3|$$
$$\mathrm{d(x,y)} = \sqrt{|x - y|}$$

3. Pruebe que las siguientes funciones son métricas sobre $\mathbb{R}^n$.

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|$$

$$d_\infty(x,y) = \max_{0 \leq x \leq n} \{|x_i - y_i|\}$$

Donde:

$$x = (x_1, x_{2,\dots,} x_n) \text{ y } \quad y = (y_1, y_{2,\dots,} y_n) \in \mathbb{R}^n$$

4. Considere el espacio de todas las sucesiones de números reales:

$$\mathfrak{X} = \{\mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty} / x_n \in \mathbb{R}\}$$

Y sea $d: \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$d(x.y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

Probar que $(\mathfrak{X}, \mathrm{d})$ es un espacio métrico.

(Sugerencia: Observe que la función d está bien definida, esto es, que $d(x,y) \in \mathbb{R}$, para verificar (D.2) observe el ejemplo h).

5. Sea (X, d) un espacio métrico. Definamos la función $d^{**}: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ por: $d^{**}(x, y) = min\{1, d(x, y)\}$

» Probar que (X, d^{**}) es también un espacio métrico y que todo subconjunto $A \subset X$ es un conjunto acotado.

6. Consideremos el espacio $\mathbb{R}^{\infty}$ y $f: \mathbb{R}^{\infty} \to [-1,1]$ definida por:

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{x}}{1 + |\mathrm{x}|} & \text{si x} \in \mathbb{R} \\ -1 & \text{si x} = -\infty \\ +1 & \text{si x} = +\infty \end{cases}$$

Probar que la función $d_f: \mathbb{R}^{\infty} \times \mathbb{R}^{\infty} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$ define una métrica sobre $\mathbb{R}^{\infty}$. Determine además, el valor de $\delta(\mathbb{R})$.

7. Pruebe que $\mathbb{R}^n$ con la distancia: $d_p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Donde $p \in \mathbb{N}, x = (x_1, x_{2,\dots,} x_n)$ e $y = (y_1, y_{2,\dots,} y_n) \in \mathbb{R}$ es un espacio métrico.

8. Considere sobre $C[a, b]$ la función: $d_p: C[a, b] \times C[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$d_p(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Probar que $(C[a, b], d_p)$ es un espacio métrico

2. TOPOLOGÍA EN ESPACIOS MÉTRICOS

Sea (X, d) un espacio métrico, $x_0 \in X \text{ y } r \text{ un número real, } r \geq 0.$

2.1. Definiciones

Llamaremos:

- $\textit{Bola abierta de centro } x_0 \textit{ y radio } r, \textit{al conjunto}:$
  $B(x_0, r) = \{x \in X \ / \ d(x, x_0) < r\}$
- $\textit{Bola cerrada de centro } x_0 \textit{ y radio } r, \textit{al conjunto}:$
  $\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X \ / \ d(x, x_0) \leq r\}$
- $\textit{Esfera de centro } x_0 \textit{ y radio } r, \textit{al conjunto}:$
  $S(x_0, r) = \{x \in X / d(x, x_0) = r\}$

2.2. Ejemplos

a. Consideremos el espacio métrico $(\mathbb{R}, \|)$, entonces:

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r) \ (\textit{Un intervalo abierto})$$
$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x - x_0| \leq r\} = (x_0 - r, x_0 + r) (\textit{Un intervalo cerrado})$$
$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x - x_0| < r\} = \begin{cases} x = x_0 - r \\ x = x_0 + r \end{cases} \qquad (\textit{Dos puntos})$$

b. En $\mathbb{R}^2$ con la métrica producto (Euclidea);

$$d[(x_1,y_1),(x_2,y_2)] = \sqrt{(x_1,y_1)^2 + (x_2,y_2)^2}$$

Si $p = (a,b)$ y $r > 0$, entonces:

$$B(p,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\} \ (Circ. abierta\ de\ centro. p\ y\ rad. r)$$

$$\bar{B}(p,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2\} (Circ. cerrado\ de\ centro. p\ y\ rad. r)$$

$$S(p,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 / (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\} \qquad (Circunf. de\ centro. p\ y\ rad. r)$$

c. Consideremos un conjunto $X \neq \emptyset$ y sobre la métrica discreta (ejemplo 1.1.5-a). Si $x_0 \in X$ y $r > 0$, se tiene :

$$B(x_0,r) = \begin{cases} \{x_0\} & si \ \ r \leq 1 \\ X & si \ \ r > 1 \end{cases}$$

$$\bar{B}(x_0,r) = \begin{cases} \{x_0\} & si \ \ r < 1 \\ X & si \ \ r \geq 1 \end{cases}$$

$$S(x_0,r) = \begin{cases} \emptyset & si \ \ r \neq 1 \\ X - \{x_0\} & si \ \ r = 1 \end{cases}$$

d. Consideremos a $\mathbb{R}^2$ con la métrica d_∞ (Práctica Nº 1, ejercicio 3-ii).

Si $p = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$, tenemos:

$$B(p,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 / max\{|x-a|, |y-b|\} < r\} = (a-r, a+r) \times (b-r, b+r)$$

$$\bar{B}(p,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 / max\{|x-a|, |y-b|\} \leq r\} = (a-r, a+r) \times (b-r, b+r)$$

$$S(p,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 / max\{|x-a|, |y-b|\} < r\}$$

$$= \{(x,y) / |x-a| = r, |y-b\} \leq r\} \cup \{(x,y) / |x-a| \leq r, |y-b\} = r\}$$

2.3 Definiciones

Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$.

1. Un punto $p \in A$ se llama punto interior de A si, y solo si, el conjunto A contiene alguna bola abierta centrada en p, esto es: si existe un $r > 0$ tal que $B(p,r) \subset A$. Al conjunto de todos los puntos interiores del conjunto A lo llamaremos el interior de A y lo denotaremos $\boldsymbol{A^{\circ}}$.

2. Un punto $q \in X$ se llama punto exterior de A si, y solo si, alguna bola abierta centrada en q, no contiene puntos de A, esto es: si existe un $r > 0$ tal que $B(q,r) \cap A = \emptyset$. Al conjunto de todos los puntos exteriores del conjunto A lo llamaremos el exterior de A y lo denotaremos por $\boldsymbol{ext(A)}$.

3. Un punto $q \in X$ se llama punto frontera de A si, y solo si, toda bola abierta centrada en q, contiene puntos de A y puntos exteriores de A. Al conjunto de todos los puntos frontera del conjunto A lo llamaremos la frontera de A y lo denotaremos por $C(\boldsymbol{A})$.

4. Un punto $q \in X$ se llama punto adherente, o punto clausura de A si, y solo si, toda bola abierta centrada en q, contiene, al menos un punto de A, esto es: si $\forall\, r > 0, \exists x \in A$ tal que $x \in B(q,r)$. Al conjunto de todos los puntos adherentes de A lo llamaremos la adherencia o la clausura de A y lo denotaremos por $\boldsymbol{\bar{A}}$. (Resulta claro, entonces, que $\bar{A} = A^{\circ} \cup \partial(A)$).

5. Un subconjunto A de X se dice que es un conjunto abierto en X si, y solo si, todos sus puntos son puntos interiores, esto es $A = A^{\circ}$.

6. Un subconjunto F de X se dice que es un conjunto cerrado en X si, y solo si, su complementario en X, $A^{C} = X - F$, es un conjunto abierto.

2.4. Ejemplos

a. Sea (X,d) un espacio métrico. Una bola abierta en X es un conjunto abierto.

b. En el espacio métrico discreto (X,d), cualquier subconjunto A contenido X es un conjunto abierto, ya que: $\forall\, a \in A, B(a,1) = \{a\} \subset A$, lo que implica que $A = A^{\circ}$ como consecuencia de lo anterior, tenemos que, todo subconjunto $B \subset X$ resulta un conjunto cerrado, pues su complementario $A = X - B$ es un conjunto abierto.

2.5. Teorema

Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces:

1. $\emptyset$ y X son conjuntos abiertos.
2. La unión de una familia cualquiera de conjuntos abiertos, es un conjunto abierto.
3. La intersección de una familia finita de conjuntos abiertos, es un conjunto abierto.
4. La unión de una familia finita de conjuntos cerrados, es un conjunto cerrado.
5. La intersección de una familia cualquiera de conjuntos cerrados, es un conjunto cerrado.

DEMOSTRACIÓN

1. Es inmediata.
2. Sea I un conjunto de índices, $(\mathrm{A}_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de conjuntos abiertos en X, y sea

$$A = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$$

Si $p \in A, \exists \alpha \in I \,/\, p \in \mathrm{A}_\alpha$. Como los A_α son abiertos, $\exists\, r > 0$, tal que, $B(p,r) \subset \mathrm{A}_\alpha \subset A \Rightarrow p \in A^{\circ} \Rightarrow A = A^{\circ}$.

3. Sea $(A_i)_{i=1}^{n}$ una familia finita de abiertos en X, y

$$A = \bigcap_{n=1}^{n} A_i$$

Si $p \in A$, entonces, $p \in A_i$, para $1 \le i \le n$ como cada A_i es abierto, $\exists r_1, r_2, \ldots\ \ y\ \ r_n > 0$, tal que: $B(p,r_i) \subset A_i$, para cada i. Ahora bien, si elegimos $r = min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \Longrightarrow B(p,r) \subset B(p,r_i) \subset A_i$, para cada $i, \Longrightarrow B(p,r) \subset A \Longrightarrow p \in A^{\circ} \Longrightarrow A = A^{\circ}$.

NOTA: La intersección de una familia cualquiera de conjuntos abiertos, en general no es un conjunto abierto. En efecto, consideremos en $\mathbb{R}$ la familia de intervalos abiertos: $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}$. Los A_n son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$, pero: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{\emptyset\}$, el cual no es abierto en $\mathbb{R}$.

Consecuentemente, la unión de una familia infinita de conjuntos cerrados, en general, no es un conjunto cerrado.

2.6. Teorema

Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto $F \subset X$ es un conjunto cerrado si, y solo si, $F = \overline{F}$

DEMOSTRACIÓN

$\Longrightarrow$ Supongamos, primeramente, que $F \subset X$ es un conjunto cerrado. Como $F \subset \overline{F}$, bastará mostrar que $\overline{F} \subset F$, para ello, observemos que si $p \in \overline{F}$ y $p \notin F$, entonces, $p \in X - F$ el cual es un conjunto abierto, así que, $\exists\, B(p) \subset X - F \Longrightarrow B(p) \cap F = \emptyset$; pero esto contradice el que p sea punto adherente de $F(p \in \overline{F})$. Luego, $p \in F$ y por lo tanto $\overline{F} \subset F$.

$\Longleftarrow$ Supongamos que $F = \overline{F}$ y consideremos al conjunto $A = X - F$. Probaremos que A es abierto. Procederemos por el absurdo, si A no fuese abierto, $\exists p \in A$ tal que: $B(p) \cap F \neq \emptyset$, para cualquier bola abierta de centro p, esto implica que $p \in \overline{F} = F$, absurdo.

2.7. Definición

Sea (X, d) un espacio métrico.

1. Un subconjunto $V \subset X$ se dice que es un entorno del punto $a \in X^*$ si, y solo si, existe un conjunto abierto $A \subset X$ tal que $a \in A \subset V$. Si V es abierto, el entorno se dice entorno abierto.

2. Un punto $A \in X$ se dice que es punto de acumulación del conjunto $A \subset X$ si, sólo si, todo entorno V de A contiene puntos de A distintos de a. Es decir, $a \in X$ es punto de acumulación de A si, y solo si, es punto adherente a $A - \{a\}$. El conjunto de los puntos de acumulación de A se llama conjunto derivado de A y lo denotamos por A^d.

3. Un punto $a \in A \subset X$ se dice que es un punto aislado de A si, y solo si, existe un entorno V de a tal que, $V \cap A = \{a\}$. El conjunto de puntos aislados de A lo denotamos por A^i.

4. Un subconjunto $A \subset X$ se dice que es denso en $B \subset X$ si, y solo si, $B \subset \bar{A}$. En particular, A se dice que es denso si, y solo si, $\bar{A} = X$.

5. El espacio X se dice que es separable si, y solo si, existe un subconjunto $D \subset X$ que es denso y numerable.

2.8. Ejemplos

a. El conjunto de los números racionales $(\mathbb{Q})$ es un subconjunto denso de $\mathbb{R}(\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R})$. En consecuencia, como $\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable, $\mathbb{R}$ resulta ser separable.

b. Consideremos en $\mathbb{R}$ el subconjunto $A = \left\{\frac{1}{n}, con\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Claramente, $1 \in A$ es un punto aislado de $A(1 \in A^{l})$ y $0 \notin A$ es un punto de acumulación de $A(0 \in A^{d})$.

c. Sea A un subconjunto del espacio métrico X. Si $a \in A$, toda bola abierta de centro en a es un entorno abierto de a.

d. Consideremos el espacio métrico $\mathbb{R}$ con la métrica del valor absoluto. El subintervalo $I = [0,1) \subset \mathbb{R}$ es un subespacio métrico de $\mathbb{R}$, con la métrica inducida. Obsérvese que el conjunto $A = [0, \frac{1}{2})$ no es abierto en $\mathbb{R}$, sin embargo, A es abierto en el subespacio I, ya que la bola abierta de centro 0 y radio $\frac{1}{2}$ en I es $B(0, \frac{1}{2})$ $\left[0, \frac{1}{2}\right) \subset I$. Así mismo, el conjunto $F = [\frac{1}{2}, 1)$ resulta cerrado en I pero no lo es en $\mathbb{R}$. Es decir, el carácter de ser abierto o cerrado es relativo al espacio ambiente al que nos estemos refiriendo, (ver Teorema 2.10 y ejercicio 4 de la práctica Nº 2)

2.9. Teorema

Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ .Entonces:

1. $\bar{A} = A^{d} \cup A^{l}$.

2. A es cerrado si, y solo si $A^{d} \subset A$.

3. Si $a \in A^{d}$, todo entorno V de a contiene infinitos puntos de A.

DEMOSTRACIÓN

1. Sea $a \in \bar{A}. \forall r > 0, B(a, r) \cap A = \emptyset$ ya que por lo menos tiene al punto a. De modo que: si $B(a, r) \cap A = \{a\}$, para algún r, entonces $a \in A^{l}$. Por otro lado, si $\forall r > 0, existe\ un\ x \in A, x \neq a$, tal que, $x \in B(a, r) \cap A$, entonces $a \in A^{d}$ y tenemos que $\bar{A} = A^{d} \cup A^{l}$. La otra inclusión es inmediata.

2. Si A es cerrado, por el teorema (1.3.7) $\bar{A} = A$, así que por la parte anterior $A^{d} \subset A$. Supongamos ahora que $A^{d} \subset A$, entonces, si $a \in \bar{A} \Longrightarrow a \in A^{d}\ \ o\ \ a \in A^{l}$.

3. Supongamos que existe un entorno $V\ de\ a \in A^d, tal\ que\ V \cap A = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$. Entonces, si $r = min_{1\leq i\leq n}\{d(a, x_i)\}$, la $B(a, \frac{r}{2})$ es un entorno abierto de a que no contiene puntos de A distintos de a, absurdo pues $a \in A^d$.

2.10. Teorema

Sea (X, d) un espacio métrico y $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$. Un subconjunto $\mathrm{A} \subset \mathrm{Y}$ es abierto en el subespacio (Y, d) si, y solo si existe un abierto $\Omega \subset \mathrm{X}$ tal que $\mathrm{A} = \Omega \cap \mathrm{Y}$.

DEMOSTRACIÓN

$\Longrightarrow$ Supongamos, $A \subset Y$ es abierto en el subespacio (Y,d), entonces, para cada $a \in A$ existe una bola abierta en Y y contenida en A, $B_Y(a, r_a) = \{y \in Y / d(a, y) < r_a\} = \{y \in X / d(a, y) < r_a\} \cap Y = B_X(a, r_a) \cap Y$.

Sea:

$$\Omega = \bigcup_{a \in A} B_X(a, r_a)$$

Resulta, así que: Ω es abierto en X (ver Teorema 1.2.5, ii) y que $A = \Omega \cap Y$.

$\Longleftarrow$ Recíprocamente, sea $\Omega \subset X$ abierto tal que $A = \Omega \cap Y$, y sea $a \in A$, entonces $a \in \Omega$ y existe un $r_a > 0$ tal que $B_X(a, r_a) \subset \Omega$. Luego: $B_Y(a, r_a) = B_X(a, r_a) \cap Y \subset A$, lo que prueba que $a \in A^\circ \Longrightarrow A$ es abierto en Y.

2.11. Definición

Sea X un conjunto. Se llama topología en X a una familia Υ de subconjuntos de X que satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\emptyset\ y\ X$ pertenecen a Υ.

2. Si $\{T_i\}_{i \in I} \in \Upsilon$, entonces,

$$\bigcup_{i \in I} T_i \in \Upsilon$$

3. Si $\{\mathrm{T_i}\}_{\mathrm{i}\in 1}^{\mathrm{n}} \in \Upsilon$, entonces

$$\bigcap_{i=1}^{n} T_i \in \Upsilon$$

Al par (X, Υ) se le llama **espacio topológico** y a los elementos de Υ **conjuntos abiertos**.

2.12. Ejemplos

- **a.** Como hemos visto anteriormente, si (X, d) es un espacio métrico, la distancia d nos permite definir una topología sobre X que se conoce como la **topología métrica**. En general, toda topología no proviene de una métrica, los espacios métricos son casos particulares de espacios topológicos.
- **b.** Si X es un conjunto cualquiera, la familia: $\Upsilon = \{\emptyset, X\}$ constituye una topología sobre X, llamada la **topología trivial**.

2.13. Definición

Sea X un conjunto, dos métricas d_1 y d_2 sobre X se dicen que son equivalentes, si las topologías métricas asociadas coinciden, esto es, los abiertos de una son abiertos en la otra. Las métricas d_1 y d_2 se dicen que son uniformementes equivalentes si existen números reales, $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tal que $\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y)$.

PRÁCTICA Nº 2

1. Consideremos sobre $\mathbb{R}^2$ la métrica: $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ donde $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$. Describa la forma geométrica de las bolas abiertas en $\mathbb{R}^2$($y\ en\ \mathbb{R}^3$) con esta métrica. Pruebe, además, que: si d es la métrica euclidea en $\mathbb{R}^2$ y d_∞ es la métrica del máximo, se cumplen las desigualdades:

» $d_\infty(x,y) \leq d(x,y) \leq d_1(x,y)$

» $d_1(x,y) \leq \sqrt{2}d(x,y) \leq 2d_\infty(x,y)$

2. En los siguientes casos, describir los conjuntos $A^o,\ \partial(A),\ ext(A),\ A^d\ y\ A^l$. Además, decir cuáles son cerrados, abiertos o ninguno de los dos:

» $A \subset R,\ A = [0,1] \cup \{2\}$;

» $A \subset R,\ A = \mathbb{N}$;

» $A \subset R,\ A = \mathbb{Q}$;

» $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 < x^2 + y^2 < 1\}$;

» $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x+y}{x-y} \geq 0,\ \ 9x^2 + 4y^2 < 36\right\}$

3. Pruebe que la frontera de cualquier subconjunto de un espacio métrico es siempre un conjunto cerrado.

4. Pruebe que si Y es un subespacio de un espacio métrico X. Un subconjunto $F \subset Y$ es cerrado en el subespacio Y si, y solo si, existe un subconjunto $M \subset X$ creado en el espacio X tal que $F = M \cap Y$. (sugerencia: use la prueba del Teorema 2.10 pasando al complementario).

5. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Probar: $x \in \bar{A} \Leftrightarrow\ d(x,A) = 0$;

» $x \in ext(A) \Leftrightarrow\ d(x,A) > 0$;

» $x \in A^\circ \Leftrightarrow\ d(x, X - A) > 0$;

» $\partial(A) \subset A \Leftrightarrow\ A\ es\ cerrado$;

» $\partial(A) = \emptyset \Leftrightarrow\ A\ es\ abierto\ y\ cerrado$;

» $\partial(A) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow\ A\ es\ abierto$;

6. Dados el espacio métrico X y el subespacio Y. Si $A \subset Y \subset X$, estudiar el carácter de abierto y cerrado relativo a Y del conjunto en los siguientes casos:

» $X = \mathbb{R}$, con la métrica usual, $Y = [0,1) \cup (1,2]$ y $A = [0,1]$.

» $X = \mathbb{R}$, con la métrica usual, $Y = [0,1)$ y $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

» $X = \mathbb{R}$, con la métrica usual, $Y = \mathbb{Q}$ y $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \ o \ x^2 < 2\}$.

» $X = \mathbb{R}^2$, con la métrica euclidea, $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$ y $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq |x|\}$.

» $X = \mathbb{R}^2$, con la métrica euclidea, $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ y $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y < |x|\}$.

7. Sea (X, d) un espacio métrico y $A, B, C \subset X$. Probar:

» $\partial(A) = \bar{A} \cap \overline{X - A}$ y $\partial(A) = \partial(X - A)$.

» Si $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset \Longrightarrow \partial(A \cup B) = \partial(A) \cup \partial(B)$.

» $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$ y si A es abierto, se tiene que: $A \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

» Si A es denso en B, y B es denso en $C \Longrightarrow A$ es denso en C.

» Si A es denso en C, y B es denso en $C \Longrightarrow B \subseteq \overline{A \cap B}$.

3. ESPACIOS Y CONJUNTOS COMPACTOS

Sea (X, d) un espacio métrico. Consideremos sobre X una colección de conjuntos abiertos Γ.

3.1. Definición

1. Decimos que la colección Γ es un **recubrimiento abierto** o simplemente un **recubrimiento** de un subconjunto $A \subset X$, si y solo si,

$$A \subset \bigcup_{\Omega \in \Gamma} \Omega$$

Si la colección Γ tiene un número finito de elementos, esto es,

$$\Gamma = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n / \Omega_i \subset X \textit{ es un conjunto abierto}\},$$

Se dice que el recubrimiento es un **recubrimiento finito** de A.

2. Un recubrimiento Γ_0 de A se dice que es un **sobrecubrimiento de A** si, y solo si, existe un recubrimiento Γ *de* A tal que Γ_0 es una parte de Γ, esto es, si Ω es un conjunto abierto en Γ_0 entonces, Ω es un conjunto abierto en Γ.

3. Decimos que el subconjunto $A \subset X$ es un **conjunto compacto** si, de cualquier recubrimiento de A puede extraerse un sobrecubrimiento finito. En particular, el espacio (X, d) se dice que es un espacio compacto si X es un conjunto compacto.

3.2. Ejemplos

a. Si A es subconjunto finito de X, entonces A es un conjunto compacto.

b. El espacio $(\mathbb{R}, |\ |)$ no es un espacio compacto, pues, la familia de intervalos abiertos $\Gamma = \{(n-1, n+1), n \in \mathbb{Z}\}$ constituye un recubrimiento abierto de $\mathbb{R}$ que no admite ningún subrecubrimiento finito.

c. El espacio métrico discreto (X, d) con un número infinito de puntos no es compacto, ya que la familia de bolas abiertas $\Gamma = \left\{B\left(x, \frac{1}{2}\right) = \{x\}, x \in X\right\}$ constituye un recubrimiento abierto de X que no admite ningún subrecubrimiento finito.

3.3. Teorema

Sean A y B subconjuntos de X tal que: A es compacto, B es cerrado y $B \subset A$. Entonces, B es compacto.

DEMOSTRACIÓN

En efecto, se Γ un recubrimiento abierto de B, entonces la familia $\Lambda = \Gamma \cup (X - B)$ es recubrimiento abierto de A. Como A es un conjunto compacto, se puede extraer de Λ un subrecubrimiento finito de A. si Λ no contiene a $(X - B)$, él también será un subrecubrimiento finito de B $(B \subset A)$ extraído del recubrimiento Γ, lo que implicaría la compacidad de B. Si Λ contiene a $(X - B)$, bastará prescindir de él para obtener un subrecubrimiento finito Λ_0, $(\Lambda_0 = \Lambda - (X - B))$, de B extraído del subrecubrimiento Γ, así B resulta compacto.

3.4. Teorema

Sea $F \subset X$ un conjunto compacto, entonces, F es cerrado y acotado.

DEMOSTRACIÓN

Probemos primero que F es acotado. Para ello, si $x_0 \in X$ consideremos la familia $\Gamma = \{B_n = B(x_0, n), n \in \mathbb{N}\}$, claramente, esta familia constituye un recubrimiento abierto de X y por lo tanto de F. Como F es compacto, puede extraerse de Γ un subrecubrimiento finito $\{B_{n1}, B_{n2}, \dots, B_{nk}\}$ tal que $F \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{ni}$. Sea $m = max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$, entonces $F \subset B_m$ lo que implica que F es acotado y $\delta(F) \leq 2m$.

Para ver que F es cerrado, consideremos el conjunto $A = (X - F)$ y sea $y \in A$. Para cada $x \in F$ consideremos las familias de abierto: $\Lambda = \{W_x, abierto\ que\ contienen\ a\ x\}$ y $\Psi = \{V_x, abierto\ que\ contienen\ a\ y\}$ tal que $W_x \cap V_x = \emptyset$. La familia Λ constituye un recubrimiento abierto de F, y por ser F compacto podemos extraer un subrecubrimiento finito $\{W_{x_i}\}_{i=1}^{k}$, y sea entonces $V_y = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}$. Claramente V_y es abierto y contiene a y, además $F \bigcap V_y = \emptyset$. Resulta entonces que $V_y \subset A$ y en consecuencia A es abierto, por lo tanto, F es cerrado.

3.5. Definición

Un subconjunto $A \subset \mathrm{X}$ se dice que tiene la *propiedad de Bolzano Weierstrass (PBW)* si, y solo si, todo subconjunto infinito de A tiene algún punto de acumulación.

3.6. Teorema

Si $F \subset \mathrm{X}$ es un conjunto compacto. Entonces, F tiene la *PBW*.

DEMOSTRACIÓN

Si F es un conjunto finito, claramente él tiene la PBW, ya que no tiene subconjuntos infinitos.

Supongamos entonces F infinito. Si F no cumple con la PBW entonces, existe un subconjunto infinito $A \subset F$ que no tiene puntos de acumulación en F. Así, $\forall x \in F$, existe entonces un abierto W_x de x que contiene a lo sumo un punto de A. La familia $\Gamma = \{W_x, x \in F\}$ es subrecubrimiento abierto de F, por ser F compacto podemos extraer un subrecubrimiento finito $\{W_{x_i}\}_{i=1}^{k}$, esto es absurdo, ya que esta familia no recubre al conjunto de $A \subset F$.

4. ESPACIOS Y CONJUNTOS CONEXOS

4.1. Definición

Un espacio métrico (X, d) se dice que es conexo si, y solo si, no existen dos conjuntos abiertos A y B en X tal que

$$A, B \neq \emptyset; A \cap B \neq \emptyset \text{ y } X = A \cup B$$

Un subconjunto $F \subset X$ se dice conexo, si el como subespacio métrico con la métrica inducida es conexo, esto es, si no existen dos conjuntos abiertos A y B en X tal que, si $F_A = (F \cap A)$ y $F_B = (F \cap B)$ entonces:

$$F_A, F_B \neq \emptyset; F_A \cap F_B \neq \emptyset \text{ y } F = F_A \cup F_B$$

Si un subconjunto $F \subset X$ no es conexo, F se dice no es conexo o disconexo.

4.2. Ejemplos

a. El espacio $(\mathbb{R}, |\ \ |)$ es conexo.

b. El subconjunto $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es no conexo, ya que, si $A = (-\infty, \sqrt{2})$ y $A = (\sqrt{2}, \infty)$, definimos: $Q_A = \mathbb{Q} \cap A$, $Q_B = \mathbb{Q} \cap B$ y se tiene que:

c. Q_A y $Q_B \neq \emptyset$; $Q_A \cap Q_B = \emptyset$ y $\mathbb{Q} = Q_A \cup Q_B$

4.3. Teorema

Un espacio métrico $(X.d)$ es conexo si, y solo si, los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez son X y $\emptyset$.

DEMOSTRACIÓN

⇨ Sea $A \subset X, A \neq \emptyset$ y $A \neq X$ un subconjunto abierto y cerrado a la vez. El complemento $B = X - A \neq \emptyset$ es un conjunto abierto con $A \cap B = \emptyset$ y $X = A \cup B$, esto contradice el hecho de que X es conexo.

⇦ Supongamos que los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez son X y $\emptyset$. Si X es no conexo, existen subconjuntos abiertos A y $B \subset X$, tal que: $A, B \neq \emptyset$; $A \cap B = \emptyset$ y $X = A \cup B \to B = X - A \to B$ es un conjunto cerrado, absurdo.

4.4. Definición

1. Un subconjunto de A de un espacio métrico (X, d) $(A \subset X)$, se dice que es un dominio si es un conjunto abierto y conexo.
2. Un subconjunto $I \subset \mathbb{R}$ se dice que es un intervalo si: $\forall x. y \in I$ con $x < y$, el conjunto $I_{xy} = \{z \in \mathbb{R} \ / x < z < y\}$ está contenido en $I\left(I_{xy} \subset I\right)$.

4.5. Teorema de conexidad en $\mathbb{R}$

Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es conexo si, y solo si, es un intervalo.

DEMOSTRACIÓN

⇨ Sea $P \subset \mathbb{R}$ conexo. Si P no es un intervalo, existen $x, y \in P$ y $z \in \mathbb{R}$ tal que $x < z < y$ pero $z \notin P$. Entonces, los conjuntos: $A = (-\infty, z) \cap P$ y $B = (z, \infty) \cap P$ son abiertos, no vacíos tales que: $A \cap B = \emptyset$ y $P = A \cup B$, contradiciendo que P es conexo.

⇦ Supongamos ahora que $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo no conexo, entonces existen subconjuntos A y B abiertos de $\mathbb{R}$ tal que: $I_A = A \cap I$ y $I_B = B \cap I \neq \emptyset$; $I_A \cap I_B = \emptyset$ e $I = I_A \cup I_B$. Sean $x \in I_A$ e $y \in I_B$ escogidos de tal forma que $[\ x, x + \delta_1) \subset I_A$. Análogamente $\exists\ \delta_1 > 0$ tal que $(y-\delta_2, y) \subset I_B$. Resulta entonces que $x < z < y$. Si $z \in I_A$, $\exists$ un entorno (α, β) de z contenido en $I_A \cap [x,y]$ y esto contradice que $z = \sup(I_A \cap [x,y])$. Si $z \in I_B$, $\exists$ un entorno (γ, λ) de z contenido en $I_B \cap [x,y]$, lo que implica que $(\gamma, \lambda) \cap I_A = \emptyset$ contradiciéndose también el hecho de que $z = \sup(I_A \cap [x,y])$. De modo que $z \notin I$, y esto es un absurdo, pues I es un intervalo.

5. SUCESIONES Y ESPACIOS COMPLETOS

Sea (X, d) un espacio métrico

5.1. Definiciones

1. Una sucesión en el espacio X es una función $f: \mathbb{N} \to X$, tal que $f(n) = x_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Se acostumbra a denotar a f por su recorrido: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ o simplemente por $\{x_n\}$.
2. Se dice que la sucesión $\{x_n\}$ tiene por límite o converge a un $x_0 \in X$ cuando n tiene a $+\infty$, y se anota $x_n \to x_0$ cuando $n \to \infty$ o simplemente $x_n \to x_0$. Si: dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, $d(x_0, x_n) < \varepsilon \; \forall \, n > N$. Una sucesión que no tenga límite o que no sea convergente se dice divergente.

NOTA: Observe que la convergencia y divergencia de la sucesión depende no solo de sus términos, sino también del espacio X. Por ejemplo: la sucesión $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ converge en $X = \mathbb{R}$, pero no es convergente en $X = (0, +\infty)$.

5.2. Teorema

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X y $x_0 \in X$entonces:

1. $\{x_n\}$ converge a x_0 si, y solo si, todo entorno de x_0 contiene todos los términos de la sucesión, salvo, un número finito de ellos.
2. $\{x_n\}$ converge a x_0 si, y solo si, la sucesión de números reales $\{y_n = d(x_0, x_n)\}$ converge a cero (0) en $\mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN

1. ⇨ Supongamos que $x_n \to x_0$ y sea V un entorno de x_0. Dado $\varepsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que, $d(x_0, x_n) < \varepsilon\ \forall\ n > N$, esto implica que $x_n \in B(x_0, \varepsilon)\ \forall\ n > N$, es decir, todos los términos de la sucesión, salvo un numero finito de ellos $(\{x_1, x_2, \cdots, x_N\})$ están en $B(x_0, \varepsilon)$. Bastará entonces elegir un adecuado, para que $B(x_0, \varepsilon) \subset V$.

   ⇦ Recíprocamente, sean $\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ los términos de la sucesión que no están en V entorno de x_0, y sea $N = max\{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$ entonces, $\forall\ n > N$ los $x_n \in V$. Supongamos que $\{x_n\}$ no converge a x_0, esto es, que $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que los términos de la sucesión no están contenidos todos en $B(x_0, \varepsilon)$ a partir de un cierto $N \in \mathbb{N}$, entonces existen infinitos términos de $\{x_n\}$ que están fuera de $B(x_0, \varepsilon)$ y esto resulta contradictorio, pues, $B(x_0, \varepsilon)$ es un entorno de x_0.

2. Si $x_n \to x_0$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que, $d(x_0, x_n) < \varepsilon\ \ \forall\ n > N \leftrightarrow |y_n - 0| < \varepsilon \forall\ n > N \leftrightarrow y_n \to 0$.

5.3. Teorema

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X y $x_0 \in X$. si $x_n \to x_0$, entonces, $\{x_n\}$ es acotada.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que $x_n \to x_0$ y tomemos $\varepsilon = 1$, entonces, $\exists\ N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x_0, 1)$ $\forall\ n > N_1$. Sean $\{x_1, x_2, \cdots, x_{N_1}\}$ los términos de $\{x_n\}$ que están fuera de $B(x_0, 1)$ y sea $r = max\{1, d(x_0, x_1), d(x_0, x_2), \cdots, d(x_0, x_{N_1})\}$. Así, tenemos que $\{x_n\} \subset B(x_0, 1)$ $\forall\ n\ \in \mathbb{N}$, de modo que $\{x_n\}$ queda acotada.

NOTA: El recíproco de este resultado en general, no es cierto, por ejemplo: la sucesión $\{x_n\}$ = {0, 1, 0, 1, 0, 1,0…} está acotada y no es convergente. En cambio, por el teorema podemos afirmar que si una sucesión no está acotada en el espacio X entonces ella diverge.

5.4. Teorema

Sea $A \subset X$. un punto $p \in X$ está en $\bar{A}$ si, y solo si, existe una sucesión $\{a_n\}$ en A tal que $a_n \to p$.

DEMOSTRACIÓN

⇨ Supongamos que $p \in \bar{A}$, entonces para $n \in \mathbb{N}$ elegimos $a_n \in B\left(p, \frac{1}{n}\right) \cap A$. Resulta entonces que la sucesión $\{a_n\}$ está en A y $a_n \to p$.

⇦ Recíprocamente, supongamos que existe una sucesión $\{a_n\}$ en A tal que $a_n \to p$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in B(p, \varepsilon)\ \forall\, n > N_\varepsilon$, esto implica que $B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, así que $p \in \bar{A}$.

5.5. Definición

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en el espacio métrico X y $\{n_k\}$ una sucesión en $\mathbb{N}$ tal que $n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots$ La sucesión $\{x_{n_k}\}$ se dice que es una subsucesión de $\{x_n\}$. Si $\{x_{n_k}\}$ converge, su límite se llama límite subsecuencial de $\{x_n\}$.

5.6. Ejemplo

Consideremos la sucesión de números reales $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, las sucesiones son $\left\{\frac{1}{k^2}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2k}\right\}$ y $\left\{\frac{1}{2^k}\right\}$ subsucesiones de ella.

5.7. Definición

Una sucesión x_n en el espacio métrico X se dice que es una sucesión de Cauchy, o simplemente que es de Cauchy, si dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \mathcal{E}\ \forall\, n, m > N_\varepsilon$

5.8. Teorema

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en el espacio métrico X. Si $\{x_n\}$ converge entonces $\{x_n\}$ es de Cauchy.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que $x_n \to x_0$ en X, entonces, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, $d(x_0, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. $\forall\, n > N_\varepsilon$. Así, tenemos que: si $\forall\, n, m > N_\varepsilon$, $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ y por tanto $\{x_n\}$ es de Cauchy.

NOTA: El recíproco de este teorema no es válido en general como lo muestran los siguientes ejemplos.

5.9. Ejemplos

a. Sea $X = \mathbb{R} - \{0\}$. Consideremos sobre el espacio métrico $(X, |\quad|)$ la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$. Esta sucesión es de Cauchy en X pero no converge en X.

b. La sucesión de funciones $f_n = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio métrico $(C[-a, a], d_1)$ (Ver ejemplo 1.1.5 f) que no converge en dicho espacio.

5.10. Definición

Un espacio métrico (X, d) se dice que es un espacio completo si toda sucesión de Cauchy, en él, es convergente. Un subconjunto $F \subset X$ se dice que es completo, si él como espacio métrico, con la métrica inducida, es un espacio completo.

PRÁCTICA Nº 3

Espacios compactos y espacios conexos

1. Probar que la Unión de subconjuntos compactos de un espacio métrico es un conjunto compacto.
2. Probar el recíproco del Teorema 1.4.6 (PBW).
3. Probar que sobre un espacio métrico, la unión de una familia arbitraria de conjuntos conexos, que tengan intersección no vacía, es un conjunto conexo.
4. Pruebe que la adherencia de un conjunto conexo es conexa. ¿es esto cierto para el conjunto de los puntos interiores?
5. Probar que todo espacio métrico compacto es separable. (Sugerencia, considere el conjunto formado por todos los centros de las bolas de radio $\delta = \frac{1}{n}$).

Sucesiones y espacios completos

6. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio métrico X, tal que, para un $m \in \mathbb{N}$ fijo existe $x_0 \in X$ con $x_n = x_0 \; \forall \; n > m$ pruebe que $x_n \to x_0$.
7. Sea X un espacio métrico y $A \subset X$, probar:
   » $a \in A^o$ si, y solo si, $\forall \; \{x_n\}$ en X con $x_n \to a$, $\exists \; n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ $\forall \; n > N_0$.
   » $a \in A^d$ si solo si $\exists \; \{x_n\} \subset A - \{a\}$, tal que $x_n \to a$.
8. Pruebe que si $\{x_n\}$ es una sucesión es un espacio métrico X y si $x_n \to x_0$ en X, entonces, toda subsucesión $\{x_{n_k}\}$ infinita de $\{x_n\}$ converge a x_0.
9. Sea X es un espacio métrico. Pruebe que:
   » Todo conjunto completo es cerrado.
   » Si X es completo, entonces, todo cerrado es completo.
   » Toda sucesión de Cauchy en X admite, a lo sumo, un límite subsecuencial.
10. Pruebe que la sucesión del ejemplo 1.5.9 b) no es Cauchy en el espacio $C[-a. a]$ con la norma del máximo (Ver ejemplo 1.1.5 d).

11. Pruebe que $\mathbb{R}$ con la métrica del valor absoluto es un espacio métrico completo.

12. Sea X un espacio métrico y $\{x_n\}$ una sucesión convergente a x_0 en X. pruebe que el conjunto $K = \{x_n\} \cup \{x_0\}$ es un conjunto compacto.

13. Pruebe que es un espacio métrico compacto X, una sucesión $\{x_n\}$ converge al punto x_0 en X, si y solo si, $\{x_n\}$ admite al punto x_0 como único limite subsecuencial.

14. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio métrico X. Pruebe que si las tres subsucesiones $\{x_{2k}\}$, $\{x_{2k+1}\}$ y $\{x_{2k+3}\}$ convergen, entonces $\{x_n\}$ converge.

15. Para investigar y discutir en clase:

» Pruebe que si (X, d_X) un espacio métrico no completo. Entonces, existe un espacio métrico completo (Y, d_Y) tal que $X \subset Y$ y $\bar{X} = Y$, esto es, el espacio X es denso en Y.

» Pruebe que $\mathbb{R}$ con la métrica dada por el valor absoluto, es un espacio métrico completo.

6. FUNCIONES ENTRE ESPACIOS MÉTRICOS

Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos.

6.1. Definiciones

1. Una función $f: X \to Y$ es una ley que asigna a cada $x \in X$ un único elemento en Y, al que denotaremos por $f(x)$.
2. La función f se dice que es inyectiva o uno a uno si, siendo $f(x_1) = f(x_1)$ en Y, se tiene que: $x_1 = x_2$ en X.
3. Decimos que f es exhaustiva, sobreyectiva o simplemente sobre si, el recorrido o rango de f es todo Y, esto es: si $\forall\ y \in Y$, $\exists\ x \in X$ tal que $y = f(x)$.
4. El gráfico de f es el conjunto: $gra\ (f) = \{(x,y) \in X \times Y\ /\ y = f(x)\}$.

7. LÍMITE

Sea $f: A \subseteq X \to Y$ una función y $p \in A^d$ (punto de acumulación de A).

7.1. Definición

Decimos que la función f tiene como límite a $l \in Y$, o que $l \in Y$ es el límite de f, cuando x tiende a p si, y solo si, dado $\varepsilon > 0 \; \exists \; \delta = \delta_p(\varepsilon)$ tal que, si $x \in X$ con $0 < d_X(x,p) < \delta$, entonces $d_Y(f(x), l) < \varepsilon$. Dicho de otra manera, si parta cada $x \in B_X(p,\delta)$ se tiene que $f(x) \in B_Y(l,\varepsilon)$.

Obsérvese, en la definición anterior, que como p es un punto de acumulación de A, la función f no tiene porqué estar definida en p. Aún más, en caso de que f estuviera en p, su imagen $f(p)$, puede ser distinta de l.

7.2. Teorema

Si $f: A \subseteq X \to Y$ tiene límite cuando x tiende a $p \in A^d$, dicho límite es único.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que existieran dos límites de f cuando x tiende a p, digamos l_1 y l_2 en Y con $l_1 \neq l_2$. Entonces, por definición de límite, dado $\varepsilon > 0$, existen δ_1 y $\delta_1 > 0$ tal que:

$$\text{Si } x \in B_1 = B_X(p,\delta_1) \to f(x) \in B_1^* = B_Y(l_1,\varepsilon), \text{ y}$$

$$\text{Si } x \in B_2 = B_X(p,\delta_2) \to f(x) \in B_2^* = B_Y(l_2,\varepsilon)$$

Como $l_1 \neq l_2$ eligiendo un ε adecuado, tenemos que $B_1^* \cap B_2^* = \emptyset$. Sea $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ y $B = B_X(p, \delta) - \{p\}$, entonces,

$$f(A \cap B) \subset B_1^* \cap B_2^* \rightarrow B \cap A = \emptyset$$

Lo cual es una contradicción ya que $p \in A^d$.

NOTA: Puesto que el límite de f cuando x tiende a p, si existe, es único podemos denotarlo por:

$$\lim_{x \to p} f(x) = l$$

7.3. Teorema

Sea $f: A \subseteq X \rightarrow Y$ una función, $p \in A^d$ y $l \in Y$. Entonces, $l = \lim_{x \to p} f(x)$ si,

y solo si, para toda sucesión $\{x_n\} \subset A - \{p\}$ con $x_n \rightarrow p$, se tiene que: $f(x_n) \rightarrow l$, donde $\{f(x_n)\}$ es una sucesión en Y.

DEMOSTRACIÓN

⇨ Supongamos que $l = \lim_{x \to p} f(x)$ y sea $\{x_n\}$ una sucesión en $A - \{p\}$ tal que $x_n \rightarrow p$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

- Si $x \in B_X(p, \delta) \rightarrow f(x) \in B_Y(l, \varepsilon)$

Sea $B = B_X(p, \delta) - \{p\}$, entonces $f(B \cap A) \subset B_Y(l, \varepsilon)$, como $x_n \rightarrow p$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n > N, x_n \in B_X(p, \delta) \rightarrow f(x_n) \in B_Y(l, \varepsilon)$ entonces $f(x_n) \rightarrow l$.

⇦ Recíprocamente, supongamos que $\forall\, \{x_n\} \subset A - \{p\}$ con $x_n \rightarrow p$, se tenga que $f(x_n) \rightarrow l$ y que $\lim_{x \to p} f(x) \neq l$. En estas condiciones existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall\, \delta > 0$ $\exists\, x_\delta \in B_X(p, \delta) - \{p\}$ y $f(x_\delta) \notin B_Y(l, \varepsilon)$, entonces si elegimos $\delta = \frac{1}{n}$ y $x_n = x_\delta \neq p$ tendremos que: $d(x_n, p) < \frac{1}{n}$ y $f(x_n) \in B_Y(l, \varepsilon)$, esto es, $x_n \rightarrow p$ pero $f(x_n) \rightarrow l$ lo cual es una contradicción.

7.4. Teorema

Sean (X, d_X), (Y, d_Y) y (Z, d_Z) espacios métricos, $A \subset X$, $p \in A^d$, $L = (l_1, l_2) \in Y \times Z$ y $f: A \to Y \times Z$ una función tal que: $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, con $f_1: A \to Y$, $f_2: A \to Z$ y donde $Y \times Z$ es el espacio métrico producto (Ver definición 1.1.4) entonces:

El $\lim_{x \to p} f(x) = L$ si, y solo sí.

$\lim_{x \to p} f_1(x) = l_1$ y $\lim_{x \to p} f_2(x) = l_2$

DEMOSTRACIÓN

⇨ Supongamos que $\lim_{x \to p} f(x) = L$, entonces, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, x \in A$ con $0 < d_X(x,p) < \delta$ se tiene que $d_{Y \times Z}(f(x), L) < \varepsilon$, donde $d_{Y \times Z}$ denota la métrica producto. Ahora bien, por definición de la métrica producto obtenemos que:

$$d_Y(f_1(x), l_1) \leq d_{Y \times Z}(f(x), L) < \varepsilon \text{ y } d_Z(f_2(x), l_2) \leq d_{Y \times Z}(f(x), L) < \varepsilon$$

Lo que concluye la prueba.

⇦ Recíprocamente, si $\lim_{x \to p} f_1(x) = l_1$ y $\lim_{x \to p} f_2(x) = l_2$, dado $\varepsilon > 0$, existen: δ_1 y $\delta_2 > 0$ tal que:

$$\text{Si } 0 < d_X(x,p) < \delta_1 \to d_Y(f_1(x), l_1) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \text{ y}$$

$$\text{Si } 0 < d_X(x,p) < \delta_2 \to d_Z(f_2(x), l_2) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

Elegimos $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces, si $0 < d_X(x,p) < \delta$, tenemos que:

$$d_{Y \times Z}(f(x), L) = \sqrt{\left(d_Y(f_1(x), l_1)\right)^2 + \left(d_Z(f_2(x), l_2)\right)^2} < \varepsilon$$

De modo que: $\lim_{x \to p} f(x) = L$.

7.5. Definición

Sean X y Y espacios métricos, $A \subset X$, $p \in A^d$ y $f: A \to Y$ una función. Si $B \subset A$ y $p \in B^d$ llamaremos límite de f en p relativo a B al límite de $f\,/_B: B \to Y$ Y cuando x tiende a p.

7.6. Teorema

Si $\lim_{x\to p} f(x) = l$ y $\lim_{x\to p} f/_B\ (x)$ existe, entonces, $\lim_{x\to p} f/_B\ (x) = l$

DEMOSTRACIÓN

Se deja como ejercicio.

7.7. Ejemplos

Consideremos los espacios métricos: $(\mathbb{R}^2, d)$ donde d es la métrica producto (ver ejemplo 1.5. c) y $(\mathbb{R}, |\ |)$. Sean $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que, si $(x, y) \in A$ denotamos por $z = f(x, y) \in \mathbb{R}$ su imagen por f, $p = (x_0, y_0) \in A^d$ y $\gamma: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una curva en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el punto p, esto es, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma(t_0) = p$. En estas condiciones, tenemos que: si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \text{ y } \lim_{t\to t_0} f(\gamma(t)) \text{ existe, entonces el } \lim_{t\to t_0} f(\gamma(t)) = l$$

Por ejemplo: la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

No tiene límite en el punto $(x, y) = (0,0)$, ya que si consideramos las curvas: $y = x^2$ e $y = x$, que pasan por el punto (0,0), los respectivos límites son:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f/_{y=x^2}\ (x,y) = \lim_{x\to 0} f(x, x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2+x^4} = 0$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f/_{y=x}\ (x,y) = \lim_{x\to 0} f(x, x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

Así que, el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no puede existir.

8. CONTINUIDAD

Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos, $f: A \subset X \to Y$ una función y $p \in A$.

8.1. Definición

Decimos que la función f es continua en el punto p si, y solo si, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta_p(\varepsilon)$ tal que:

$$\text{Si } x \in X \text{ con } d_X(x,p) < \delta \to d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

En otras palabras, f se dice continua p si:

1. Existe $f(p)$
2. Existe $\lim_{x \to p} f(x)$
3. $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$

f se dice que es continua en A si es continua en todo punto de A.

8.2. Ejemplos

a. Si $p \in A$ es un punto aislado, toda función $f: A \subseteq X \to Y$ resulta continua en p.

b. Si $y_0 \in Y$ es un punto fijo, la función constante $f: X \to Y$ tal que $f(x) = y_0$, $\forall\, x \in X$ es continua en todo X, pues si $p \in X$, $d_Y(f(x), f(p)) = 0 < \varepsilon\ \forall\, x \in X$.

c. La función identidad, $f: X \to X$ tal que $f(x) = x, \forall\, x \in X$ es continua en todo X, ya que si $p \in X$ y dado $\varepsilon > 0$ se tiene que: $d_X(f(x).f(p)) = d_X(x,p)$ Entonces, basta elegir $\delta < \varepsilon$ para obtener que si $x \in X$ con $d_X(x,p) < \delta \to d_X(f(x),f(p)) < \varepsilon$

d. La función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0{,}0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0{,}0) \end{cases}$$

No es continua en el punto $(x,y) = (0{,}0)$ ya que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe (ver ejemplo 7.7).

8.3. Definición

Si la función $f: A \subseteq X \to Y$ no es continua en $p \in A$, entonces decimos que f es discontinua en p. Las discontinuidades de f en un punto $p \in A$ pueden ser de dos tipos: discontinuidad evitable o discontinuidad esencial (no evitable), según exista o no el $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ respetivamente.

8.4. Teorema

Sean (X,d_X), (Y,d_Y) y (Z,d_Z) espacios métricos, $A \subset X$, $p \in A$ y $f: A \to Y \times Z$ una función tal que: $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, con $f_1: A \to Y$, $f_2: A \to Z$ y donde $Y \times Z$ es el espacio métrico producto. Entonces: f es continua en p si, son continuas en p las funciones f_1 Y f_2.

DEMOSTRACIÓN

Se deja como ejercicio.

8.5. Teorema

Una función $f: X \to Y$ es continua en X si, y sólo si, la imagen inversa, por f, de un conjunto abierto en Y resulta un conjunto abierto en Y resulta un conjunto abierto en X. Esto es, si para cada conjunto abierto $\Omega \subset Y$, el conjunto.

$f^{-1}(\Omega) = \{x \in X \ / \ f(x) \in \Omega\}$

Es un conjunto abierto en X.

DEMOSTRACIÓN

⇨ Supongamos que $f: X \rightarrow Y$ es continua en X y sean $\Omega \subset Y$ abierto. Si p es un punto arbitrario en $f^{-1}(\Omega)$, entonces $f(p) \in Y$, así que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(p), \varepsilon) \subset \Omega$. Por la continuidad de f, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ con $d_X(x.p) < \delta \rightarrow d_Y(f(x).f(p)) < \varepsilon \rightarrow f(x) \in \Omega$, luego, $B(p, \delta) \subset f^{-1}(\Omega)$ y así resulta $f^{-1}(\Omega)$ abierto en X.

⇦ Recíprocamente, supongamos que $\forall\, \Omega \subset Y$ abierto $f^{-1}(\Omega)$ es abierto en X. Sea $p \in X$ arbitrario, entonces dado $\varepsilon > 0$ la bola $B(f(p), \varepsilon)$ es un conjunto abierto en Y luego, $p \in f^{-1}\big(B(f(p), \varepsilon)\big)$ es abierto en X y por tanto, existe $\delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \subset f^{-1}\big(B(f(p), \varepsilon)\big)$ lo que implica la continuidad de f en p.

8.6. Ejemplo

La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \ \ x \geq 0 \\ -1 & si \ \ x < 0 \end{cases}$$

No es continua en $\mathbb{R}$, ya que $V = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ es un entorno abierto de $f(0) = 1$, pero su imagen inversa, $f^{-1}(V) = [0, +\infty)$ no es abierto en $\mathbb{R}$.

8.7. Teorema (continuidad y compacidad)

Sean X e Y espacios métricos y $f: X \rightarrow Y$ una función. Si f es continua en X y $K \subset X$ es un conjunto compacto, entonces, $f(K) \subset Y$ es un conjunto compacto.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\Gamma = \{A_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de $f(K)$ en Y, entonces $f^{-1}(\Gamma) = \{f^{-1}(A_i)\}_{i \in I}$ resulta un recubrimiento abierto de K en X. Por ser K compacto, existe un subrecubrimiento finito de K extraído de $f^{-1}(\Gamma)$, digamos: $\left\{f^{-1}\left(A_{i_1}\right), f^{-1}\left(A_{i_2}\right), \cdots, f^{-1}\left(A_{i_k}\right)\right\}$. En estas condiciones, la familia $\left\{A_{i_1}, A_{i_n}, \cdots, A_{i_k}\right\}$ forma un recubrimiento finito de $f(K)$ extraído de Γ, probándose así que $f(K)$ es compacto.

8.8. Definiciones

1. Una función $f: A \subset X \to Y$ se dice acotada en A si, y solo sí. $f(A) \subset Y$ es un conjunto acotado.
2. Una función $f: A \subset X \to \mathbb{R}$ se dice que alcanza un máximo (respetivamente alcanza un mínimo) en A si, existe un punto $p \in A$ tal que:

   $f(x) \leq f(p) \ \ \forall\, x \in A$, (Respetivamente $f(p) \leq f(x) \ \ \forall\, x \in A$)

   Al valor $f(p) \in \mathbb{R}$ se le llama el máximo
   (Respetivamente al mínimo) de un f en A.

8.9. Teorema

Sean X e Y espacios métricos y $f: X \to Y$ una función. Si f es continua en X y $K \subset X$ es un conjunto compacto, entonces, f es acotada en K.

DEMOSTRACIÓN

Como f es continua y K es compacto, por el teorema anterior (8.7), se tiene que $f(K)$ es compacto. De este modo $f(K)$ resulta cerrado y acotado (ver Teorema 3.4).

8.10. Teorema

Sean X un espacio métrico y $f: X \to \mathbb{R}$ una función. Si f es continua en X y $K \subset X$ es un conjunto compacto, entonces, f alcanza un máximo y un mínimo en K.

DEMOSTRACIÓN

Por el teorema anterior (1.8.9) $f(K)$ es acotado, así que existen: $\delta = sup\{f(K)\}$ y $\delta = inf\{f(K)\}$, pero δ y $a \in \overline{f(K)} = f(K)$, por ser $f(K)$ cerrado. De modo que:

$\delta = sup\{f(K)\} = \delta = max\{f(K)\}$, y $\delta = inf\{f(K)\} = \delta = minf\{f(K)\} \ \in f(K)$.

OBSERVACIONES

1. El teorema anterior (8.10), no nos dice nada en cuanto al número de puntos de K en los que f alcanza el máximo y el mínimo. Por ejemplo: si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$f(x) = 1 + x$ y $K = [0,1]$ compacto en $\mathbb{R}$, entonces, $f(K) = [1,2]$ compacto en $\mathbb{R}$, de modo que el máximo de f en K se alcanza una sola vez en $x = 1$, $f(1) = 2$, al igual que el mínimo que se alcanza en $x = 0$, $f(0) = 1$. Por otro lado, la función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 3$ constante alcanza el máximo y el mínimo en todo $K = [0,1]$.

2. Si el conjunto K no es compacto, el resultado de los teoremas 8.7, 8.9 y 8.10 no son, en general, ciertos. Por ejemplo: si $X = K = \mathbb{R}$ la función $f(x) = x$ ni siquiera es acotada. Por otro lado, la función $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ es acotada en $\mathbb{R}$, pero no alcanza nunca los extremos superior e inferior de $f(\mathbb{R})$, que son: +1 y -1 respectivamente. Notemos además que, $f(\mathbb{R}) = (-1, 1)$ no es compacto en $\mathbb{R}$.

8.11. Teorema (continuidad y conexidad)

Sean X e Y espacios métricos y $f: X \to Y$ una función. Si f es continua en X y $K \subset X$ es un conjunto conexo, entonces $f(K) \subset Y$ es un conjunto conexo.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que $f(K) \subset Y$ no es conexo, entonces existen A_1 y A_2 abiertos en Y tal que si $A = f(K) \cap A_1$ y $B = f(K) \cap A_2$ entonces:

A y $B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, y $f(K) = A \cup B$

Como f es continua y A_1 y A_2 son abiertos en Y, por el teorema 1.8.5. $f^{-1}(A_1)$ y $f^{-1}(A_2)$ resultan abiertos en X y no vacíos, ya que $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A_1)$ y $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A_2)$, pero $K \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(A_2)$ lo que contradice el hecho de que K es conexo.

8.12. Corolario (propiedad de los valores intermedios)

Sea X un espacio métrico y $f: X \to \mathbb{R}$ una función. Si f es continua en X y $K \subset X$ es un conjunto conexo, entonces, $f(K)$ es un intervalo.

DEMOSTRACIÓN

Los conexos de $\mathbb{R}$ son los intervalos. (ver Teorema 4.5).

9. CONTINUIDAD UNIFORME

Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos, $A \subset X$ y $f: A \to Y$ una función continua, entonces, $\forall\, p \in A$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que: si $x \in B(p,\delta)$ entonces $f(x) \in B(f(p), \varepsilon)$. En general, este δ dependerá del ε y del punto $p, \delta, \cdots, \delta_p(\varepsilon)$ (ver definición 1.8.1). Tiene especial interés, el caso en que δ depende solo de ε, $\delta = \delta(\varepsilon)$.

9.1. Definición

Decimos que la función $f: A \subset X \to Y$ es uniformemente continua en A si, solo si, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que: $\forall\, x, y \in A$ con $d_X(x,y) < \delta$, se tiene que: $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

9.2. Ejemplos

a. Resulta inmediato, que la continuidad uniforme implica continuidad. El recíproco no es cierto; la función $f: (0,1] \to \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en (0,1]. Veamos que ella no es uniformemente continua. En efecto, sean $\varepsilon = 10$ y $0 < \delta < 1$ arbitrario, escogemos $x = \delta$ y $y = \frac{\delta}{11}$ en (0,1], entonces: $|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{\delta} - \frac{11}{\delta}\right| = \frac{10}{\delta} > 10 = \epsilon$.

b. La función $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = x^2$ es uniformemente continua en $[0,1]$, pues $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| \leq 2|x - y|$, entonces dado $\varepsilon > 0$ bastará tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ para obtener que si $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

9.3. Teorema

Sea $f: X \to Y$ una función continua y X compacto, entonces f es uniformemente continua.

DEMOSTRACIÓN

En efecto, dado $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, por continuidad de f,$\delta_x = \delta_x(\varepsilon) > 0$ tal que: si $d_X(x,y) < \delta_x$, entonces, $d_Y(f(x),f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$, Sea $B_x = B\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right)$, entonces la familia $\Gamma = \{B_x \ / \ \ x \in X\}$ constituye un recubrimiento abierto de X. Por ser X compacto, podemos extraer de Γ un subrecubrimiento finito, digamos $\left\{B_{x_1}, B_{x_2}, \cdots, B_{x_n}\right\}$ y sea $\delta = min\left\{\frac{\delta_{x_1}}{2}, \frac{\delta_{x_2}}{2}, \cdots, \frac{\delta_{x_n}}{2}\right\} > 0$. De modo que, $\forall \ y$ y $z \in X$ con $d_X(y,z) < \delta$, como $y \in B_{x_i}$, para algún $1 \leq i \leq n$ entonces $d_X(x_i,y) < \frac{\delta_{x_i}}{2}$. Así que: $d_X(x_i,z) \leq d_X(x_i,y) + d_X(y,z) < \frac{\delta_{x_i}}{2} + \delta \leq \frac{\delta_{x_i}}{2} + \frac{\delta_{x_i}}{2} = \delta_{x_i}$, por lo que: si $x, y \in X$ con $d_X(y,z) < \delta$ entonces:

$$d_Y(f(y),f(z)) \leq d_Y(f(y),f(x_i)) + d_Y(f(x_i),f(\,z)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

9.4. Definición

1. Una función $f: X \to Y$ se llama homeomorfismo si es inyectiva, sobre y tanto f como f^{-1} son continuas (brevemente, si f es biyectiva y bicontinua). Si existe un homeomorfismo entre dos espacios métricos X e Y, decimos que estos espacios son homeomorfos. A las propiedades que se mantienen frente a homeomorfismos se les llama propiedades lopotógicas, por ejemplo, son propiedades topológicas: Ser abiertos, ser compacto, ser conexo, etc., pero ser una sucesión de Cauchy no es una propiedad topológica, como tampoco lo es ser un conjunto acotado.

2. Un homeomorfismo que conserva las distancias $(d_Y(f(x),f(y)) = d_X(x,y))$ es llamado homeomorfismo isométrico o isometría, y a los espacios relacionados por una isometría se les llama espacios isométricos. Desde un punto de vista de abstracto, dos espacios isométricos son una misma cosa, únicamente se diferencian en los nombres y en la representación de sus elementos.

10. TEOREMA DEL PUNTO FIJO

Sean (X, d) un espacio métrico y $f: X \to X$ una función.

10.1. Definiciones

1. Un punto $p \in X$ se dice que es un punto fijo de la función f si, y solo si, $f(p) = p$. Por ejemplo, una función puede tener: un único punto fijo, como la función constante $f(x) = p$; dos puntos fijos, como $f: X \to X$ con $X = \mathbb{R}$ y $f(x) = x^2$; infinitos puntos fijos, como la función identidad $f(x) = x$, o ningún punto fijo, como $f: X \to X$ con $X = \mathbb{R}$ y $f(x) = x + 1$.
2. Decimos que la función f es contractiva si, y solo si, existe una constante λ, con $0 \leq \lambda < 1$, tal que:

$$\forall\, x, y \in X \text{ se cumple que: } d(f(x), f(y)) \leq \lambda\, d(x, y)$$

10.2. Teorema

Toda función contractiva es continua, más aun, es uniformemente continua.

DEMOSTRACIÓN

Inmediata a partir de la definición de función contravía (hacer $\delta = \varepsilon$).

10.3. Teorema (punto fijo)

Sea (X, d) un espacio métrico completo con $X \neq \emptyset$ y $f: X \to X$ una función constructiva. Entonces, la función f tiene un único punto fijo.

DEMOSTRACIÓN

- **UNICIDAD:** La unicidad es inmediata, pues si x e $y \in X$ son puntos fijos de f, con $x \neq y$, entonces:

$$d(x,y) = d\big(f(x), f(y)\big) \leq \lambda\, d(x,y) < d(x,y), \text{ absurdo.}$$

EXISTENCIA

Elijamos $x_0 \in X$ arbitrario y construyamos la sucesión recurrente:

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \cdots, x_n = f(x_{n-1}), \cdots \quad \textbf{(8)}$$

Aplicando, recurrentemente, la propiedad contrativa de f obtenemos que:

$$d(x_n, x_{n-1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \leq \lambda\, d(x_{n-1}, x_{n-2}) =$$

$$= \lambda\, d(f(x_{n-2}), f(x_{n-3})) \leq \lambda^2\, d(x_{n-2}, x_{n-3}) \cdots$$

$$= \lambda^{n-2}\, d(f(x_1), f(x_0)) \leq \lambda^{n-1}\, d(x_1, x_0), \text{ donde } 0 \leq \lambda < 1$$

Probemos ahora que la sucesión recurrente $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en X. En efecto, sean m y $n \in \mathbb{N}$ con $m > n$, entonces existe $h \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + h$. Así que:

$$d(x_m, x_n) = d(x_{n+h}, x_n) \leq d(x_{n+h}, x_{n+h-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n)$$

$$\leq (\lambda^{n+h-1} + \lambda^{n+h-2} + \cdots + \lambda^n)\, d(x_1, x_0)$$

$$= \lambda^n (\lambda^{h-1} + \lambda^{h-2} + \cdots + 1)\, d(x_1, x_0)$$

$$= \lambda^n \frac{1-\lambda}{1-\lambda} (\lambda^{h-1} + \lambda^{h-2} + \cdots + 1)\, d(x_1, x_0)$$

$$= \lambda^n \frac{1-\lambda^h}{1-\lambda}\, d(x_1, x_0) \leq \lambda^n \frac{\lambda^h}{1-\lambda}\, d(x_1, x_0)$$

De modo que si hacemos tender $n \to \infty$ se tiene que $d(x_m, x_n) \to 0$ y en consecuencia la sucesión $\{x_n\}$, es una sucesión de Cauchy. Como el espacio X es completo, dicha sucesión es convergente, digamos que $x_n \to p \in X$. Por el teorema anterior (10.2) f es continua, así que:

$$p = \lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f\left(\lim_{n\to\infty}(x_{n-1})\right) = f(p)$$

Es decir, el punto p es punto fijo de la función f.

OBSERVACIONES

a. El teorema del punto fijo no es cierto si la función f es contrativa con $\lambda = 1$. Por ejemplo, $f(x) = x + 1$ no tiene puntos fijos en $\mathbb{R}$, mientras que $f(x) = x$ tiene infinitos puntos fijos.

b. El teorema del punto fijo no es cierto si el espacio X no es completo. Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{x}{2}$ no posee puntos fijos en el espacio $X = \mathbb{R} - \{0\}$, a pesar de que ella es contractiva de X en X con $\lambda = \frac{1}{2} < 1$.

c. El teorema, además de la existencia y unicidad del punto fijo proporciona un método o procedimiento para obtenerlo, este método se conoce con el nombre de método de las aproximaciones sucesivas, el cual consiste en escoger un $x_0 \in X$ arbitrario y obtener mediante iteraciones sucesivas la sucesión recurrente (8), la cual converge al único punto fijo de f.

d. El error cometido al tomar como punto fijo p el valor x_n en la sucesión (8) será $E_n = d(x_n, p)$. Podemos estimar este error de la siguiente manera:

ad uniforme

10.4. Corolario

En las mismas condiciones del teorema del punto fijo y siendo xo ∈ X un punto arbitrario, se tiene.

1. $E_n \leq E_1 = \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\, d(x_1, x_0),\ n \geq 0$
2. $E_n \leq E_2 = \frac{\lambda}{1-\lambda}\, d(x_n, x_{n-1}),\ n \geq 1$
3. $E_2 \leq E_1$

DEMOSTRACIÓN

Inmediata (Ver la demostración del Teorema)

OBSERVACIÓN

El estimador E_1 que proporciona el corolario anterior, es utilizado computacionalmente para calcular el número de pasos necesarios para obtener a p con un error prefijado. Mientras que el estimador E_2, que es más fino que el E_1, es utilizado para obtener el error en cada paso o al final del cálculo.

PRÁCTICA Nº 4

1. Pruebe, por definición que la función $f: (\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}, |\ \ |)$ definida por: $f(x,y) = (x\ y)^{\frac{1}{3}}$ Es continua es (0, 0).

2. Sean X e Y espacios métricos; $f, g: X \to Y$ funciones continuas y $D \subset X$ un subconjunto denso. Pruebe que $f(D)$ es denso en $f(X) \subseteq Y$ y que, si $f(x) = g(x). \forall x \in D$, entonces $f(x) = g(x) \ \ \forall x \in X$.

3. Demuéstrese que un espacio métrico X es conexo si, y solo si, toda función continua de X en un espacio métrico discreto es constante.

4. Sean X e Y espacios métricos. Pruebe que si $f: X \to Y$ es una función continua y $F \subset Y$ es un subconjunto cerrado, entonces, $f^{-1}(F)$ es un subconjunto cerrado X.

5. Sea X un espacio métrico, $f: X \to (\mathbb{R}, |\ \ |)$ una función continua y $\Phi(f)$ el conjunto de todos los ceros de f, esto es, $\Phi(f) = \{x \in X \ / \ f(x) = 0\}$. Pruebe que $\Phi(f)$ es un subconjunto cerrado X.

6. Sea $f: (\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}, |\ \ |)$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\ y^2}{x^2 + y^4} & si \ \ (x,y) \neq 0 \\ 0 & si \ \ (x,y) = 0 \end{cases}$$

Pruebe que:

- f es acotada en $(\mathbb{R}^2, d_2)$
- La restricción de f a cualquier recta que pasa por el origen de coordenadas $\big((x,y), (0,0)\big)$ es continua.
- f no es continua en el origen de coordenadas $\big((x,y), (0,0)\big)$.

7. Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 \leq y^2 + 1\}$. Pruebe, utilizando el ejercicio que 4) es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$.

8. Estudie el límite en el punto (0, 0) de la función $f: (\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}, |\ \ |)$ dada:

- $f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$
- $f(x,y) = \frac{x^2\,y}{x^4+y^2}$
- $f(x,y) = \frac{1-cosxy}{x^2\,y^2}$
- $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

9. Sea $f\colon (\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}, |\ \ |)$ tal que:

$$f(x) > 0 \quad si \quad x \neq 0$$

$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \;\; y \;\; \lambda > 0$$

Demostrar que existen $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, tales que: $\alpha\|x\| \leq f(x) \leq \beta\|x\|$.
(Sugerencia: Considerar primero el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \;\; / \;\; \|x\| = 1\}$).

10. Se dice que una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es periódica si, y solo si, existe un $\tau > 0$, llamado periodo de f, tal que $f(x+\tau) = f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Probar que toda función continua y periódica es uniformemente continua.

11. Sea $\alpha > 0$ y

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\propto}{x}\right), \qquad donde \;\; x > 0$$

» i. Pruebe que f posee un único punto fijo y que este es $\sqrt{\alpha}$

» ii. Escriba un programa computacional, utilizando el método de las iteraciones sucesivas (ver 10.3), que determine la raíz cuadrada de un número α con un error menor que un $\varepsilon > 0$ prefijado.

12. Sea $X = [0, +\infty)$ y $f\colon (X.|\ \ |) \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \frac{1}{1+x}\ \ \forall x \in X$. Probar que $f o f$ es contractiva, pero que f no lo es.

13. Probar los teoremas 1.7.6 y 1.8.4

11. ESPACIOS NORMADOS

Sea X un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ $(o\ \mathbb{C})$

11.1. Definición

Llamaremos norma sobre X a toda aplicación: $\|\ \|: X \to \mathbb{R}$ tal que: para todo vector $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in X$ y toda escala $\alpha \in \mathbb{R}$ $(o\ \mathbb{C})$ satisface.

$$\text{(N. 1) } \|\mathrm{x}\| \geq 0$$

$$\text{(N. 2) } \|\mathrm{x}\| = 0 \text{ si, y solo si, } \mathrm{x} = 0$$

$$\text{(N. 3) } \|\alpha\, \mathrm{x}\| = \alpha\ \|\mathrm{x}\|$$

$$\text{(N. 4) } \|\mathrm{x} + \mathrm{y}\| \leq \|\mathrm{x}\| + \|\mathrm{y}\|$$

El par $(X. \|\ \|)$ se llama espacio vectorial normado, o simplemente espacio normado, y cuando no haya lugar a confusión lo denotaremos simplemente por X.

Una consecuencia inmediata y útil es que si $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in X$, se tiene:

$$\|\mathrm{x}\| - \|\mathrm{y}\| \leq \|\mathrm{x} \pm \mathrm{y}\| \qquad \textbf{(9)}$$

Es un espacio normado X, la aplicación: $d: X \times X \to \mathbb{R}$, tal que:

$$d(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\| \qquad \textbf{(10)}$$

Define una distancia en X, ya que por (N.1)

$$\text{Si } d(x,y) = \|x - y\| = 0 \ \leftrightarrow x = y$$

y por (N.4)

$$d(x,y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x,z) + d(y,z)$$

De modo que todo espacio normado puede considerarse como un espacio métrico (con la métrica definida en (10)), la cual se conoce como la métrica asociada a la norma $\| \ \ \|$. En consecuencia un espacio normado es un caso particular de espacio métrico y todo lo que elijamos sobre estos últimos puede extenderse a los primeros, en espacial, podemos ya hablar de la topología de un espacio normado. En general, no todo espacio métrico será un espacio normado, por ejemplo, la métrica discreta (ejemplo 1.5 a) no es la métrica asociada a ninguna norma.

11.2. Teorema

Sea X un espacio vectorial y (X, d) un espacio métrico. La métrica d es la métrica asociada a una norma $\| \ \ \|$ definida sobre X si, solo si, d satisface:

- **a.** $d(x,y) = d(x - z, y - z) \ \forall \ x, y, z \in X$ (invariancia por traslaciones).
- **b.** $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \ d(x,y)$

DEMOSTRACIÓN

⇨ Suponga que X es un espacio vectorial y que d es una distancia en X que verifica a) y b), la aplicación: $\| \ \ \|_d : X \to \mathbb{R}$ definida por: $\| \ \ \|_d = d(x,0)$ es una norma de X cuya distancia asociada es la d de partida, ya que se tiene:

1. $\|x\|_d = d(x,0) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = 0$
2. $\|\alpha x\|_d = d(\alpha x, 0) = \alpha \ d(x,0) = \ \alpha \ \|x\|_d$
3. $\| x + y \|_d = d(x + y, 0) = d(x + y - y, 0 - y) = d(x - y) \leq d(x,0) + d(0,-y) = d(x,0) + d(y,0) = \|x\|_d + \|y\|_d$

4. $d^*(\mathrm{x}-\mathrm{y}) = \| \mathrm{x}-\mathrm{y} \|_d = d(\mathrm{x}-\mathrm{y},0) = d(\mathrm{x}-\mathrm{y}+\mathrm{y},0+y) = d(\mathrm{x},\mathrm{y})$

⇦ Recíprocamente, si la distancia d es la métrica asociada a la norma $\| \ \|_d$ resulta fácil verificar que d satisface a) y b).

NOTA: El teorema anterior (11.2), junto con la consideración de las operaciones usadas propias de cada caso, nos permite construir ejemplos de espacios vectoriales normados cuyos respectivos espacios métricos asociados sean precisamente los que aparecen en los ejemplos 1.15: b), c), d), e), f), g), i) en la práctica 3, ejercicios 3i), 3ii), 7) y 8).

11.3. Definición

Se llama espacio de Banach a un espacio normado que, como espacio métrico es un espacio completo (ver definición 5.10).

Dos normas sobre el mismo espacio vectorial se dicen equivalentes si, y solo si, son equivalentes sus respectivas distancias, es decir, si dan lugar a la misma topología. Más aún, dos normas $\| \ \|$ y $\| \ \|^*$, sobre un mismo espacio vectorial X, son equivalentes si, y solo si, existen dos escalares α y $\beta \in \mathbb{R}$ tal que se verifica:

$$\alpha \|\mathrm{x}\| \leq \|\mathrm{x}\|^* \leq \beta \|\mathrm{x}\|, \quad \forall\, \mathrm{x} \in X$$

Supongamos ahora que V es un espacio vectorial real (sobre $\mathbb{R}$) de dimensión finita, y sea $\xi = \{e_1, e_2, \cdots e_n\}$ una base de V. Denotemos con $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ las coordenadas de $\mathrm{v} \in V$ con respecto a la base ξ es decir, que:

$$V = x_1\, e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

Resulta claro que si $\| \ \|_{\mathbb{R}^n}$ es una norma en el espacio vectorial real $\mathbb{R}^n$, entonces $\|\mathrm{v}\| = \|\mathrm{x}\|_{\mathbb{R}^n}$ define una norma en el espacio vectorial V, y la aplicación: $f\colon (V, \| \ \|) \to (\mathbb{R}^n, \|\mathrm{x}\|_{\mathbb{R}^n})$, tal que: $f(\mathrm{v}) = \mathrm{x}$, resulta un homeomorfismo lineal y uniforme (ver definición 1.9.4) lo que permite, a efectos algebraicos, topológicos y uniformes, identificar dichos espacios. En particular tenemos lo siguiente: 1) si la norma $\|\mathrm{x}\|_{\mathbb{R}^n}$ es la norma euclidea en $\mathbb{R}^n$, esto es: $\|\mathrm{x}\|_{\mathbb{R}^n} = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$, la norma $\| \ \|$ así obtenida para V es llamada norma euclidea de V respecto de la base ξ. Dado que

$\mathbb{R}^n$ con la norma euclidea es un espacio completo, se sigue que V con la norma euclidea respecto de la base considerada, es también un espacio vectorial completo, es decir, es un espacio Banach

12. ESPACIOS CON PRODUCTO ESCALAR

Sea V un espacio vectorial real.

12.1. Definición

Se llama producto escalar o producto interior sobre V a una aplicación $\langle\ .\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que verifica las condiciones:

$$\text{(E.1) } \langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = \langle \mathrm{v}, \mathrm{u} \rangle \text{ (conmutativa)}$$

$$\text{(E.2) } \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \rangle = \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_1 \rangle + \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}_2 \rangle$$

$$\text{(E.3) } \langle \alpha\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = \alpha \langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle$$

$$\text{(E.4) } \langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle > 0 \text{ si } \mathrm{u} \neq 0 \text{ y } \langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle = 0 \text{ (definida positiva)}$$

12.2. Teorema

En todo espacio vectorial real con producto escolar se verifica la desigualdad de Schwartz, que dice:

$$\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle^2 \leq \langle \mathrm{u}, \mathrm{u} \rangle + \langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle \quad \forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$$

DEMOSTRACIÓN

Fijados u y v en V cualquiera que sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos que:

$$0 \leq \langle u + \alpha\, v, u + \alpha\, v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\, \alpha\, \langle u, v \rangle + \alpha^2 \langle v, v \rangle$$

Luego el discriminante del polinomio de segundo grado en α es no positivo, es decir:

$$\langle u, v \rangle^2 - \langle u, u \rangle \cdot \langle v, v \rangle \leq 0$$

Que es la relación buscada.

NOTA: Si $\langle\ .\ \rangle$ es un producto escalar en V, la aplicación: $\|\ \|: V \to \mathbb{R}$, definida por:

$$\|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(11)}$$

Es una norma en V, ya que:

1. $\|u\| = 0 \leftrightarrow \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}} = 0 \leftrightarrow u = 0$
2. $\|\alpha\, u\| = \langle \alpha u, \alpha u \rangle^{\frac{1}{2}} = (\alpha^2 \cdot \langle u, u \rangle)^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\, \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\, \|u\|$
3. $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\, \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle$

$$= \|u\|^2 + 2\, \langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

$$\leq \|u\|^2 + 2\, \|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2$$

$$= (\|u\| + \|v\|)^2$$

La norma así definida se llama la norma asociada al producto escalar $\langle\ .\ \rangle$. Se tiene, entonces, que todo espacio vectorial real con producto escalar es: un espacio normado. El recíproco no es cierto.

12.3. Teorema

Sea V un espacio vectorial real y sea $\|\ \|$ una norma sobre V. La norma $\|\ \|$ es la norma asociada a un producto escalar $\langle\ .\ \rangle$ definido sobre V si, y solo si, se verifica la ley "ley del paralelogramo".

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\, \|u\|^2 + 2\, \|v\|^2 \qquad \textbf{(12)}$$

DEMOSTRACIÓN

⇨ Supongamos que la norma $\| \ \|$ es la norma asociada a un producto escalar, $\langle \ . \ \rangle$ definido sobre V, entonces $\|\mathrm{u}\| = \langle \mathrm{u},\mathrm{u}\rangle^{\frac{1}{2}}$, de donde:

$$\|\mathrm{u}+\mathrm{v}\|^2 + \|\mathrm{u}-\mathrm{v}\|^2 = \langle \mathrm{u}+\mathrm{v}, \mathrm{u}+\mathrm{v}\rangle + \langle \mathrm{u}-\mathrm{v}, \mathrm{u}-\mathrm{v}\rangle$$

$$= \|\mathrm{u}\|^2 + 2\,\langle \mathrm{u},\mathrm{v}\rangle + \|\mathrm{v}\|^2 + \|\mathrm{u}\|^2 - 2\,\langle \mathrm{u},\mathrm{v}\rangle + \|\mathrm{v}\|^2$$

$$= 2\,\|\mathrm{u}\|^2 + 2\,\|\mathrm{v}\|^2$$

⇦ Recíprocamente, si $\| \ \|$ satisface la ley del paralelogramo (12), declinamos la aplicación $\langle \ . \ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ por:

$$\langle \mathrm{u},\mathrm{v}\rangle = \frac{1}{4}\left[\|\mathrm{u}+\mathrm{v}\|^2 - \|\mathrm{u}-\mathrm{v}\|^2\right] \qquad \textbf{(13)}$$

Veamos que ella es un producto escalar en V que tiene como norma asociada la de partida. En efecto, la propiedad (E.1) es evidente, probemos (E.3), esto es, $\langle \alpha\,\mathrm{u},\mathrm{v}\rangle = \alpha\,\langle \mathrm{u},\mathrm{v}\rangle$. Para probar esto, tenemos que:

a. $\|\mathrm{u}+\mathrm{v}+\mathrm{w}\|^2 + \|\mathrm{u}-\mathrm{v}-\mathrm{w}\|^2 - 2\,\|\mathrm{u}+\mathrm{v}\|^2 + 2\,\|\mathrm{w}\|^2$

b. $\|\mathrm{u}-\mathrm{v}+\mathrm{w}\|^2 + \|\mathrm{u}-\mathrm{v}-\mathrm{w}\|^2 - 2\,\|\mathrm{u}-\mathrm{v}\|^2 + 2\,\|\mathrm{w}\|^2$

asi que: a) – b) $= 2\,\|\mathrm{u}+\mathrm{v}\|^2 - 2\,\|\mathrm{u}-\mathrm{v}\|^2$, es decir:

$$\langle \mathrm{u}+\mathrm{w},\mathrm{v}\rangle + \langle \mathrm{u}-\mathrm{w},\mathrm{v}\rangle = 2\langle \mathrm{u},\mathrm{v}\rangle \qquad \textbf{(14)}$$

Y, si $\mathrm{u} = \mathrm{v}$, queda: $\langle 2\mathrm{u},\mathrm{v}\rangle - 2\,\langle \mathrm{u},\mathrm{v}\rangle$ y por iteración se sigue que si $\alpha \in \mathbb{N}$, se verifica: $\langle \alpha\,\mathrm{u},\mathrm{v}\rangle = \alpha\,\langle \mathrm{u},\mathrm{v}\rangle$.

Como la definición se sigue que $\langle -\,\mathrm{u},\mathrm{v}\rangle = -1\,\langle \mathrm{u},\mathrm{v}\rangle$ (ver 13) se tiene probado que si $\alpha \in \mathbb{Z}$, entonces, $\langle \alpha\,\mathrm{u},\mathrm{v}\rangle = \alpha\,\langle \mathrm{u},\mathrm{v}\rangle$.

Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ esto es, $\alpha = \frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$, se tiene

$$\langle \alpha\,\mathrm{u},\mathrm{v}\rangle = \langle \frac{p}{q}\,\mathrm{u},\mathrm{v}\rangle = \frac{p}{q}\,\langle \mathrm{u},\mathrm{v}\rangle = \alpha\,\langle \mathrm{u},\mathrm{v}\rangle$$

Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, existirá una sucesión $\{r_n\}$ en $\mathbb{Q}$ tal que $r_n \to \alpha$. Para cada n se cumple que: $\langle r_n \, \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = r_n \, \langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle$.

Como la aplicación definida por (13) es una función continua, al tomar limite cuando $n \to \infty$, queda que $\langle \alpha \, \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = \alpha \, \langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle$.

Para probar (E.2), esto es, que $\langle \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2, \mathrm{v} \rangle = \langle \mathrm{u}_1, \mathrm{v} \rangle + \langle \mathrm{u}_2, \mathrm{v} \rangle$, basta hacer en (14): $\mathrm{u} + w = \mathrm{u}_1$ y $\mathrm{u} - w = \mathrm{u}_2$ para obtener la identidad buscada.

Nótese, finalmente, que para cada $\mathrm{u} \in V$ es $\langle \mathrm{u}, \mathrm{u} \rangle = \|\mathrm{u}\|^2$, con lo que se tiene (E.4) y que la norma asociada al producto interno dado por (13) es la norma de partida.

12.4. Definición

1. Un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ con producto escalar se llama espacio de Hilbert si el como espacio normado, con la norma asociada al producto escalar, es un espacio Banach.
2. En un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ con producto escalar, dos elementos $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$ se dicen ortogornales si su producto escalar es cero, $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = \langle 1 \rangle$.
3. Un conjunto de elementos de V se dice que es un conjunto ortogornal (tiene norma uno con respecto a la norma asociada al producto escalar). Al conjunto se le llama ortogonal.

OBSERVACIÓN

Un conjunto ortogonal siempre está formado por elementos linealmente independientes, ya que si es $\{u_\lambda\}$ el conjunto y se tiene.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot u_i = 0, \quad entonces:$$

$$\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot u_i , u_j \rangle = \alpha_i = 0, \qquad para \;\; j = 1, 2, \cdots, n$$

La simulación es distinta si el conjunto es solo ortogonal, ya que entonces puede figurar en el conjunto el elemento nulo de V.

12.5. Ejemplo

Sea $[a, b]$ un intervalo compacto de $\mathbb{R}$, un producto escalar en el espacio vectorial real $C([a, b], \mathbb{R})$ es el dado por:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad \forall\, f \text{ y } g \in C([a, b], \mathbb{R})$$

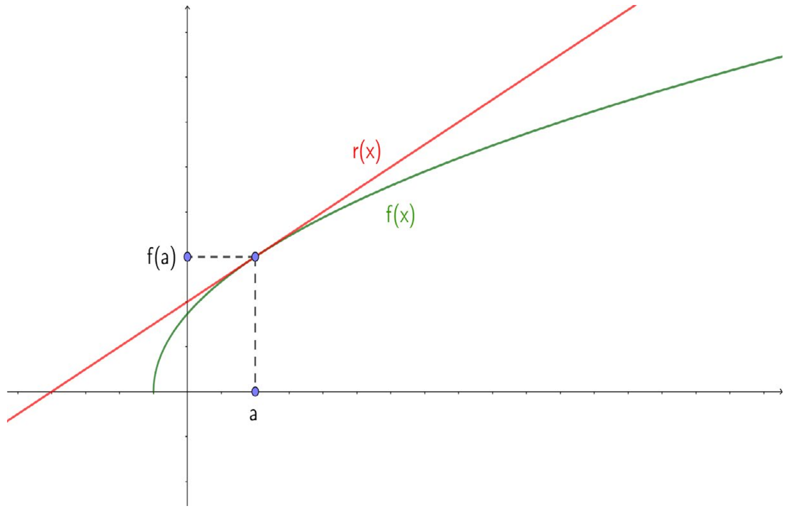
Este producto escalar, indica una norma que hace de $C([a, b], \mathbb{R})$ un espacio vectorial normado, esta norma viene por:

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b f^2(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Y recibe el nombre de norma cuadrática. A la convergencia en dicha norma se le da el nombre de convergencia cuadrática o convergencia en media cuadrática.

13. DERIVACIÓN

Consideremos una función f definida en un entorno r de un punto $a \in \mathbb{R}$ y con imagen en $\mathbb{R}$. Supongamos que su gráfica se parece mucho a una recta en un entorno del punto.



La pregunta es ¿a qué recta se parece? Por lo pronto a una que pasa por el punto $(a, f(a))$. Las rectas que pasan por dicho punto (a excepción de la vertical, que no nos va a interesar) son de la forma $r(x) = m(x - a) + f(a)$, donde $m \in \mathbb{R}$.

La interpretación geométrica de m es sencilla. En general, si tenemos una recta $r(x) = m(x) + n$, en un punto a tomará el valor $r(a) = m\ a + n$. Si nos trasladamos a un punto $a + h$ con $h \neq 0$ obtendremos $r(a + h) = ma + mh + n$. El incremento que ha experimentado la función es $r(a+h) = mh$, y si lo dividimos por el desplazamiento h obtenemos, independientemente de cuál sea h, el valor m. Es decir,

$$m = \frac{r(a+h) - r(a)}{h} \qquad \textbf{ec. (11.1)}$$

Esto no es una constante (salvo que f sea una recta), pero si ciertamente f se parece a una recta r, esta expresión debería parecerse a la pendiente de r. Si f se parece más a r cuanto más de cerca la miramos, esto es, cuando consideramos puntos más cercanos al punto a, el valor $m(h)$ debería parecerse más a la pendiente de r cuanto menor es h. Por ello definimos:

13.1. Definición

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ y a un punto interior de A. Diremos que f es derivable en a si existe (en $\mathbb{R}$)

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Cuando esto ocurre, a la recta $r(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ se le llama recta tangente a f en el punto $(a, f(a))$ (o para abreviar, en el punto a). El número $f'(a)$ es la derivada de f en el punto a.

Una función es derivable en un abierto A si es derivable en todos los puntos de A. Una función es derivable si su dominio es un abierto y es derivable en todos sus puntos.

Si $f: A \to \mathbb{R}$ es derivable, tenemos definida otra función $f': A \to \mathbb{R}$ que a cada punto $a \in A$ le asigna su derivada $f'(a)$. A esta función la llamamos (función) derivada de f en A.

Teniendo en cuenta la motivación que hemos dado para el concepto de derivada, es claro que toda recta no vertical, $f(x) = mx + n$ es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es su pendiente, o sea, m. La razón es que, según hemos visto, el cociente (11.1) es en este caso constante igual a m, luego el límite cuando h tiende a 0 es igualmente m. En particular, la derivada de una función constante, $f(x) = a$, es $f'(x) = 0$.

13.2. Teorema

Si una función es derivable en un punto a, entonces es continua en a.

DEMOSTRACIÓN

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ derivable en a. Entonces existe

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Como $\lim_{h \to 0} h = 0$, multiplicando obtenemos que

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) - f(a) = f'(a)0 = 0$$

Por lo tanto $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$. Teniendo en cuenta la definición de límite, es fácil ver que esto equivale a que $\lim_{h \to 0} f(x) = f(a)$. Esto significa que f es continua en a.

En particular, las funciones derivables son continuas, pero no toda función continua es derivable.

13.3. Ejemplos

La función $\sqrt[3]{x}$ no es derivable en 0. Es fácil probarlo. La derivada en 0 sería

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

Aquí la razón es que la pendiente de la función se vuelve infinita en 0. Otra causa de no derivabilidad (a pesar de la continuidad) es que la función forme un “pico. Por ejemplo $f(x) = |x|$ en $x = 0$. La derivada sería

$$\lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0} sig\ h$$

Pero es claro que el límite por la izquierda es −1 y el límite por la derecha es +1, luego no existe tal límite.

13.4. Cálculo de derivadas

El teorema siguiente recoge las propiedades básicas que nos permiten derivar las funciones más simples:

13.5. Teorema

Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ funciones derivables en un punto $a \in A$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. $f + g$ es derivable en a y $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

b. $\alpha\, f$ es derivable en a y $(\alpha\, f)'\,(a) = \alpha\, f'(a)$.

c. $f\; g$ es derivable en a y $(f\; g)'(a) = f'(a)\; g(a) + f(a)\; g'(a)$.

d. Si $g(a) \neq 0$, f/g es derivable en a y $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g^2(a)}$

En particular, las funciones derivables en A forman una subálgebra de $C(A)$.

DEMOSTRACIÓN DEL ÍTEM A)

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + g(a+h) - (f(a) + g(a))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\ &= f'(a) + g'(a)\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN DEL ÍTEM B)

$$(\alpha\, f)'\,(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha\, f(a+h) - \alpha\, f(a)}{h} = \alpha\, \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right) = \alpha\, f'(a)$$

DEMOSTRACIÓN DEL ÍTEM C)

$$\begin{aligned}(f\; g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) + f(a)g(a+h) - f(a)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} g(a+h) + \frac{g(a+h) - g(a)}{h} f(a)\right) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\end{aligned}$$

Donde hemos usado la continuidad de g en a al afirmar que $\lim_{h\to 0} g(a+h) = g(a)$.

La prueba de ítem d) es similar.

NOTA: aplicando inductivamente la propiedad c) se obtiene que $(x^n)' = n\; x^{n-1}$, para todo natural $n \geq 1$. Aplicando ahora d) resulta que esto es cierto para todo entero

$n \neq 0$. En particular todos los polinomios y fracciones algebraicas son derivables en sus dominios.

13.6. Definición

Sea A un intervalo y $f: A \to \mathbb{R}$, diremos que f es creciente en A si cuando $x < y$ son dos puntos de A, se cumple $f(x) < f(y)$. Si de hecho se cumple $f(x) < f(y)$ diremos que f es estrictamente creciente en A. Se dice que f es decreciente en A si cuando $x < y$ son puntos de A, se cumple $f(y) < f(x)$. Si se cumple $f(y) < f(x)$. Se dice que es estrictamente decreciente en A. La función f es (estrictamente) monótona en A si es (estrictamente) creciente o decreciente en A. Por ejemplo, la función x^3 es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

13.7. Teorema

Sea A un intervalo y $f: A \to \mathbb{R}$ una función inyectiva y continua. Entonces f es estrictamente monótona en A.

DEMOSTRACIÓN

Sean $a < b$ dos puntos cualesquiera de A. Supongamos que $f(a) < f(b)$. Entonces todo $a < x < b$ ha de cumplir $f(a) < f(x) < f(b)$, pues si, por ejemplo, $f(x) < f(a) < f(b)$, por el teorema de los valores intermedios, en el intervalo (x, b) habría un punto cuya imagen sería $f(a)$, y f no sería inyectiva.

De aquí se sigue que f es creciente en $[a, b]$, pues si $a \leq x \leq y \leq b$, hemos visto que $f(a) < f(x) < f(b)$, y aplicando lo mismo a los puntos x, b, resulta que $f(x) < f(y) < f(b)$. Igualmente, de $f(b) < f(a)$ llegaríamos a que f es decreciente en $[a, b]$. Por lo tanto f es monótona en cualquier intervalo $[a, b]$ contenido en A.

Pero si f no fuera monótona en A existirían puntos $u < v$ y $r < s$ tales que $f(u) < f(v)$ y $f(s) < f(r)$. Tomando el mínimo y el máximo de estos cuatro puntos obtendríamos los extremos de un intervalo en el que f no sería monótona.

13.8. Teorema (Teorema de la función inversa)

Sea A un intervalo abierto y $f: A \to \mathbb{R}$ una función inyectiva y derivable en A tal que f' no se anule en ningún punto de A. Entonces

a. $B = f[A]$ es un intervalo abierto.

b. La función inversa $g = f^{-1}: B \to A$ es derivable en B.

c. Para todo $a \in A$, si $f(a) = b$, se cumple que $g'(b) = 1/f'(a)$.

DEMOSTRACIÓN

a. Por el teorema anterior sabemos que $f$es estrictamente monótona. Digamos que es monotonía creciente. Si $a < b$ son dos puntos de A, por conexión $f[(a,b)]$ ha de ser un intervalo, y de la monotonía se sigue fácilmente que $f[(a,b)] = (\ f(a),\ f(b)\ )$.

b. Dado $a \in A$, podemos tomar un $\epsilon > 0$ tal que $[a-\epsilon, a+\epsilon] \subset A$, con lo que $f(a) \in \big(f(a-\epsilon), f(a+\epsilon)\big) = f((a-\epsilon, a+\epsilon)) \subset B$.

Así pues B es un entorno de $f(a)$ para todo $a \in A$, o sea, para todos los puntos de B. Por lo tanto B es abierto. Por conexión es un intervalo. Además hemos visto que f envía abiertos básicos (a,b) a abiertos básicos, y esto significa que g es continua.

c. Sea ahora $f(a) = b$. Por la monotonía, si $h \neq 0$, entonces $g(b+h) \neq g(b)$. Sea $k = g(b+h) - g(b) \neq 0$. Así $g(b+h) = k + a$, luego $b + h = f(k+a)$, y $h = f(k+a) - f(a)$. Por lo tanto

$$\frac{g(b+h)-g(b)}{h} = \frac{1}{\dfrac{f(a+k)-f(a)}{k}}$$

Ahora, k es una función de h y, como g es continua, $\lim_{h\to 0} k(h) = 0$. La derivabilidad de f en el punto a nos da que

$$g'(b) = \lim_{h\to 0} \frac{g(b+h)-g(b)}{h} = \frac{1}{f'(a)}$$

13.9. Ejemplo

Sea n un número natural no nulo y consideremos $f(x) = x^n$ definida en $(0,+\infty)$ Sabemos que es inyectiva y derivable. Su derivada es $n\,x^{n-1}$, que no se anula en $(0,+\infty)$. Por lo tanto su inversa, que es $g(x) = \sqrt[n]{x}$, es derivable en su dominio y si $y^n = x$ (con lo que y $= \sqrt[n]{x}$), entonces $g'(x) = 1/f'(y)$, o sea,

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\ y^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{1-\frac{1}{n}}$$

Así pues, tenemos probado que la regla de derivación $x^r \rightarrow r\ x^{r-1}$ es válida cuando r es entero o de la forma $\frac{1}{n}$, donde n es un número natural no nulo. Aplicando la regla del producto se concluye por inducción que vale de hecho para todo número racional r.

Con todo lo anterior, todavía no sabemos derivar funciones como $\sqrt{x^2+1}$. Con el teorema siguiente estaremos en condiciones de derivar cualquiera de las funciones que podemos construir a partir de polinomios y raíces.

13.10. Teorema (regla de la cadena)

Sean $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: B \rightarrow \mathbb{R}$. Sea un punto $a \in A$ tal que f sea derivable en a y g sea derivable en $f(a)$. Entonces la función compuesta $f \circ g$ es derivable en a y $(f \circ g)'(a) = g'\big(f(a)\big)\ f'(a)$.

DEMOSTRACIÓN

Notemos que B es un entorno de $f(a)$ y f es continua en a, luego $f^{-1}[B]$ es un entorno de a sobre el que está definida $f \circ g$. Sea $b = f(a)$. Para $k \neq 0$, llamemos

$$G(k) = \frac{g(b+k) - g(b)}{k} - g'(b)$$

La función G está definida para los puntos k tales que $b + k \in B$. Como B es abierto, G está definida al menos para h en un intervalo $(-\epsilon, \epsilon) \setminus \{0\}$. Como g es derivable en b, existe $\lim\limits_{k \to 0} G(k) = 0$, luego si definimos $G(0) = 0$ tenemos que G es continua en un entorno de 0. Claramente además

$$g(b+k) - g(b) = (\ g'(b) + G(k)\ )\ k$$

Ahora tomamos $h \neq 0$ tal que $a + h \in A$ y $k = f(a+h) - f(a)$, con lo que se cumple $f(a+h) = b + k$, luego $b + k \in B$ y está definido $G(k)$. Entonces

$$\begin{aligned} g\big(\,f(a+h)\big) - g\big(f(a)\big) &= \big(g'\big(f(a)\big) + G(k)\big)\ k \\ &= \big(g'\big(f(a)\big) + G(k)\big)\ \big(f(a+h) - f(a)\big) \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\frac{(f\circ g)(a+h)-(f\circ g)(a)}{h}=\left(g'\big(f(a)\big)+G\big(f(a+h)-f(a)\big)\right)\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Usando la continuidad de f en a y la de G en 0, tomamos el límite cuando h tiende a 0 y queda que existe $(f\circ g)'(a)=g'\big(f(a)\big)\,f'(a)$.

13.11. Ejemplo

La función $h(x)=\sqrt{x^2+1}$ es derivable en $\mathbb{R}$, pues es la composición del polinomio $f(x)=x^2+1$ con la función $g(x)=\sqrt{x}$, y ambas funciones son derivables en sus dominios. Sabemos que $f'(x)=2x$ y $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. La regla de la cadena nos da que

$$h'(x)=g'(x^2+1)f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\,2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

13.12. Definición

Sea $f\colon A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Diremos que f tiene un máximo relativo en un punto $a\in A$ si existe un entorno V de a contenido en A de modo que para todo $x\in V$ se cumple $f(x)\leq f(a)$. Diremos que f tiene un mínimo relativo en a si existe un entorno V de a contenido en A tal que para todo $x\in V$ se cumple $f(a)\leq f(x)$. La función f tiene un extremo relativo en a si tiene un máximo o un mínimo relativo en a.

13.13. Teorema

Si $f\colon A\to\mathbb{R}$ es una función derivable en un punto $a\in A$ y f tiene un extremo relativo en a, entonces $f'(a)=0$.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos, por reducción al absurdo, que $f'(a)>0$. El caso ($f'(a)<0$ se razona análogamente). Entonces $(0,+\infty)$ es un entorno de $f'(a)$, luego por definición de límite y de derivada existe un $\epsilon>0$ de manera que $(a-\epsilon,a+\epsilon)\subset A$ y si $0<h<\epsilon$ entonces

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}>0$$

Esto se traduce en que $f(a+h)>f(a)$ si $h>0$ y $f(a+h)<f(a)$ si $h<0$, lo que contradice que f tenga un extremo relativo en a.

La función del ejemplo anterior muestra que $f'(a) = 0$ no implica que a sea un extremo relativo. Más adelante volveremos sobre este punto. Ahora probemos una consecuencia sencilla de este teorema:

13.14. Teorema (Teorema de Rolle)

Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

DEMOSTRACIÓN

Como $[a, b]$ es compacto, la función f alcanza un valor minino m y un valor máximo M. Si se cumpliera que $m = M = f(a) = f(b)$, entonces f sería constante y su derivada sería nula, luego cualquier $c \in (a, b)$ cumpliría el teorema.

Supongamos que $m < M$. Entonces, o bien $m \neq f(a)$ o bien $M \neq f(a)$. Digamos por ejemplo $M \neq f(a)$. Sea $c \in [a, b]$ el punto donde $f(c) = M$. Como $M \neq f(a) = f(b)$, ha de ser $a < b < c$, y como f toma en c su valor máximo, en particular c es un máximo relativo de f, luego por el teorema anterior $f'(c) = 0$.

Como aplicación podemos relacionar la derivabilidad y el crecimiento global de una función.

13.15. Teorema

Sea A un intervalo abierto y $f: A \to \mathbb{R}$ una función derivable en A tal que f' no se anule. Entonces f es estrictamente monótona en A y además se da uno de estos dos casos:

- **a.** o bien $f' > 0$ para todo $x \in A$, y entonces f es estrictamente creciente en A,
- **b.** o bien $f' < 0$ para todo $x \in A$, y entonces f es monótona decreciente en A.

DEMOSTRACIÓN

En primer lugar, f es inyectiva, pues si $a < b$ son dos puntos de A tales que $f(a) = f(b)$, entonces existe un $c \in (a, b) \subset A$ tal que $f'(c) = 0$, en contra de la hipótesis.

Por el teorema 13.3, f es estrictamente monótona en A. Si es monótona decreciente, la prueba del teorema 13.6 muestra que no puede ser $f'(a) > 0$ en ningún punto $a \in A$, luego ha de ser $f'(a) < 0$ en todos los puntos. Análogamente, si f es monótona creciente ha de ser $f'(a) >$ en todo $a \in A$.

Veamos ahora un resultado técnico:

13.16. Teorema (Teorema de Cauchy)

Sean $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que

$$g'(c)\left(f(b) - f(a)\right) = f'(c)\left(g(b) - g(a)\right)$$

DEMOSTRACIÓN

Consideremos la función dada por

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)\left(f(b) - f(a)\right)$$

Se cumple que $h(a) = h(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$. Además h es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Por el teorema de Rolle existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$, pero $h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a))$, luego

$$f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)\left(f(b) - f(a)\right) = 0$$

Más adelante tendremos ocasión de usar este resultado en toda su generalidad, pero de momento nos basta con el caso particular que resulta de tomar como función g la dada por $g(x) = x$. Entonces tenemos:

13.17. Teorema (Teorema del valor medio)

Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Notar que el teorema de Rolle es un caso particular del teorema del valor medio. Este teorema tiene una interpretación geométrica. La expresión

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Puede interpretarse como la "pendiente media" de f en $[a, b]$, es decir, es el cociente de lo que aumenta f cuando la variable x pasa de a a b dividido entre lo que ha aumentado la variable. Lo que dice el teorema del valor medio es que hay un punto en el intervalo donde la función toma el valor medio de su pendiente.

La importancia de este teorema es que nos relaciona una magnitud global, la pendiente media, con una magnitud local, la derivada en un punto. Las consecuencias son muchas. Una aplicación típica es el siguiente refinamiento del teorema 13.8.

13.17. Teorema

Si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y su derivada es positiva (negativa) en (a, b), entonces f es estrictamente creciente (decreciente) en $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN

El teorema 13.8 nos da que f es estrictamente monótona en (a, b). Solo falta probar que es creciente o decreciente en a y en b.

Si $x \in (a, b)$, entonces $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$, para cierto punto $c \in (a, x)$. Por lo tanto, si f' es positiva, $f(x) - f(a) > 0$ para todo $x \in (a, b)$., e igualmente se prueba que $f(b) - f(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, luego f es creciente en $[a, b]$.

Sabemos que las funciones constantes tienen derivada nula. El teorema del valor medio nos da el recíproco:

13.18. Teorema

Si una función tiene derivada nula en todos los puntos de un intervalo abierto, entonces es constante.

DEMOSTRACIÓN

Sea f una función derivable en un intervalo A con derivada nula. Sean $a < b$ dos puntos cualesquiera de A. Entonces $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, donde c es un punto de (a, b). Por lo tanto f es constante.

Una consecuencia inmediata es el teorema siguiente, que afirma que una función derivable está unívocamente determinada por su derivada y su valor en un punto cualquiera.

13.19. Teorema

Si f y g son funciones derivables en un intervalo abierto y $f' = g'$, entonces existe un $k \in \mathbb{R}$ tal que $f = g + k$.

DEMOSTRACIÓN

La función $f - g$ tiene derivada nula, luego $f - g = k$.

Las derivadas proporcionan un teorema muy útil para el cálculo de límites. De momento no podemos estimar su valor porque los límites de las funciones que conocemos (polinomios, fracciones algebraicas. etc.) son fáciles de calcular directamente, pero más adelante tendremos ocasión de aprovecharlo

13.20. Teorema (Regla de L'Hˆopital)

Sean $f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ funciones derivables tales que $f(x) = g(x) = 0$ y de modo que g y g' no se anulen en (a, b). Si existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

entonces también existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

DEMOSTRACIÓN

Extendamos f y g al intervalo (a, b) estableciendo que $f(a) = g(a) = 0$. Así siguen siendo continuas.

Si $a < x < b$, por el teorema de Cauchy existe un punto $c \in (a, x)$ tal que

$$(f(x) - f(a))\, g'(c) = (g(x) - g(a))\, f'(c)$$

o sea, $f(x)g'(c) = g(x)f'(c)$ y como $g(x) \neq 0 \neq g'(c)$ podemos escribir

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Por definición de límite, si $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < c - a < \delta$, entonces

$$\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - L\right| < \epsilon$$

Así tenemos que si $0 < x - a < \delta$ existe un $c \in (a, x)$ que cumple $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ y $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. Por consiguiente, para todo $x \in (a, a + \delta)$ se cumple

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \epsilon$$

Esto significa que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Obviamente la regla de L'Hôpital también es válida cuando en las hipótesis cambiamos a por b. Combinando las dos versiones obtenemos la regla de L'Hôpital para funciones definidas en intervalos $(a - \epsilon, a + \epsilon) \ \setminus \ \{a\}$ y tomando límites en a (si existe el límite del cociente de derivadas, existen los límites por la derecha y por la izquierda y coinciden, por los casos correspondientes de la regla, existen los límites de los cocientes de las funciones por ambos lados y coinciden, luego existe el límite y coincide con el de las derivadas).

BIBLIOGRAFÍA

A Apóstol, T.M. Análisis matemático. Editorial Reverte. 1996. ISBN. 9788429150049. https://books.google.com.co/books?id=aaiyKfviI2gC

A Apóstol, T.M. Análisis matemático. Editorial Reverte. 2020. ISBN. 9788429194487. https://books.google.com.co/books?id=-LP1DwAAQBAJ

A Lacort, M.O. Análisis Matemático I - Esquemas de Teoría y Problemas Resueltos. Lulu.com. 2008. ISBN. 9781409231349. https://books.google.com.co/books?id=oYTVcV-J7idYC

A Llopis, J.F. Análisis matemático de una variable. Asociación Cultural y Científica Iberoamericana (ACCI). 2015. ISBN. 9788415705758. https://books.google.com.co/books?id=sflNCgAAQBAJ

Adam, P.P. Cursos de análisis matemático para ingenieros: Curso teórico práctico de cálculo integral aplicado a la física y técnica. Biblioteca Matemática. 1968. https://books.google.com.co/books?id=2O2dzQEACAAJ

Escardó, E.L. Principios de análisis matemático. Editorial Reverte. 1991. ISBN. 9788429150728. https://books.google.com.co/books?id=pjqu8eEB_XwC

Galdeano, Z.G. Tratado de análisis matemático. Emilio Casañal. 1905. https://books.google.com.co/books?id=-io7AQAAIAAJ

Juliá-Díaz, B. y Morell, M.G. Análisis matemático de una variable. Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona. 2008. ISBN. 9788447533343. https://books.google.com.co/books?id=-A_yugE9N80C

Montero, P.F.A. Análisis matemático elemental. Dossat. 1959. https://books.google.com.co/books?id=DhX4vQEACAAJ

Novoa, J.F. Análisis Matemático I. UNED. 1991. ISBN. 9788436216677. https://books.google.com.co/books?id=ZnW-RAAACAAJ

Ortega, J.M. Introducción al análisis matemático. Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona. 1993. ISBN. 9788433530479. https://books.google.com.co/books?id=dmOd2KMy7eYC

Ramos, E.E. Análisis Matematico I: Para Estudiantes de Ciencia e Ingenieria. Edukaperu. 2009. ISBN. 9789972339417. https://books.google.com.co/books?id=4U5uD-QAAQBAJ

Takeuchi, Y. Análisis matemático. Universidad Nacional de Colombia. 2008. ISBN. 9789587618891. https://books.google.com.co/books?id=DAT2DwAAQBAJ

Villalba, J.M.C. Introducción al análisis matemático II. ESIC Editorial. 2007. ISBN. 9788473564823. https://books.google.com.co/books?id=UG-yPhyMQgQC

Viñals, J.M.V. Tratado de análisis matemático: álgebra superior. Teoría general de ecuaciones. Imp. de la Casa Provincial de Caridad. 1903. https://books.google.com.co/books?id=Ek9eAAAAcAAJ

ACERCA DE LOS AUTORES

JULIO CÉSAR ROMERO PABÓN.
Docente de matemáticas de la Universidad del Atlántico.
Licenciado en Matemáticas y Física.
Especialista en Administración y Docencia Universitaria.
Magíster en Matemática Aplicada.
Doctor en Ciencias de la Educación Mención Matemática.

GABRIEL MAURICIO VERGARA RÍOS.
Docente de matemáticas de la Universidad del Atlántico.
Licenciado en Matemáticas y Física.
Especialista en Matemáticas.
Magíster en Ciencias Matemática.
Doctor en Ciencias de las Educación Mención Matemática.

ROBERTO ENRIQUE FIGUEROA MOLINA.
Docente de educación de la Universidad del Atlántico.
Químico Farmacéutico.
Magíster en Docencia de la Química.
Doctor Educación.