Nina De Castro

3 B.

Nina De Castro

Nina De Castro

26-1-

Nina

16-4-73

INSTITUTO ... NIETO CABALLERO
BIBLIOTECA
BARRANQUILLA

Lecciones de ALGEBRA y TRIGONOMETRIA

Por JUAN A. VIEDMA

DE LA UNIVERSIDAD CENTRAL DE MADRID

TOMO I

COLECCION DIDACTICA
DE MATEMATICA ELEMENTAL MODERNA

Nina De Castro

Luis Fernando De Castro

EDITORIAL
Norma
CALI COLOMBIA

PROLOGO

Animados por la buena acogida que todo el profesorado y el alumnado colombianos están dispensando a nuestra "Colección Didáctica de Matemática Elemental Moderna", y por el espíritu de servicio de la Editorial Norma, hemos acometido la tarea de escribir esta nueva obra, sobre "Algebra y Trigonometría", destinada a los estudiantes de tercero y cuarto de Bachillerato, y en general para todas aquellas personas que necesiten un conocimiento de Algebra y de la Trigonometría a un nivel medio.

* * *

La mayor parte de las dificultades que encuentra un alumno normal, entre los 12 y los 14 años, en el aprendizaje del Algebra, se deben a una falta de comprensión de los *Principios Fundamentales* en los que se apoyan las reglas del Cálculo Algebraico (las *Leyes Formales* de las operaciones) y a la carencia de una práctica ordenada y ascendente de dichos principios. Cuando el estudiante no comprende el significado de las operaciones que realiza con los símbolos (con las letras), el cálculo algebraico se convierte en una tortura psicológica, pues no hay labor más penosa que la de tratar de aprender un material sin sentido. A estas consideraciones tenemos que añadir que en el estudio de los primeros Capítulos del Algebra, cuando el estudiante se está iniciando en los tecnicismos del cálculo literal, difícilmente puede contar con apoyos concretos, pues el producto de monomios, o el cociente de polinomios, por ejemplo, son operaciones abstractas, completamente generales, realizadas con símbolos (letras generalmente) cuyo significado es el de números reales cualesquiera. ¿Cuál es entonces la orientación que hay que dar al principiante para que vaya asimilando y comprendiendo las reglas del Cálculo Algebraico? La respuesta es categórica· La orientación que hay que dar al estudiante para que no se pierda en la selva de símbolos que le ofrece el Algebra, desde sus primeros capítulos, consiste en que cobre conciencia clara de que todas las operaciones de cálculo algebraico, por complicadas que sean, son el resultado de una aplicación combinada de las leyes formales de las operaciones fundamentales de la Aritmética. Entonces preguntará el estudiante: ¿cuál es la diferencia que existe entre la Aritmética y el Algebra?

La respuesta es esta: No existe diferencia de estructura entre la Aritmética y el Algebra, las reglas de juego son las mismas, lo que cambia es el grado de generalidad de los símbolos; por ejemplo, si estudiando Aritmética nos encontramos en su primer capítulo, donde se tratan los números naturales, la igualdad $a+b=b+a$ significa que *la suma de dos* **números naturales** *no depende de su orden;* pero cuando se adelanta en el estudio de la Aritmética se aprende que la suma de dos números fraccionarios tampoco depende de su orden, de forma que la igualdad anterior sigue siendo válida, aun cuando a y b representen a números fraccionarios cualesquiera; y si continuamos avanzando en el estudio de la Aritmética aprendemos que la suma de dos *números racionales* (naturales, enteros negativos, fraccionarios positivos o negativos) tampoco depende de su orden, de forma que aunque a y b representen *números racionales* cualesquiera, la igualdad anterior sigue siendo válida. Finalmente, si llegamos al estudio de los números irracionales, y aun de los complejos, que se hará en este libro, siempre comprobamos que el orden de los sumandos no altera la suma.

Si en vez de haber tomado como ejemplo la ley conmutativa hubiéramos elegido otra cualquiera de las leyes formales, hubiéramos obtenido la misma conclusión, es decir, las leyes formales de las operaciones aritméticas **permanecen válidas** a lo largo de todas las ampliaciones que se van haciendo de los campos numéricos, hasta llegar a los números irracionales y a los complejos de dos unidades inclusive; en esto consiste el *"Principio de Permanencia de las Leyes Formales"*, de Hänkel, que es el fundamento del Algebra (se sobrentiende del Algebra de los números reales y complejos, que es la única que se estudia en Bachillerato).

Una vez que se ha recorrido toda la Aritmética y se ha comprobado que las Leyes Formales de las operaciones *permanecen válidas en* todos los campos numéricos, estamos autorizados para usar símbolos cuyo significado sea el de números reales cualesquiera (o aun complejos), y a manejar dichos símbolos (generalmente letras) aplicándoles dichas

Leyes Formales, y en esto consiste precisamente el álgebra, en combinar ciertos símbolos, cuyo significado es el de números reales o complejos cualesquiera, mediante las operaciones definidas en la Aritmética, y transformar dichas combinaciones de símbolos en otras por aplicación de las Leyes Formales.

Después de esta explicación se comprende claramente la afirmación hecha antes acerca de que la diferencia que existe entre Aritmética y Algebra reside únicamente en que en Algebra las letras tienen un significado más general que en Aritmética: *Ellas representan cualquier número de cualquier clase.* Cuando hay que hacer alguna limitación a los valores de las letras, porque una operación resulte imposible para ciertos números (por ejemplo, la división por cero), esto se advierte explícitamente.

* * *

Se ha comparado el Algebra con un juego como el ajedrez; las Leyes Formales de las operaciones desempeñan el mismo papel que las reglas del juego; de igual manera que las reglas del juego de ajedrez nos indican los movimientos que nos está permitido realizar con cada clase de ficha, las Leyes Formales nos indican los cambios que pueden efectuarse con los datos de las operaciones sin que cambie su resultado. Todo el mundo comprende que no basta con saber las reglas del ajedrez para ser un buen jugador; se necesita además tener mucha práctica y poner mucha atención en el juego, y lo mismo puede decirse del Algebra, no basta con saber las Leyes Formales, sino que hay que adquirir una gran destreza en combinarlas de forma adecuada y con seguridad en cada caso (igual que ocurre con los movimientos de las reinas, caballos, peones, etc., en cada partida de ajedrez).

Para que el alumno vaya adquiriendo esta destreza y seguridad en el Cálculo Algebraico son necesarias dos condiciones:

1ª) una comprensión clara de las Leyes Formales de las operaciones, y

2ª) una práctica bien ordenada y abundante que lo vaya adiestrando en las formas convenientes de combinarlas en cada caso.

Para dar cumplimiento a estas dos condiciones insistiremos siempre en el fundamento de cada regla del Cálculo Algebraico, y después propondremos una práctica suficiente y bien ordenada que vaya convirtiendo al alumno en un calculista sagaz y seguro.

* * *

Al final de cada Capítulo se proponen diversas pruebas que ayudarán a fijar y clarificar las ideas. Muchas de estas pruebas pueden ser usadas por el profesor en exámenes cortos que deben realizar los alumnos con bastante frecuencia, por lo menos al terminar cada capítulo.

De esta forma, el texto será un instrumento de trabajo, y no meramente un libro para ser leído de forma pasiva; el alumno que haya trabajado todos los ejercicios que se incluyen en las secciones de los capítulos y haya superado con éxito las pruebas y los problemas que se proponen al final, puede seguir adelante sin dificultades.

Si todo el esfuerzo que hemos puesto al escribir este libro, sirviera de ayuda real a la juventud colombiana para comprender y usar el Algebra, y para formar su inteligencia y prepararla para otras lides más altas, nos daríamos por satisfechos.

Medellín, junio, 1965

El Autor

PLAN DE LA OBRA
(Para los señores Profesores)

De acuerdo con las ideas expuestas en el prólogo, dedicaremos el Capítulo primero a explicar la estructura de los números reales, es decir, que revisaremos aquellas partes de la Aritmética que se refieren a las operaciones fundamentales con las distintas clases de números y las Leyes Formales de las mismas.

Insistiremos especialmente en la estructura del campo de los números racionales, que coincide con la de los reales y complejos de dos unidades y que es la que rige toda el Algebra Elemental. No hemos creído necesario desarrollar primero los números enteros negativos y después los fraccionarios negativos, pues como el alumno ya conoce las reglas operatorias con fracciones positivas de la Aritmética, se puede hacer un tratamiento completo del campo numérico racional, sin perder nada en claridad y ganando mucho en generalidad y en la posibilidad de proponer ejercicios más interesantes; así pues, tratamos conjuntamente las operaciones de números racionales y sus leyes. De los números irracionales se da una breve noticia, para obtener una visión completa de todo el campo de los números reales.

* * *

Una vez que el alumno tiene un conocimiento claro del conjunto de reglas operatorias entre números racionales se comienza el estudio del Cálculo Literal, definiendo con precisión las distintas clases de expresiones algebraicas y desarrollando todo el cálculo con expresiones enteras (monomios y polinomios). Tratamos con bastante detalle la Regla de Ruffini y sus importantes consecuencias, como el Teorema del Resto, de tantas aplicaciones en la factorización y en la Teoría de Ecuaciones.

Al llegar a este punto podríamos seguir desarrollando otros capítulos de cálculo algebraico (Factorizaciones, M.C.D. y M.C.M., fracciones algebraicas, radicales, etc.), pero hemos preferido comenzar el estudio de ecuaciones enteras de primer grado, con el fin de animar la atención del alumno, ofreciéndole aplicaciones interesantes del Algebra a la resolución de problemas prácticos. Después volvemos nuevamente sobre las técnicas del cálculo algebraico, completando el estudio de las factorizaciones, M.C.D. y M.C.M., y las fracciones algebraicas, después de lo cual el alumno queda preparado para el estudio de las ecuaciones fraccionarias de primer grado, que se hace de forma elemental, pero correcta, indicando en cada caso los principios que se usan para resolverlas.

Se termina el ciclo del cálculo algebraico elemental dando unas nociones sobre radicales algebraicos y exponentes fraccionarios.

El material desarrollado hasta aquí, (las 7 primeras unidades del libro) *se corresponde con el contenido del programa de Algebra para el tercer curso de Bachillerato, y es suficiente para un año intensivo de trabajo. Todo él se presenta en el primer volumen de esta obra, dejando para un segundo volumen el desarrollo del programa de cuarto año y los Elementos de Trigonometría.*

* * *

Sigue después el estudio de los sistemas de ecuaciones de primer grado (capítulo 8 del texto), con unas nociones sobre determinantes y una práctica abundante y bien ordenada de resolución de sistemas por los distintos métodos y de su aplicación a problemas prácticos.

Con el fin de poder dar la interpretación geométrica de las ecuaciones se introduce el concepto de función y las representaciones gráficas cartesianas, limitándonos al estudio de la función lineal y de la cuadrática.

En el capítulo 10 se dan unas nociones sobre los números complejos, muy elementales pero suficientes para comprender bien la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática de discriminante negativo y dar solución completa al problema de la radicación de números reales, que quedó sin ella cuando el radicando es negativo y el índice de la raíz par.

La ecuación cuadrática y sus aplicaciones se desarrollan ampliamente, tanto desde el punto de vista analítico como del gráfico, y antes de dar la demostración de la fórmula general se prepara al alumno en la descomposición de un trinomio cuadrático en la suma del cuadrado de un binomio más un número; de esta forma comprende después el sentido de la demostración general. En este capítulo se dedica una sección al estudio de las ecuaciones irracionales que conducen a ecuaciones cuadráticas y otra a los sistemas formados por una ecuación lineal y otra cuadrática, o por dos ecuaciones cuadráticas sencillas.

* * *

En el capítulo 12 se tratan las aplicaciones geométricas de las ecuaciones, de tanto valor formativo y práctico.

Los últimos capítulos se dedican al estudio de las progresiones aritméticas y geométricas, las funciones exponencial y logarítmica, con un estudio completo de los logaritmos decimales y de sus aplicaciones más importantes al cálculo numérico y a la resolución de ecuaciones exponenciales.

Finalmente, y aunque no es exigido en el Cuestionario Oficial, incluímos un capítulo sobre Análisis Combinatorio y Cálculo de Probabilidades, por considerar que se trata de dos temas fundamentales para la formación de la mente de un hombre actual, tanto desde el punto de vista teórico como por las aplicaciones tan importantísimas que se hacen de estos temas en Biología, Física y Química, Organización Industrial, Economía, etc.

* * *

Las tres últimas unidades del texto se dedican al desarrollo elemental de la Trigonometría (tal como se exige en el programa de quinto año), de forma que su estudio puede diferirse hasta el primer trimestre del quinto curso de Bachillerato, o, si hay tiempo, adelantarlo para preparar al alumno para el estudio de la Física.

* * *

Como siempre, agradeceremos todas las sugerencias que tengan a bien hacernos los señores profesores para mejorar este libro de trabajo que les ofrecemos, con el deseo de contribuír, entre todos, a la elevación del nivel de los estudios matemáticos en Colombia.

Unidad 1

La notación diofántica

Diofanto representó la "incógnita" por el signo s' ; si era una se escribía s° y si eran varias $\overline{ss}$
Cuadrado de la incógnita: δ^{υ} (δύναμις : *dinamis.*)
Cubo de la incógnita: κ^{υ}
(κύβος = *Kibos*)
La sustracción era representada por ↑ *y la suma se indicaba por simple contigüidad de los signos.*

El genio griego descubrió las leyes del pensamiento y el arte de discurrir. Platón, Aristóteles y Sócrates modelaron la *filosofía;* Thales, Pitágoras, Eudoxio y Arquimedes construyeron la *matemática.* Pero fue Alejandro El Grande, dominador del mundo conocido, quien realizó el intercambio de conocimientos entre los pueblos orientales y Grecia. De esos fecundos contactos surgió una cultura matemática nueva en Alejandría, ciudad griega en Egipto cuyo Museo, institución científica que fue al tiempo Universidad, Observatorio Astronómico, Jardín Botánico, Biblioteca, Residencia de profesores y estudiantes, se convirtió en el centro de la sabiduría de aquellos tiempos.

Parece que Diofanto de Alejandría vivió en el año 275 después de Cristo. De su existencia quedaron trece libros que él llamó de Aritmética de los cuales se conocen solo seis. Hasta Diofanto, el "álgebra", que no tenía este nombre y era un fino ejercicio de matemáticas, buscaba de acuerdo con la lógica una *cantidad desconocida* o "incógnita" con generalizaciones. Estos ejercicios eran "retóricos" o sea hechos con palabras o pruebas verbales.

Con el gigantesco progreso de la geometría hecho por los griegos, el "álgebra" incipiente se volvió "geométrica". Las ecuaciones y las incógnitas se expresaban y resolvieron "geométricamente". Diofanto aplicó por vez primera "letras" y signos especiales para los cálculos. Desde entonces su "álgebra" se ha llamado *álgebra sincopada* que antecede al *álgebra simbólica* actual.

Es famoso el epitafio que se atribuye a la tumba de Diofanto y que dice: "Esta es la tumba que guarda las cenizas de Diofanto. Es verdaderamente maravillosa porque, gracias a un artificio aritmético, descubre toda su existencia. Dios le permitió ser niño durante $\frac{1}{6}$ de su vida; luego de $\frac{1}{2}$ sus mejillas se cubrieron de barba; después de $\frac{1}{7}$ encendió la llama del matrimonio del que, a los cinco años, tuvo un hijo; pero este niño, desgraciado aunque amado apasionadamente, murió apenas llegado a la mitad de la vida alcanzada por su padre, el cual vivió aún cuatro años más mitigando su dolor con sus investigaciones sobre la ciencia de los números".

De aquí resulta que Diofanto murió a los 84 años, fue niño hasta los 14, le salió barba a los 21, se casó a los 33 y tuvo un hijo a los 38, el cual murió cuando el padre tenía 80 años.

CONTENIDO DE LA UNIDAD

1

1.1 LOS NUMEROS NATURALES

Como esta clase de números fueron estudiados en la Aritmética, nos limitamos a recordar aquí las cuestiones que necesitaremos para entender bien el curso de Algebra.

Los números naturales fueron creados para resolver el problema de *contar* los elementos de un conjunto; por ejemplo, para contar los alumnos de una clase, o los árboles de un bosque, o los aviones que hay en un aeropuerto, se emplea en cada caso *un número natural.*

Con estos números se definieron las siguientes operaciones: *Suma, resta, multiplicación, división, potenciación* y *radicación.*

Estas operaciones tienen ciertas propiedades, válidas cualesquiera que sean los números naturales que se tomen como datos, que se llaman las *"Leyes Formales".*

Para expresar simbólicamente estas leyes *se usan letras* que representan a *números naturales cualesquiera;* de acuerdo con esto, cuando veas una letra en esta sección, por ejemplo, *a,* tienes que imaginarte que *a* representa a *cualquier número natural.*

Las partes más importantes que nos interesa repasar son:

a) *Las Leyes Formales de la suma y del producto.*

b) *La Ley Distributiva del cociente exacto respecto de la suma o de la diferencia.*

c) *Las Leyes del Cálculo con potencias de exponente natural.*

a) **Las Leyes Formales de la suma y del producto de Números Naturales.**

De una vez para siempre repetimos que *todas las letras que usemos en esta sección representan números naturales cualesquiera.*

Leyes Formales	*Suma*	*Producto*
1. **Ley Clausurativa:**	$a+b$ es siempre un número natural.	$a \, . \, b$ es siempre un número natural
2. **Ley Modulativa:**	$a+o=a$ El cero se dice que es el elemento neutro o indiferente de la adición. También se dice que el cero es *el módulo* de la adición.	$a \, . \, 1=a$ El 1 se dice que es el elemento neutro o indiferente de la multiplicación. También se dice que el 1 es *el módulo* de la multiplicación.
3. **Ley Uniforme:**	Si es $a=a'$, y $b=b'$; entonces $a+b=a'+b'$. En particular, si es $a=b$; entonces $a+c=b+c$.	Si es $a=a'$ y $b=b'$; entonces $a \, . \, b=a' \, . \, b'$. En particular, si es $a=b$; entonces $a \, . \, c= =b \, . \, c$.
4. **Ley Conmutativa:**	$a+b=b+a$	$a \, . \, b=b \, . \, a$
5. **Ley Asociativa:**	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a \, . \, b) \, . \, c=a \, . \, (b \, . \, c)$
6. **Ley de Monotonía:**	Si es $a<b$; entonces $a+c<b+c$.	Si es $a<b$; entonces $a \, . \, c<b \, . \, c$.
7. **Ley Cancelativa:** *	Si es $a+x=b+x$; entonces $a=b$.	Si es $a \, . \, x=b \, . \, x$; entonces $a=b$. (Supuesto $x \neq o$; el signi $\neq$ se lee "distinto").

* La Ley Cancelativa es consecuencia de la de monotonía; por ejemplo para la suma, si no fuese $a=b$ sería $a \gtrless b$, y sumando x a los dos miembros, $a+x \gtrless b+x$ (por la ley de monotonía), lo que va contra el supuesto de ser $a+x=b+x$.

Ejercicios

13. Si $m-s \doteq d$, $m=s+?$.

14. ¿Tiene la resta de números naturales la Ley clausurativa? En otras palabras: ¿Existe siempre dentro de los números naturales un número que sea la diferencia de dos números naturales cualesquiera? ¿Qué condición tienen que cumplir el minuendo y el sustraendo para que exista diferencia dentro del campo de los números naturales?

15. $a-o=?$. ¿Por qué? ¿Cómo se llama esta ley?

16. ¿Tiene la sustracción la ley conmutativa? ¿Y la asociativa?

17. Dados dos números naturales, a y b, tales que $a \geqslant b$, ¿puede existir más de un número natural que sea la diferencia entre a y b? ¿Cómo se llama esta ley?

18. Si a y b son mayores que c, y $a<b$, ¿cómo será $a-c$ respecto de $b-c$? ¿En virtud de qué ley?

19. ¿Tiene la división exacta entre números naturales la ley clausurativa?

20. ¿Qué le ocurre a un cociente exacto si el dividendo y el divisor se multiplican por un mismo número? Expresa esta propiedad fundamental simbólicamente.

21. Define la raíz *n-sima* de un número natural. ¿Tiene la radicación la ley clausurativa?

22. Escribe la suma $a+b+c$ de cuatro formas distintas aplicando las leyes formales que se te ocurran.

23. Escribe el producto $a \, . \, b \, . \, c$ de cuatro formas distintas aplicando las leyes conmutativa y asociativa.

24. Con el signo $(++)$ denotamos la siguiente operación: $a(++)b=a+2b$. ¿Tiene la operación $a(++)b$ la ley conmutativa? ¿Y la ley uniforme?

25. ¿Qué leyes formales se aplican en las siguientes igualdades? $(a+b+c) \, . \, m=m \, . \, (a+b+c)=m \, . \, a+m \, . \, b+m \, . \, c$.

26. Si en una división exacta se dividen el dividendo y el divisor por un mismo número, que sea divisor de los dos, ¿sufre alguna alteración el cociente?

27. ¿Hay algún número que sea el resultado de la operación $a \div o$?

1.2 LOS NUMEROS FRACCIONARIOS POSITIVOS

Recordamos el origen y las propiedades más importantes de los números fraccionarios.

a) **Origen Aritmético de los Números Fraccionarios Positivos:**

La división exacta de dos números naturales sólo es posible cuando el dividendo es múltiplo del divisor. Si queremos que la operación $a \div b$ tenga solución siempre, aunque a no sea múltiplo de b, tendremos que crear unos nuevos números dentro de los cuales la operación $a \div b$ tenga la *propiedad clausurativa.*

b) **Origen Geométrico y Físico de los Números Fraccionarios Positivos:**

Cuando se quiere medir una cantidad de una magnitud, por ejemplo, el largo de una habitación, una vez elegida la unidad de medida, por ejemplo 1 metro, lo más frecuente es que el metro no esté contenido un número exacto de veces en la longitud de la habitación, pero que subdividiendo el metro en unidades más pequeñas, por ejemplo en decímetros, la longitud de la habitación se pueda medir exactamente con el metro y la décima parte del metro. En este caso la medida es *un número fraccionario, o número quebrado.*

Aquí describimos sucintamente las propiedades más importantes de estos números, que debes repasar en la Aritmética.

c) **Representación, igualdad y desigualdad.**

Un número fraccionario se representa por un par ordenado de números naturales (el numerador y el denominador) separados por una raya, así: $\frac{a}{b}$, $(b \neq o)$.

¿Qué representa el denominador? ¿Y el numerador? Convendremos que las fracciones con denominador unidad coinciden con su numerador: $\frac{a}{1} = a$.

¿Qué le ocurre a un número fraccionario si el numerador y el denominador se multiplican por un mismo número? ¿Cómo son los números $\frac{a}{b}$ y $\frac{a \,.\, h}{b \,.\, h}$?
(representando las letras números naturales, y b y h distintos de cero).

Concluímos así que un número fraccionario admite infinitas representaciones, pues si se multiplican sus dos términos por un mismo número se obtiene el mismo número fraccionario. Se dice que todas estas representaciones son *equivalentes.* Esto permite reducir varios quebrados a otros *equivalentes* de igual denominador, como debes repasar en la Aritmética.

Igualdad: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *si, y solamente si,* $a \,.\, d = b \,.\, c$.

(Esta definición equivale a reducir las dos fracciones a común denominador y exigir que los numeradores resultantes sean iguales. Compruébalo).

Comprueba que esta definición de igualdad tiene las propiedades *reflexiva, simétrica* y *transitiva.*

Desigualdad: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, *si y solamente si,* $a \,.\, d \,. < b \,.\, c$.

(Esta definición equivale a reducir las dos fracciones a común denominador y exigir que el numerador resultante para la primera sea menor que el resultante para la segunda).

Comprueba como ejercicio que esta definición de desigualdad tiene la *propiedad transitiva, es decir, si* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, y $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$; entonces $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$.

Ayuda: Expresa la definición de desigualdad para las dos primeras, multiplícalas y después de simplificar te queda la definición de la tercera desigualdad.

d) **Suma:** La suma de fracciones de igual denominador se define por la siguiente igualdad:

$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}$. Si no tuvieran igual denominador se reducen previamente a común denominador.

Con esta definición, la suma de fracciones tiene las mismas leyes formales que la suma de números naturales (Principio de Permanencia de las Leyes Formales, de Hänkel).

Esta conclusión importantísima debes verificarla personalmente, y si no te es posible, repásala en la Aritmética.

e) **Resta:** Se define igual que con los números naturales: *La diferencia de dos fracciones (minuendo y sustraendo) en una tercera fracción que sumada con el sustraendo nos da el minuendo.*

Si tienen igual denominador la diferencia se obtiene así:

$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n}$, pues $\frac{b}{n}+\frac{(a-b)}{n}=\frac{a-b}{n}+\frac{b}{n}=\frac{(a-b)+b}{n}=\frac{a}{n}$, que es el minuendo.

Si no tienen igual denominador se reducen previamente a común denominador.

Para que la resta sea posible el minuendo debe ser mayor que el sustraendo, y por tanto, la sustracción de fracciones no tiene la propiedad clausurativa.

f) **Multiplicación:** El producto de dos fracciones se define así:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Con esta definición se conservan todas las leyes formales de la multiplicación.

g) **División:** *El cociente exacto de dos fracciones (dividendo y divisor) es una tercera fracción que multiplicada por el divisor nos da el dividendo. Esta fracción existe siempre y es única.*

El cociente se obtiene multiplicando la fracción dividendo por la fracción divisor invertida, esto es:

$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$, pues $\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{c\cdot a\cdot d}{d\cdot b\cdot c}=\frac{a}{b}$ que es el dividendo.

El cociente exacto de dos números naturales existe siempre en el campo de los números fraccionarios, y es igual a una fracción cuyo numerador es el dividendo y cuyo denominador es el divisor.

En efecto: $a\div b=\frac{a}{1}\div\frac{b}{1}=\frac{a\cdot 1}{b\cdot 1}=\frac{a}{b}$

Dentro del conjunto formado por los números naturales y por las fracciones positivas, la división tiene la *Propiedad Clausurativa.* (Se excluye la división por cero, que es imposible).

h) **Potenciación:** Si el exponente es natural se conserva la misma definición ya conocida.

Definición:
$$\begin{cases}\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}=\frac{a\cdot a\cdot a\cdots a}{b\cdot b\cdot b\cdots b}=\frac{a^n}{b^n}\\ \left(\frac{a}{b}\right)^1=\frac{a}{b}\\ \left(\frac{a}{b}\right)^0=1\end{cases}$$

Las reglas de cálculo con potencias de base fraccionaria y exponente natural *son las mismas* que las de potencias de base y exponente natural, lo cual debe ser comprobado por el alumno; por ejemplo,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m\times\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$$

i) **Radicación:** Se define igual que con los números naturales. La raiz n-sima de una fracción, *si existe,* es otra fracción que elevada al índice n nos da la primera.

En símbolos: Si $\sqrt[n]{\frac{A}{B}}=\frac{a}{b}$; entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{A}{B}$.

EJERCICIOS 1.2

Ejercicios

1. ¿Forman los números naturales un subconjunto de los fraccionarios?
2. Obtener una fracción *equivalente a* $\frac{4}{5}$ de denominador 20.
3. Seleccionar, entre las siguientes fracciones, las que sean iguales, y las que no lo sean ordenarlas de menor a mayor:

   $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{6}{15}, \frac{2}{3}, \frac{9}{12}, \frac{5}{6}$ ✓

4. Sumar las siguientes fracciones:

   a) $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$, b) $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+\frac{r}{s}$ V

   Ayuda: Reduce a común denominador, multiplicando los dos términos de cada fracción por los denominadores de las otras (o de la otra, si no hay nada más que otra).
5. Restar $\frac{x}{m}-\frac{y}{n}$ V
6. Demostrar la Ley Asociativa de la suma de fracciones.
   Ayuda: Usense fracciones de igual denominador y aplíquese la Ley Asociativa de la suma de números naturales.
7. Demostrar la Ley Distributiva de la multiplicación respecto de la suma en el campo de los números fraccionarios.
8. Probar las cinco leyes de cálculo con potencias de base fraccionaria y exponente natural.
   Ayuda: Sigue el mismo modelo de demostración que se aplica a cada una de las leyes con base y exponente natural en el texto de Aritmética.
9. Deduce que si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$, y $\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$.
10. Calcular las siguientes potencias:

    a) $\left(\frac{a}{b}\right)^3\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^3$; b) $\left(\frac{m}{n}\right)^5\cdot\left(\frac{m}{n}\right)^3$; c) $\left(\frac{a}{b}\right)^5\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^3$;

    d) $\left(\frac{a}{b}\right)^5\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^5$; e) $\left[\left(\frac{x}{y}\right)^n\right]^m$; f) $\left(\frac{a}{b}\right)^m\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^m\cdot\left(\frac{e}{f}\right)^m$

Nina De Castro

1.3 LOS NUMEROS NEGATIVOS Y EL CAMPO NUMERICO RACIONAL

I) ORIGEN ARITMETICO DE LOS NUMEROS NEGATIVOS

Al estudiar los números naturales y los fraccionarios positivos vimos que para que la sustracción fuera posible es necesario que el minuendo sea mayor que el sustraendo; por ejemplo, las operaciones 3-7 y $\frac{1}{3}-\frac{5}{2}$ *carecen de solución en el campo de los números positivos* (llamados también números absolutos).

Si queremos que la sustracción de dos números, naturales o fraccionarios, sea siempre posible, o sea, que tenga siempre solución, aunque el minuendo sea menor que el sustraendo, tendremos que crear unos nuevos números capaces de dar solución a la operación de restar en todos los casos. Estos nuevos números son llamados los *números negativos* y serán definidos y estudiados en esta sección.

II) ORIGEN GEOMETRICO Y FISICO DE LOS NUMEROS NEGATIVOS

El uso práctico de trascendental importancia que se hace con los números es el de *representar a las cantidades de ciertas magnitudes;* una vez elegida la unidad, la cantidad se representa por **el número** *de unidades contenidas en ella,* que se llama **la medida** de la cantidad.

Los números que manejan los físicos, los químicos, los ingenieros, los biólogos, los economistas, etc., suelen ser *medidas de cantidades* pertenecientes a ciertas magnitudes, por ejemplo, medidas de cantidades de longitud, de peso, de presión, del estado financiero de una persona, etc.

Existe una clase de magnitudes, de una importancia práctica extraordinaria, llamadas **magnitudes relativas,** cuyas cantidades no pueden ser representadas en todos los casos por los números positivos (naturales o fraccionarios positivos), y esta es una grave deficiencia del sistema de los números positivos desde el punto de vista práctico, que nos obligará a crear los *números negativos* para poder representar numéricamente cualquier cantidad de una magnitud relativa. Veamos algunos ejemplos de **Magnitudes Relativas:**

1. **El estado financiero de una persona o empresa:**

Todos comprendemos fácilmente que el estado financiero de una persona puede pasar por los siguientes grados:

a) Que la persona posea una cantidad de dinero en su haber, es decir, que no tenga deudas y que disponga de dinero. En este caso diremos que la persona tiene un *capital positivo.*

b) Que la persona no tenga nada ni deba nada; en este caso diremos que la persona tiene un *capital nulo.*

c) Finalmente puede ocurrir que una persona, no solo carezca de capital, sino que además *tenga deudas;* en este caso convendremos en decir que la persona tiene un *capital negativo.*

Si una persona no tuviese dinero alguno, y además tuviera deudas por valor de $ 300, ¿cómo mediríamos la cantidad de dinero correspondiente a su situación financiera?

Evidentemente no podemos representar su capital simplemente por $ 300, pues nos confundiríamos pensando que tiene $ 300 en su haber; una solución sería explicar que la persona tiene $ 300 *en su debe* y así lo hacen los contables, pero mucho más fácil es inventar unos signos simples que antepuestos a la cantidad nos indiquen si se trata de un capital positivo (en su "haber") o negativo (en su "debe"); estos signos son:

\+ para los capitales positivos, y

− para los negativos.

De esta forma, si la persona solo tiene deudas, por valor de $ 300, *su cantidad de dinero se escribirá así:* **−$ 300**.

Análogamente, el capital de una persona que solo tenga deudas por valor de $ 50 se representará así: −$ 50.

De esta forma podemos *representar* el estado financiero de una persona en todos los casos; cuando su capital sea negativo (solo tenga deudas) diremos que el número que lo representa es un *número negativo;* pero para que estos números sean útiles tendremos que aprender a compararlos (igualdad y desigualdad) y a operar con ellos (efectuar sumas, multiplicaciones, divisiones, etc.), igual que hacemos con los números positivos.

2. **Las distancias de un punto de una recta a los otros puntos de la misma recta.**

Tratemos de resolver el siguiente problema geométrico: Dado un punto de una recta, *A,* determinar otro punto de la misma recta cuya distancia al punto *A* sea de 3 cm. Este problema queda indeterminado si no nos especifican además el sentido desde *A* hasta el punto que se busca; si este sentido es el de izquierda a derecha, que llamaremos positivo, el punto solución es el *B* de la figura, y si el sentido es el de derecha a izquierda, que llamaremos negativo, la solución es el punto *B′*. La manera más sencilla de indicar el sentido que ha de considerarse consiste en anteponer un signo más si el punto que se pide está a la derecha del *A,* y un signo menos si está a la izquierda. Con este convenio, todos los puntos de la semirrecta derecha de origen *A* tendrán distancias positivas y los de la semirrecta izquierda tendrán distancias negativas.

3. **La temperatura marcada por un termómetro:**

Cuando nos informan que la temperatura marcada por un termómetro centígrado en un día de invierno en Nueva York es de 4°, la información es incompleta, pues dudaremos de si se trata de cuatro grados sobre cero o bajo cero. El procedimiento más breve para determinar de forma precisa una temperatura consiste en anteponer un signo más a las temperaturas sobre cero y un signo menos a las temperaturas bajo cero; así +8° significa ocho grados sobre cero y −5° significa cinco grados bajo cero.

4. **Las fechas en Nuestra Era Cristiana:**

Si nos dicen que Arquímedes vivió hacia el año 300, tampoco queda determinada la fecha, pues deben indicarnos además si se trata del año 300 antes de J.C., o después de J.C., y la manera más simple de especificar esto consiste también en anteponer el signo más a las fechas posteriores al nacimiento de Cristo y el signo menos a las fechas anteriores a dicho nacimiento. Por ejemplo, la fecha en que vivió Arquímedes sería precisamente hacia el año −300.

5. **La Longitud y la Latitud Geográficas:**

Para fijar la posición geográfica de un punto de la tierra se utilizan las llamadas "coordenadas geográficas", que son la *longitud* y la *latitud* geográfica del punto.

Se toma un paralelo como origen, *el Ecuador*, y un meridiano también como origen, el que pasa por la ciudad inglesa de Greenwich; los puntos que están sobre el Ecuador se dice que tienen *latitud norte* y los que están por debajo del Ecuador tienen *latitud sur;* los que quedan a la derecha del meridiano de Greenwich se dice que tienen *longitud este*, y los que quedan a la izquierda, *longitud oeste*.

Podemos convenir en anteponer un signo más a las latitudes norte y a las longitudes este, y un signo menos a las latitudes sur y a las longitudes oeste; de esta forma, un punto queda perfectamente determinado por su longitud y su latitud geográfica, con sus signos correspondientes. Se conviene en escribir primero la longitud y después la latitud, separadas por una coma y encerradas entre paréntesis. El punto de la tierra representado por $(-12°, 18°)$, está a 12° de longitud oeste (a la izquierda de Greenwich) y 18° de latitud norte (sobre el Ecuador).

Resumen:

Existen muchas magnitudes, llamadas relativas, susceptibles de variar en dos sentidos, como son por ejemplo el estado financiero de una persona, la temperatura centígrada, las fechas de nuestra Era Cristiana, las distancias de los puntos de una recta a un punto fijo de la misma, la longitud y la latitud geográficas, etc.

Las cantidades de estas magnitudes se clasifican, convencionalmente, en dos clases: *Las cantidades positivas y las negativas.*

En los ejemplos anteriores, son cantidades positivas los capitales en el "haber", las temperaturas sobre cero, las fechas posteriores al nacimiento de Cristo, las distancias de un punto de una recta a los puntos de la misma que están a su derecha, las longitudes geográficas al este de Greenwich, las latitudes geográficas al norte del Ecuador. Son cantidades negativas los capitales en el *"debe"*, las temperaturas *"bajo cero"*, las fechas *anteriores* al nacimiento de J.C., las distancias de un punto de una recta a los puntos que están *a su izquierda*, las longitudes

geográficas *al oeste* de Greenwich, las latitudes geográficas *al sur* del Ecuador.

Podrían añadirse nuevos ejemplos de *magnitudes relativas*, cuyas cantidades se clasifican en positivas y negativas, una vez elegido un origen convencionalmente.

Desde el punto de vista práctico los números negativos tuvieron su origen en la necesidad de poder representar numéricamente las cantidades negativas de una magnitud relativa.

Ya hemos aprendido, a través de los ejemplos, que los números negativos *se representan* mediante un número positivo precedido del signo menos. Ahora necesitamos aprender a comparar dos números (positivos o negativos) y a operar con dichos números.

III) EL CONCEPTO DE NUMERO NEGATIVO, EL CAMPO NUMERICO RACIONAL. REPRESENTACION GEOMETRICA

a) El Concepto de Número Negativo:

El número negativo es un ente matemático que se representa mediante un número positivo (natural o fraccionario) precedido del signo menos.

A esta forma de representar los números negativos hay que agregar, para que queden perfectamente definidos, las definiciones de igualdad, desigualdad, suma y producto, que se dan a continuación, o sea, que la definición del número negativo comprende las siguientes partes:

1ª la forma de representarlos;
2ª la forma de compararlos (igualdad y desigualdad);
3ª la forma de sumarlos y de multiplicarlos.

Solo cuando se han definido las partes 1ª, 2ª y 3ª quedan definidos los números negativos.

b) El Campo Numérico Racional

El conjunto formado por todos los números positivos (naturales o fraccionarios), más todos los números negativos (enteros negativos, como -2, o fraccionarios negativos, como $-\frac{2}{3}$), más el cero, se llama el

Campo de los Números Racionales. Se tiene así el siguiente cuadro sinóptico:

Números Racionales:
- **Números Enteros:**
  - *Positivos* (Números Naturales)
  - *Negativos*
  - *El cero*
- **Números Fraccionarios:**
  - *Positivos*
  - *Negativos*

A lo largo de esta sección iremos comprobando que dentro del campo de los números racionales, las cuatro operaciones de suma, resta, multiplicación y división (llamadas operaciones racionales) son siempre posibles (excepto la división por cero) y uniformes.

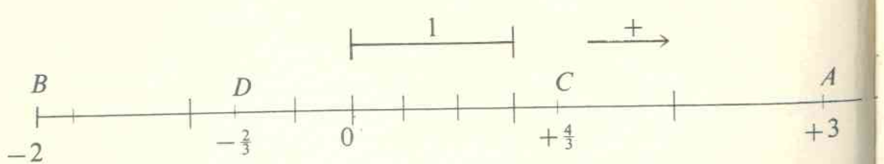
Podemos decir también, que estas cuatro operaciones (exceptuando la división por cero, que es imposible) tienen la *Propiedad Clausurativa* en el campo de los números racionales.

c) **Representación Geométrica de los Números Racionales:**

Cuando sobre una recta se elige un punto, *O*, arbitrario, como origen, un sentido (de los dos que tiene la recta) como positivo, y una unidad de medida, se dice que la recta está metrizada; así pues una recta metrizada es una recta a la que se le han adjuntado: *Un origen, un sentido como positivo* (el contrario será el negativo) *y una unidad de medida.*

Veamos ahora cómo pueden representarse los números racionales mediante puntos de una recta metrizada.

Haremos la explicación con ejemplos



1°) El número $+3$ se representa llevando 3 unidades a la derecha del origen; así se obtiene el punto *A* de la figura, que se dice que es la imagen geométrica del número $+3$, o el *afijo* del número $+3$. El número $+3$ se dice que es *la abscisa* del punto *A*.

2°) El número -2 se representa llevando 2 unidades *a la izquierda* del origen; así se obtiene el punto *B* de la figura, que es *el afijo* del número -2.

3°) Al número $+\frac{4}{3}$ corresponde el punto *C* en la figura, obtenido de dividir la unidad en tres partes iguales y tomando 4 de estas unidades en el sentido positivo, o sea a la derecha de 0.

4°) Finalmente, al número $-\frac{2}{3}$ corresponde el punto *D*, obtenido de tomar dos tercios de la unidad en el sentido negativo, o sea, a la izquierda de 0.

Hemos realizado la representación de un número de cada clase de los que componen los números racionales. Al número cero corresponde el punto 0 elegido como origen.

A cada número racional corresponde un punto de la recta metrizada. La recíproca no es cierta, pues hay puntos cuya abscisa *no es racional;* estos son los puntos correspondientes a los números *irracionales,* que serán definidos después.

Podemos decir, de una manera muy gráfica, que *los números racionales no llenan la recta.*

Por no llenar el conjunto de los números racionales a la recta se dice que dicho conjunto *no es continuo;* pero en cambio, el conjunto de los números racionales *es denso,* lo cual significa que, entre dos números racionales, por próximos que estén, existen infinitos números racionales. (Los que sientan curiosidad por la demostración de esta propiedad la pueden consultar en el apéndice sobre "El Campo Numérico Real", en nuestro texto de Aritmética).

Finalmente, como una curiosidad interesante, queremos citar una propiedad de los números racionales, descubierta por Cantor, y que no demostramos aquí.

Cantor probó que el conjunto de los números racionales y el de los números naturales son coordinables, es decir, que se pueden poner en *correspondencia biunívoca* (uno a uno) de tal forma que a cada número racional se le puede hacer corresponder un número natural y a cada natural un racional.

Los conjuntos cuyo número de elementos es finito, o los que se pueden poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales se llaman *conjuntos numerables.*

Podemos decir pues que: *El conjunto de los números racionales es numerable.*

IV) MODULO DE UN NUMERO RACIONAL. IGUALDAD Y DESIGUALDAD

Cuando un número positivo se considera como un elemento del conjunto de los números racionales se representa anteponiéndole el signo $+$, a los números negativos se les antepone el signo $-$; a veces, para evitar confusiones, se encierran el signo y el número entre paréntesis; por ejemplo, los números $(+\frac{2}{3})$, $(-\frac{3}{4})$, (-1), son racionales, el primero positivo y los dos últimos negativos.

Para poder definir la igualdad, la desigualdad y las operaciones entre *números racionales,* necesitamos dar la noción de **MODULO** de un número racional. También se llama *valor absoluto* del número racional.

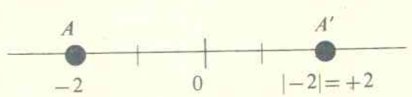
a) *El módulo de un número racional positivo es igual al mismo número.* El módulo de un número racional se indica encerrándolo entre dos barras verticales. Así, el módulo de $+8$ se escribe $|+8|$, y, según lo definido en a), $|+8|=+8$; análogamente, $|+\frac{2}{3}|=+\frac{2}{3}$, $|+\frac{1}{5}|=+\frac{1}{5}$

b) *El módulo de cero es igual a cero:* $|0|=0$

c) *El módulo de un número racional negativo es igual al número cambiado de signo, es decir, con signo positivo.*

Por ejemplo: $|-5|=+5$, $|-\frac{1}{3}|=+\frac{1}{3}$, $|-\frac{5}{2}|=+\frac{5}{2}$

Interpretación geométrica:



Si a un número racional negativo corresponde un punto A en la recta metrizada, a su módulo corresponde el punto simétrico del A respecto del origen.

IGUALDAD DE NUMEROS RACIONALES:

Dos números racionales son iguales cuando tienen igual módulo e igual signo.

Ejemplos: Son iguales los siguientes números racionales:

$$-\frac{3}{2}=-\frac{15}{10}, \quad +\frac{4}{3}=+\frac{8}{6}, \quad -\frac{1}{5}=-\frac{4}{20}$$

Es inmediato comprobar que esta definición de igualdad cumple las propiedades *reflexiva, simétrica* y *transitiva.*

NUMEROS OPUESTOS:

Dos números racionales se llaman opuestos cuando tienen igual módulo y signos contrarios.

Ejemplos: Son opuestos los siguientes números:

$$+5 \text{ y } -5, \quad -\frac{3}{2} \text{ y } +\frac{6}{4}, \quad +\frac{9}{6} \text{ y } -\frac{3}{2}$$

Interpretación geométrica: *Los afijos de dos números opuestos son puntos simétricos respecto del origen.*

DESIGUALDAD DE NUMEROS RACIONALES:

Consideramos tres casos en la definición de desigualdad de números racionales:

a) *Que los dos números sean positivos.*

En este caso la desigualdad ya fue definida al tratar los números naturales y fraccionarios positivos.

b) *Que un número sea positivo y el otro negativo.*

Todo el mundo está de acuerdo en que quien tiene un capital positivo *tiene más dinero* que quien no tiene nada o que quien solo tiene deudas, es decir, que quien tiene un capital negativo. Esta observación tan sencilla, nos induce a establecer la siguiente definición:

Todo número positivo es mayor que el cero y que cualquier número negativo.

c) *Que los dos números sean negativos.*

También se comprende que de dos personas que tengan capitales negativos, es decir, que solo tengan deudas, está en mejores condiciones la que tenga menos deudas, es decir, tiene más capital la que tiene menos deudas. Esta observación nos induce a establecer la siguiente definición:

De dos números negativos es mayor el de menor módulo.

Ejemplos: $-4 > -10$, $-6 < -2$, $-\frac{2}{5} > -\frac{3}{4}$

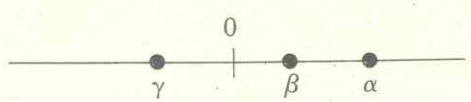
Interpretación geométrica de la Desigualdad:

La desigualdad entre dos números racionales, en los tres casos definidos, a), b) y c), tiene la siguiente interpretación geométrica común, que el alumno debe comprobar en cada caso:

Si un número racional, α, es mayor que otro, β, el afijo de α queda a la derecha del afijo de β.

(Se recuerda que el *afijo* de un número racional es su punto correspondiente).

Esta interpretación geométrica de la desigualdad entre números racionales permite comprobar muy fácilmente la Propiedad Transitiva:



Si $\alpha > \beta$ y $\beta > \gamma$; $\alpha > \gamma$

El gráfico ilustra que si el afijo de α (el punto correspondiente) está a la derecha del de β, y el de β a la derecha del de γ, el afijo de α está a la derecha del de γ.

* * *

V) SUMA DE NUMEROS RACIONALES. LEYES FORMALES

Cuando el matemático *define* una operación con unos nuevos números, más generales que los anteriores en los que ya fue definida la misma operación, debe tener presentes las siguientes condiciones:

a) Que cuando los números pertenezcan todos al campo anteriormente definido, la definición de la operación coincida con la que se estableció en aquel campo numérico más restringido.

b) Que la definición dada para la operación sea tal que con ella se cumplan las mismas leyes formales que tenía dicha operación en el campo numérico anterior.

c) Finalmente, aunque esto no es una necesidad matemática sino práctica, debe procurar que la definición dada de la operación tenga relación con las formas importantes de combinarse las cantidades que intervienen en los problemas del mundo que nos rodea; en otras palabras, la operación debe ser útil para resolver problemas reales.

Las definiciones que daremos a lo largo de esta sección de las operaciones con números racionales, cumplen todas con las tres condiciones, y el alumno debe reflexionar sobre ello en cada caso.

DEFINICION DE LA SUMA DE NUMEROS RACIONALES:

Distinguiremos dos casos en la definición de la suma de números racionales:

a) *Que todos los sumandos tengan igual signo,* (todos positivos o todos negativos).

Si una persona tiene varios capitales positivos, por ejemplo que tenga saldos en su "haber" en varios bancos, se comprende fácilmente que para sumarlos se deben sumar los módulos de los capitales (que coinciden con ellos mismos por ser positivos) y al resultado de la suma anteponerle el signo positivo.

Igualmente se comprende que si una persona tiene varios capitales negativos, por ejemplo que tenga saldos en su "debe" en varios bancos, para sumarlos se deben sumar también los módulos de los sumandos y al resultado de esta suma anteponerle el signo negativo.

La observación de los dos ejemplos anteriores nos induce a dar la siguiente definición de suma, en el caso de que todos los sumandos tengan el mismo signo:

Definición a): *La suma de varios números racionales, todos del mismo signo, se obtiene sumando los módulos de todos los sumandos y anteponiendo a esta suma el signo común a todos los sumandos.*

Ejemplos

1. $(+4)+(+3)+(+7)+(+6)=+(4+3+7+6)=+20$
2. $(+\frac{2}{3})+(+\frac{4}{3})+(+\frac{5}{3})=+(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+\frac{5}{3})=+\frac{11}{3}$
3. $(-2)+(-3)+(-5)=-(2+3+5)=-10$
4. $(-\frac{3}{5})+(-\frac{2}{5})+(-\frac{4}{5})+(-\frac{1}{5})=-(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{4}{5}+\frac{1}{5})=-\frac{10}{5}=-2$

b) *Que unos sumandos sean positivos y otros negativos.*

Para comprender bien la definición de suma en este caso vamos a estudiar el saldo de una persona que tiene cuenta corriente en un banco y que tiene buen crédito, es decir, que llegado el caso le permiten "sobregirarse", lo cual equivale a que cuando se le agotan los fondos el banco le presta si el cliente gira algún cheque contra su cuenta, (saldos rojos).

Si en un momento dado queremos averiguar *el saldo* de la cuenta de este señor, el método más natural es el siguiente: Sumar de una parte todos los ingresos que él tiene hechos, o sea, las cantidades que tiene en *su haber;* sumar también todos los retiros de dinero que ha hecho de su cuenta, o sea, todas las cantidades que tiene en *su debe;* después, de la suma de mayor módulo se restaría la de menor módulo y al resultado se le antepone el signo de la suma de mayor módulo; es decir, si las cantidades en su haber suman más que las cantidades en su debe, el saldo será positivo, y si las cantidades en su debe suman más que las de su haber, el saldo será negativo.

Nino–8 Costa

Este ejemplo, que todo el mundo comprende por experiencia común, nos conduce a la siguiente definición de la suma de números racionales, en el caso general de que haya sumandos positivos y negativos:

Definición b): *La suma de varios números racionales, unos positivos y otros negativos, se obtiene así: Se suman todos los sumandos positivos de una parte y los negativos de otra; del módulo de la suma de mayor módulo se resta el de la de menor módulo, y al resultado se le antepone el signo de la suma de mayor módulo.*

Ejemplos

1. $(+8)+(-4)+(+2)+(-6)+(+1)+(-10)$
   Suma de positivos: $(+8)+(+2)+(+1)=+(8+2+1)=+11$
   Suma de los negativos: $(-4)+(-6)+(-10)=-(4+6+10)=-20$

   La suma de negativos es de mayor módulo, pues $20>11$; por tanto se resta $20-11=9$, y a esta diferencia se antepone el signo $-$. El resultado es por tanto -9.

2. $(-3)+(-5)+(+12)+(-2)+(+10)$

   Suma de positivos: $(+12)+(+10)=+22$
   Suma de negativos: $(-3)+(-5)+(-2)=-10$
   La suma de mayor módulo es la de los positivos, 22, a la que se debe restar *el módulo* de la suma de menor módulo, 10, resultando $22-10=12$, y a este resultado se le antepone el signo $+$ que es el de la suma de mayor módulo; el resultado es por tanto: $+12$.

3. $(-6)+(+8)+(-2)+(-9)+(+4)+(-10)=$ -?- -15
4. $(+2)+(-12)+(-\frac{3}{2})+(+\frac{1}{2})+(-6)+(+8)=$ -?-. -8 $=-9$

LEYES FORMALES DE LA SUMA DE NUMEROS RACIONALES

1. **Ley Clausurativa:**

Si piensas un poco en la definición dada para la suma de números racionales (partes a) y b) de la definición) comprenderás que *la suma* *de varios números racionales es siempre otro número racional.* Por tanto, la suma de números racionales tiene la *Propiedad Clausurativa.*

2. **Ley Modulativa:**

También resulta consecuencia de la definición de suma la siguiente propiedad: *Si a un número racional se le suma el número cero, se obtiene el mismo número racional.*

3. **Ley Uniforme:**

Si piensas un poco en la definición de suma comprenderás en seguida que el resultado de sumar varios números racionales es único, pues las sumas de los módulos de los positivos y de los negativos son únicas, su diferencia también única, y la regla del signo también asigna un signo único al resultado; por tanto,

El resultado de sumar varios números racionales es un número racional único.

4. **Ley Conmutativa:**

En el caso a) de la definición de suma un cambio del orden de los sumandos no altera el módulo de la suma (por la ley conmutativa en el campo numérico positivo), así como tampoco el signo, que es el común a todos los sumandos; por tanto, en el caso a) de la suma de números racionales se cumple la ley conmutativa.

En el caso b) un cambio del orden de los sumandos no altera tampoco las sumas de los módulos de los términos positivos, ni la de los negativos; en consecuencia no se cambia la diferencia entre estas dos sumas, ni tampoco el signo final del resultado.

Como resumen de esta explicación concluímos que:

En una suma de números racionales, el orden de los sumandos no altera la suma.

5. **Ley Asociativa:**

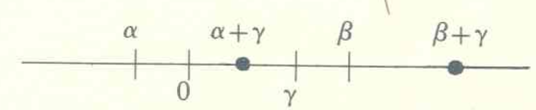
Podríamos razonar la *ley asociativa* basándonos en la definición de la suma de números racionales, pero para que te resulte más fácil daremos una explicación basada en el saldo de la cuenta corriente de una persona que tiene buen crédito en un banco (que se le permiten saldos negativos).

Supongamos que al comenzar un mes la persona A tiene un cierto capital en su cuenta (positivo o negativo), y que durante el mes realiza ocho operaciones, entre ingresos y retiros de dinero; al final del mes el balance del señor A se obtendrá realizando una suma de 9 números racionales (positivos los ingresos y negativos los retiros de dinero) ¿Por qué son 9 los sumandos?

Todo el mundo comprende que si en el Banco hubieran hecho balances parciales, por ejemplo cada semana, el balance total será el mismo, pues dicho balance depende exclusivamente de lo que tuviere al principio, de los ingresos y de los retiros que haya hecho el señor A en su cuenta, es decir, de los sumandos de la suma.

Concluímos por tanto que: *en una suma de varios números racionales se pueden efectuar sumas parciales de cualquier forma y sumar después los resultados de las sumas parciales, sin que cambie la suma total; en particular en una suma de tres números racionales,* α, β *y* γ, $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.

6. **Ley de Monotonía:**



La ley de monotonía la vamos a explicar geométricamente, pues de esta manera nos evitamos el considerar muchos casos particulares.

Sean α, β y γ tres números racionales *cualesquiera;* en la figura se ve que $\alpha<\beta$ (por quedar a su izquierda). Si suponemos γ *positivo,* sumar a los números α y β el número γ equivale a trasladar sus afijos γ unidades *a la derecha,* y como ambos se trasladan hacia la derecha una misma distancia, $\alpha+\gamma$ seguirá quedando a la izquierda de $\beta+\gamma$, concluyendo por tanto que:

$$\boxed{\text{Si } \alpha<\beta; \quad \alpha+\gamma<\beta+\gamma}$$

Si γ hubiera sido *negativo,* sumar a los números α y β el número γ equivale a trasladar los afijos de α y de β γ unidades *hacia la izquierda,* pero como ambos se trasladan en el mismo sentido y el mismo segmento, seguirá quedando $\alpha+\gamma$ a la izquierda de $\beta+\gamma$, o sea, si $\alpha<\beta$, $\alpha+\gamma<\beta+\gamma$.

7. **Ley Cancelativa:**

Como de costumbre, α, β y γ representan números racionales *cualesquiera.*

Si es $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$, entonces $\alpha=\beta$.

En efecto: Si no fuese $\alpha=\beta$, sería $\alpha\gtrless\beta$, y sumando γ a los dos miembros, $\alpha+\gamma\gtrless\beta+\gamma$ (por la ley de monotonía) en contra del supuesto de ser $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$.

Resumen: *Como resumen concluimos que: La suma de números racionales tiene las mismas leyes formales que la suma de números positivos.*

Por tanto, tal como ha sido definida la suma de números racionales, se cumple el "Principio de Permanencia de las Leyes Formales" de Hänkel, fundamento del Algebra.

APLICACION PRACTICA DE LAS LEYES FORMALES:
Las leyes conmutativa y asociativa permiten obtener la suma de varios números racionales de forma mucho más rápida que aplicando la definición general.

Si en la suma figuran dos sumandos opuestos, por ejemplo $(+3)$ y (-3), *"se destruyen"*, pues si se colocaran juntos y se asociaran se tendría: $(+3)+(-3)=3-3=0$ (se aplicó la parte b) de la definición de suma).

Cuando dos sumandos son de signos contrarios y la diferencia de sus módulos se obtiene mentalmente con facilidad, se asocian, es decir, se sustituyen por su suma efectuada, con lo cual se simplifica la operación total.

Ejemplos

1. $(+3)+(-6)+(-\frac{2}{3})+(+\frac{5}{3})+(-\frac{1}{2})+(+\frac{3}{2})=$ -3+1+1=-1
$=[(+3)+(-6)]+[(-\frac{2}{3})+(+\frac{5}{3})]+[(-\frac{1}{2})+(+\frac{3}{2})]=$
$=(-3)+(+\frac{3}{3})+(+\frac{2}{2})=(-3)+(+1)+(+1)=-1$

En la práctica las asociaciones no se indican en la escritura, como hemos hecho aquí, sino que se efectúan mentalmente.

2. $(+5)+(-2)+(-5)+(+3)+(+2)=+3$ (se han cancelado los sumandos opuestos $(+5)$ y (-5), (-2) y $(+2)$)

3. $(+12)+(-6)+(-10)+(+8)+(-2)+(+5)=$-?- 7
4. $(-8)+(+10)+(-2)+(+5)+(-3)+(-2)+(+3)=$-.- 3

VI) SUSTRACCION DE NUMEROS RACIONALES

La sustracción de dos números racionales se define como en los campos numéricos anteriores.

La diferencia entre dos números racionales, minuendo y sustraendo, es otro número racional que sumado con el sustraendo nos da el minuendo.

Ahora probaremos el siguiente enunciado fundamental:

La diferencia de dos números racionales es igual a la suma del minuendo con el opuesto del sustraendo.

En efecto: Sean α y β dos números racionales (*) cualesquiera; tenemos que probar que $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$.

(*) Llamamos la atención sobre el hecho de que α y β pueden ser enteros o fraccionarios, positivos o negativos, aunque *no se le vean* los denominadores ni los signos, con los ojos de la cara.

El segundo miembro será la verdadera diferencia si sumado con el sustraendo nos da el minuendo; veámoslo:

$\alpha+(-\beta)+\beta=\alpha$ (pues $-\beta$ y β son números opuestos que se destruyen), luego se cumple efectivamente que la diferencia se obtiene sumando el minuendo con el opuesto del sustraendo.

De esta manera, en el campo de los números racionales, las restas se reducen a sumas, y cumplirán las leyes de la suma. Además, *la diferencia de dos números racionales existe siempre en dicho campo.*

Ejemplos

1. $(+7)-(-3)=(+7)+(+3)=+10$
2. $(-8)-(+2)=(-8)+(-2)=-10$
3. $(-5)-(-8)=(-5)+(+8)=+3$
4. $(+10)-(+18)=(+10)+(-18)=-8$

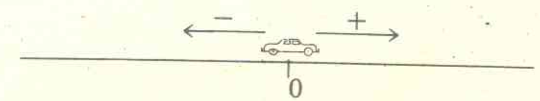
Ejercicios

1. $(-2)-(-8)=$ -?-. 6
2. $(+10)-(-6)=$ -?- 16
3. $(-12)-(+4)=$ -?-. -16
4. $(+6)-(-14)=$ -?-. 20
5. $(-9)-(-8)=$ -?-. -1
6. $(+20)-(-30)=$ -?-. 50

VII) LA MULTIPLICACION DE NUMEROS RACIONALES. LEYES FORMALES.

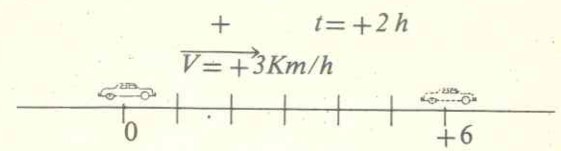
a) *DEFINICION DEL PRODUCTO DE NUMEROS RACIONALES:*

Para que comprendas bien la definición del producto de dos números racionales, y no te parezca extraña, te vamos a desarrollar un ejemplo previo, que debes estudiar con toda atención.



Te vamos a dirigir unas preguntas relativas a un automóvil que *en el momento presente se encuentra en el origen,* teniendo en cuenta los siguientes convenios: 1º) se considera una velocidad positiva cuando el automóvil se mueve hacia la derecha del origen y negativa cuando se mueve hacia la izquierda; 2º) se consideran como tiempos positivos los del futuro y como negativos los del pasado.

Primera pregunta:

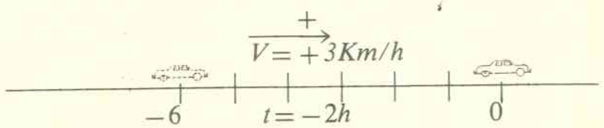


Si el automóvil camina con una velocidad de +3Km/h, ¿dónde se encontrará dentro de 2 horas? ($t=+2h$).

El gráfico, y tu sentido común, te harán comprender que el automóvil se encontrará en el punto de abscisa +6, y como el espacio se obtiene multiplicando la velocidad por el tiempo, concluímos que:

$(+3)\,.\,(+2)=+6,\quad (+\,.\,+da+).$

Segunda pregunta:

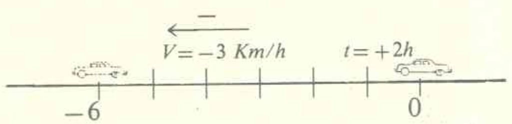


Si el automóvil viene caminando con una velocidad de +3Km/h, y ahora se encuentra en el origen, ¿dónde se encontraba hace 2 horas? Observa el gráfico, piensa y concluye. Advierte que en este caso el tiempo de la pregunta es pasado, y por tanto *negativo.*

$(+3) . (-2) = -6$, $(+ \,.\, - da -)$.

Tercera pregunta:

Si el automóvil camina con una velocidad de −3 Km/h, y ahora se encuentra en el origen, ¿dónde se econtrará dentro de 2 horas?

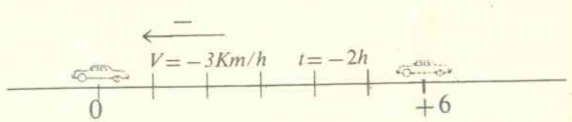


Observa el gráfico, piensa y concluye.

$(-3) . (+2) = -6$, $(- \,.\, + da -)$.

Cuarta pregunta:

Si el automóvil viene caminando con una velocidad de −3Km/h, y ahora se encuentra en el origen, ¿dónde se encontraba hace 2 horas?



Observa el gráfico, piensa y concluye.

$(-3) . (-2) = +6$, $(- \,.\, - da +)$.

Si has estudiado con atención el ejemplo anterior te parecerá natural lo siguiente:

Definición: *El producto de dos números racionales es otro número racional cuyo módulo es el producto de los módulos, y cuyo signo es positivo o negativo según que los factores tengan igual signo o signos distintos, respectivamente.*

La definición del signo se recuerda fácilmente con el esquema siguiente, que se conoce como "la regla de los signos":

$+ \,.\, + \; da \; +$
$+ \,.\, - \; da \; -$
$- \,.\, + \; da \; -$
$- \,.\, - \; da \; +$

Ejemplos

1. $(-3) . (+2) = -6$
2. $(+5) . (-4) = -20$
3. $(-8) . (-5) = +40$
4. $(+10) . (+4) = +40$
5. $(-\frac{2}{3}) . (-\frac{1}{5}) = +\frac{2}{15}$
6. $(-\frac{1}{3}) . (+7) = -\frac{7}{3}$

Ejercicios

1. $(-5) . (-4) = -?-.$
2. $(+3) . (-\frac{2}{3}) = -?-.$
3. $(-\frac{5}{2}) . (+\frac{4}{3}) = -?-.$
4. $(+8) . (-\frac{3}{2}) = -?-.$
5. $(-9) . (-\frac{2}{3}) = -?-.$
6. $(+3) . (-\frac{1}{3}) = -?-.$

b) *LEYES FORMALES DE LA MULTIPLICACION DE NUMEROS RACIONALES.*

La multiplicación de números racionales tiene las mismas leyes formales que la multiplicación de números positivos; la única salvedad que hay que hacer se refiere a la *ley de monotonía*, pues si los dos miembros de una desigualdad se multiplican por un mismo factor **negativo** *se invierte el signo de la desigualdad.*

Todas las leyes se comprenden mediante una breve reflexión sobre la definición de producto; por esto nos limitamos a dirigir con preguntas tu propia investigación.

1. **Ley Clausurativa:** *El producto de dos números racionales es siempre otro número racional.*

Pues el producto de los módulos existe siempre y al ponerle el signo se obtiene un número racional.

2. **Ley Modulativa:**

¿Cambia el módulo de un número al multiplicarlo por $+1$?
¿Y el signo?
Por tanto, cualquiera que sea el número racional α,

$$\boxed{\alpha \cdot (+1) = \alpha} \quad \text{(Ley Modulativa).}$$

3. **Ley Uniforme:**

¿Es único el módulo del producto de dos números racionales?
¿En virtud de qué ley?
¿Y el signo, es único?

Por tanto: *El producto de dos números racionales es un número racional único.*

Esta ley también se puede expresar así:
Si α, α', β, β', son números racionales, y además $\alpha = \alpha'$ y $\beta = \beta'$, entonces $\alpha \cdot \beta = \alpha' \cdot \beta'$.

Diana B. Castro

También se suele expresar en esta forma: *Si los dos miembros de una igualdad entre números racionales se multiplican por un mismo número racional, se obtiene otra igualdad.*

En símbolos: Si α, β y γ son números racionales, y además $\alpha = \beta$, entonces $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$.

4. **Ley Conmutativa:**

¿Cambia el módulo de un producto de números racionales al cambiar el orden de los factores?
¿En virtud de qué ley?
¿Y el signo?

INSTITUTO "AGUSTIN NIETO CABALLERO" BIBLIOTECA BARRANQUILLA

Si no cambian ni el módulo ni el signo del producto al cambiar el orden de los factores se concluye que:

Un producto de dos factores racionales no se altera al cambiar su orden.

En símbolos, Si α y β representan números racionales cualesquiera, $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

5. **Ley Asociativa:**

Para poder explicar la *Ley Asociativa* necesitamos definir previamente el producto de más de dos factores racionales, lo cual hacemos a continuación:

Definición: *El producto de varios números racionales es el número racional cuyo módulo es el producto de los módulos de los factores, y cuyo signo es positivo o negativo, según que el número de factores negativos sea par o impar, respectivamente.*

Ejemplos

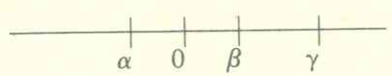
1. $(-2) \cdot (+3) \cdot (-4) \cdot (+4) \cdot (+5) = +\ 480$
(pues hay 2 factores negativos).
2. $(+5) \cdot (-2) \cdot (+4) \cdot (+6) = -240$
(pues hay 1 factor negativo).
3. $(-\frac{2}{5}) \cdot (+\frac{5}{2}) \cdot (-\frac{3}{4}) = +\frac{2 \cdot 5 \cdot 3}{5 \cdot 2 \cdot 4} = +\frac{3}{4}$
(pues hay 2 factores negativos).
4. $(+\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{2}{5}) \cdot (-\frac{3}{4}) \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1}{3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2} = -\frac{1}{20}$
(pues hay 3 factores negativos).

1. $(-\frac{2}{5}) \cdot (+\frac{3}{4}) \cdot (-\frac{2}{3}) =$ —?—.
2. $(+\frac{1}{4}) \cdot (-\frac{8}{3}) \cdot (+\frac{1}{5}) =$ —?—.
3. $(-\frac{2}{5}) \cdot (+\frac{3}{4}) \cdot (-\frac{4}{6}) \cdot (-\frac{1}{3}) =$ —?—.
4. $(+\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{4}{3}) \cdot (-2) \cdot (+5) =$ —?—.

Ahora, para demostrar la ley asociativa del producto de varios factores racionales, es decir, para probar que si α, β y γ son números racionales, $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$, basta que reflexiones un poco sobre la definición anterior y contestes a las siguientes preguntas: ¿Cómo son los módulos de los dos miembros? ¿En virtud de qué ley? ¿Y los signos? Por tanto, la igualdad es cierta.

6. **Ley de Monotonía:**

Sean α, β y γ números racionales. Supondremos primero que γ es positivo, y para fijar ideas, sea $\gamma = +\ 2$.
Si es $\alpha < \beta$, entonces $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$.



Piensa dónde estarían los afijos de $\alpha \cdot 2$ y de $\beta \cdot 2$ y concluye que $\alpha \cdot 2$ seguiría estando a la izquierda de $\beta \cdot 2$.

Repite ejercicios de este tipo, cambiando las posiciones de α y β, por ejemplo, siendo los dos negativos.

Cuando γ es negativo se invierte el signo de la desigualdad, porque al multiplicar por un factor negativo se cambia el signo de los dos miembros de la desigualdad, y si un número es menor que otro, al cambiarlos de signo quedan ordenados en sentido contrario.

Ejemplos: $3<5$, $3 \times (-2) > 5 \times (-2)$, o sea $-6 > -10$.
$-3 > -6$, $(-3) \cdot (-4) < (-6) \cdot (-4)$, o sea $12 < 24$.

7. **Ley Cancelativa:**

Si α, β y γ son números racionales, $\gamma \neq 0$, y $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$, entonces $\alpha = \beta$.

Se puede suprimir un mismo factor, distinto de cero, en los dos miembros de una igualdad, obteniendo otra igualdad.

La demostración es la misma que se dio en el campo numérico positivo.

8. **Ley distributiva del producto respecto de la suma:**

Como en el campo numérico racional la resta se reduce a una suma, las dos leyes distributivas se reducen a una.

Si α, β y γ son números racionales, se cumple que:
$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$

Hay que considerar varios casos, según los signos de α, β, γ, y $\alpha + \beta$, y es un buen ejercicio para los alumnos más entusiastas del Algebra, el comprobar que en todos los casos la igualdad es cierta, en virtud de la definición de producto y de las leyes distributivas en el campo positivo.

Tarea

Ejemplos

1. $[(+3)+(-2)] . (-5) = (+3) . (-5) + (-2) . (-5) = -15 + 10 = -5$
2. $[(-4) + (-5)] . (-2) = (-4) . (-2) + (-5) . (-2) = +8 + 10 = +18$
3. $[(+\frac{2}{3})+(-\frac{1}{5})] . (+\frac{3}{2}) = + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2} = + 1 - \frac{3}{10} = + \frac{7}{10}$
4. $[(+\frac{5}{4}) + (+\frac{3}{2})] . (-\frac{4}{3}) = (+\frac{5}{4}) . (-\frac{4}{3}) + (+\frac{3}{2}) . (-\frac{4}{3}) = (-\frac{5}{4} . \frac{4}{3}) +$
   $+ (-\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}) = -\frac{5}{3} - \frac{4}{2} = -\frac{5}{3} - 2 = -\frac{11}{3}.$

Ejercicios

1. $[(-\frac{2}{5}) + (-\frac{1}{3})] . (\frac{3}{4}) =$ —?—.
2. $[(-1) + (-2)] . (-3) =$ —?—.
3. $[(-\frac{1}{4}) + (+2)] . (-4) =$ —?—.
4. $[(+\frac{2}{3}) + (-\frac{4}{5})] . (-\frac{3}{2}) =$ —?—.
5. $[(-\frac{6}{4}) + (-\frac{3}{2})] . (-2) =$ —?—.
6. $[(-\frac{3}{5}) + (+\frac{2}{3})] . (-\frac{5}{2}) =$ —?—.

Como resumen concluímos que, con la definición de producto que se dió al principio, se conservan las leyes formales propias de esta operación (Principio de Hänkel), y además con dicha definición se pueden resolver los problemas reales de multiplicación en los que intervienen cantidades negativas.

* * *

VIII) LA DIVISION DE NUMEROS RACIONALES. LEYES FORMALES

El cociente de dos números racionales, α y β, lo representaremos por $\alpha \div \beta$, o por $\frac{\alpha}{\beta}$, y se define igual que en los campos numéricos anteriores.

Definición: *El cociente de dos números racionales, llamados dividendo y divisor (ESTE DISTINTO DE CERO) es el número racional que multiplicado por el divisor da el dividendo.*

Para obtener el cociente de dos números racionales se sigue la siguiente

Regla: *El módulo del cociente es el cociente de los módulos, y su signo positivo o negativo, según que el dividendo y el divisor tengan el mismo signo o contrario, respectivamente.*

La demostración de la regla es la siguiente: Sean α y β dos números racionales ($\beta \neq 0$) y γ su cociente, es decir: $\frac{\alpha}{\beta} = \gamma$, (1)

Si γ es el verdadero cociente, en virtud de la definición se cumplirá: $\alpha = \beta . \gamma$, (2), lo que implica que $|\alpha| = |\beta| . |\gamma|$, de donde $|\gamma| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$, con que queda probado que *el módulo del cociente es igual al cociente de los módulos.*

En cuanto al signo, del examen de (2) se deduce que:

1º) Si α y β son positivos, γ debe ser positivo para que se cumpla (2).

2º) Si α y β son negativos, γ debe ser positivo para que se cumpla (2).

3º) Si α es positivo y β negativo, γ debe ser negativo para que se cumpla (2).

4º) Si α es negativo y β positivo, γ debe ser negativo para que se cumpla (2).

Ejemplos

1. $\left(+\frac{5}{3}\right) \div (+4) = +\frac{5}{12}$
2. $(+6) \div (-5) = -\frac{6}{5}$
3. $\left(-\frac{2}{7}\right) \div \left(+\frac{2}{3}\right) = -\frac{6}{14} = -\frac{3}{7}$
4. $(-4) \div \left(-\frac{5}{3}\right) = +\frac{12}{5}$

Ejercicios

1. $\left(-\frac{3}{4}\right) \div \left(+\frac{2}{3}\right) =$ —?—
2. $\left(+\frac{3}{5}\right) \div \left(-\frac{2}{3}\right) =$ —?—
3. $\left(-\frac{1}{5}\right) \div \left(-\frac{2}{3}\right) =$ —?—
4. $\left(+\frac{5}{6}\right) \div \left(+\frac{2}{3}\right) =$ —?—

LEYES FORMALES DE LA DIVISION DE NUMEROS RACIONALES:

1. **Ley Clausurativa:** *El cociente de dos números racionales,* **siendo el divisor distinto de cero,** *es siempre otro número racional.*

Cuando el divisor es cero la división es *imposible,* pues si fuera $\frac{\alpha}{0} = \beta$, siendo $\alpha \neq 0$, debería ser $\alpha = 0 \cdot \beta$, lo cual es *imposible,* pues el producto de cero por β no puede dar un número $\alpha \neq 0$.

Si fuere también $\alpha = 0$, se tendría $\frac{0}{0} = \beta$, y β puede ser *cualquier número,* pues la igualdad $0 = 0 \cdot \beta$ se cumple *cualquiera que sea* β

Resumen: Si $\alpha \neq 0$, $\frac{\alpha}{0}$ es *imposible* (no existe ninguna solución). $\frac{0}{0}$ es *indeterminado* (cualquier número puede ser solución).

Alicia S Castro

2. **Ley Modulativa:** *Si α es cualquier número racional,* $\frac{\alpha}{+1} = \alpha$. Se dice que $+1$ es el elemento neutro de la división de números racionales.

Esta ley es consecuencia inmediata de su análoga para la multiplicación, pues efectivamente, por dicha ley, $\alpha = \alpha \cdot (+1)$.

3. **Ley Uniforme:** *El resultado de dividir dos números racionales α y β, siendo $\beta \neq 0$, es único.*

En efecto: Supongamos que γ y γ' fueran ambos el cociente $\frac{\alpha}{\beta}$, es decir, que $\frac{\alpha}{\beta} = \gamma$, y $\frac{\alpha}{\beta} = \gamma'$; entonces se cumplirían las siguientes igualdades: $\alpha = \beta \cdot \gamma$, y $\alpha = \beta \cdot \gamma'$, y al ser iguales los primeros miembros lo serán los segundos, (por la ley transitiva) o sea, $\beta \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma'$, y aplicando la ley cancelativa de la multiplicación, $\gamma = \gamma'$, o sea, que dos números que sean el cociente $\frac{\alpha}{\beta}$ necesariamente coinciden.

4. **Ley de Monotonía:** *Si* $\alpha < \beta$, y γ **es positivo,** *entonces* $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$.

En efecto, si no fuese $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$ sería $\frac{\alpha}{\gamma} \geqslant \frac{\beta}{\gamma}$, y multiplicando los dos miembros por γ, $\frac{\alpha}{\gamma} \cdot \gamma \geqslant \frac{\beta}{\gamma} \cdot \gamma$, (por la ley de monotonía o uniforme de la multiplicación), y como cociente por divisor es igual al dividendo, $\frac{\alpha}{\gamma} \cdot \gamma = \alpha$, y $\frac{\beta}{\gamma} \cdot \gamma = \beta$, con lo que obtenemos que $\alpha \geqslant \beta$, en contra del supuesto de ser $\alpha < \beta$.

Si el divisor por el que se dividen los dos miembros de la desigualdad *es negativo* se invierte el sentido de la desigualdad.

5. **Ley distributiva de la división respecto de la suma:**

Si α, β, γ, δ, son números racionales cualesquiera, siendo $\delta \neq 0$, se cumple: $(\alpha + \beta + \gamma) \div \delta = \alpha \div \delta + \beta \div \delta + \gamma \div \delta$, (1).

En efecto: El segundo miembro de (1) será el verdadero cociente si multiplicado por el divisor nos da el dividendo, pero en efecto,

$(\alpha \div \delta + \beta \div \delta + \gamma \div \delta) \cdot \delta = (\alpha \div \delta) \cdot \delta + (\beta \div \delta) \cdot \delta + (\gamma \div \delta) \cdot \delta = \alpha + \beta + \gamma$, que es el dividendo. +

(Hemos hecho uso de la ley distributiva de la multiplicación respecto de la suma y de la definición de cociente).

Observación: La ley conmutativa no rige en la división, y la ley asociativa no tiene lugar.

IX) POTENCIACION DE BASE RACIONAL Y EXPONENTE NATURAL

Definición: *La potenciación de base racional y exponente natural se define como un producto de tantos factores iguales a la base como indique el exponente.* Además, $\alpha^0 = 1$, y $\alpha^1 = \alpha$.

El cálculo de la potencia se efectúa con la siguiente

Regla: *El módulo de la potencia es la potencia del módulo y el signo depende del signo de la base y de que el exponente sea par o impar.*

a) *base positiva: potencia positiva* (cualquiera que sea el exponente).

b) *base negativa: potencia* $\begin{cases} \text{Positiva si el exponente es par.} \\ \text{Negativa si el exponente es impar.} \end{cases}$

Ejemplos: 1. $(-2)^5 = -2^5 = -32.$
2. $(-3)^4 = +3^4 = +81.$

La regla es consecuencia inmediata de la correspondiente para el producto de varios factores.

Leyes de Cálculo con potencias: Las cinco leyes del cálculo con potencias, que fueron demostradas en Aritmética para base positiva, rigen también para base racional cualquiera. A continuación reproducimos sus demostraciones.

1. **Poducto de potencias de igual base.**

El producto de potencias de igual base es otra potencia que tiene por base la misma y por exponente la suma de los exponentes.

Demostración: $\alpha^n = \alpha \cdot \alpha \ldots \overset{n}{\ldots} \alpha$ (por definición).
$\alpha^m = \alpha \cdot \alpha \ldots \overset{m}{\ldots} \alpha$ (por definición).

y multiplicándolas: $\alpha^n \cdot \alpha^m = \alpha \cdot \alpha \overset{n}{\ldots} \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \overset{m}{\ldots} \alpha = \alpha^{n+m}$ (q.e.d)

Ejemplo: $(-2)^5 \cdot (-2)^3 = (-2)^8 = +256.$

2. **Producto de potencias de igual exponente.**

El producto de potencias de igual exponente es otra potencia que tiene por base el producto de las bases y por exponente el mismo.

Demostración: $\begin{cases} \alpha^n = \alpha \cdot \alpha \overset{n}{\ldots} \alpha & \text{(por definición)} \\ \beta^n = \beta \cdot \beta \overset{n}{\ldots} \beta & \text{(por definición)} \end{cases}$

Multiplicándolas: $\alpha^n \cdot \beta^n = (\alpha \cdot \beta) \cdot (\alpha \cdot \beta) \overset{n}{\ldots} (\alpha \cdot \beta) =$
$= (\alpha \cdot \beta)^n$ (q.e.d)

Leída en sentido inverso nos dice: *Para elevar un producto a una potencia se eleva cada factor a dicha potencia.* (Hemos utilizado las leyes conmutativa y asociativa del producto de varios factores y la definición de potencia).

Ejemplos

1. $(-\frac{2}{3})^5 \cdot (+\frac{3}{4})^5 = (-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4})^5 = -(\frac{1}{2})^5 = -\frac{1}{32}$
2. $(-\frac{1}{4})^3 \cdot (-\frac{2}{3})^3 = (+\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3})^3 = +(\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{216}$

Ejercicios

1. $(-\frac{1}{5})^4 \cdot (+\frac{2}{3})^4 = \ldots$

2. $(+\frac{2}{5})^6 \cdot (-\frac{3}{4})^6 = \ldots$

3. $(-\frac{5}{6})^5 \cdot (-\frac{2}{5})^5 = \ldots$

3. **Cociente de potencias de igual base.**

El cociente de dos potencias de igual base es otra potencia que tiene por base la misma y por exponente la diferencia de los exponentes.

Demostración: $\dfrac{\alpha^m}{\alpha^n} = \alpha^{m-n}$, (1), $(m \geqslant n)$.

(1) es cierta, porque multiplicando el divisor por el cociente nos da el dividendo;
en efecto: $\alpha^n \cdot \alpha^{m-n} = \alpha^{n+(m-n)} = \alpha^m$ (q.e.d.)

Ejemplo: $(-\frac{2}{3})^5 \div (-\frac{2}{3})^3 = (-\frac{2}{3})^{5-3} = (-\frac{2}{3})^2 = +(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$

4. **Cociente de potencias de igual exponente.**

Para dividir potencias de igual exponente se pone por base el cociente de las bases y por exponente el mismo.

Demostración: $\dfrac{\alpha^n}{\beta^n} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n$ (1), pues multiplicando el divisor por el cociente nos da el dividendo; en efecto:

$$\beta^n \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = \left(\beta \cdot \frac{\alpha}{\beta}\right)^n = \alpha^n.$$

(Hemos aplicado la ley II y la definición de cociente).

Leída (1) en sentido inverso nos dice: *Para elevar una fracción de términos racionales a una potencia se elevan numerador y denominador a dicha potencia.*

Ejemplos

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \div \left(-\frac{1}{4}\right)^5 = \left(-\frac{2 \cdot 4}{3 \times 1}\right)^5 = \left(-\frac{8}{3}\right)^5 = -\frac{8^5}{3^5} = \frac{32,768}{243}$

2. $\left(-\frac{1}{5}\right)^3 \div \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 3}\right)^3 = \left(\frac{2}{15}\right)^3 = \frac{2^3}{15^3} = \frac{8}{3,375}$

5. **Potencia de una potencia:** *Para elevar una potencia a un exponente se pone por base la misma y por exponente el producto de los exponentes.*

Demostración: $(\alpha^m)^n = \alpha^m \cdot \alpha^m \overset{n}{\ldots} \alpha^m = \alpha^{m+m+\overset{n}{\ldots}+m} = \alpha^{m \cdot n}$ (q.e.d) .

EJEMPLO· $[(-\frac{2}{5})^3]^2 = (-\frac{2}{5})^{3\times2} = (-\frac{2}{5})^6 = +\frac{2^6}{5^6} = \frac{64}{15,625}$

Estas 5 leyes son fundamentales en el cálculo algebraico y las resumimos a continuación:

Leyes del Cálculo con Potencias:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{I)} & \alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^{m+n} \\ \text{II)} & \alpha^m \cdot \beta^m = (\alpha \cdot \beta)^m \\ \text{III)} & \dfrac{\alpha^m}{\alpha^n} = \alpha^{m-n} \ (m \geqslant n) \\ \text{IV)} & \dfrac{\alpha^m}{\beta^m} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^m \\ \text{V)} & (\alpha^m)^n = \alpha^{m \cdot n} \end{array}\right.$$

X) POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO NEGATIVO

En la regla 3 del cálculo con potencias de exponente natural, referente al cociente de potencias de igual base, $\frac{\alpha^m}{\alpha^n}$, impusimos la restricción $m \geqslant n$, con el fin de que no resultara una potencia de exponente negativo, que no ha sido definida hasta este momento.

Para evitar esta excepción y dar más generalidad al cálculo algebraico después, definiremos también las potencias de base racional y exponente entero negativo.

Comenzamos con un ejemplo, para que la definición te parezca más natural.

EJEMPLO: $\frac{3^2}{3^7} = \frac{3.3}{3.3.3.3.3.3.3} = \frac{1}{3.3.3.3.3} = \frac{1}{3^5}$

Si aplicáramos la regla 3., es decir, si restáramos los exponentes, obtendríamos: $\frac{3^2}{3^7} = 3^{2-7} = 3^{-5}$

Si queremos que los dos resultados coincidan, es decir, que $\frac{1}{3^5}$ coincida con 3^{-5}, somos conducidos naturalmente a dar la siguiente

Definición: *Si α es un número racional y* **n** *un número natural, adoptamos la siguiente definición:*

$$\boxed{\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}} \qquad (1)$$

Ahora se nos presenta una cuestión fundamental y es la siguiente: ¿Seguirán siendo válidas las 5 reglas de cálculo con potencias cuando los exponentes, o alguno de los exponentes, sean enteros negativos?

La respuesta es afirmativa, de manera que podemos calcular tranquilamente aplicando las 5 reglas conocidas, sin preocuparnos de si los exponentes son naturales, o enteros negativos.

A continuación probamos la veracidad de esta afirmación para una

de las leyes, y proponemos como ejercicio que se demuestre la permanencia de las otras cuatro reglas de cálculo.

Probemos por ejemplo que $\alpha^{-m} \cdot \alpha^{-n} = \alpha^{(-m)+(-n)} = \alpha^{-(m+n)}$ siendo m y n naturales.

En efecto: $\alpha^{-m} = \frac{1}{\alpha^m}$, $\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$, y multiplicando,

$$\alpha^{-m} \cdot \alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^m} \cdot \frac{1}{\alpha^n} = \frac{1 \cdot 1}{\alpha^m \cdot \alpha^n} = \frac{1}{\alpha^{m+n}} = \alpha^{-(m+n)}, \quad \text{q.e.d.}$$

Más adelante, cuando estudiemos los radicales algebraicos, serán definidas las potencias de base racional y exponente racional cualquiera.

Ejemplos

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2+5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3}$
2. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}\right)^{-5} = \left(\frac{6}{20}\right)^{-5} = \left(\frac{3}{10}\right)^{-5} = \frac{1}{\left(\frac{3}{10}\right)^5} = \frac{1}{\frac{3^5}{10^5}} = \frac{10^5}{3^5}$.
3. $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3} \div \left(-\frac{2}{5}\right)^{-5} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{-3-(-5)} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{-3+(+5)} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{2} = +\frac{2^2}{5^2} = +\frac{4}{25}$.
4. $\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3}\right]^{-2} = \left(-\frac{1}{4}\right)^{(-3)\cdot(-2)} = \left(-\frac{1}{4}\right)^{+6} = +\frac{1^6}{4^6} = +\frac{1}{4{,}096}$

Ejercicios

1. $(-\frac{3}{5})^{-4} \cdot (-\frac{2}{3})^{-4} = ?$
2. $(-\frac{3}{4})^{-8} \cdot (-\frac{3}{4})^{+6} = ?$
3. $[(-\frac{2}{5})^{-3}]^2 = ?$
4. $(+\frac{3}{4})^{-3} \div (-\frac{2}{5})^{-3} = ?$
5. $[(-\frac{1}{2})^{-4}]^{(-2)} = ?$
6. $(-\frac{4}{3})^{-2} \div (-\frac{4}{3})^{-6} = ?$

XI) LA RADICACION DE NUMEROS RACIONALES

Definición: *La raiz n-sima de un número racional, α, (si existe) es otro número, β, que elevado a n dé por resultado α.*

Se denota así: $\sqrt[n]{\alpha}=\beta$, (1), si $\beta^{n} = \alpha$, (2).

Regla: *El módulo de la raíz es la raiz n-sima del módulo. El signo depende del signo del radicando y del índice según el siguiente esquema:*

a) Radicando positivo:
- *Indice par:* Hay dos soluciones opuestas. Ej.: $\sqrt{16}=\pm 4$. (La radicación no es uniforme en este caso).
- *Indice impar:* Solución única positiva. Ej.: $\sqrt[3]{8}=2$.

b) Radicando negativo:
- *Indice par: (No existe raiz).*
- *Indice impar: Raiz negativa.*

Esta regla es consecuencia de la definición, contenida en las igualdades (1) y (2), y de la regla para el cálculo de una potencia.

Ejemplos

1. $\sqrt[3]{-8} = -2$, pues $(-2)^3 = -8$
2. $\sqrt[4]{+16} = \pm 2$, pues $(\pm 2)^4 = +16$
3. $\sqrt{-4}$ no existe, pues ningún número racional, ni positivo ni negativo, tiene su cuadrado igual a -4, ya que el cuadrado de un número, positivo o negativo, es siempre positivo.
4. $\sqrt[5]{-32} = -2$, pues $(-2)^5 = 32$

Ejercicios

1. $\sqrt[3]{-27} = ?$
2. $\sqrt[4]{-16} = ?$
3. $\sqrt[5]{+32} = ?$
4. $\sqrt{-25} = ?$

Nota Importante: La radicación *no es clausurativa* en el campo numérico racional. Si queremos que la radicación tenga solución *siempre,* tendremos que ampliar el campo de los números racionales, agregándole los números *irracionales,* y finalmente tendremos que crear los números complejos de dos unidades.

Sueves

EJERCICIOS 1.3

Ejercicios

1. Explica qué operaciones no tienen la *Propiedad Clausurativa* en el campo de los números naturales, y con qué ampliaciones de dicho campo se logra que dichas operaciones tengan solución.
2. Haciendo uso de la ley de monotonía correspondiente y de la propiedad transitiva de la desigualdad, demostrar que si $a < b$ y $c < d$, entonces $a+c<b+d$; demostrar además que, en el campo positivo, si $a<b$ y $c<d$, $a \cdot c<b \cdot d$.
3. Si elegimos el nivel del mar como origen de las alturas, explica cuáles son las alturas positivas y cuáles las negativas. Si una ciudad de Holanda está a 200 metros por debajo del nivel del mar, ¿cómo se escribiría su altura usando la notación universal de los números negativos?
   -200 m.
4. Cita tres ejemplos de magnitudes relativas y cuatro cantidades, dos positivas y dos negativas, de cada una.
5. Decir si la edad de una persona es una magnitud absoluta o relativa.
   absoluta

Ejercicios

6. Contestar inmediatamente cuáles son los módulos de los siguientes números racionales: $|(-3)| = ?$, $|+\frac{3}{2}| = ?$, $|-\frac{3}{5}| = ?$, $|0| = ?$, $|-1| = ?$
En general, si a es un número racional cualquiera positivo o negativo, $|a| = ?$

7. ¿Cómo son los siguientes pares de números?

$(+4)$ y (-4), $(-\frac{3}{2})$ y $(+\frac{3}{2})$, $(-\frac{1}{5})$ y $(+\frac{1}{5})$, $(+a)$ y $(-a)$. opuestos

¿Cómo están situados respecto del origen los afijos de dos números opuestos?

8. Ordenar de menor a mayor los siguientes números racionales:

$(-\frac{2}{5})$, $(+\frac{3}{2})$, (-4), $(+6)$, $(-\frac{1}{2})$, $(+\frac{3}{2})$, $(-\frac{5}{4})$, $(+4)$.

Representarlos sobre una recta metrizada, es decir, marcar sus afijos, y observar las posiciones de los afijos correspondientes a los números ordenados de menor a mayor.

9. Dibuja los afijos correspondientes a tres números racionales (elegidos por tí) α, β y γ, tales que $\alpha < \beta$ y $\beta < \gamma$. ¿Cómo son α y γ? ¿En virtud de qué ley?

10. Un minero, A, está trabajando en el fondo de una mina a -50 m., otro minero, B, está trabajando a -80 m.; y un tercero, C, a -100 m. Escribe estas tres cantidades ordenadas de menor a mayor; después represéntalas sobre una recta metrizada, tomando una escala de 1 cm. por cada 10 m.

11. A continuación describimos la situación geográfica de tres ciudades:
1°) París→Longitud Este 2° y Latitud Norte 49°
2°) Lima→Longitud Oeste 77° y Latitud Sur 12°
3°) Boston→Longitud Oeste 71° y Latitud Norte 42°

Escribir la situación geográfica de cada ciudad mediante un par ordenado de números racionales, separados por una coma y encerrados entre paréntesis, conviniendo que el primer número represente a la longitud y el segundo a la latitud. (Recuérdese que son negativas las longitudes oeste y las latitudes sur).

12. Cuando un punto se mueve de izquierda a derecha (en el sentido positivo) engendra *segmentos positivos* y cuando se mueve de derecha a izquierda (en el sentido negativo) describe segmentos negativos. Por ejemplo, el segmento AB, siendo la abscisa de A el número -5, $A(-5)$, y la de B el número $+3$, $B(+3)$, es positivo, pues el movimiento de A hasta llegar a B es en el sentido positivo. (Dibújelo y véalo el alumno).

Clasificar los segmentos siguientes en positivos y negativos:
1°) AB, siendo $A(-2)$, $B(-5)$
2°) CD, siendo $C(+2)$, $D(-3)$
3°) EF, siendo $E(-3)$, $F(+5)$
4°) GH, siendo $G(+5)$, $H(-4)$

Hallar la longitud de cada uno (positiva o negativa).

13. Un punto A tiene abscisa $(+3)$, $A(+3)$. El punto A realiza los siguientes movimientos sobre la recta metrizada:
1°) $+5$ unidades, 2°) -4 unidades, 3°) -6 unidades, 4°) $+2$ unidades.

¿Cuál es la abscisa de la última posición del punto A?

14. La temperatura de una ciudad pasó de 18° por la mañana a 14° por la noche. Expresar la variación de la temperatura mediante un número racional únicamente (no mediante un número y una frase, pues se podía decir: "La temperatura bajó 4°"). +4°

15. La temperatura cambió en una ciudad desde las 8 a.m. hasta las 11 a.m. $+6°$, y desde las 11 a.m. hasta las 6 p.m. cambió $-8°$. ¿Cuál fué el cambio experimentado por la temperatura desde las 8 de la mañana hasta las 6 de la tarde? −2°

16. Efectuar lo más rápidamente posible las siguientes sumas de números racionales, aplicando las leyes conmutativa y asociativa y destruyendo sumandos opuestos si los hubiese:

a) $(+2) + (-5) + (-3) + (+8) + (-2)$ = 0
b) $(-5) + (+\frac{2}{3}) + (+\frac{1}{3}) + (-1) + (+4) + (-2)$
c) $(-\frac{3}{2}) + (-1) + (+\frac{1}{2}) + (-6) + (+4) + (-10)$
d) $(-\frac{2}{5}) + (+\frac{7}{5}) + (-2) + (+5)$

17. A veces se prescinde de los paréntesis, para simplificar la escritura, escribiendo unos sumandos a continuación de otros, con sus signos correspondientes; por ejemplo, $-3+2-5-6+1$ significa $(-3) + (+2) + (-5) + (-6) + (+1)$. Teniendo en cuenta esta notación simplificada, realizar las siguientes sumas algebraicas:

a) $-2 + 3 - 6 - 4 + 1 + 9 - 3$ = +2
b) $3 - 6 - 9 + 8 - 5 + 2$ = −12
c) $-10 + 4 - 6 + 1 - 2$ = +13

Ejercicios

Ejercicios

18. Un niño comenzó una semana con $-\$\,2$ (esto significa que algún amigo le prestó \$ 2 el domingo después de habérsele acabado el dinero); después le fueron entrando (regalos de sus padres) y fue gastando las siguientes cantidades a lo largo de la semana:

$+\$\,3$, $-\$\,1$, $+\$\,4$, $-\$\,2$, $+\$\,1$, $-\$\,3$, $+\$\,6$ y $-\$\,8$. = − 2

¿Con cuántos pesos terminó la semana?

Haz el cálculo por diversos caminos (todos correctos) y comprueba la coincidencia de los resultados. Explica después el camino que te parezca más breve y las leyes en que se funda.

19. Un avión comenzó su vuelo a 800 metros de altura; después realizó los siguientes cambios de altura: $+400$ m., -600 m., $+100$ m., -200 m., y $+500$ m. ¿A qué altura vuela después del último cambio?

20. Un submarino navegaba a -300 m.; después realizó los siguientes cambios de altura: -100 m., -50 m., $+200$ m., -30 m., -60 m., -250 m., y $+350$ m. ¿A qué altura navega después del último cambio?

21. Arquímedes nació en el año -287 y murió (asesinado por el soldado romano Marcelo) en el año -212. ¿Cuántos años vivió? (Resta de la fecha de su muerte la de su nacimiento). −75

22. En cuatro ocasiones se tomaron las temperaturas en un lugar de La Siberia y en el Canal de Panamá, simultáneamente, habiendo obtenido los siguientes valores:

1º) $-32°$ y $+35°$ = + 3
2º) $-38°$ y $+42°$ = + 4
3º) $-46°$ y $+41°$ = − 5
4º) $-35°$ y $+32°$ = − 3

¿En cuál de las cuatro ocasiones fué mayor la diferencia de temperaturas?

23. Obtener mentalmente los valores de las siguientes diferencias:

a) $(-8)-(-10)$
b) $(+16)-(-4)$
c) $(-12)-(-4)$
d) $(+0)-(-9)$
e) $(+4)-(-16)$
f) $(-8)-(-12)$

g) $(+8)-(+10)$
h) $(-6)-(+8)$

24. ¿Cómo se obtiene el valor opuesto de una suma de números racionales? Por ejemplo ¿Cuál es el número opuesto de $3-5-2+6-8$?

Respuesta: El valor opuesto se obtiene cambiando de signo a todos los sumandos; así, el valor opuesto de la suma anterior es: $-3+5+2-6+8$. En efecto, cada sumando de la primera suma tiene su opuesto en la segunda y al sumar las dos sumas se tendría, aplicando las leyes conmutativa y asociativa: $(3-5-2+6-8)+(-3+5+2-6+8)=(3-3)+(-5+5)+(-2+2)+(6-6)+(-8+8)=0+0+0+0+0=0$, y por tanto $(3-5-2+6-8)$ y $(-3+5+2-6+8)$ son números opuestos, pues su suma es nula.

25. Teniendo en cuenta la conclusión del ejercicio anterior, y que la diferencia de dos números racionales es igual a la suma del minuendo con el opuesto del sustraendo, calcular las siguientes diferencias:

a) $(-3+5-8-2+10)-(-2+4-6+8)$ = 2
b) $(+5-2-8+10-4)-(3-6-9+1)$ = 12
c) $(-8-6+4-2+9)-(-6+4-2-5+10)$ = −4
d) $(-8-5+2)-(4-6-8+12)$ = −13

26. Resolver el ejercicio anterior calculando previamente los valores de los paréntesis.

27. En un producto de 5 factores, 3 de ellos son negativos. ¿Qué signo tendrá el producto?

28. Calcular los siguientes productos:

a) $(-\frac{3}{2})\cdot(+\frac{2}{3})$ $-\frac{6}{6}=-1$
b) $(-\frac{2}{3})\cdot(-\frac{7}{2})$
c) $(+\frac{3}{4})\cdot(-\frac{2}{3})$
d) $(-2)\cdot(-3)$
e) $(-\frac{1}{5})\cdot(+10)$
f) $(-20)\cdot(+\frac{1}{4})$

29. Efectuar los siguientes productos:

a) $(-\frac{1}{2})\cdot(+4)\cdot(-3)\cdot(-\frac{3}{2})$
b) $(+\frac{1}{5})\cdot(-10)\cdot(-2)\cdot(+\frac{2}{5})$

Ejercicios

c) $(-\frac{3}{4}) \cdot (+\frac{5}{2}) \cdot (-8) \cdot (+2)$ $= + \frac{3+10+32+2}{4} = \frac{58}{4}$

d) $(+\frac{9}{2}) \cdot (-6) \cdot (+2) \cdot (+4)$

Ejercicios

30. Efectuar los siguientes productos, primero efectuando antes las sumas de los paréntesis y después aplicando la ley distributiva; comprobarás que los resultados son iguales:

a) $(-2+3-4+1) \cdot (-5)$

b) $(+3-6-2+10) \cdot (+2)$

c) $(-9+10-2+6) \cdot (-3)$

31. Calcular las siguientes potencias:
a) $(-\frac{2}{3})^3$, b) $(-\frac{1}{2})^6$, c) $(+\frac{1}{4})^4$, d) $(-\frac{3}{2})^5$.

32. Efectuar las siguientes operaciones con potencias:

a) $(-\frac{2}{3})^3 \cdot (-\frac{2}{3})^2$ $= (-\frac{2}{3})(-\frac{2}{3}) = +\frac{4}{9}$

b) $(+\frac{1}{2})^5 \cdot (-\frac{2}{3})^5$

c) $(-\frac{3}{2})^4 : (-\frac{3}{2})^3$

d) $(-\frac{1}{2})^5 : (-\frac{4}{3})^5$

e) $[(-\frac{1}{3})^2]^3$

33. De acuerdo con la definición dada para las potencias de exponente negativo, una potencia de exponente negativo se transforma en otra de exponente positivo tomando por base el valor recíproco de la base, y recordamos que el valor recíproco de un número entero, a, es $\frac{1}{a}$, y el recíproco de un quebrado se obtiene intercambiando el numerador y el denominador; por ejemplo, el recíproco de $-\frac{2}{5}$ es $-\frac{5}{2}$.

Transformar las siguientes potencias en otras de exponente positivo:

a) $(-2)^{-3}$; b) $(-\frac{1}{3})^{-5}$, c) $(+\frac{3}{4})^{-2}$,
d) $(-\frac{1}{3})^{-4}$, e) $(+\frac{5}{2})^{-3}$.

En general: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = ?$, siendo n natural. $\left(\frac{b}{a}\right)^{+n}$

34. Efectuar los cálculos que se indican con potencias de exponente negativo:

a) $(-\frac{2}{3})^{-3} \div (-\frac{1}{4})^{-3} =$

b) $(+\frac{1}{4})^{-4} \cdot (+\frac{1}{4})^{+2}$

c) $[(-\frac{1}{3})^{-2}]^{-3}$

d) $(+\frac{3}{5})^{-2} \cdot (-\frac{1}{4})^{-2}$ $= \frac{17}{20}$

e) $(-\frac{3}{2})^3 \cdot (-\frac{3}{2})^{-4}$

f) $(+\frac{5}{3})^{-3} \cdot (+\frac{5}{3})^{+4}$

Ejercicios

35. ¿Cuántos números elevados al cuadrado dan $+25$? ¿Cuántos números elevados al cuadrado dan -25?

$+25 = 5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

36. ¿Es la radicación uniforme, cuando el radicando es positivo y el índice par?

37. ¿Existe alguna solución para una raíz de radicando negativo y de índice par? ¿Por qué? no

38. ¿Es uniforme la radicación de radicando positivo e índice impar? ¿Y la de radicando negativo e índice impar? ¿Qué signo tiene la raíz en este último caso?

39. Calcular las raíces que se indican a continuación:

a) $\sqrt[3]{-27}$, $= -3$

b) $\sqrt[4]{16}$ (las dos soluciones) $= \pm 2$

c) $\sqrt[5]{-32}$ $= -2$

d) $\sqrt[3]{-125}$ -5

e) $\sqrt{36}$ (las dos soluciones) $= \pm 18$

f) $\sqrt{-4}$ (¿existe?)

No existe

40. Calcular los siguientes cocientes:

a) $(-\frac{3}{2}) \div (+\frac{5}{2})$ $-\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$

b) $(+\frac{2}{5}) \div (-\frac{3}{4})$

c) $(-\frac{3}{4}) \div (-\frac{6}{8})$ $+1$

1.4 NOCIONES SOBRE LOS NUMEROS IRRACIONALES. EL CAMPO DE LOS NUMEROS REALES

I) ORIGEN ARITMETICO DE LOS NUMEROS IRRACIONALES

Veamos si existe solución para la $\sqrt{2}$ en el campo de los números racionales.

Desde luego, la $\sqrt{2}$ no es un número natural, pues $1^2<2$ y $2^2>2$.

Veamos que tampoco puede ser un número fraccionario.

En efecto, supongamos que la fracción *irreducible* $\frac{p}{q}$ fuese igual a la $\sqrt{2}$; entonces se cumpliría que $\frac{p^2}{q^2} = 2$, lo cual no es posible, pues si $\frac{p}{q}$ es irreducible también lo es $\frac{p^2}{q^2}$, y una fracción irreducible no puede ser igual al número natural 2.

Conclusión: La $\sqrt{2}$ no es un número racional, o sea, no existe en el campo de los números racionales. Si queremos que la $\sqrt{2}$ tenga solución, tendremos que ampliar el campo de los números racionales, agregándole los números *irracionales,* dentro de los cuales sí existe la $\sqrt{2}$.

Análogamente ocurre con todas las raíces de números naturales que no son potencias perfectas, por ejemplo, las raíces cúbicas de los números que no son cubos perfectos no son números racionales.

II) ORIGEN GEOMETRICO Y FISICO DE LOS NUMEROS IRRACIONALES:

Existen muchas cantidades tales que al tratar de medirlas con una cierta unidad ocurre que la unidad no está contenida un número exacto de veces en la cantidad, la medida no es un número entero; y si la unidad se divide en partes alícuotas (en partes iguales entre sí, por ejemplo en décimas), por pequeñas que sean estas *partes*, no se logra encontrar una unidad fraccionaria que esté contenida un número exacto de veces en la cantidad; en estos casos la medida de la cantidad con la unidad

Nina

Nina

elegida *no es un número racional,* y si queremos que exista siempre la medida de una cantidad con una unidad prefijada, tendremos que crear unos números, que agregados a los racionales, hagan que la razón de una cantidad a otra cualquiera de su especie, elegida como unidad, sea siempre un número. Estos números son llamados *números irracionales.*

Cuando la medida de una cantidad con una cierta unidad no es un número racional se dice, por razones históricas, que dicha cantidad es *inconmensurable* con la unidad elegida, lo cual no es cierto, pues lo que ocurre es que la medida es un número de los llamados *irracionales.*

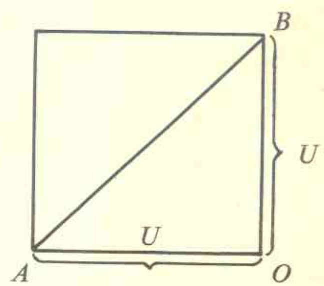
Veamos un ejemplo de una cantidad cuya medida con una unidad convenida *no es un número racional.*

Trataremos de medir la diagonal de un cuadrado tomando el lado por unidad.

Si aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo AOB obtenemos;

$AB = \sqrt{U^2+U^2} = \sqrt{2U^2} = U\sqrt{2},$

lo cual nos dice que el número de unidades U contenidas en la diagonal AB es $\sqrt{2},$ que ya sabemos, por el apartado anterior, *que no es un número racional.*



La definición matemática de los números irracionales es una cuestión puramente teórica, que se sale de los límites de este libro y que no necesitaremos; por ésto nos contentamos con algunas observaciones acerca de estos números que exponemos a continuación.

III) APROXIMACIONES DE UN NUMERO IRRACIONAL CON NUMEROS RACIONALES

En aritmética se explicó la forma de aproximar la raiz cuadrada de un número natural, que no sea cuadrado perfecto, *tanto como se quiera,* para ello basta agregar parejas de ceros a los restos sucesivos y por cada par de ceros agregados se tiene una nueva cifra decimal de la raíz;

por este procedimiento se obtienen los siguientes valores aproximados de la $\sqrt{2}$:

1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142. . .

Como el proceso de aproximaciones se puede proseguir indefinidamente (basta agregar un par de ceros a cada nuevo resto) se concluye que para representar *exactamente* con la notación decimal a un número irracional serían necesarias *infinitas cifras;* además, estas cifras *no se pueden repetir periódicamente,* porque en tal caso se trataría de un número racional, pues según fue explicado en Aritmética, un decimal periódico, puro o mixto, puede reducirse a una fracción generatriz.

Como resumen, podemos decir que:

Un número irracional necesitaría para ser representado exactamente con la notación decimal infinitas cifras que no se repiten periódicamente.

Como es imposible obtener la representación *completa* de un número irracional con la notación decimal, *en la práctica se sustituyen los números irracionales por sus aproximaciones racionales,* tomando en cada caso las cifras decimales que son suficientes para satisfacer a la aproximación requerida; por ejemplo, si un ingeniero está calculando la carga que puede soportar un puente no tiene sentido que aproxime hasta los gramos, aunque le fuera posible.

IV) EL CAMPO NUMERICO REAL: SU ESTRUCTURA ALGEBRAICA.

Cuando al conjunto de los números racionales se le agregan los números irracionales (que necesitan infinitas cifras decimales que no se repiten periódicamente para ser representados exactamente), se obtiene un conjunto más amplio que recibe el nombre de *"Campo de los Números Reales".* Dentro de este campo son posibles todas las operaciones, excepto la división por cero y la radicación de índice par y radicando negativo. Para dar solución a esta última operación (y a otros muchos problemas importantes) se crean los números complejos, que se estudian en el capítulo 10 de esta obra.

Los números reales llenan completamente la recta metrizada: *A cada número real corresponde un punto de la recta metrizada y a cada punto un número real.*

A continuación damos el cuadro completo de los números reales.

NUMEROS REALES

$-\sqrt{2}, \quad \pi, \quad +\sqrt{3}, \ldots$

NUMEROS RACIONALES

$-\frac{1}{5}, \quad -\frac{2}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{12}{5}, \ldots$

NUMEROS ENTEROS

Enteros Negativos	Cero	Números Naturales
$-1, \ -2, \ -3, \ldots$	0	$1, \ 2, \ 3, \ldots$

En este cuadro se muestran claramente cómo están incluídos unos campos numéricos en otros.

Terminamos estas nociones dando un cuadro sinóptico de las leyes que gobiernan el cálculo con números reales, y que son por tanto el fundamento del cálculo algebraico.

Si $x, y, z,$ representan números reales cualesquiera se cumplen las siguientes relaciones:

1. La suma de dos números reales cualesquiera, $x+y$, existe siempre en el campo de los números reales y es única. (Leyes Clausurativa y Uniforme).

2. El producto de dos números reales cualesquiera, $x \cdot y$, existe siempre en el campo de los números reales y es único. (Leyes Clausurativa y Uniforme).

3. Leyes Conmutativas: $\begin{cases} x+y = y+x \\ x \cdot y = y \cdot x \end{cases}$

4. Leyes Asociativas: $\begin{cases} x+(y+z) = (x+y)+z \\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \end{cases}$

5. Ley Distributiva: $x \,.\, (y+z) = x \,.\, y + x \,.\, z$

6. Dados dos números reales cualesquiera, x, y, existe un único número real z tal que $x=y+z$. El número z se llama la diferencia entre x y y y se indica así: $z=x-y$. (Leyes Clausurativa y Uniforme de la sustracción).

7. Dados dos números reales cualesquiera, x, y, siendo $y \neq o$, existe un único número real, z, tal que $x=y \,.\, z$. El número z se llama el cociente entre los números x y y, y se indica de una de estas formas: $z=x \div y$, ó $z=\frac{x}{y}$.

(Leyes Clausurativa y Uniforme de la división).

8. Si x es cualquier número real, $x+0=x$, y $x \,.\, 1 = x$ (Leyes Modulativas).

9. Si es $x \,.\, y = o$, uno al menos de los factores se anula (ó $x=o$, ó $y=o$, ó ambos son nulos).

10. Si $x+z=y+z$, entonces $x=y$, y si $x \,.\, z = y \,.\, z$, $(z \neq o)$, entonces $x=y$ (Leyes cancelativas).

Se cumplen además las leyes de monotonía, que no usamos en este libro.

REVISION DE CONCEPTOS

1. Hacer un cuadro sinóptico de las leyes de la suma en el campo de los números naturales, expresando a la derecha de cada ley su representación simbólica.

2. ¿Cómo se define la diferencia de dos números naturales? ¿Tiene la diferencia de números naturales la ley clausurativa?

3. ¿Qué leyes formales tiene la diferencia de números naturales?

4. Haz un cuadro sinóptico con las leyes formales de la multiplicación, escribiendo a la derecha de cada ley su representación simbólica.

5. ¿Existe siempre el cociente exacto de dos números naturales?

6. ¿Cuál es la definición completa de la potenciación de exponente natural?

7. Demuestra las cinco leyes del cálculo con potencias (producto de potencias de igual base, producto de potencias de igual exponente, cociente de potencias de igual base, cociente de potencias de igual exponente y potencia de una potencia).

8. ¿Qué se entiende por raiz n-sima de un número natural? ¿Existe siempre la raiz n-sima de un número natural en el campo de los números naturales?

9. ¿Cuál fue el origen aritmético de los números fraccionarios positivos? ¿Y el origen físico y geométrico?

10. ¿Cómo se representa un número fraccionario? ¿Qué representa cada uno de los términos de un quebrado cuando se interpreta como una cantidad? ¿Es única la representación de un número fraccionario o hay infinitas representaciones de un mismo número fraccionario? ¿Cómo se deducen unas de otras?

11. Define la igualdad y la desigualdad de números fraccionarios positivos y comprueba que cumplen las propiedades reflexiva, simétrica, y transitiva para la igualdad y la transitiva para la desigualdad.

12. *Define* la suma de números fraccionarios positivos.

13. Enuncia y demuestra las leyes formales de la suma de números fraccionarios. ¿Son las mismas que en el campo de los números naturales? ¿Cómo se llama a este hecho de conservarse las leyes formales de las operaciones al pasar de un campo numérico a otro más amplio? ¿Tiene importancia para el Algebra esta permanencia de las mismas leyes?

14. ¿Cómo se define la diferencia de dos fracciones positivas? ¿Existe siempre la diferencia de dos fracciones positivas?

15. Explica las leyes más importantes de la diferencia de fracciones. ¿Son las mismas que las de la diferencia de números naturales?

16. Define el producto de dos fracciones. Explica sus leyes formales.

17. ¿Cómo se define el cociente de dos fracciones? ¿Existe siempre el cociente de dos números naturales en el campo de los números fraccionarios?

18. ¿Cómo se definen de forma completa la potenciación de números fraccionarios y exponente natural? Se cumplen las mismas reglas de cálculo con potencias que cuando las bases eran números naturales?

19. Define la raiz n-sima de un número fraccionario positivo. ¿Existe siempre la raiz n-sima de una fracción en el campo de los números fraccionarios?

20. ¿Qué clases de problemas dieron origen a los números negativos?

21. Explica algunos ejemplos de magnitudes relativas, dotadas de dos sentidos, y señala en cada una cuáles son las cantidades positivas y cuáles las negativas.

22. ¿Cómo se definen en Matemáticas los números negativos? ¿Basta con decir que se representan mediante un número positivo, precedido del signo menos, o hay que agregar las definiciones de igualdad, suma y producto?

23. ¿Cómo se llama el campo numérico que se obtiene cuando a los números naturales y a los fraccionarios positivos se agregan los números negativos, enteros y fraccionarios, y el cero? campo numérico o real.

24. Define con precisión los siguientes conceptos:

   a) Módulo de un número racional. el uno y el cero
   b) Igualdad de números racionales. números iguales y con igual signo
   c) ¿Qué son números opuestos? cuando tiene distinto signo
   d) Desigualdad entre números racionales. distinto signo y distinto número

25. Explica lo que es una recta metrizada y cómo se representan los números racionales sobre ella. ¿Corresponde a cada número racional un punto de la recta metrizada? ¿Es cierta la recíproca, es decir, corresponde a cada punto de la recta metrizada un número racional?

26. Explica algún ejemplo en el que se presente una suma de números racionales y, a partir de él, induce la definición de suma de números racionales de igual signo, o de signos distintos.

27. ¿Tiene la suma de números racionales, tal como ha sido definida, las mismas leyes que la suma de números positivos? Recuerda estas leyes y justifícalas con algún ejemplo.

28. ¿Cómo se define la sustracción de dos números racionales? ¿Existe siempre la diferencia de dos números racionales?
Explica cómo la sustracción de dos números racionales se reduce a una adición.

29. Explica un ejemplo de multiplicación de números racionales en el que puedas observar que se cumple la regla de los signos de la multiplicación; después define la multiplicación de dos números racionales. Define también el producto de varios factores racionales.

30. Explica las leyes formales de la multiplicación de números racionales.

31. Define el cociente de dos números racionales. ¿Es posible obtener el cociente cuando el divisor es cero? Da la regla para hallar el cociente de dos números racionales y demuestra sus dos partes: la obtención del módulo del cociente y la obtención del signo. ¿Existe siempre el cociente de dos números racionales?

32. Demuestra la ley distributiva de la división respecto de la suma. ¿En qué ley se apoya la demostración?

33. Define de forma completa la potenciación de base racional y exponente natural. ¿Se cumplen en este campo las mismas reglas de cálculo con potencias que en los campos anteriores? Enúncialas y demuéstralas.

34. Define la raiz n-sima de un número racional. ¿Existe siempre la raiz n-sima de un número racional, por ejemplo la raiz cuadrada? sí $\sqrt[n]{a} = a^n$

35. Da la regla de cálculo para la raiz de índice cualquiera de un número racional, y explica los signos de la raiz según el signo del radicando y el índice. ¿Qué ocurre cuando el índice es par y el radicando negativo?

36. ¿Qué problemas dieron origen a los números irracionales? Explica claramente el origen aritmético y el origen geométrico y físico de los números irracionales.

37. ¿Cuántas cifras se necesitarían para representar con la notación decimal un número irracional? ¿Se repiten periódicamente estas cifras? ¿Por qué?

38. ¿Llenan los números reales la recta metrizada? Sí

39. ¿Cuál es la única operación que carece de solución en el campo de los números reales y que nos obligará a crear los números complejos? radicación

* * *

CUESTIONARIO DE SELECCION

Selecciona la afirmación correspondiente al concepto que se da al principio:

1. Dos números *opuestos* son los que tienen:

   a) el mismo módulo y el mismo signo.
   b) el mismo módulo y signo contrario.
   c) distinto módulo y distinto signo.

2. Si es $a < -3$, y $c > -3$ se deduce que:

   a) $a > c$, b) $a = c$, c) $a < c$.

3. El módulo de una suma de números racionales es:

   a) En todos los casos igual a la suma de los módulos de los sumandos.
   b) Mayor que la suma de los módulos de los sumandos.
   c) Igual o menor que la suma de los módulos de los sumandos.

4. Si a los dos miembros de la desigualdad $-3>-5$ se les suma un mismo número negativo:

   a) Se cambia el sentido de la desigualdad.

   b) Se obtiene otra desigualdad del mismo signo.

   c) Se puede obtener una igualdad.

5. La diferencia de dos números racionales:

   a) Puede ser menor, igual o mayor que el minuendo.

   b) Siempre es menor que el minuendo.

   c) Siempre es mayor que el minuendo.

6. El módulo de un producto de números racionales es:

   a) Mayor que el producto de los módulos de los factores.

   b) Menor que el producto de los módulos de los factores.

   c) Igual al producto de los módulos de los factores.

7. El producto de dos números racionales es:

   a) Siempre mayor que uno de los factores.

   b) Igual, mayor o menor que uno de los factores.

   c) Siempre menor que uno de los factores.

8. Cuando escribimos que $(\alpha+\beta+\gamma) \cdot \delta=\alpha \cdot \delta+\beta \cdot \delta+\gamma \cdot \delta$ estamos aplicando:

   a) La ley asociativa.

   b) La ley conmutativa.

   c) La ley distributiva.

9. Cuando de la igualdad $\alpha \cdot \chi=\beta \cdot \chi$, $(\chi \neq 0)$, deducimos que $\alpha=\beta$ estamos aplicando:

   a) La ley cancelativa.

   b) La ley clausurativa.

   c) La ley modulativa.

10. Si el dividendo es positivo:

    a) El cociente es positivo siempre.

    b) El cociente es negativo siempre.

    c) El cociente puede ser positivo o negativo.

Quina 8º Costa

11. Si la base de una potencia es negativa:

    a) La potencia siempre es negativa.

    b) La potencia siempre es positiva.

    c) La potencia puede ser positiva o negativa.

12. La $\sqrt[4]{-16}$, en el campo numérico real, tiene:

    a) Dos soluciones racionales que son opuestas.

    b) Ninguna solución.

    c) Una solución única.

13. La $\sqrt{2}$ es;

    a) Un número natural.

    b) Un número fraccionario positivo.

    c) Un número irracional.

14. En el campo numérico real la $\sqrt{4}$ es igual a:

    a) Un número irracional.

    b) Dos números enteros opuestos.

    c) Un número fraccionario.

15. La $\sqrt[3]{-8}$, en el campo de los números reales, tiene:

    a) Dos soluciones.

    b) Una solución.

    c) Ninguna solución.

16. Si a es un número racional, n natural y m entero negativo, se cumple que:

    a) $(a^m)^n=a^{m+n}$

    b) $(a^m)^n=a^{n-m}$

    c) $(a^m)^n=a^{m \cdot n}$

CUESTIONARIO DE DISTINCION

¿Puedes distinguir las afirmaciones que son verdaderas de las que son falsas?

1. En el campo de los números racionales es siempre posible la radicación.

2. La raiz de cualquier índice de un número natural no puede ser un número fraccionario (de denominador distinto de 1).

3. Si a es un número racional cualquiera, y m y n son números enteros, $(a^m)^n = (a^n)^m$.

4. La potencia de base negativa siempre es negativa.

5. Si un producto tiene 3 factores negativos el signo del producto es negativo.

6. Si el dividendo de una división de números racionales es positivo y el cociente también positivo el divisor debe ser negativo.

7. Las raíces de los números negativos de índice par no tienen solución en el campo numérico real.

8. La radicación no es una operación uniforme en el campo numérico real.

9. La radicación no es clausurativa en el campo numérico real.

10. El módulo de una potencia es igual a la potencia del mismo exponente del módulo de la base.

11. La diferencia de dos números racionales es igual a la suma del sustraendo con el opuesto del minuendo.

12. El valor opuesto de una suma de números racionales es la suma de los valores opuestos de todos los sumandos.

CUESTIONARIO DE COMPLETACION

1. Completar las siguientes igualdades simbólicas de forma que los signos sean correctos.

a) $(+) \cdot (?) = +$

b) $(-) \cdot (+) = ?$

c) $(-) \cdot (?) = +$

d) $(+) \cdot (?) = +$

e) $(+) \cdot (-) \cdot (+) \cdot (?) = -$

f) $(+) \cdot (-) \cdot (-) = ?$

g) $\dfrac{(+)}{(?)} = -$

h) $\dfrac{-}{?} = +$

i) $\dfrac{?}{?} = +$

j) $\dfrac{?}{?} = -$

k) $(-)^2 = ?$

l) $(-)^3 = ?$

m) $\sqrt[3]{(-)} = ?$

n) $\sqrt[5]{(?)} = -$

2. El opuesto de $(-\frac{5}{3})$ es...

3. El recíproco de $(-\frac{1}{3})$ es...

4. La suma de dos números opuestos es...

5. El producto de dos números recíprocos es...

6. Completar los números racionales que faltan en las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{+8}{-2} = ?$

b) $\dfrac{-4}{?} = +2$

c) $(\frac{1}{2})^{-2} = ?$

d) $\sqrt[5]{-32} = ?$

7. La raíz cuadrada de un número natural que no es cuadrado perfecto tiene... soluciones, que son números...

8. Si $a+x=b+x$, $a=?$ en virtud de la ley...

9. Si las bases son racionales y los exponentes enteros, completar las siguientes igualdades:

$a^m \cdot a^n = ?$, $a^n \cdot b^n = ?$, $\dfrac{a^m}{a^n} = ?$, $\dfrac{a^n}{b^n} = ?$, $(a^m)^n = ?$

10. Cuando escribimos $(a+b) + c = a + (b+c)$ estamos aplicando la ley...

PROBLEMAS SOBRE EL CAPITULO 1

1. Un punto móvil parte de un origen y se mueve sobre una recta. El primer segundo recorre +3 cm., el segundo −5 cm., el tercero +7 cm., y el cuarto −9 cm. ¿Cuál será su posición al final del cuarto segundo, con relación al origen de partida?

2. Si en el ejercicio anterior se cambia el orden de los recorridos, ¿cambiará la posición final del punto? ¿En virtud de qué ley?

3. En este ejercicio damos un ejemplo físico en el que *se comprueba* que se cumple la regla de los signos de la multiplicación. Recordemos que el espacio recorrido por un móvil, con movimiento uniforme, es igual al producto de la velocidad (espacio en la unidad de tiempo) por las unidades de tiempo. En símbolos: $e = v \cdot t$.
Consideremos un ascensor en un edificio que tiene pisos bajo el suelo (sótanos) y pisos sobre el suelo. Convendremos en llamar positivas a las velocidades ascendentes y negativas a las descendentes; positivos a los pisos sobre el suelo y negativos a los del sótano, y finalmente, positivos a los tiempos del futuro (dentro de tanto tiempo) y negativos a los tiempos pasados (hace tanto tiempo).
Teniendo en cuenta que espacio es igual a velocidad por tiempo, reflexione el alumno la posición del ascensor en los siguientes casos y descubrirá que se cumple la *"regla de los signos"*.

1er. Caso: (+ . + = +) Si el ascensor va subiendo (velocidad *positiva*), con una velocidad de tres pisos por minuto, al cabo de dos minutos (tiempo futuro, *positivo*), ¿dónde se encontrará? (Respuesta: En el piso +6) o sea: $v = +3$, $t = +2$, $e = (+3) \times (+2) = +6$.

2º Caso: (+ . − = −). Si el ascensor viene subiendo (velocidad positiva) con una velocidad de 3 pisos por minuto, y en este momento está en el suelo (piso 0), hace dos minutos (tiempo pasado, *negativo*) ¿dónde se encontraba? (Respuesta: en el piso −6). O sea: $e = v \cdot t = (+3) \times (-2) = -6$.

3º Caso: (− . + = −). Si el ascensor viene bajando (velocidad negativa) con una velocidad de 3 pisos por minuto, y en este momento se encuentra en el suelo, ¿dónde se encontrará dentro de dos minutos? (tiempo futuro, positivo). (Respuesta: En el piso −6). O sea: $e = v \cdot t = (-3) \times (+2) = -6$.

4º Caso: (− . − = +). Si el ascensor viene bajando, con una velocidad de 3 pisos por minuto, y en este momento está en el suelo, ¿dónde se encontraba hace 2 minutos? (Respuesta: En el piso +6). O sea: $(-3) \times (-2) = +6$.

Repita el alumno el ejercicio con un tren, tomando como positivos los espacios a la derecha del punto de partida y negativos los recorridos a la izquierda; velocidades positivas hacia la derecha y negativas hacia la izquierda; y finalmente, tiempos positivos los del futuro y negativos los del pasado.

4. Un cliente de un banco tiene en su cuenta corriente 580 pesos y realiza las siguientes operaciones:

   1ª Gira un cheque de 250 pesos.
   2ª Consigna 300 pesos.
   3ª Gira un cheque de 400 pesos.
   4ª Gira otro cheque de 120 pesos y
   5ª Consigna 380 pesos. ¿Cuál es su balance al terminar la quinta operación?

5. Un personaje nació el año 25 antes de Nuestro Señor Jesucristo y murió el año 48 de nuestra era cristiana. ¿Cuántos años vivió?

6. La fuerza ascensional de un globo se considera como positiva. ¿Cuáles son las fuerzas negativas?

7. Representar geométricamente los siguientes números, y después ordenarlos de menor a mayor: $3, -2, \frac{1}{5}, -\frac{2}{3}, +\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}, +\frac{1}{2}$.

8. Si $a > -3$ y $b < -3$, ¿Cómo son a y b?

9. Un comerciante, que tenía un capital inicial de 3,000 pesos, efectuó los siguientes negocios:

   1º) Una ganancia de 500 pesos.
   2º) Una pérdida de 600 pesos.
   3º) Una ganancia de 200 pesos.
   4º) Una pérdida de 1.500 pesos.
   5º) Una ganancia de 200 pesos.

   ¿Cuál es su capital final?

10. Efectuar las siguientes sumas:

    a) $(-\frac{3}{2}) + (-\frac{1}{6}) + (\frac{5}{12}) + (-\frac{3}{4}) + (-5) + (\frac{5}{24})$

    b) $-\frac{2}{5} + \frac{1}{10} - \frac{4}{20} + 8 - \frac{16}{2} + \frac{1}{30} - 9$

11. Suprimir los paréntesis y hallar el resultado de las siguientes sumas algebraicas: (Recuérdese que el valor opuesto de una suma algebraica se obtiene cambiando de signo a todos los sumandos, para suprimir un paréntesis precedido de signo − se cambian de signo todos los números interiores al paréntesis).

    1º) $(4+3-8) + (5-9+2) - (-8-6+7)$

2ª) $(-15+24+2) - (36-42+5) + (7-6)$

3ª) $(4-\frac{3}{5}+\frac{1}{2}) - (\frac{3}{10}-\frac{7}{8}+2)$

4ª) $(4-\frac{2}{3}) - (\frac{5}{8}-\frac{3}{4}) + (6+\frac{5}{6})$

12. Una persona tiene 50 pesos y otra debe 80. ¿Cuánto tiene de más la primera respecto de la segunda?

13. Efectuar los siguientes productos:

$(-2) \times (+\frac{3}{5})$, $(-\frac{2}{3}) \times (+\frac{7}{4})$, $(-\frac{9}{2}) \times (+\frac{5}{4}) \times (-\frac{2}{5}) \times (-\frac{6}{7})$,

$(-\frac{1}{4}) \times (+\frac{2}{3}) \times (-\frac{3}{2})$.

14. Efectuar las siguientes operaciones:

$(-\frac{1}{5}) \times (\frac{2}{3}-\frac{1}{6}+\frac{5}{12}-\frac{7}{24})$, $(5-\frac{1}{3}) \times (\frac{1}{3}-5)$, $(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}) \times (-\frac{1}{8})$.

15. Comprobar que la radicación de índice par en el campo de los números racionales, (cuando tiene solución), *no es uniforme*, sino biforme (con dos soluciones).

Ejemplo: $\sqrt{4} = \begin{array}{l} \nearrow +2 \\ \searrow -2 \end{array}$ pues $\begin{array}{l} \nearrow (+2)^2=4 \\ \searrow (-2)^2=4 \end{array}$

16. Efectuar las siguientes operaciones:

$[(-3) \cdot (+4)]^3$, $[(+8) \div (-3)]^2$, $(-24) \div (+3)$,

$(-\frac{2}{5}) \div (+\frac{3}{2})$, $(-\frac{7}{4}) \div (-\frac{3}{4})$, $(+\frac{5}{8}) \div (-\frac{3}{2})$.

17. ¿Qué le ocurre a una división si el dividendo y divisor se cambian de signo?

18. Efectuar las siguientes operaciones:

$(-4) \times (-6) \times (+2) \div (+12)$, $(-3)^5$, $(-6)^4$,

$[(-2) \times (-5)]^6$, $72-(-2)^3$.

19. ¿Cuántas raíces cuadradas tiene el número $+9$?; ¿y el número -9? ¿Cuántas soluciones tiene la raiz cúbica de -27 en el campo de los números racionales?

20. ¿Tiene solución la $\sqrt[4]{-16}$?

Calcular: $\sqrt[3]{-64}$, $\sqrt{(+8) \times (-2) \times (+2) \times (-8)}$,

$\sqrt[3]{(-27) \times 8 \times (-64)}$, $\sqrt[3]{(-81)\times(+3)}$.

21. Efectuar las siguientes operaciones·

$\frac{3}{8} - (2-\frac{5}{6} + \frac{7}{12}) + (2-\frac{3}{4})$, $5-(\frac{1}{4}+ \frac{11}{12} -1) - [3-(\frac{5}{4} - \frac{13}{30})]$

$-\frac{5}{6}-[3+(\frac{7}{10} - 5 - \frac{3}{4}) - (\frac{11}{24} - \frac{3}{6})]$,

$3- \left\{\frac{2}{5}-2-[-\frac{7}{10} + (\frac{5}{4} - \frac{1}{2}) - (\frac{3}{8} + \frac{5}{4})]\right\}$

22. Efectuar las siguientes operaciones:

$2 + (-5) + (\frac{1}{6}-\frac{2}{3}) + (\frac{2}{5} - \frac{1}{15}) - (\frac{3}{4} + \frac{5}{12}) - (\frac{2}{5}+1)$

23. Arquímedes murió en el año 212 antes de Nuestro Señor Jesucristo, Torricelli nació en el año 1,608 de nuestra era. ¿Cuántos años transcurrieron entre estos dos acontecimientos?

24. Un termómetro marcaba 18° centígrados; después bajó 5 grados, subió 6, bajó 8, subió 3, bajó 2, y bajó 2. ¿Qué temperatura marca después de todos estos cambios?

25. Dos trenes parten de dos estaciones, separadas 60 Kms., al encuentro el uno del otro; cuando el primero ha recorrido 10 Kms. y el segundo 25 Kms. ¿A qué distancia se encuentran?

26. Efectuar las siguientes operaciones:

$(-\frac{1}{2}) \cdot (-1+\frac{1}{3}) \cdot (+0{,}222\ldots)$ (Consúltese la Aritmética para transformar 0,222... en fracción ordinaria.

27. Efectuar las siguientes operaciones:

a) $(-0{,}5) \times (+0{,}75) \times (-\frac{1}{2}) \times (+0{,}25) \times (-\frac{1}{10})$

b) $(-2) \times (5-\frac{7}{2}) \times (\frac{5}{4} - \frac{3}{8} + \frac{7}{24})$

28. Efectuar las siguientes operaciones:

$(\frac{3}{4} - \frac{1}{20} + \frac{3}{50}) \div (2 - \frac{7}{10} - \frac{2}{5})$ (Efectúense previamente las sumas indicadas en los paréntesis).

29. $(-\frac{3}{2})^2 \times (2{,}555\ldots)^2$, $(3{,}2555\ldots)^3 \times (\frac{293}{90})^4$,

$(1 - \frac{1}{3})^2 - (1 + \frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{5})^3$

30. $$\frac{(1 - \frac{1}{10} + \frac{2}{3})^2}{(1 - \frac{1}{10} - \frac{2}{3})^2} - \frac{(1 + \frac{1}{10} - \frac{2}{3})^2}{(1 + \frac{1}{10} + \frac{2}{3})^2} - (6 + \frac{5}{7} + \frac{13}{53}) \times (6 + \frac{5}{7} - \frac{13}{53})$$

(Respuesta: 0)

31. $$\left(\frac{1 - \frac{3}{2} + \frac{2}{3}}{1 + \frac{3}{2} - \frac{2}{5}}\right)^2 \div \frac{(-2 + \frac{4}{3} + \frac{1}{6})^3}{(5 - \frac{3}{2} - 9)^2}$$

32. $\left(\dfrac{0{,}1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{10}}{0{,}2 + \frac{5}{2} - \frac{2}{5}}\right)^3 \times \left(\dfrac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}}\right)^3$

33. $\left\{\left[\frac{2}{3} \div \left(-\frac{1}{5}\right)\right] + \left[\left(-\frac{1}{5}\right) \div \left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\}^2 + \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{20}{3} - \frac{3}{20}\right)^2 -$
$- \left(10.9 \cdot \frac{40.9}{12}\right)$ (Respuesta: $\frac{4{,}959}{200}$).

34. $\left(\frac{1}{0{,}5} - \frac{1}{0{,}8}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{0{,}3} - \frac{1}{0{,}4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{(0{,}1)} + \frac{1}{(0{,}2)}\right)$

35. Interpretar geométricamente el producto por un número negativo.

Por ejemplo: Multiplicar 3 por -5 es alejar el punto representativo del 3 cinco veces más del origen y hallar el simétrico respecto del 0 del punto final. Observar que con esta interpretación geométrica el producto de un número negativo por otro negativo da producto positivo.

36. Si Juan debe más que Pedro, Antonio tiene tanto como debe Pedro, y Miguel tiene una cantidad igual a la que debe Juan, ordenar a estas personas atendiendo a su riqueza.

37. En la suma $\frac{3}{2} - \frac{5}{6} + \frac{1}{5} - 6 + x$, ¿Qué valor numérico tiene que tomar la letra x para que su valor sea cero?

38. Se dan los números negativos: -4.2812, -5.1945, -3.10305.
Expresarlos como suma de un entero negativo y de un decimal positivo, sin parte entera, tratando de obtener una regla práctica (Indicación: súmesele 1 a la parte decimal, que en principio es negativa, y réstesele 1 a la parte entera).

39. Se sabe que la luz recorre 300,000 Kms. por segundo. La estrella α, de la constelación del Centauro, es la más próxima a la tierra y dista 4.35 años luz. Calcular la distancia de la estrella α a la tierra.

40. Un punto móvil parte de la posición A(-2), y pasa en etapas sucesivas por los siguientes puntos: B$(+3)$, C(-5), D$(+4)$, E(-6), F$(+1)$. ¿Cuál es la longitud de cada etapa? ¿Cuánto suman los espacios recorridos? (Observación: Se consideran las distancias como cantidades relativas, positivas las de izquierda a derecha y negativas las de derecha a izquierda).

41. Demostrar que en el campo racional la diferencia entre dos números (número que sumado con el sustraendo nos da el minuendo), se obtiene *sumando* el minuendo con el *opuesto* del sustraendo. De esta forma la diferencia queda reducida a una suma, por lo que en el campo racional no existe como operación independiente.

Unidad 2

Ecuación cuadrática se puede derivar de este problema propuesto por Bhaskara:

"En medio de un gran combate el furioso hijo de Pritha se provee de un cierto número de flechas para matar a Carna. Reserva la mitad para su defensa propia, dispara el cuádruplo de la raíz cuadrada contra los caballos, seis flechas hieren al cochero Salya, tres destrozan el escudo de Carna, su estandarte y su arco, y una le atraviesa la cabeza. ¿Cuántas flechas tenía Arjuna, el hijo de Pritha?"

Las conquistas de Alejandro el Grande se inmortalizaron por el intercambio cultural entre oriente y occidente; las glorias guerreras fueron transitorias y mínimas frente a los grandes adelantos intelectuales. Los hindúes aprendieron de los griegos la actitud científica y aportaron a su vez su rica imaginación y su comprensión espiritual del mundo.

Los hindúes crearon los valores de posición en la escritura de los números que completaron con el cero.

En el siglo VII el astrónomo Brahmagupta, aplicó el cálculo algebraico para obtener la posición de los astros en fechas determinadas.

El sistema de encontrar "incógnitas" fue llamado "pulverizar". Dijo Brahmagupta: "Quien conozca el uso del "método pulverizador" así como las cifras, las cantidades positivas y negativas, la eliminación del término medio y las expresiones, llegará a ser un maestro entre los sabios".

Cinco siglos después Bhaskara escribió: "Para resolver una ecuación se ponen diestramente en equilibrio sus dos miembros sumando, multiplicando y dividiendo".

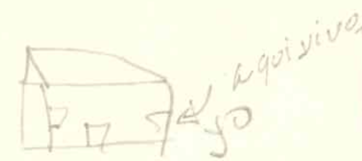
Los hindúes no fueron geómetras como los griegos y egipcios pero su ingenio y fértil imaginación dieron forma al cálculo algebraico.

Ecuación cuadrática se puede derivar de este problema propuesto por Bhaskara:

"En medio de un gran combate el furioso hijo de Pritha se provee de un cierto número de flechas para matar a Carna. Reserva la mitad para su defensa propia, dispara el cuádruplo de la raíz cuadrada contra los caballos, seis flechas hieren al cochero Salya, tres destrozan el escudo de Carna, su estandarte y su arco, y una le atraviesa la cabeza. Cuántas flechas tenía Arjuna, el hijo de Pritha?"

CONTENIDO DE LA UNIDAD

2



OBSERVACION GENERAL

Todas las letras que usemos en el texto hasta el capítulo 10 representarán números reales cualesquiera, y serán tratadas de acuerdo con las *leyes formales* de las operaciones que rigen para estos números. Como ya sabemos, las únicas operaciones que no tienen solución en este campo son: La división por cero, (que es imposible en cualquier campo) y la radicación cuando el radicando tome valor numérico negativo y el índice sea par; en el capítulo 10, donde serán estudiados los números complejos, se encuentran soluciones para estas raíces, y a partir de dicho capítulo las letras significarán números *reales* o *complejos cualesquiera.*

2.1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS. NOMENCLATURA Y CLASIFICACION

I) CONCEPTO DE EXPRESION ALGEBRAICA

Llamaremos **expresión algebraica** *a un conjunto de números y letras* (que representan números cualesquiera (*)) *separados por los signos de las operaciones fundamentales* (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación).

Indicaremos el producto de dos letras simplemente escribiéndolas una a continuación de la otra, o separándolas por un punto.

(*) Se excluyen aquellos valores de las letras que anulen a algún denominador o que den valor negativo al radicando de alguna raíz de índice par.

Ejemplos

1. $\dfrac{-3abx^3}{\sqrt{cz^5}}$ es una *expresión algebraica* compuesta por el número -3 y las letras *a, b, c, x, z,* sometidas a operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación.

2. $\dfrac{5x^2y^3}{2} + \left(-7\sqrt[3]{x^2}\right) + 3xy$, es otra *expresión algebraica.*

   En este ejemplo, se ve que la expresión algebraica es una suma de tres sumandos; cada sumando se llama **un término** de la expresión algebraica. Por tanto, la expresión algebraica de este ejemplo se compone de tres términos, que son: $\dfrac{5x^2\,y^3}{2}$, $-7\sqrt[3]{x^2}$, $3xy$.

Ejercicios

1. Formar 3 expresiones algebraicas de un solo término con los números $-2, \frac{3}{5}, -\frac{5}{4}$, y las letras *p, q, r.*

   (Puedes combinar en cada expresión los números y las letras con las operaciones que se te ocurran; también puedes colocar exponentes enteros, positivos o negativos, a las letras).

2. Formar 3 expresiones algebraicas, la primera de dos términos, la segunda de tres términos y la tercera de cuatro términos, con los números $-2, 5, +\frac{3}{4}, -\frac{5}{3}$, y las letras *x, y, z.*

II) VALOR NUMERICO DE UNA EXPRESION ALGEBRAICA. FORMULAS

Se llama valor numérico de una expresión algebraica al número que resulta cuando en vez de sus letras se sustituyen números dados, y se realizan con estos números las operaciones indicadas en la expresión. Cuando un valor dado a una letra anule a un denominador la expresión algebraica carece de valor numérico para aquel valor de la letra, y cuando aparezcan raíces de índice par y radicando negativo la expresión carece de valor en el campo de los números reales.

Para hallar el valor numérico de una expresión algebraica, para ciertos valores dados de sus letras, basta sustituir cada letra por su valor correspondiente y efectuar las operaciones indicadas en la expresión algebraica, que se convierte en una expresión aritmética.

Jina Sª Costa

Ejemplos

1. Hallar el valor de la expresión algebraica $\dfrac{-5x^2y}{\sqrt[3]{z^2}}$ para $x=2$, $y=3$ y $z=8$.

   Sustituyendo las letras por estos valores, y efectuando las operaciones indicadas, se tiene: $\dfrac{-5\,.\,2^2\,.\,3}{\sqrt[3]{8^2}} = \dfrac{-5\,.\,4\,.\,3}{\sqrt[3]{64}} = \dfrac{-5\,.\,4\,.\,3}{4} = -15.$

2. *Valor numérico de* $7x^2y^3 - 5xy^2 + \dfrac{\sqrt[3]{x}}{2} + \dfrac{\sqrt[3]{y}}{2}$, *para* $x=-8$, $y=+4$.

   Sustituyendo los valores numéricos en la expresión queda:

   $7\,.\,(-8)^2\,.\,(+4)^3 - 5\,.\,(-8)\,.\,(+4)^2 + \dfrac{\sqrt[3]{-8}}{2} + \dfrac{\sqrt{4}}{2} = 7\,.\,64\,.\,64 + 40\,.\,16 - $
   $-1 \pm 1 = (*)$.

   $$=28{,}672 + 640 - 1 \pm 1 = 29{,}311 \pm 1 = \begin{cases} \nearrow \ \mathbf{29{,}312} \\ \searrow \ \mathbf{29{,}310} \end{cases}$$

   La expresión tiene dos valores numéricos para $x=-8$, $y=+4$.

3. *Valor numérico de* $\dfrac{x^2+y}{x-y} + \dfrac{x\sqrt[3]{y}}{4x^2} - \dfrac{2x^2}{3y^3}$ *para* $x=y=4$.

   Como al dar a las letras x, y valores iguales se anula el denominador de la primera fracción, la expresión algebraica carece de valor numérico para $x=y$, y en particular carece de valor para $x=y=4$.

4. *Valor numérico de* $\dfrac{6x^3}{y^2} - 3\sqrt{x} + 2x\,.\,y$, *para* $x=-4$, $y=2$.

   Sustituyendo se tiene: $\dfrac{6\,.\,(-4)^3}{2^2} - 3\sqrt{-4} + 2\,.\,(-4)\,.\,2$; como aparece la $\sqrt{-4}$, que carece de solución en el campo numérico real, diremos que la expresión algebraica *carece* de valor numérico real para $x=-4$, $y=2$. Más adelante (en el capítulo 10), cuando estudiemos los números complejos, veremos que la $\sqrt{-4}$ tiene dos soluciones que son números imaginarios.

(*) El doble signo $\pm$ se debe a que $\sqrt{4}=\pm 2$, pues $(+2)^2 = 4$ y $(-2)^2=4$, o sea que hay dos soluciones para la $\sqrt{4}$.

Ejercicios

1. Hallar los valores numéricos de las expresiones algebraicas de los ejemplos 1, 2, 3 y 4 para $x=8$, $y=4$, $z=-8$.

2. Hallar el valor numérico de $\dfrac{a-\dfrac{b^2}{a}}{a-2b-\dfrac{b^2}{a}}$ para $a=2$, $b=\frac{1}{5}$ (Sol: $\frac{99}{79}$)

3. Calcular el valor numérico de $\frac{3}{4}x^4y - 7x^3y^3z + x^2z^2$ para $x = 2$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = -3$ (Solución: 9)

4. Hallar el valor numérico de $x^2y - \frac{2}{3}xy^2 + 0.5\,y^2$, para $x = 0.5$, $y = \frac{1}{4}$ (Solución: $\frac{7}{96}$)

* * *

FORMULAS: En la solución de ciertos problemas los datos tienen que someterse siempre a las mismas operaciones para obtener el resultado; por ejemplo, cada vez que tenemos que calcular el interés producido por un capital colocado durante un cierto número de años a un tanto por ciento de interés convenido, sabemos por aritmética que hay que multiplicar el capital por el tiempo (en años) y por el tanto por ciento y dividir este producto por 100; y estas mismas operaciones hay que realizarlas cada vez que tengamos que calcular un interés simple (esto es, sin acumulación de intereses al capital).

Siempre que ocurre esto con cierto tipo de problemas importantes, se conviene en *representar por letras* las cantidades que intervienen en el problema, y construir una *expresión algebraica* en la que se indiquen las operaciones que hay que efectuar con las cantidades dadas (con los datos) para obtener el resultado.

Estas *expresiones algebraicas* que se usan con frecuencia para resolver ciertos tipos de problemas, se llaman **fórmulas.**

En el ejemplo anterior, si convenimos en representar el *capital* por **c** el *tiempo* por **t,** el *tanto por ciento* por **r,** y el interés por **i, la fórmula**

que se emplea para calcular el interés es la siguiente:

$$\boxed{\mathbf{i=\frac{c\,.\,r\,.\,t}{100}}} \quad (1).$$

Para calcular el interés producido por un capital dado, conocido también el tiempo y el tanto por ciento, basta con hallar el *valor numérico* de la expresión algebraica (1) para los valores dados, es decir, sustituir en la fórmula los datos del problema. Por ejemplo, para hallar el interés de un capital de \$ 3,000 al 6% durante 5 años, sustituyendo estos datos en la fórmula general (1) se tiene:

$$i=\frac{3{,}000\times6\times5}{100} = 30\times6\times5 = 30\times30 = 900 \text{ pesos.}$$

Otro ejemplo: Para calcular el volumen de un cono *siempre* hay que realizar las siguientes operaciones: Multiplicar el número π (aproximadamente 3.14) por el cuadrado del radio de la base del cono y por la altura del cono y dividir el producto por 3. Si representamos el radio de la base por **r** y la altura por **h, la fórmula** que se emplea para hallar el volumen *de cualquier cono* es la siguiente:

$$\mathbf{V=\frac{1}{3}\,.\,\pi\,.\,r^2\,.\,h}$$

Ejemplo: El cono cuyo radio de la base mide 2 m. y cuya altura mide 3 m., tiene el siguiente volumen:

$$V=\frac{1}{3}\times3.14\times2^2\,.\,3=3.14\times4=12.56 \text{ m}^3.$$

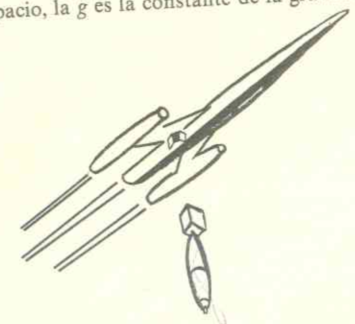
Ejercicios

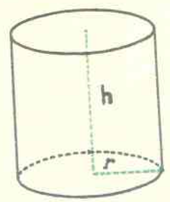
A continuación se dan las fórmulas que se emplean para resolver ciertos problemas importantes. Encuentra en cada caso el valor numérico de la fórmula para los valores que se indican de sus letras:

1. La fórmula $e=\frac{1}{2}g\,.\,t^2$ se emplea para calcular el espacio recorrido por un

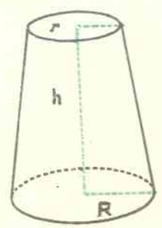
cuerpo en caída libre, eliminando la resistencia del aire. La letra e significa espacio, la g es la constante de la gravedad, igual a 9.81 m/seg², y la t representa el tiempo en segundos. Hallar el espacio recorrido por una bomba lanzada desde un avión, a los 10 segundos de su lanzamiento.

Ejercicios





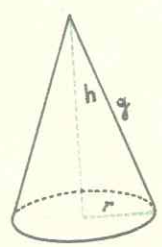
2. El volumen de un cilindro de radio r y altura h se calcula usando la siguiente fórmula: $V=\pi \cdot r^2 \cdot h$.
Hallar el volumen de un cilindro cuyo radio mide 3 m. y cuya altura mide 4 m.



3. El volumen de un tronco de cono cuyos radios se representan por R, r, y cuya altura se designa por h, se calcula con la fórmula:

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3}\ (R^2+r^2+Rr).$$

Hallar el volumen de un tronco de cono cuyos radios miden $R = 5$ m, $r=2$ m, y cuya altura mide $h = 4$ m.



4. El área total de un cono se calcula con la fórmula: $s=\pi \cdot r \cdot (r+g)$, donde s representa a la superficie, r al radio y g a la generatriz del cono. Hallar la superficie total de un cono cuyo radio mide 3 m., y cuya altura $h = 5$ m., (Aplicar el Teorema de Pitágoras para hallar g).

EXPRESION DE REGLAS MEDIANTE FORMULAS:

En muchas ocasiones se conoce una regla que relaciona *con palabras* a varias cantidades, explicándonos la manera de calcular otra cantidad, conocidas las primeras. En estos casos es importantísimo que adquieras mucha habilidad en expresar la regla mediante una fórmula, es decir, mediante una expresión algebraica; para lograrlo lo único que tienes que hacer es *representar cada cantidad que interviene en la regla mediante una letra y escribir* **fielmente** *las operaciones que indica la regla con las cantidades usando los signos correspondientes a dichas operaciones.*

Veamos algunos ejemplos, y después te proponemos ejercicios para que adquieras gran habilidad en traducir las reglas con palabras en expresiones algebraicas, o sea, en fórmulas.

Ejemplos

1. El área de un círculo se obtiene multiplicando el número π por el cuadrado del radio. Si representamos el área por s, y el radio por r, la regla anterior se traduce en la siguiente fórmula: $s=\pi \cdot r^2$.

2. El volumen de una esfera se obtiene multiplicando cuatro tercios por el número π y por el cubo del radio.
Si representamos el volumen por v, y el radio por r, la regla se traduce en la siguiente fórmula: $v=\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$.

3. El área de un trapecio se obtiene multiplicando la semisuma de las bases por la altura. Si representamos las bases por B y por b, y la altura por h, la regla anterior se traduce en la siguiente expresión algebraica:

$$s = \frac{B+b}{2} \cdot h \text{ (donde } s \text{ representa el área).}$$

4. El precio medio de la mezcla de tres sustancias se obtiene dividiendo la suma de productos de cada cantidad por su precio por la suma de las cantidades.
Si representamos las cantidades por c_1, c_2, c_3, y sus precios respectivos por p_1, p_2, p_3, y el precio medio por p_m, la regla anterior, un poco complicada con palabras, se expresa por la siguiente fórmula:

$$p_m=\frac{c_1 \cdot p_1 + c_2 \cdot p_2 + c_3 \cdot p_3}{c_1 + c_2 + c_3}$$

Ejercicios

Traducir las siguientes reglas en fórmulas:

1. El área de una esfera se obtiene multiplicando 4 por π y por el cuadrado del radio.
2. El área de un rombo se obtiene hallando el semiproducto de sus diagonales.
3. El volumen de una pirámide es igual al producto de un tercio por el área de la base y por la altura.
4. El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la base por la altura.
5. El área de un paralelogramo es igual al producto de la base por la altura.
6. El área de un triángulo equilátero se obtiene multiplicando $\sqrt{3}$ por el cuadrado del lado y dividiendo este producto por 4.
7. El área total de una pirámide recta se obtiene multiplicando el semiperímetro de la base por la suma de las apotemas de la base y lateral de la pirámide.

Ap. Sn. A.a

8. El área de un sector circular se obtiene multiplicando el número π por el cuadrado del radio y por el número de grados del ángulo central correspondiente, y dividiendo este producto por 360°.

A. π.x² a / 360

9. El área de un polígono regular se obtiene multiplicando el semiperímetro por la apotema.
10. El descuento de una letra de cambio en un cierto número de días se obtiene multiplicando el valor nominal de la letra por el tanto por ciento y por el número de días y dividiendo este producto por 36,000.

* * *

III) CLASIFICACION DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS:

Las expresiones algebraicas se clasifican atendiendo a los signos de las operaciones que figuran en ellas.

a) *MONOMIOS ENTEROS:*

Un **monomio entero** *es un conjunto de números y de letras separadas únicamente por el signo de la multiplicación; en la práctica, para simplificar la escritura, suele omitirse el signo de multiplicar.*

Son ejemplos de monomios enteros las siguientes expresiones algebraicas: $3a^2 b^3 c$, $-5xyz^3$, $-\frac{3}{4} p^2 q^5 r^6$, $\sqrt{2}\, m^3 ns$. (En este último ejemplo la $\sqrt{2}$ se considera como *un número irracional* de manera que la operación de radicación no actúa sobre ninguna letra y por tanto la expresión es un monomio entero). En cuanto a las potencias que figuran son *productos de factores iguales;* por ejemplo: $b^3 = bbb$.

Forma reducida de un monomio:

La expresión $-3aabbbc.(-2)ab$ es un *monomio entero,* pues cumple la definición, pero en la práctica se efectúa el producto de los factores numéricos y se coloca al principio (leyes conmutativa y asociativa de la multiplicación), y el producto de todas las letras iguales se pone en forma de potencia; con estas normas, el monomio anterior se escribe así: $+6a^3b^4c$.

Esta última se llama la **forma reducida** del monomio.

Coeficiente de un monomio y parte literal:

Cuando un monomio está expresado en su *forma reducida* solo tiene un factor numérico, colocado al principio, que se llama **el coeficiente** (*) del monomio; los otros factores son letras elevadas a ciertos exponentes (el exponente 1 no se escribe, pues por ejemplo $a^1 = a$), y forman lo que se llama *la parte literal* del monomio.

(*) De una forma más general, se llama coeficiente de un conjunto de factores del monomio al conjunto formado por los otros factores; por ejemplo, el coeficiente de x^3y en el monomio $-3abx^3y$ es $-3ab$.

En los monomios $-5x^2yz$, $\frac{1}{2}ab^2c^3$, $\sqrt{3}m^2n^3p$, los coeficientes numéricos, o sea, los coeficientes de la parte literal, son: -5, $\frac{1}{2}$ y $\sqrt{3}$ respectivamente, y las *partes literales* x^2yz, ab^2c^3 y m^2n^3p, respectivamente.

Grado total *(o simplemente grado)* **de un monomio:**

El grado total, *o simplemente* **grado,** *de un monomio es la suma de los exponentes de todas sus letras.* (Repetimos que las letras sin exponente se consideran con exponente igual a 1). Por ejemplo, los monomios $-\sqrt{5}x^2yz^3$, $\frac{3}{2}abx^3y^2$, $-\frac{1}{5}mn^2p$, son de grados $2+1+3=6$, $1+1+3+2=7$, y $1+2+1=4$, respectivamente.

Grado de un monomio respecto de una letra: *Es el exponente con que figura dicha letra en el monomio.*

Por ejemplo, los monomios $2x^2yz$, $-5x^3u^2v^2$, $\sqrt{3}y^2xz^3$, son de grados 2, 3 y 1, respectivamente, respecto de la letra x.

Monomios semejantes: *Dos monomios se llaman semejantes cuando tienen la misma parte literal.*

Por ejemplo, son semejantes los siguientes monomios:

$$-7a^2bx^3yz, \quad \sqrt{6}a^2bx^3yz, \quad -\tfrac{4}{5}a^2bx^3yz, \quad \tfrac{1}{2}a^2bx^3yz.$$

Como caso particular, dos números se consideran siempre como términos semejantes.

En la definición anterior se suponen los coeficientes y los exponentes distintos de cero.

Monomios opuestos: *Dos monomios se llaman opuestos cuando son semejantes y sus coeficientes son números opuestos.*

Son opuestos los siguientes monomios:

$$-3a^2bx \text{ y } +3a^2bx, \quad -\sqrt{2}xyz^3 \text{ y } +\sqrt{2}xyz^3,$$
$$+9m^2np^3 \text{ y } -9m^2np^3.$$

b) *POLINOMIOS ENTEROS:*

Un polinomio entero es la expresión formada por varios monomios separados unos de otros por los signos + ó −.

Son ejemplos de polinomios los siguientes:

$$3x^2yz - \sqrt{5}xy^2z^3 - \tfrac{2}{5}p^2q + \tfrac{1}{3}xt, \quad 2x^2y - 3xv^2 + 5m^2n^3p.$$

Polinomio reducido:

Fíjate en el siguiente polinomio: $-3x^2y + 2x^2y + 5xy^2 - 3xy^2 + 2xyz$; advertirás que los términos $-3x^2y$ y $+2x^2y$ *son semejantes* así como los términos $+5xy^2$ y $-3xy^2$; si sacamos factor común a la parte literal de los términos que son semejantes se tiene: $x^2y \cdot (-3+2) + xy^2 \cdot (5-3) + 2xyz = -x^2y + 2xy^2 + 2xyz$; la operación que acabamos de efectuar se llama **reducción de términos semejantes** y el polinomio obtenido como resultado se llama **polinomio reducido;** naturalmente, en un polinomio reducido ya no hay términos semejantes. Cuando un polinomio reducido tiene 2 términos se llama **binomio** y cuando tiene tres **trinomio.**

Las definiciones que siguen, sobre el *grado* de los polinomios, se refieren a *polinomios reducidos.*

Grado de un polinomio reducido: *Se llama grado de un polinomio reducido al mayor de los grados de sus monomios.*

Los polinomios $5x^2y - 3x^3y^2 + 2xy - \sqrt{2}xy^3$, $3m^2pq - 2x^5yz + \sqrt{3}a^3b^2c^4 - np$, son de grados *5* y *9* respectivamente.

Puede que haya más de un monomio con el grado máximo correspondiente al polinomio; por ejemplo, en el polinomio $-2x^3y^2 + 5x^2y^3 - 3xy + y^2$, los dos primeros términos son de grado *5*, y este es el grado del polinomio, por ser el mayor grado que tienen sus monomios.

Grado de un polinomio reducido respecto de una letra: *Es el mayor grado con que figura la letra en el polinomio.*

Por ejemplo, respecto de la letra x, los polinomios $5x^2yz - \frac{2}{3}xy^2z^3 + \frac{1}{3}x^3y$, $-\frac{3}{2}x^2y + \frac{1}{3}xy^2 - \sqrt{5}xz$, son de grados *3* y *2* respectivamente.

A veces nos pueden pedir el grado respecto de dos o de tres letras, en general respecto de varias letras, en cuyo caso se suman los exponentes de dichas letras en cada monomio y el grado es la mayor de las sumas obtenidas.

Ejemplo, respecto de las letras x, y, los grados de los polinomios $-\frac{1}{8}x^2y + \frac{2}{3}abxy^2 - \frac{1}{5}x^2y^3 + pq$, $\sqrt{5}xy^3 - 3x^2y^2 + 2abxy + mn$, son *5* y *4* respectivamente.

Polinomios homogéneos: *Un polinomio se llama homogéneo respecto de varias letras* (en particular respecto de todas sus letras) *si todos sus monomios son de igual grado respecto de dichas letras.*

Ejemplos

1. El polinomio $3x^2y - 2abxy^2 + 5pqx^3$ es homogéneo de 3er. grado respecto de las letras x, y.
2. El polinomio $-2xym^2n^2 + 6mn^3 - 3m^3n + 2yzn^4$ es homogéneo de cuarto grado respecto de las letras m y n.
3. El polinomio $\sqrt{2}xyz^3 - \sqrt{5}x^2y^2z + 3x^3z^2 - 2y^2z^3 + 5z^5$, es homogéneo de quinto grado respecto de todas sus letras.

Polinomios ordenados: *Un polinomio se dice que está ordenado según las potencias crecientes o decrecientes de una letra, cuando los exponentes de dicha letra se suceden en el polinomio creciendo o decreciendo.*

Ejemplos

1. El polinomio $6 - 3abx + 2bcx^2 - \frac{1}{5}x^3 + 12acx^4$ está ordenado según las potencias crecientes de la x; el primer término es de grado cero.
2. El polinomio $5ax^4 - 3a^2x^3 + bx^2 - \frac{2}{5}x + 3abc$ está ordenado según las potencias decrecientes de la letra x.

Polinomio completo: *Un polinomio ordenado se llama completo cuando tiene términos* **de todos** *los grados intermedios entre su grado y el grado cero, con coeficientes distintos de cero; en caso contrario, es decir, cuando falta algún término de grado intermedio, el polinomio se llama* **incompleto.**

Ejemplos

1. El polinomio $4x^3 - 3ax^2 + 2x - 5abc$ es *completo* respecto de la letra x.
2. El polinomio $-\frac{5}{2}x^5 + 3a^2x^3 - \frac{2}{3}bcx^2 + 5abc$ *es incompleto* respecto de la letra x; faltan los términos de los grados intermedios **4** y **1**.

En algunas operaciones con polinomios que estudiaremos después, cuando el polinomio es incompleto es conveniente dejar unos espacios en blanco en los lugares que ocuparían los términos de los grados que faltan; de esta forma el polinomio del ejemplo 2 se escribiría así: $-\frac{5}{2}x^5 \ldots + 3a^2x^3 - \frac{2}{3}bcx^2 \ldots + 5abc$.

Los monomios enteros y los polinomios enteros que acabamos de estudiar se llaman **expresiones enteras** y son de una gran importancia en Algebra.

Se destacan por su importancia los polinomios en los que se considera una sola letra *como variable*, es decir, que los otros símbolos (cifras o letras) representan a números fijos, mientras que la letra considerada como variable representa *a cualquier número real.*

Ejemplo de estos polinomios, con una sola variable, es: $5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1$.

¿Es completo el polinomio?

c) FRACCIONES ALGEBRAICAS:

Una fracción algebraica es el cociente de dos expresiones enteras. Como caso particular el numerador puede reducirse a un número, pero el denominador tiene que tener parte literal.

Ejemplos: Son fracciones algebraicas las siguientes:

$$\frac{3x^2y-2ab^2z+6uv}{5a^2bc}, \quad \frac{7xy}{2xz-abc}, \quad \frac{5}{4a^2+b}, \quad \frac{7x+y}{ax^2+bx+c}.$$

Cuando una fracción algebraica es el cociente de dos monomios se llama un monomio fraccionario o un término fraccionario.

Son monomios fraccionarios por ejemplo los siguientes:

$$\frac{2xy^2}{3a^2bc^3}, \quad \frac{5a^3z^2}{-3b^2x}, \quad \frac{7bx^2y^3}{5c^2z^3}.$$

Los monomios fraccionarios se pueden escribir de forma más simple por medio de los exponentes negativos; todas las potencias de denominador se transforman en potencias de exponente negativo y desaparece el denominador; los tres ejemplos anteriores se escriben así:

$$\tfrac{2}{3}xy^2a^{-2}b^{-1}c^{-3}, \qquad -\tfrac{5}{3}a^3z^2b^{-2}x^{-1}, \qquad \tfrac{7}{5}bx^2y^3c^{-2}z^{-3}.$$

Varios monomios fraccionarios separados por los signos + ó − forman un polimonio fraccionario; por ejemplo, con los tres monomios fraccionarios anteriores podemos formar el siguiente polimonio fraccionario:

$$\tfrac{2}{3}xy^2a^{-2}b^{-1}c^{-3} - \tfrac{5}{3}a^3z^2b^{-2}x^{-1} + \tfrac{7}{5}bx^2y^3c^{-2}z^{-3}.$$

Este polimonio se compone de tres monomios o términos.

Comúnmente, cuando se habla de monomios y polinomios, sin más especificación, se sobrentiende que se trata de monomios y polinomios **enteros.** Las expresiones enteras y las fraccionarias forman las **expresiones racionales.**

d) *EXPRESIONES IRRACIONALES:*

Una expresión irracional es la que contiene letras bajo algún radical, con la condición de que si las letras bajo radical forman un monomio sus exponentes no sean todos múltiplos del índice de la raíz.

Ejemplos: Son irracionales las siguientes expresiones:

$$\frac{\sqrt{3x^2yz}-\sqrt[3]{2xy}}{5xyz}, \quad 3\sqrt{2u^2vz}, \quad \frac{5x^2y+2\sqrt{xyz^3}}{3x}.$$

En cambio, no es irracional la expresión $\sqrt{4x^2y^4z^8}$, pues ella equivale a $2xy^2z^4$, que es un monomio entero.

* * *

RESUMEN DE LA CLASIFICACION DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Todas las clases de expresiones algebraicas, que han sido definidas en a), b), c) y d), quedan clasificadas en el siguiente cuadro sinóptico:

EXPRESIONES ALGEBRAICAS:
- I) *Enteras*
  - a) *Monomios*
  - b) *Polinomios*
- II) *Fraccionarias*
- III) *Irracionales*

(I y II: *Expresiones Racionales*)

Ejercicios

EJERCICIOS 2.1

1. Formar expresiones algebraicas a capricho con los números $-2, \tfrac{3}{5}, \sqrt{2}$, y las letras p, q, r, x, y, z, y clasificarlas.

2. Construír monomios con los siguientes números y letras: $-5, 4, \tfrac{3}{5}, -\tfrac{2}{3}, \sqrt{5}$, a, b, c, x, y, z. (Se sobrentiende monomios fraccionarios).

3. Hallar los grados de los siguientes monomios:
$-2x^3y^2z, \quad \tfrac{5}{4}a^3bc^2d^4, \quad -\sqrt{2}m^3np^2q^5, \quad \sqrt{5}p^3q^2r^2s.$

4. Agrupar entre los monomios siguientes los que sean semejantes, e indicar además los que sean opuestos:

a) $2x^2yz$,	d) $-3x^2yz$,	g) $-\sqrt{2}xy^2uz$,
b) $-5xyu^2v^3$,	e) $5xyu^2v^3$,	h) $-3x^2yz$,
c) $\sqrt{2}xy^2uz$,	f) $\sqrt{5}xyu^2v^3$,	i) $-5xyu^2v^3$.

5. Obtener la forma reducida de los siguientes monomios:
   a) $-3a^2bc \cdot (-4)aabbc^2 \cdot (+5) \cdot abxy$,
   b) $+4xyz \cdot (-2) \cdot xyyyz^2$,
   c) $-6m^2nnpp \cdot (-2)mpq \cdot (-5)mnpq$,
   d) $4abcd\,(-2)a^2b^2c^2d^2 \cdot (-5)a^3b^3c^3d^3$.

6. Construír a capricho algunos polinomios enteros con los números:

$-2, \frac{2}{5}, -\frac{3}{4}, \frac{7}{6}$, y las letras m, n, p.

7. Construír 4 polinomios de 5º grado con los siguientes números y letras:

$2, -6, \sqrt{7}, -\frac{3}{4}, \frac{2}{5}, x, y, z$. (Respecto de todas las letras).

8. Escribir un polinomio completo de sexto grado respecto de la letra x, ordenado según sus potencias decrecientes.

9. Escribir un polinomio incompleto, de grado 5º, respecto de la letra x, en el que falten los términos de grado par. (El término que no contiene a x se llama *término independiente*, y es de grado cero respecto de x; como el cero se considera par, debe faltar el término independiente).

10. Escribir 3 polinomios homogéneos de 5º grado respecto de las letras x, y.

11. Escribir 3 polinomios homogéneos de cuarto grado respecto de las letras x, y, z, tales que todos contengan los términos correspondientes a las cuartas potencias de x, y, y z.

12. Escribir un polinomio homogéneo de 2º grado en las letras x, y, z, *que contenga todos los términos* posibles de segundo grado con dichas variables.

13. Ordenar los siguientes polinomios según las potencias decrecientes de la x:

a) $3abx^2 - 5acx^3 + 2ax + 3bx^4$,

b) $-2ax^5 - 3\sqrt{2b}x^3 + 4bcx^2 - 5c + x$.

14. Poner los siguientes polinomios en su forma reducida, es decir, reducir sus términos semejantes:

a) $-2bx^2y + 3cxy^2 - cxy^2 + 6bx^2y$,

b) $-2xyz + 3x^2y - 5xyz + 8x^2y - 9xz^2$,

c) $+3abx^2z - 5bcxy^2 + 8bcxy^2 - 6abx^2z + 8xyz$.

15. Ordenar los siguientes polinomios según las potencias decrecientes de la x y si son incompletos dejar en blanco los espacios correspondientes a las potencias que falten:

a) $-5ax^3 + 4abx^5 - 3acx^2 - 9ax + 2x^4$,

b) $3ax^6 - 4bx^4 + 2x - 3x^3 + 7$,

c) $-6abx + 3a^3x^5 - \frac{2}{5}ab^3x^2 + 5x^4$,

d) $-3bx^3 + 6cx^5 - 2bcx^2 - x^3 + x - 1$.

Ejercicios

16. Escribir los siguientes monomios fraccionarios con la notación de los exponentes negativos:

a) $-\dfrac{2a^{-1}bz}{3c^{-2}x^{-1}y}$,

b) $\dfrac{\sqrt{2}ab^{-1}x^{-2}}{5c^{-2}y^{-3}}$,

c) $\dfrac{-2abc}{5x^{-2}y^{-2}z^{-2}}$

17. Construír un polinomio fraccionario con los tres monomios del ejercicio anterior, escritos con la notación de los exponentes negativos.

18. Clasificar las siguientes expresiones algebraicas:

a) $3x^2y - 2uvz$.

b) $5x^2yz^2$.

c) $\dfrac{3x^2 - 5x + 2xy}{4}$

d) $\dfrac{3abx^2 - 2bc^2}{3abc}$

e) $\sqrt{2abc}$ (esta expresión es *irracional monomia;* más adelante aprenderás a escribirla con exponentes fraccionarios).

f) $\sqrt{3a^2b} - \sqrt{2xy}$

g) $\dfrac{5}{2x^2y + 3xy^2}$

19. Escribir un polinomio homogéneo *completo* de 2º grado en las variables x, y, z, t. (Debe contener todos los términos posibles de 2º grado con estas variables; si lo haces bien te resultarán 10 términos).

20. Expresar los siguientes monomios fraccionarios en forma de fracciones (eliminando los exponentes negativos):

a) $5a^{-2}xy^{-1}z^{-2}$,

b) $3x^{-2}y^{3}z^{-3}$,

c) $-\frac{2}{3}ab^{-1}x^{-2}z^{-3}$.

Ejercicios

2.2 SUMA Y RESTA DE EXPRESIONES ENTERAS

I) *SUMA DE MONOMIOS:*

Para sumar varios monomios se forma un polinomio con todos ellos, precedidos de sus signos correspondientes.

Si hubiera monomios semejantes se reducen para obtener el polinomio suma reducido.

Ejemplos

1. Sumar los siguientes monomios: $-2x^2y$, $-5xy^2$, $+3x^2y$, $-6y^2$, $+4xy^2$.

   La suma es el polinomio $-2x^2y-5xy^2+3x^2y-6y^2+4xy^2$.

   Los términos primero y tercero, así como los segundo y quinto, son semejantes; reduciéndolos obtenemos: $-2x^2y+3x^2y=x^2y(-2+3)=x^2y$,
   $-5xy^2+4xy^2=xy^2(-5+4)=-xy^2$.

   El polinomio suma reducido es: $\mathbf{x^2y-xy^2-6y^2}$.

2. En la práctica se suelen escribir los monomios semejantes en columna, de forma que su reducción se efectúa mentalmente.

   Sumar los monomios: $5a^2b$, $-3ab^2$, $+2a^2b$, $-8a^2bc$, $+6ab^2$, $-9a^2b$, abc.

   Se van escribiendo los monomios en fila, con sus signos, y cuando llegamos a un monomio semejante a uno de los que ya se han escrito, se coloca debajo de él para efectuar cómodamente la reducción, así:

$$\begin{array}{l} 5a^2b-3ab^2-8a^2bc+abc \\ +2a^2b+6ab^2 \\ \underline{-9a^2b} \\ \mathbf{-2a^2b+3ab^2-8a^2bc+abc} \end{array}$$ (Polinomio suma reducido)

* * *

Ejercicios

Obtener el polinomio suma reducido de los siguientes monomios:

1. $-2m^2np$, $+5mn^2$, $-6m^2np$, $+4mn^2$, $-5mn^2$, $+2m^2np$, $-8m^2n$, $+2m^2$.
2. $-3x^2y$, $+2xy^2$, $-5x^2y$, $+8xy^2$, $-3x^2$, $+2y^2$, $+6x^2$, $-4y^2$, $+9xy$.
3. $+5abc$, $-3a^3b^2$, $+9ab^3$, $-4abc$, $+6a^3b^2$, $-8ab^3$, $+2abc$, $-6a^3b^2$.
4. $-\frac{1}{2}x^2yz$, $+\frac{3}{2}xy^2$, $-\frac{5}{2}x^2yz$, $+\frac{1}{3}x^2y$, $-\frac{5}{2}xy^2$, $+$ $+\frac{5}{3}x^2y$, $+3x^2yz$, $-xyz$.

II) *SUMA DE POLINOMIOS:*

La suma de varios polinomios es el polinomio formado por todos los términos de los sumandos con sus signos correspondientes.

En la práctica, igual que al sumar monomios, los términos semejantes se colocan en columna para facilitar su reducción.

Ejemplos

1. Sumar los siguientes polinomios:

   $-3x+2y-5z$, $+6x-4y+9z$, $6x+8y-4z$

   La operación se dispone así:

$$\begin{array}{l} -3x+2y-5z \\ +6x-4y+9z \\ \underline{+6x+8y-4z} \\ \mathbf{9x+6y} \end{array}$$ (Polinomio suma reducido)

2. Obtener el polinomio suma reducido de los siguientes polinomios:

   $-\frac{a^3}{2}+\frac{a^2x}{3}-\frac{ax^2}{2}+\frac{x^3}{3}$, $\frac{3}{2}a^3-\frac{4}{3}a^2x+\frac{3}{2}ax^2-\frac{x^3}{3}$, $a^3-2a^2x+ax^2-x^3$.

Ejemplos

La operación se dispone así:

$$\begin{array}{rrrr}
-\frac{a^3}{2} & +\frac{a^2x}{3} & -\frac{ax^2}{2} & +\frac{x^3}{3} \\
+\frac{3}{2}a^3 & -\frac{4}{3}a^2x & +\frac{3}{2}ax^2 & -\frac{x^3}{3} \\
a^3 & -2a^2x & +ax^2 & -x^3 \\
\hline
\mathbf{2a^3} & \mathbf{-3a^2x} & \mathbf{+2ax^2} & \mathbf{-x^3}
\end{array}$$

(Polinomio suma reducido)

Obtener el polinomio suma de los polinomios que se indican a continuación:

Ejercicios

1. $0.5x^2y-0.3xy^2+x^3$, $\quad -1.5xy^2-2.5x^2y+y^3$, $\quad 2xy^2-3x^2y+0.5x^3+0.5y^3$.
2. $a^3-\frac{ax}{2}+\frac{x^3}{3}$, $\quad -\frac{a^3}{3}+\frac{ax}{4}+\frac{3x^3}{10}$, $\quad -\frac{2}{3}a^3+\frac{ax}{2}-\frac{3}{10}x^3$.
3. $2a^2-0.5b^2$, $\quad 6a^2+4b^2-c^2$, $\quad 0.2a^2+0.5b^2-3c^2$.
4. $-\frac{3}{4}ab^2-\frac{5}{6}a^3-\frac{1}{9}ab^3c$, $\quad ab^2-\frac{3}{8}ab^3c+2a$, $\quad -\frac{1}{2}ab^2+2a^3+ab^3c$.

III) *RESTA DE MONOMIOS*

La diferencia de dos monomios (como la de dos números reales cualesquiera) se obtiene sumando al minuendo el opuesto del sustraendo, es decir, el sustraendo cambiado de signo.

Si los dos monomios son semejantes, el resultado (después de reducido) es otro monomio, y si no son semejantes el resultado es *un binomio.*

Ejemplos

1. $-5a^2bx-(-2a^2bx)=-5a^2bx+2a^2bx=-3a^2bx.$
2. $3x^2yz-(+2xyz^2)=3x^2yz-2xyz^2.$

Ejercicios

Restar los monomios que se indican a continuación:

1. $\frac{2}{3}m^2nz-(-\frac{1}{4}x^2y)$;
2. $\frac{5}{4}a^2bc-(+\frac{1}{2}a^2bc)$;
3. $-\frac{3}{5}x^2yzt-(-\frac{1}{2}xy^2z)$;
4. $\frac{4}{5}ax^2y-(-\frac{2}{3}ax^2y)$.

IV) *RESTA DE POLINOMIOS:*

La diferencia de dos polinomios se obtiene también sumando el minuendo con el opuesto del sustraendo. Recordamos que **el opuesto de un polinomio se obtiene cambiando de signo a todos sus términos.**

También insistimos en que si hubiere términos semejantes se reducen.

En la práctica se procede igual que al sumar dos polinomios, *pero cambiando de signo los términos del sustraendo,* y los que tienen semejante en el minuendo se colocan debajo de ellos para realizar la reducción más cómodamente.

Ejemplos

1. Restar los siguientes polinomios:
$5ab^2x-3a^2bx^2+6xy-7abc \;-\; (4a^2bx^2-5ab^2x+2xy-7abc)$

Disponiendo la operación como hemos indicado se obtiene:

$$\begin{array}{l} 5ab^2x-3a^2bx^2+6xy-7abc \\ \underline{+5ab^2x-4a^2bx^2-2xy+7abc} \\ \mathbf{10ab^2x-7a^2bx^2+4xy} \end{array}$$ (Polinomio diferencia reducido).

2. Efectuar la siguiente resta:
$(5x^2z-3yz^2+2xy-x^3) - (-4xy+2xz+y^3-z^2x+z^3)$
La operación se dispone así:

$$\begin{array}{l} 5x^2z-3yz^2\ +2xy-x^3-2xz-y^3+z^2x-z^3 \\ \underline{\qquad\qquad\quad +4xy} \\ \mathbf{5x^2z-3yz^2+6xy-x^3-2xz-y^3+z^2x-z^3} \end{array}$$ (Polinomio diferencia reducido).

Ejercicios

Restar los polinomios que se indican a continuación:

1. $(a-b+c) - (-a+b-c)$
2. $(a^2+ab+b^2) - (a^2-ab+b^2)$
3. $4ax^2y-(-2x^2y+a^2xy^2+2ax^2y)$
4. $(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc) - (-a^2+2b^2-c^2+4ab-4ac+4bc)$
5. $(-3mn^2z+2xy-5x^2y^2) - (\frac{1}{2}m^2n+\frac{2}{3}mn^2z-\frac{1}{2}xy+\frac{5}{2}x^2y^2)$
6. $(\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}b^2+ac-\frac{1}{6}bc) - (\frac{1}{4}a^2+\frac{3}{4}b^2-\frac{1}{6}ac+\frac{1}{3}bc)$

Observación: La regla dada para restar dos polinomios se puede enunciar también diciendo que *para suprimir un paréntesis precedido del signo — se cambian de signos* **todos** *los términos interiores al paréntesis.*

Cuando una expresión contiene llaves, corchetes, paréntesis, etc., unos dentro de otros, para suprimirlos se procede *de dentro hacia afuera,* es decir, que se suprimen primero los paréntesis interiores, después los corchetes y por fin las llaves.

Ejemplos

Suprimir todos los signos de agrupación (paréntesis, corchetes, llaves) y obtener el polinomio reducido correspondiente:

1. $\{-3a^2b+[-5ab^2+b^2c-(2ab+5a^2b-3ab^2)+(2ab-3bc)] - [b^2-(2ab+2bc-2ac)]\}.$

Procediendo *de dentro hacia afuera,* se tiene:
Primeramente: $\{-3a^2b+[-5ab^2+b^2c-2ab-5a^2b+3ab^2+2ab-3bc] -[b^2-2ab-2bc+2ac]\}.$

Después: $\{-3a^2b-5ab^2+b^2c-2ab-5a^2b+3ab^2+2ab-3bc-b^2+ +2ab+2bc-2ac\}.$

Ahora se reducen los términos semejantes, como ya sabemos:

$$\begin{array}{l} -3a^2b-5ab^2+b^2c-2ab-3bc-b^2-2ac \\ -5a^2b+3ab^2\qquad +2ab+2bc \\ \underline{\qquad\qquad\qquad\quad +2ab} \\ \mathbf{-8a^2b-2ab^2+b^2c+2ab-bc-b^2-2ac} \end{array}$$ (Polinomio reducido).

2. $\{-5mnp-[-2m^2+3mn-(2mnp+3mn)+(2mp-n^2)]+ [3n^2-(2mn+mnp)+(2m^2+n^2-mn)]\}.$

Primera etapa: (suprimir paréntesis interiores)
$\{-5mnp-[-2m^2+3mn-2mnp-3mn+2mp-n^2] +[3n^2-2mn-mnp+2m^2+n^2-mn]\}.$

Segunda etapa: (suprimir corchetes)
$\{-5mnp+2m^2-3mn+2mnp+3mn-2mp+n^2+3n^2-2mn-mnp+ +2m^2+n^2-mn\}.$

Tercera etapa: (Reducir términos semejantes)

$$\begin{array}{l} -5mnp + 2m^2 - 3mn - 2mp + n^2 \\ +2mnp \qquad\quad + 3mn \qquad\quad + 3n^2 \\ -mnp + 2m^2 - 2mn \qquad\quad + n^2 \\ \underline{\qquad\qquad\quad - mn} \\ \mathbf{-4mnp + 4m^2 - 3mn - 2mp + 5n^2} \end{array}$$ (Polinomio reducido)

Ejercicios

Transformar cada una de las expresiones siguientes en su polinomio reducido correspondiente, suprimiéndole los signos de agrupación (paréntesis, corchetes y llaves):

1. $\{-5a^2b-[abc+(2a^2b-3ab^2)]+[3a^2b-(a^2-2ab+b^2)]\}$
2. $\{-[-2xyz-(5xy-2x^2+xz)]+[3xyz+(x^2-3xy+y^2)]\}$
3. $\{4m^2n+[2xy-(3m^2n+2mn^2)]-[5mn+(2xy-3mn)]\}$
4. $\{-6u^2v+[3x^2-(2mn+uv)]-[3u^2v^2-(2uv+3u^2v-5mn)]\}$
5. $\{5p^2qr-[3p^2+(2p^2qr-3pq)]-[2p^2+q^2-(3p^2qr-4pq)]\}$

EJERCICIOS 2.2

Ejercicios

Efectuar las sumas y restas que se indican, reduciendo los resultados:

1. $(x+y)-(3x-2y)-(5x-4y)+(-6x+8y)$
2. $(\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}b)-(\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}b)+(\frac{1}{4}a-\frac{2}{3}b)-(\frac{5}{6}a+\frac{2}{3}b)$
3. $a-[b-(2b+z)]+[b-(x-2b)]$
4. $a-[b-(c-a)]+b-[c-(b-a)]$
5. $\frac{3}{4}xyz-[\frac{5}{12}xy^2z^3-(\frac{1}{6}xy^2z^3-\frac{1}{4}xyz)]$
6. $\frac{2}{5}mn-[\frac{7}{10}m^2n+5n^2+(\frac{1}{2}mn-m^2n)+\frac{2}{5}m^2]$
7. $-\frac{5}{3}ab-\{\frac{3}{2}a^2b-[ab+(\frac{1}{6}a^2b-a^2)-\frac{1}{3}ab]+b^2\}$
8. $z-\{-y+[x-z+(y-x)-2y]\}$
9. $5x^2-xy-\{2y^2-[z^2-(3x^2+2xy)]+[2x^2-(3xz+2yz)]\}$
10. $ab^2-3a^2b+\{2b^2-[(5a^2-3ab+2ab^2)+(3b^2-2ab^2)]-5a^2\}$
11. $3z^2t-(2+6z^2t-3zt^2)+(5zt^2-2z^2t)$
12. $(3x-0.5y)-(3x-\frac{1}{2}y)+(x-3y-0.5z)-(y-0.5z)$
13. $\frac{1}{2}x^2-(3xy+2y^2)-(\frac{3}{4}x^2+\frac{2}{3}y^2-\frac{1}{2}xy)+(x^2+y^2-xy)$
14. $[5u-3v-(u+v)-(5u-3v)]-[2u+3v-(7u-4v)+(5u-6v)]$
15. $\frac{5}{6}x^2yz-\{\frac{5}{12}x^2yz-[(\frac{3}{2}xy^2z-xyz^2)+(\frac{1}{6}xy^2z-\frac{2}{3}xyz^2)]\}$
16. $3x^2-\{2x-[x^3-3x+(2x^2-5x^3)-(2x^2+x)]+(2x^3-5x^2+1)]\}$
17. $-5y^3+\{2y^2-[3y^3-(2y+1)+(4y^2-2y+y)]-(3y^3+2y^2-2y+1)\}$

2.3 MULTIPLICACION DE EXPRESIONES ENTERAS

Fundamento: Si las letras representan a números reales cualesquiera, una expresión entera representa a un número real; por tanto el fundamento de las reglas para la multiplicación de expresiones enteras, que damos a continuación, reside en las leyes formales de esta operación en el campo numérico real, especialmente en las leyes *conmutativa, asociativa* y *distributiva;* también se usa continuamente la regla del producto de potencias de la misma base. ¿Recuerdas bien estas cuestiones? Si tienes dudas, repásalas en el capítulo primero.

I) *MULTIPLICACION DE MONOMIOS:*

La operación de multiplicar dos o más monomios es equivalente a la de expresar un monomio en *forma reducida.*

Para multiplicar varios monomios se forma un solo monomio cuyos factores sean los de todos los monomios que se multiplican, y después se reduce el monomio así obtenido.

Para reducirlo ya sabemos que *se multiplican todos los coeficientes numéricos, a las letras comunes se les pone un exponente igual a la suma de sus exponentes y las letras no comunes se copian con sus propios exponentes.*

* * *

Ejemplos

1. $(-3ab^2cx^3)\cdot(-2a^3bc^2x)\cdot(5bcx^3yz^2) = 30a^4b^4c^4x^7yz^2$

2. $(10m^2np^3)\cdot(-5mn^3p)\cdot(4m^3n^2y^3z^2) = -200m^6n^6p^4y^3z^2$

3. $(-\frac{5}{2}xyz)\cdot(\frac{4}{3}x^2yz^3)\cdot(3yz^2t)\cdot(-2y^2t^3) = +20x^3y^5z^6t^4$

Ejercicios

1. $(-2x^3yz) \cdot (-3xy^2z^3) \cdot (-5x^2y^3z^2) = $ —?—
2. $(\frac{3}{2}mn^3p^2) \cdot (\frac{2}{3}m^2np^2) \cdot (\frac{2}{5}m^3xy^2) \cdot (\frac{5}{2}x^3yz) = $ —?—
3. $(-\frac{1}{3}ab^2c^2) \cdot (-3a^2b^2c) \cdot (-5a^3b^3c^2) = $ —?—
4. $(\frac{4}{5}u^2z) \cdot (-10a^2x^3z) \cdot (-\frac{1}{2}b^2cuz^3) = $ —?—

II) *MULTIPLICACION DE UN MONOMIO POR UN POLINOMIO:*

Para multiplicar un monomio por un polinomio, de acuerdo con la ley distributiva de la multiplicación, *se multiplica el monomio por cada término del polinomio y se suman los productos obtenidos.*

Si el polinomio está reducido el producto resulta también reducido.

Ejemplos

1. $(3x^2y-2axy^2+cz^3) \cdot (-2xy^2z) = -6x^3y^3z+4ax^2y^4z-2cxy^2z^4$
2. $(-5a^2b+3b^2c-abc) \cdot (-3b^2xt) = 15a^2b^3xt-9b^4cxt+3ab^3cxt$
3. $(4m^3n-3px^2y+5z^2) \cdot (5m^2n^2xy^3) = 20m^5n^3xy^3-15px^3y^4m^2n^2+25z^2m^2n^2xy^3$
4. $(-\frac{2}{3}uv^3-\frac{3}{5}u^2v+\frac{1}{12}u^3v^2) \cdot (60uvz^2) = -40u^2v^4z^2-36u^3v^2z^2+5u^4v^3z^2$

Ejercicios

1. $(-2x^2y+3xy^2-y^3) \cdot (-5xyz) = $ —?—
2. $(4mnz^3-2x^2yz+6m^3z^2) \cdot (-10x^2y^3z^4) = $ —?—
3. $(-\frac{2}{3}xy^3+\frac{1}{5}x^2y-\frac{2}{15}x^3y^2) \cdot (-30xyz^3) = $ —?—
4. $(\sqrt{2}ax-\sqrt{5}bcy^2+\frac{2}{5}x^2y^3) \cdot (-2a^2b^2x^3y^4) = $ —?—
5. $(\frac{2}{5}p^2qu-\frac{5}{4}puv^2+\frac{3}{2}qu^2v) \cdot (-\frac{1}{2}p^2qu^2v^3) = $ —?—

III) *MULTIPLICACION DE DOS POLINOMIOS:*

El producto de dos polinomios se obtiene también por aplicación de la *ley distributiva,* como puedes comprender siguiendo con atención el siguiente ejemplo:

Sea $P_1=3x^2y-2xy^2+5x^2$, y $P_2=2x+3y-1$.
El producto de P_1 por P_2 lo podemos desarrollar así:

$$P_1 \cdot P_2=(3x^2y-2xy^2+5x^2) \cdot P_2=3x^2y \cdot P_2-2xy^2 \cdot P_2+5x^2 \cdot P_2$$
$$=3x^2y \cdot (2x+3y-1)-2xy^2 \cdot (2x+3y-1)+5x^2 \cdot (2x+3y-1)=$$
$$=6x^3y+9x^2y^2-3x^2y-6xy^3+2xy^2+10x^3-5x^2$$
$$-4x^2y^2+15x^2y$$
$$\mathbf{6x^3y+5x^2y^2+12x^2y-6xy^3+2xy^2+10x^3-5x^2}$$ *(Producto reducido).*

Si has seguido con atención el desarrollo anterior, comprenderás que:

Para multiplicar dos polinomios se multiplica cada término del primero por cada término del segundo y se suman los productos obtenido

En la práctica se dispone la operación de forma que resulte cómoda la reducción de los términos semejantes del producto.

El siguiente ejemplo te muestra con claridad la disposición práctica:

$$\begin{array}{lr}
\text{Multiplicando:} & 2x^3-4x^2+6x-3 \\
\text{Multiplicador:} & 3x^2-2x+1 \\
\hline
\text{(Primer producto parcial).} & 6x^5-12x^4+18x^3-9x^2 \\
\text{(Segundo " ").} & -4x^4+8x^3-12x^2+6x \\
\text{(Tercer " ").} & +2x^3-4x^2+6x-3 \\
\hline
\text{(Producto total reducido).} & \mathbf{6x^5-16x^4+28x^3-25x^2+12x-3}
\end{array}$$

En el ejemplo anterior el multiplicando y el multiplicador dependen de una misma variable, y el trabajo se simplifica mucho *ordenándolos según las potencias decrecientes de la variable.* El resto del esquema es mejor que tú lo observes en vez de explicártelo aquí con muchos detalles que te aburrirían; si tienes alguna duda, pregunta a tu profesor.

Hay algo muy importante que tú mismo debes observar, y es lo siguiente: *El grado del producto es igual a la suma de los grados de los factores.*

Además: *El término de mayor grado del producto resulta de multiplicar los términos de mayor grado del multiplicando y del multiplicador.*

Damos otro ejemplo de producto de dos polinomios ordenados según las potencias decrecientes de su única variable.

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & & 5x^4 & -3x^3 & +2x^2 & -x & +6 \\
 & & & & 4x^3 & -2x^2 & +3 & \\
\hline
20x^7 & -12x^6 & +8x^5 & -4x^4 & +24x^3 & & & \\
 & -10x^6 & +6x^5 & -4x^4 & +2x^3 & -12x^2 & & \\
 & & & +15x^4 & -9x^3 & +6x^2 & -3x & +18 \\
\hline
\mathbf{20x^7} & \mathbf{-22x^6} & \mathbf{+14x^5} & \mathbf{+7x^4} & \mathbf{+17x^3} & \mathbf{-6x^2} & \mathbf{-3x} & \mathbf{+18}
\end{array}
$$

(Producto total reducido)

* * *

EJERCICIOS 2.3

Ejercicios

Obtener en forma reducida los productos que se indican:

1. $(-3a^2b) \cdot (-6ab^2x^3)$
2. $(-2x^2y+xy^2-x^2+y^2) \cdot (-5a^2x^2y^3)$
3. $(ax^2+bx+c) \cdot (ax+b)$
4. $(3x^4-2x^3+5x^2-x+1) \cdot (3x^2-2x+3)$
5. $(-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{5}x+\frac{3}{2}) \cdot (\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{2}{5})$
6. $(ax^4-3x^3+2x^2-x+1) \cdot (3x-2)$
7. $(8x^5-3x^2+2x-6) \cdot (3x^4+4x^2-x+1)$
8. $(-10z^3-8z^2+z-2) \cdot (3z-4)$
9. $(\frac{5}{2}y^2-\frac{3}{4}y+6) \cdot (\frac{2}{5}y^3-\frac{3}{2}y^2+\frac{1}{3}y-\frac{1}{2})$
10. $(ax^3+bx^2+cx+d) \cdot (-3x^3+2x^2-x+1)$

Alina Di Corta

2.4 DIVISION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

I) DIVISION DE MONOMIOS:

Definición: *Se llama cociente de dos monomios enteros* (dividendo y divisor) *a otro monomio, entero o fraccionario, que multiplicado por el divisor nos da el dividendo.*

El cociente de dos monomios lo indicaremos separando el dividendo del divisor por una raya de quebrado.

El cociente es un monomio *entero* cuando el dividendo contiene *todas* las letras del divisor elevadas a *iguales o mayores exponentes;* en este caso se dice que el dividendo es *múltiplo del divisor.* Cuando esto no ocurre, bien porque alguna letra figure en el dividendo con menor exponente que en el divisor, o porque alguna letra figure en el divisor y no en el dividendo, el cociente es un *monomio fraccionario.*

Fundamento: La regla para dividir monomios se basa en las propiedades del cociente de números racionales, (en particular que $\left(\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)$, en las definiciones de potencias de exponente entero (positivo, nulo o negativo) y en la regla para dividir potencias de la misma base, válida para todos estos exponentes ; aquí recordamos estas cuestiones:

$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ *(n natural),* $\quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (*m* y *n* enteros, positivos, negativos o nulos).

Ejemplos

$$\left(\frac{2}{5}\right)^0 = 1, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1, \quad 5^{-3} = \frac{1}{5^3},$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1^4}{2^4}} = 1 \times \frac{2^4}{1^4} = 2^4,$$

$$\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2, \quad \frac{b^3}{b^6} = b^{3-6} = b^{-3} = \frac{1}{b^3}.$$

Para que comprendas bien la regla para obtener el cociente de dos monomios debes suponer que el dividendo y divisor tienen *las mismas letras;* cuando esto no ocurra suplirás las letras que falten en el dividendo o en el divisor **mentalmente,** *considerándolas con exponente nulo.*

Por ejemplo, $\dfrac{2a^2b^3cx^5}{3ac^2y^3} = \dfrac{2a^2b^3cx^5y^0}{3ac^2y^3b^0x^0}$

Con este artificio *(que se realiza mentalmente),* los monomios del dividendo y del divisor tendrán siempre las mismas letras.

Regla: *El cociente de dos monomios tiene por coeficiente el cociente de los coeficientes del dividendo y divisor. La parte literal del cociente está formada por las mismas letras que figuran en el dividendo y en el divisor. Cada letra aparece en el cociente elevada a un exponente que es la diferencia entre su exponente en el dividendo menos su exponente en el divisor.*

El monomio (entero o fraccionario) obtenido por la aplicación de esta regla es el verdadero cociente, pues multiplicado por el divisor nos da el dividendo.

El razonamiento general que prueba esto es muy sencillo, pero como no queremos aburrirte con explicaciones generales, te haremos que lo observes en los ejemplos.

En los primeros ejemplos *vamos a escribir* las letras necesarias con exponente cero para que el dividendo y divisor *tengan las mismas letras,* pero en seguida dejaremos de escribirlas, pues dichas letras se suplen *mentalmente.*

Ejemplos

1. $\dfrac{-2a^2x^3yz^5}{-3ab^3cz^4} = \dfrac{-2a^2x^3yz^5b^0c^0}{-3ab^3cz^4x^0y^0} =$

$= +\dfrac{2}{3}a^{2-1}\, b^{0-3}\, c^{0-1} x^{3-0}\, y^{1-0}\, z^{5-4} = +\dfrac{2}{3}ab^{-3}\, c^{-1}\, x^3yz.$

2. $\dfrac{-3m^3n^2t^3}{5mp^2t^2} = \dfrac{-3m^3n^2t^3p^0}{5mp^2t^2n^0} = -\dfrac{3}{5}m^{3-1}\, n^{2-0}\, p^{0-2}\, t^{3-2} = -\dfrac{3}{5}m^2n^2p^{-2}t.$

Si multiplicamos este cociente por el divisor obtenemos:

$-\frac{3}{5}m^2n^2p^{-2}t \,.\, 5mp^2t^2 = -3m^3n^2p^0t^3 = -\,3m^3n^2t^3$ que es el dividendo.

3. $\dfrac{7u^2v^3z^4}{2uv^2z^3} = \dfrac{7}{2}uvz.$ (efectuar la prueba).

4. $\dfrac{-6ab^2c^4x^3y^4z^5}{5abc^3x^2y^3z^3} = -\dfrac{6}{5}bcxyz^2.$ (efectuar la prueba).

Hallar los cocientes de los monomios que se dan a continuación, y realizar después la prueba (divisor × cociente = dividendo). Indicar en cada caso, antes de efectuar la operación, si el cociente va a ser un monomio entero o fraccionario.

Ejercicios

1. $\dfrac{-2a^2bx^3yz^2}{-3abx^2z} = $ —?—

2. $\dfrac{-4r^3s^2t^4}{3r^2st^3} = $ —?—,

3. $\dfrac{5m^2np^3uv^5}{2mp^2uv^4} = $ —?—

4. $\dfrac{-6pq^2r^3x^3y^4z^5}{3pq^2r^2x^2y^3z^4} = $ —?—

5. $\dfrac{-8a^2bx^3y^2t}{-2ab^2x^2y^3t^4} = $ —?—

6. $\dfrac{-\frac{3}{2}a^3by^4zt^2}{\frac{1}{4}ab^2y^3z^4t^5} = $ —?—

7. $\dfrac{\frac{5}{4}m^2n^3rt^4}{\frac{3}{8}mn^2t^3} = $ —?—

8. $\dfrac{-\frac{2}{3}a^4bc^3x^2y^3}{-\frac{4}{6}a^2b^3c^2xy^3} = $ —?—

9. $\dfrac{\frac{4}{5}b^2c^3u^4v^3}{-\frac{10}{8}bc^2u^3v^2} = $ —?—

10. $\dfrac{-5r^2s^3t^4u^6}{10r^3s^4t^5u^6} = $ —?—

II) DIVISION DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO

Fundamento: El fundamento de la división de un polinomio por un monomio es la *Ley Distributiva* de la división respecto de la suma en el campo numérico real y la división de monomios.

Regla: *El cociente de un polinomio por un monomio se obtiene dividiendo cada término del dividendo por el divisor y sumando los cocientes obtenidos.*

Si todos los monomios del dividendo son múltiplos del divisor el cociente obtenido es un polinomio entero, y en caso contrario el cociente tendrá potencias negativas de alguna letra y será una expresión racional.

* * *

Ejemplos

1. $\dfrac{3x^2y-2ab^2x^3+5b^3x^2y}{4ab^2xy}=\dfrac{3x^2y}{4ab^2xy}-\dfrac{2ab^2x^3}{4ab^2xy}+\dfrac{5b^3x^2y}{4ab^2xy}=$
$=\dfrac{3}{4}xa^{-1}b^{-2}-\dfrac{2}{4}x^2y^{-1}+\dfrac{5}{4}bxa^{-1}.$

2. $\dfrac{-3m^2nz^3+2mp^3x^2y^3-5n^2x^3z^2}{2mnpxyz}=$
$=-\dfrac{3}{2}mp^{-1}x^{-1}y^{-1}z^2+n^{-1}p^2xy^2z^{-1}-\dfrac{5}{2}m^{-1}np^{-1}x^2y^{-1}z.$

3. $\dfrac{4x^2y^3z^4-3xy^2z^4+6x^3yz^2}{-2xyz}=-2xy^2z^3+\dfrac{3}{2}yz^3-3x^2z.$ (Solución entera).

Ejercicios

Obtener los cocientes que se indican a continuación y realizar la prueba:

1. $\dfrac{4a^2bx^3-2ab^2x^2y+3bx^2y^3}{2abx}=$ —?—
2. $\dfrac{-6m^2uv^3-4mn^2u^3+2mnu^2v^2}{2mnuv}=$ —?—
3. $\dfrac{4x^2yz-6xy^2z^3+4x^3y^2z^3-8ax^2y^2z^2}{2xyz}=$ —?—
4. $\dfrac{-9r^3s^2t+6ar^2s^3t^2-3a^2r^4s^3t^5}{3r^2s^2t}=$ —?—
5. $\dfrac{-2p^2q^2x-3pqx^3y^2+6x^2y^2z^3}{2pqxy}=$ —?—
6. $\dfrac{4m^2n^2x^3-6mn^3x^2y^3+5x^2y^3z^4}{xy^2z^3}=$ —?—
7. $\dfrac{-10x^3yz^4+8xy^2z^3-6a^2x^2yz^3+4b^2x^3y^2z}{2xyz}=$ —?—
8. $\dfrac{5pq^2y^3-3p^2qx^3y+2q^2x^3y^2}{2pqxy}=$ —?—

III) DIVISION DE POLINOMIOS CON UNA MISMA VARIABLE:

En la división de polinomios supondremos que el dividendo y el divisor dependen de una misma variable, por ejemplo x; que están ordenados según las potencias decrecientes de la variable, y que el grado del dividendo es igual o mayor que el grado del divisor. Se distinguen dos casos:

1º) *División exacta;*
2º) *División inexacta.*

Se llama cociente exacto de dos polinomios, cuando existe, a otro polinomio que multiplicado por el divisor nos da el dividendo.

Cuando no existe el cociente exacto de dos polinomios se define, igual que en Aritmética, una operación de división entera (*) o inexacta, que consiste en encontrar dos polinomios, llamados cociente entero y resto, que cumplan las siguientes condiciones:

1ª) Dividendo = divisor × cociente + resto
2ª) Grado del resto < grado del divisor.

DIVISION EXACTA:

Si quieres *comprender bien* la regla para dividir dos polinomios *y no hacerlo de rutina,* te invitamos a que nos sigas en un ejemplo que vamos a preparar en tu presencia.

Supongamos que el divisor de una *división exacta* fuera $\mathbf{2x^2-3x+1}$, y que el cociente fuera $\mathbf{3x^2+x-2}$; por ser la división exacta el dividendo será el producto del divisor por el cociente, o sea:

$$\begin{array}{ll}
\textbf{Divisor:} & 2x^2-3x+1 \\
\textbf{Cociente:} & \underline{3x^2+x-2\qquad\qquad} \\
 & 6x^4-9x^3+3x^2 \\
 & \qquad+2x^3-3x^2+x \\
 & \underline{\qquad\qquad-4x^2+6x-2} \\
\textbf{Dividendo:} & 6x^4-7x^3-4x^2+7x-2
\end{array}$$

(*) Se llama *entera* porque se desarrolla en el dominio de las expresiones enteras.

Veamos ahora cómo se comportaría una persona inteligente *que conociera el dividendo y el divisor y tuviera que encontrar el cociente.*

Lo primero que advertiría esta persona, en este ejemplo, es que el cociente debe ser de 2º grado, para que al multiplicarlo por el divisor, que es de 2º grado, se obtenga un polinomio de 4º grado, que es el grado del dividendo.

Si el cociente que buscamos es de segundo grado será de la forma: $\mathbf{ax^2+bx+c}$, donde los coeficientes **a, b** y **c** son por ahora **indeterminados**, y nuestra tarea consiste precisamente en determinarlos; para ello razonamos así: Si $\mathbf{ax^2+bx+c}$ es el verdadero *cociente exacto,* al multiplicarlo por el divisor nos debe dar el dividendo; hagamos pues esta multiplicación e igualemos el producto al dividendo:

Divisor: $\mathbf{2x^2-3x+1}$ (No nos interesa reducir términos semejantes; escribimos primero el producto por *ax,* a continuación el producto por *bx* y a continuación el producto por *c).*

$$\begin{array}{ll}\textbf{Cociente:} & ax^2+bx+c \\ \hline \textbf{Dividendo:} & \underbrace{2ax^4-3ax^3+ax^2}_{\text{divisor}\times \mathbf{ax^2}} + \underbrace{2bx^3-3bx^2+bx}_{\text{divisor}\times \mathbf{bx}} + \underbrace{2cx^2-3cx+c}_{\text{divisor}\times \mathbf{c}}\end{array}$$

Igualando este producto al dividendo dado obtenemos:

$$6x^4-7x^3-4x^2+7x-2=$$
$$=\underbrace{2ax^4-3ax^3+ax^2}_{\text{divisor}\times \mathbf{ax^2}} + \underbrace{2bx^3-3bx^2+bx}_{\text{divisor}\times \mathbf{bx}} + \underbrace{2cx^2-3cx+c}_{\text{divisor}\times \mathbf{c}}\ , \quad (1)$$

Para que los dos polinomios de cuarto grado del primero y segundo miembros de (1) sean iguales, todos los coeficientes de la misma potencia de x deben ser iguales; en particular deben serlo los coeficientes de x^4 en los dos miembros, o sea:

$$\mathbf{6=2a}, \text{ de donde } \boxed{a=\frac{6}{2}=3}\ , \quad (2) \text{ (¡Ya encontramos } \mathbf{a}\text{!).}$$

Disponemos la operación de dividir como de costumbre, para que te vayas grabando sobre el esquema la regla que vamos deduciendo:

$$6x^4-7x^3-4x^2+7x-2 \quad \begin{array}{|l}2x^2-3x+1 \\ \hline ax^2+bx+c\end{array} \qquad (3)$$

Resumamos lo que ya hemos descubierto:

1º) *El grado del cociente es igual a la diferencia entre los grados del dividendo y del divisor* (en nuestro ejemplo, 4-2=2).

2º) *Supuestos ordenados el dividendo y divisor según las potencias decrecientes de la variable, el primer coeficiente del cociente se obtiene dividiendo el primero del dividendo por el primero del divisor* (en nuestro ejemplo $(a=\frac{6}{2}=3)$.

Sigamos investigando los otros coeficientes del cociente que nos faltan, **b** y **c.**

Para ello, si en la igualdad (1) sustituímos la letra **a** por su valor ya encontrado, **3**, obtenemos:

$$6x^4-7x^3-4x^2+7x-2=$$
$$\underbrace{6x^4-9x^3+3x^2}_{\text{divisor}\times \mathbf{3x^2}} + \underbrace{2bx^3-3bx^2+bx}_{\text{divisor}\times \mathbf{bx}} + \underbrace{2cx^2-3cx+c}_{\text{divisor}\times \mathbf{c}}\ , \quad (4)$$

Si a los dos miembros de (4) *les restamos la primera parte del segundo miembro,* o sea, el producto del divisor por el primer término ya encontrado del cociente, $\mathbf{3x^2}$, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\underbrace{2x^3-7x^2+7x-2}_{\text{1er. dividendo parcial}} = \underbrace{2bx^3-3bx^2+bx}_{\text{divisor}\times \mathbf{bx}} + \underbrace{2cx^2-3cx+c}_{\text{divisor}\times \mathbf{c}}\ , \quad (5)$$

La diferencia obtenida en el primer miembro, o sea, la diferencia entre el dividendo y el producto del primer término del cociente por el divisor, se llama **primer dividendo parcial.**

Para que los polinomios de los dos miembros de (5) sean iguales, deberán ser iguales los coeficientes de las mismas potencias de x, en particular deberán serlo los coeficientes de $\mathbf{x^3}$, o sea: $\mathbf{2=2b}$, de donde:

$$\boxed{b = \frac{2}{2} = 1}\ ,\quad (6).$$

(¡Ya tenemos **b**!).

La igualdad (6) nos dice que: *El segundo coeficiente del cociente,* **b**, *es igual al primer coeficiente del primer dividendo parcial (2) dividido por el primer coeficiente del divisor (2).*

Aún nos queda por determinar **c,** lo cual se logra de forma análoga a como hemos determinado **b.**

Si en la igualdad (5) sustituímos la letra **b** por su valor encontrado, **1**, obtenemos:

$$\underbrace{2x^3-7x^2+7x-2}_{\text{1er. dividendo parcial}} = \underbrace{2x^3-3x^2+x}_{\text{divisor}\times\mathbf{1.x}} + \underbrace{2cx^2-3cx+c}_{\text{divisor}\times\mathbf{c}}\ ,\quad (7).$$

Si a los dos miembros de (7) *les restamos la primera parte del segundo miembro,* o sea, el producto del divisor por el segundo término obtenido del cociente (1.x), obtenemos la siguiente igualdad:

$$\underbrace{-4x^2+6x-2}_{\textit{2º dividendo parcial}} = 2cx^2-3cx+c,\quad (8).$$

Como hemos indicado, a la diferencia entre el primer dividendo parcial y el producto del segundo término del cociente por el divisor se le llama *segundo dividendo parcial.*

Para que los dos miembros de (8) sean iguales, deberá cumplirse que:

$$-4 = 2c,\ \text{de donde:}\ \boxed{\mathbf{c} = \frac{-4}{2} = -2},\quad (9).$$

(¡Ya tenemos **c**!).

La igualdad (9) nos dice que: *El tercer coeficiente del cociente* **c,** *se obtiene dividiendo el primer coeficiente del segundo dividendo parcial por el primero del divisor.*

Alina De Castro

Al llegar a este punto, tenemos el cociente completamente determinado: $\mathbf{a}=3$, $\mathbf{b}=1$, $\mathbf{c}=-2$.

El cociente es por tanto $\mathbf{ax^2+bx+c} = \mathbf{3x^2+x-2}$, como tenía que ocurrir, pues nuestro ejemplo fue "prefabricado" por nosotros mismos, y ya sabíamos de antemano que el cociente era $\mathbf{3x^2+x-2}$.

Al llegar a estas alturas, una vez finalizada la investigación, vamos a dar una *regla práctica* para obtener el cociente de dos polinomios ordenados según las potencias decrecientes de una variable. Esta regla la dividiremos en etapas y la aplicaremos en cada una de sus etapas, al desarrollo del ejemplo anterior, siguiendo el esquema de disposición práctica de los cálculos.

REGLA: Para obtener el cociente de dos polinomios ordenados según las potencias decrecientes de su variable se procede así:

Primera Etapa:

Se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor; así se obtiene el primer término del cociente.

En nuestro ejemplo

$$\frac{6x^4}{2x^2} = 3x^2.$$

$$\begin{array}{r|l}
6x^4-7x^3-4x^2+7x-2 & 2x^2-3x+1 \\ \cline{2-2}
+9x^3-3x^2 \qquad\qquad & 3x^2+x-2 \\ \cline{1-1}
2x^3-7x^2+7x-2 & \text{(Primer dividendo parcial).} \\
+3x^2-x \qquad & \\ \cline{1-1}
-4x^2+6x-2 & \text{(Segundo dividendo parcial).} \\
-6x+2 & \\ \cline{1-1}
0 \quad & \text{(Resto).}
\end{array}$$

Segunda Etapa:

Se multiplica el primer término obtenido del cociente por todo el divisor y se resta el producto del dividendo, para lo cual, los productos del primer término del cociente por los términos del divisor se escriben debajo de los del dividendo de igual grado, **cambiados de signo,** *sumándolos después al dividendo. Así se obtiene el* **primer dividendo parcial.**

(Observa cómo se ha realizado esto en el esquema. El producto del primer término del cociente por el primero del divisor no hay que efectuarlo, pues "se destruye" al restarlo del primero del dividendo).

Tercera Etapa:

Se divide el primer término del primer dividendo parcial por el primero del divisor; así se obtiene el segundo término del cociente.

En nuestro ejemplo $\dfrac{2x^3}{2x^2} = x.$

Cuarta Etapa:

Se multiplica el segundo término del cociente por todo el divisor y se resta el producto del primer dividendo parcial; así se obtiene el segundo dividendo parcial. La operación se realiza como en la etapa segunda.

Quinta Etapa:

Se divide el primer término del segundo dividendo parcial por el primero del divisor, con lo que se obtiene el tercer término del cociente.

En nuestro ejemplo $\dfrac{-4x^2}{2x^2} = -2.$

Sexta Etapa:

Se multiplica el tercer término del cociente por todo el divisor y se resta este producto del segundo dividendo parcial. En este caso esta diferencia se anula y la operación queda terminada. El último dividendo parcial es el resto, que en este ejemplo es cero, por ser exacta la división.

Seguidamente damos otros dos ejemplos completamente desarrollados con el fin de que tú los resuelvas en tu cuaderno y puedas verificar con el texto todas las etapas de tu trabajo.

Ejemplos

$$
\begin{array}{l|l}
6x^5-11x^4+14x^3-10x^2+3x+4 & 2x^3-3x^2+x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{\quad +9x^4-3x^3-3x^2} & 3x^2-x+4 \\
\quad -2x^4+11x^3-13x^2+3x+4 & \\
\underline{\qquad -3x^3+x^2+x} & \\
\qquad\quad 8x^3-12x^2+4x+4 & \\
\underline{\qquad\qquad +12x^2-4x-4} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 \text{ (Resto).} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+\frac{1}{6}x^3+\frac{5}{6}x^2+\frac{7}{3}x-\frac{10}{3} & \frac{3}{2}x^2+x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{\quad -\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2} & \frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3} \\
\quad -\frac{3}{6}x^3+\frac{13}{6}x^2+\frac{7}{3}x-\frac{10}{3} & \\
\underline{\qquad +\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x} & \\
\qquad\quad \frac{15}{6}x^2+\frac{5}{3}x-\frac{10}{3} & \\
\underline{\qquad\qquad -\frac{5}{3}x+\frac{10}{3}} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 \text{ (Resto).} &
\end{array}
$$

Ejemplos

DIVISION INEXACTA:

La división inexacta de dos polinomios se efectúa de la misma forma que la exacta; la única diferencia reside en que el último dividendo parcial en vez de ser cero es un polinomio **de grado menor que el divisor,** en cuyo caso se detiene la operación y este último dividendo parcial es **el resto.**

A continuación desarrollamos un ejemplo de división inexacta:

$$
\begin{array}{l|l}
3x^5-2x^4+x^3-3x^2+2x-1 & 3x^3-2x^2+x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{\quad +2x^4-x^3+x^2} & x^2 \\
\qquad\qquad -2x^2+2x-1 \quad \text{(Resto)} &
\end{array}
$$

Como el primer dividendo parcial es de grado menor que el divisor, la operación queda concluída; el cociente es $\mathbf{x^2}$, y el resto $-2x^2+2x-1$.

PRUEBA: La prueba se realiza multiplicando el cociente por el divisor y sumando a este producto el resto; el resultado debe coincidir con el dividendo.

En el ejemplo anterior tenemos:

$$
\begin{array}{lrl}
\text{Divisor:} & 3x^3-2x^2+x-1 & \\
\text{Cociente:} & x^2 & \\ \hline
 & 3x^5-2x^4+x^3-x^2 & \\
 & -2x^2+2x-1 & \text{(Resto)} \\ \hline
 & 3x^5-2x^4+x^3-3x^2+2x-1 & \text{(Dividendo).}
\end{array}
$$

COCIENTE COMPLETO:

En una división inexacta se llama **cociente completo** *a la suma del cociente entero más una fracción que tiene por numerador el resto y por denominador el divisor.* Si reflexionas un poco comprenderás que el producto del cociente completo por el divisor es igual al dividendo.

En el ejemplo anterior el cociente completo es:

$$x^2+\frac{-2x^2+2x-1}{3x^3-2x^2+x-1}$$

(Comprueba que el producto por el divisor es igual al dividendo).

Ejercicios

1. Construye tú mismo un ejemplo de división; para ello escribe dos trinomios sencillos de segundo grado y multiplícalos; el producto será el *dividendo*, uno de los trinomios el divisor y el otro el cociente. Suponte ahora *que no conocieras el cociente*, y averígualo por el *método de coeficientes indeterminados*, como hicimos en el ejemplo del principio de esta sección. Después realiza la división con el esquema tradicional y compara los dos trabajos; verás que en el fondo son iguales, lo único que difiere es la *disposición práctica de los cálculos* en el esquema tradicional de la división.

2. Obtener el cociente exacto de dividir $6x^4+x^3-6x^2+5x-6$ por $2x^2+x-3$, y efectuar la prueba.

En los problemas siguientes obtener el cociente y el resto, efectuando la prueba en cada caso. Escribir también los cocientes completos.

3. Dividir: $6x^4-3x^3+2x^2-x+1$ por $2x^2-3x+2$
4. " $5x^5-3x^4+2x^3-4x^2+x-3$ por $3x^2-2x+1$
5. " $\frac{2}{3}x^4-\frac{1}{2}x^3+x^2-3x+2$ por $\frac{1}{3}x^2-2x+3$
6. " $\frac{5}{4}x^5-\frac{3}{2}x^4+\ldots+x^2-x+2$ por $\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+2x-2$

IV) LA REGLA DE RUFFINI:

Hay un caso especial de división muy importante por sus muchas aplicaciones en Algebra; este caso corresponde a la división de un polinomio ordenado según las potencias decrecientes de **x** por el binomio **x-a**, siendo **a** un número real cualquiera.

Con el fin de investigar la regla práctica para realizar tales divisiones (llamada la Regla de Ruffini, en honor a su descubridor) partiremos del siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4} & \mathbf{x-a} \\ \cline{2-2} & \mathbf{b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3} \end{array}$$

Los coeficientes $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_1}$ $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ y $\mathbf{a_4}$ son conocidos, así como $\mathbf{a}$; los coeficientes $\mathbf{b_0}$, $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, y $\mathbf{b_3}$ del cociente (cuyo grado es $4-1=3$) son por el momento **indeterminados.** Para determinarlos procedemos así: *El dividendo debe ser igual al producto del divisor por el cociente más el resto* o sea,

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=(b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3)\,.\,(x-a)+R, \quad (1),$$

(siendo R el resto).

Efectuemos la multiplicación del segundo miembro:

$$\begin{array}{l} b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3 \\ \quad x-a \\ \hline b_0x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x \\ \quad -ab_0x^3-ab_1x^2-ab_2x-ab_3 \\ \hline b_0x^4+(b_1-ab_0)x^3+(b_2-ab_1)x^2+(b_3-ab_2)x-ab_3 \end{array}$$

Teniendo en cuenta este resultado, la igualdad (1) se escribe así:

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=$$
$$=b_0x^4+(b_1-ab_0)x^3+(b_2-ab_1)x^2+(b_3-ab_2)x-ab_3+R, \quad (2)$$

Para que los polinomios de los dos miembros de (2) sean iguales, deben ser iguales los coeficientes de las mismas potencias de **x** en ambos miembros, o sea que tendrán que cumplirse las siguientes igualdades:

$$a_0=b_0; \quad a_1=b_1-ab_0; \quad a_2=b_2-ab_1; \quad a_3=b_3-ab_2; \quad a_4=-ab_3+R$$

De estas igualdades se pueden despejar los coeficientes *indeterminados* del cociente, b_0, b_1, etc. y el resto R, resultando:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{b_0 = a_0} \\ \mathbf{b_1 = a_1 + ab_0} \\ \mathbf{b_2 = a_2 + ab_1} \\ \mathbf{b_3 = a_3 + ab_2} \\ \mathbf{R = a_4 + ab_3} \end{array}} \quad (3).$$

Estas fórmulas contienen a la **Regla de Ruffini,** que se enuncia así con palabras:

1º) *El primer coeficiente del cociente es igual al primero del dividendo* $(b_0 = a_0)$.

2º) *Cualquier coeficiente del cociente (distinto del primero) es igual a su correspondiente en el dividendo más el anterior del cociente multiplicado por* **a** *(por ejemplo,* $b_2 = a_2 + b_1 \cdot a$*).*

3º) *El resto se calcula con la misma regla y es igual al último coeficiente del dividendo más el último del cociente multiplicado por* **a** $(R = a_4 + ab_3)$.

En la práctica los cálculos se disponen así: Se copian los coeficientes del dividendo y en su parte inferior izquierda el segundo término del divisor, *cambiando de signo,* así:

$$\begin{array}{l|lllll} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ +a) & & ab_0 & ab_1 & ab_2 & ab_3 \\ \hline & a_0 = b_0 & a_1 + ab_0 = b_1 & a_2 + ab_1 = b_2 & a_3 + ab_2 = b_3 & a_4 + ab_3 = R \end{array}$$

El esquema indica cómo se calculan los coeficientes sucesivos del cociente que aparecen debajo de la raya:

El primer coeficiente del dividendo (a_0) se copia debajo de la raya, dándonos el primero del cociente $(b_0 = a_0)$.

Después se multiplica **a** por el coeficiente obtenido del cociente y se coloca debajo del coeficiente siguiente del dividendo $(ab_0$ se coloca debajo de $a_1)$ y se suman, obteniendo el segundo coeficiente del cociente $(b_1 = a_1 + ab_0$;ver la segunda de las fórmulas (3)). Con el mismo método se calculan los coeficientes siguientes del cociente y el resto, que es el último número que aparece bajo la raya.

Ejemplo numérico: *Efectuar la siguiente división, aplicando la Regla de Ruffini:*

$$5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 4x - 3 \quad \underline{|\; x - 3}$$

Ajuno - 8º Costa

Coeficientes del dividendo:

Coeficientes del cociente y resto:

$$\begin{array}{l|lllll} & 5 & -3 & 2 & 4 & -3 \\ +3) & & 15 & 36 & 114 & 354 \\ \hline & 5 & 12 & 38 & 118 & 351 \end{array}$$

El grado del cociente es $4 - 1 = 3$, y por tanto el cociente es:

$\mathbf{5x^3 + 12x^2 + 38x + 118}$, y el resto **351**

Hágase la prueba.

Observaciones:

1. Cuando el divisor es $\mathbf{x + a}$ se escribe $\mathbf{x - (-a)}$, y estamos en el caso anterior; en este caso el número que hay que escribir en la parte inferior izquierda de la fila de coeficientes del dividendo es $\mathbf{-a}$.
2. Cuando el dividendo sea un polinomio *incompleto,* en la fila de coeficientes del dividendo se colocan ceros como coeficientes de las potencias de **x** que falten.

Ejemplos

1. *Calcular, con la Regla de Ruffini, el cociente y el resto de la siguiente división:*

$$3x^5 - 2x^3 + x^2 - 1 \quad \underline{|\; x + 2}$$

Teniendo en cuenta las observaciones anteriores se obtiene el siguiente esquema.

$$\begin{array}{l|llllll} & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -2) & & -6 & +12 & -20 & 38 & -76 \\ \hline & 3 & -6 & 10 & -19 & 38 & -77 \end{array}$$

El grado del cociente es $5 - 1 = 4$
El cociente es: $3x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 19x + 38$
y el resto $R = -77$

2. Dividir con la Regla de Ruffini, $-3x^4 - 2x^2 + 1$ por $x + \frac{1}{2}$

Coeficiente del dividendo

Coeficientes del cociente y resto:

$$\begin{array}{l|lllll} & -3 & 0 & -2 & 0 & +1 \\ -\frac{1}{2}) & & +\frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & +\frac{11}{8} & -\frac{11}{16} \\ \hline & -3 & +\frac{3}{2} & -\frac{11}{4} & +\frac{11}{8} & +\frac{5}{16} \end{array}$$

Grado del cociente: $4-1=3$
Cociente $-3x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{4}x+\frac{11}{8}$, Resto $= \frac{5}{16}$.
Hacer la prueba.

Ejercicios

Obtener los cocientes y los restos de las divisiones que se indican a continuación, aplicando la Regla de Ruffini; realizar la prueba en cada caso (dividendo = divisor × cociente + resto).

1. Dividir $7x^5-3x^4+4x^2-x+2$ por $x-1$
2. " $3x^6-2x^4+3x^3-5x+1$ por $x+3$
3. " $4x^4-3x^3+2x^2-5x+8$ por $x-5$
4. " $7x^7-5x^4+2x^3-x+5$ por $x+2$
5. " $\frac{3}{2}x^4-\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{3}x+2$ por $x-\frac{1}{2}$
6. " $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}$ por $x+\frac{1}{3}$

TEOREMA DEL RESTO:

El resto de una división del tipo de Ruffini tiene una propiedad muy importante, que vamos a demostrar y a utilizar en esta sección; observaremos primero la propiedad en un ejemplo y después daremos la demostración general del teorema.

Efectuemos la siguiente división con el esquema de Ruffini:

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 \quad \underline{|\; x-a \quad}$$

Coeficientes del Dividendo:

$$\begin{array}{r|llll} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ +a) & & a_0a & aa_1+a_0a^2 & a_0a^3+a_1a^2+a_2a \\ \hline & a_0 & a_1+a_0a & a_0a^2+a_1a+a_2 & \mathbf{a_0a^3+a_1a^2+a_2a+a_3} \end{array}$$

Observa el resto obtenido y compáralo con el dividendo. ¿Qué advertes de notable? Se ve que el *resto coincide con el valor que toma el dividendo cuando en vez de* **x** *se pone* **a** (es decir, el segundo término del divisor cambiado de signo.

¿Será esta propiedad general, o se cumplirá únicamente en el ejemplo anterior, en que el dividendo es un polinomio de tercer grado? Veamos que la propiedad es completamente general; para ello representemos de forma abreviada y convencional al dividendo por $D(x)$; es muy importante que te convenzas de que con esta notación estamos *representando* a un polinomio *cualquiera, de cualquier grado.* El cociente lo representaremos por $C(x)$, que es un polinomio que queda determinado cuando se fija $D(x)$, y el resto lo representaremos por R, como de costumbre; en resumen, se trata de la división del siguiente esquema:

$$\begin{array}{l|l} D(x) & x-a \\ \cline{2-2} R & C(x) \end{array}.$$

Ahora se cumplirá: $\mathbf{D(x)=(x-a)\,.\,C(x)+R}$, (1)

La igualdad (1) se cumple *para todos* los valores que demos a la x; si le damos el valor **a** obtenemos:

$$\mathbf{D(a)=(a-a)\,.\,C(a)+R=O\,.\,C(a)+R=O+R=R}$$

Si observamos los miembros primero y último de las igualdades anteriores concluímos que:

El valor numérico del dividendo cuando se sustituye **x** *por* **a.** *(D(a)), es igual al resto de la división de* **D(x)** *por* **x − a.**

Así ha quedado probada, con carácter general, la importante propiedad del resto, de la cual haremos ahora interesantes aplicaciones.

CONDICION DE DIVISIBILIDAD DE UN POLINOMIO POR x − a

Para que un polinomio, *D(x), sea divisible* por el binomio **x − a.** *el resto de la división debe ser cero;* pero según la propiedad anterior el resto es el valor que toma *D(x)* cuando en vez de **x** se sustituye **a**, o sea, $\mathbf{R}=D(a)$, y por tanto, para que $D(x)$ sea divisible por $(x-a)$, R debe ser cero, o sea, $D(a)$ debe anularse. Se tiene así la siguiente conclusión:

Un polinomio cualquiera, D(x), es divisible por el binomio **x − a,** *si y solamente si, el dividendo se anula para* $x=a$, *o sea, si* $D(a)=O$.

En seguida haremos uso de esta propiedad.

VALOR NUMERICO DE UN POLINOMIO PARA x=a

La propiedad del resto de la división de $D(x)$ por $(x-a)$ se expresa así· $R=D(a)$. Si leemos esta igualdad en sentido inverso concluímos que:

El valor numérico, $D(a)$, de un polinomio $D(x)$, cuando se sustituye **x** *por* **a** *es igual al resto de la división de $D(x)$ por* **x − a.**

Ejemplos

1. El valor numérico de $3x^5-2x^4+3x^3-2x^2+x-4$ para $x=2$ es el resto de la división de dicho polinomio por **x − 2;** hallando el resto por la Regla de Ruffini, obtenemos:

	3	−2	3	−2	+1	−4
2)		6	8	22	40	82
	3	4	11	20	41	78=*R.*

El valor numérico del polinomio dado para $x=2$ es **78,** o sea, que $3x2^5-2x2^4+3x2^3-2x2^2+2-4=78$, como debe comprobar el alumno, sólo que con la Regla de Ruffini el resultado se obtiene más cómodamente. A este método de Ruffini para hallar el valor numérico de un polinomio, para un valor dado a la variable, se le llama *"Método para la evaluación de polinomios".*

2. Hallar el valor numérico de $5x^4-3x^3+2x^2-x+6$ para $x=-3$.

En este caso hay que hallar el resto de la división del polinomio por $x-(-3)$. Se hace como se indica a continuación:

	5	− 3	2	− 1	+6
−3)		− 15	54	− 168	507
	5	− 18	56	− 169	**513=R.**

El valor numérico pedido es **513,** o sea, que $5\times(-3)^4-3\times(-3)^3+2\times\times(-3)^2-(-3)+6=$ **513.**

Comprube el alumno este valor por sustitución directa en el polinomio.

Ejercicios

1. Averiguar si el valor $x=4$ anula al polinomio $3x^4-14x^3+9x^2-3x-4$. Ayuda: Hállese el resto de la división del polinomio por **x − 4,** aplicando la Regla de Ruffini, y véase si dicho resto es cero.

2. Hallar el valor numérico del polinomio

$-3x^5+2x^4-7x^3+4x^2-x+1$ para $x=-5$.
Ayuda: Divídase el polinomio por **x − (−5),** aplicando la Regla de Ruffini; el resto de la división es el valor pedido.

3. ¿Cuál de los dos polinomios siguientes tiene mayor valor numérico para $x=-6$?

1º) $5x^5-3x^4+2x^3-5x^2+4x-8$,
2º) $-4x^5+3x^4-2x^3+8x^2-9x+120$.

4. Cambiar los términos independientes de los polinomios siguientes para que sean divisibles por **x − 3:**

1º) $3x^4-2x^3+3x^2-6x+8$,
2º) $4x^5-3x^4+2x^2-1$, 3º) $5x^6-3x^4+2x^2-x+1$.

DIVISIONES DE LA FORMA $(x^m \pm a^m) \div (x \pm a)$

Un caso particular muy notable de las divisiones del tipo Ruffini (divisor $x \pm a$) lo constituye la *división de suma o diferencia de potencias por suma o diferencia de sus bases;* pueden presentarse cuatro casos según las combinaciones posibles de los signos + y −; estos casos son:

1º) $\dfrac{x^m+a^m}{x+a}$, 2º) $\dfrac{x^m+a^m}{x-a}$, 3º) $\dfrac{x^m-a^m}{x+a}$ y 4º) $\dfrac{x^m-a^m}{x-a}$

Los cocientes de estas divisiones siguen una ley muy regular, que observaremos en varios ejemplos y luego generalizaremos, después de lo cual estarás en condiciones de escribirlos directa e inmediatamente.

Ejemplos

1. Hallar el cociente y el resto de la división $\dfrac{x^3+a^3}{x+a}$

El dividendo es un polinomio *incompleto* pues faltan las potencias x^2 y x; como ya dijimos, se considera el cero como coeficiente de esas potencias; en cuanto al divisor, es de la forma $\mathbf{x-(-a)}$.

El esquema de Ruffini es el siguiente:

$$\begin{array}{l r|rrrr}
\text{Coeficientes del dividendo:} & & 1 & 0 & 0 & +a^3 \\
 & -a) & & -a & +a^2 & -a^3 \\ \hline
\text{Coeficientes del cociente:} & & 1 & -a & +a^2 & 0 = \text{Resto.}
\end{array}$$

El cociente es: $\mathbf{x^2-ax+a^2}$, y el resto nulo, de forma que la división es exacta y podemos escribir:

$$\boxed{\frac{\mathbf{x^3+a^3}}{\mathbf{x+a}}=\mathbf{x^2-ax+a^2}.} \qquad (1).$$

Se ve que el cociente es un polinomio homogéneo de grado $3-1=2$, respecto de x y de a; las potencias de x van decreciendo y las de a aumentando; además los signos alternan positivos y negativos.

2. Hallar el cociente y el resto de la siguiente división: $\dfrac{x^4+a^4}{x-a}$

Procediendo igual que en el ejemplo anterior obtenemos:

$$\begin{array}{l r|rrrrr}
\text{Coeficientes del dividendo:} & & 1 & 0 & 0 & 0 & +a^4 \\
 & +a) & & +a & +a^2 & +a^3 & +a^4 \\ \hline
\text{Coeficientes del cociente:} & & 1 & +a & +a^2 & +a^3 & 2a^4=R.
\end{array}$$

Cociente: $\mathbf{x^3+ax^2+a^2x+a^3}$, Resto $=2a^4$.

El cociente tiene las mismas características que en el ejemplo anterior: es homogéneo de grado $4-1=3$, en las letras x y a; los signos son todos positivos (cuando el divisor es $\mathbf{x-a}$) y a medida que disminuyen las potencias de x aumentan las de a. En este caso (suma de potencias dividida por diferencia de sus bases) la división no es exacta.

3. *Dividir x^4-a^4 por $x+a$.*

El esquema es el siguiente:

$$\begin{array}{l r|rrrrr}
\text{Coeficientes del dividendo:} & & 1 & 0 & 0 & 0 & -a^4 \\
 & -a) & & -a & +a^2 & -a^3 & +a^4 \\ \hline
 & & 1 & -a & +a^2 & -a^3 & 0 = \text{Resto}
\end{array}$$

Cociente: $x^3-ax^2+a^2x-a^3$, Resto $=0$. (División exacta).

Las características del cociente son análogas a las de los ejemplos anteriores; los signos alternan positivos y negativos, lo cual ocurre siempre que el divisor es $\mathbf{x+a}$.

4. *Dividir x^5-a^5 por $x-a$.*

$$\begin{array}{l r|rrrrrr}
\text{Coeficientes del dividendo:} & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a^5 \\
 & +a) & & +a & +a^2 & +a^3 & +a^4 & +a^5 \\ \hline
 & & 1 & +a & +a^2 & +a^3 & +a^4 & 0 = \text{Resto.}
\end{array}$$

Cociente: $x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4$, Resto $=0$. (División exacta).

Las características del cociente son análogas a las de los casos anteriores; los signos son *todos positivos*, lo cual ocurre siempre que el divisor es $x-a$.

Ejercicios

Trata de obtener los cocientes y los restos de las divisiones que se indican a continuación, observando la ley que sigue en cada caso el ejemplo análogo propuesto anteriormente; si no te es posible, emplea el esquema de Ruffini.

1. $\dfrac{x^4+a^4}{x+a}$, 2. $\dfrac{x^5+a^5}{x-a}$, 3. $\dfrac{x^7-a^7}{x-a}$, 4. $\dfrac{x^6-a^6}{x-a}$.

DIVISIBILIDAD DE $\mathbf{x^m \pm a^m}$ entre $\mathbf{x \pm a}$:

Ahora vamos a aplicar el teorema del resto para investigar en qué casos la suma o diferencia de potencias es divisible por la suma o diferencia de sus bases.

Primer Caso: $\dfrac{x^m+a^m}{x+a}$. Para obtener el resto hay que sustituir en el dividendo x por $-a$ (por ser el divisor $x+a=x-(-a)$).

Se tiene: $R=(-a)^m+a^m=\begin{cases} 0 \text{ si } m \text{ es impar} \\ +2a^m \text{ si } m \text{ es par.}\end{cases}$

Conclusión: *La suma de potencias es divisible por la suma de sus bases cuando el exponente es impar.*

Segundo Caso: $\dfrac{x^m+a^m}{x-a}$. Para obtener el resto hay que sustituír en el dividendo x por $+a$.

Se tiene: $R=a^m+a^m = \mathbf{2a^m}$.

Conclusión: *Suma de potencias nunca es divisible por la diferencia de sus bases.*

Tercer Caso: $\dfrac{x^m-a^m}{x+a}$. Para obtener el resto hay que sustituir en el dividendo x por $-a$ (por ser el divisor $x+a$).

Se tiene: $R=(-a)^m-a^m=\begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ es par.} \\ -2a^m & \text{si } m \text{ es impar.} \end{cases}$

Conclusión: *La diferencia de potencias es divisible por la suma de sus bases cuando el exponente es par.*

Cuarto Caso: $\dfrac{x^m-a^m}{x-a}$. Para obtener el resto hay que sustituir en el dividendo x por $+a$.

Se tiene: $R=a^m-a^m=0$, cualquiera que sea m.

Conclusión: *La diferencia de potencias siempre es divisible por la diferencia de sus bases.*

En los ejemplos siguientes aplicamos las conclusiones anteriores para decidir si las divisiones que se indican son exactas y en caso negativo obtenemos su resto:

1. $\dfrac{x^7+a^7}{x+a}$, *Exacta.*
2. $\dfrac{x^6+a^6}{x+a}$, *Inexacta,* $R=+2a^6$.
3. $\dfrac{x^4+a^4}{x-a}$, *Inexacta,* *Resto*$=2a^4$.
4. $\dfrac{x^5+a^5}{x-a}$, *Inexacta,* $R=2a^5$.
5. $\dfrac{x^6-a^6}{x+a}$, *Exacta.*
6. $\dfrac{x^9-a^9}{x+a}$, *Inexacta,* $R=-2a^9$.
7. $\dfrac{x^8-a^8}{x-a}$, *Exacta.*
8. $\dfrac{x^{11}-a^{11}}{x-a}$, *Exacta.*

Obtener los cocientes y los restos (cuando sean inexactas) de las siguientes divisiones:

1. $\dfrac{x^8-a^8}{x-a}$
2. $\dfrac{x^9+a^9}{x+a}$
3. $\dfrac{x^6-a^6}{x-a}$
4. $\dfrac{x^7+a^7}{x+a}$
5. $\dfrac{x^7+a^7}{x-a}$
6. $\dfrac{x^8+a^8}{x+a}$
7. $\dfrac{x^4-a^4}{x+a}$
8. $\dfrac{x^7-a^7}{x+a}$

EJERCICIOS 2.4

Proponemos aquí, como recapitulación, uno o dos ejercicios de los tipos tratados en esta sección.

1. Explicar cuáles de las siguientes divisiones de monomios dan como resultado un monomio entero (dividendo múltiplo del divisor) y cuáles dan un monomio fraccionario; después obtener los cocientes exactos y realizar la prueba:

a) $\dfrac{3a^2b^3x^4yz^3}{-2ab^2x^3z^2}$

b) $\dfrac{-2m^3x^3y^4z^5}{5mx^2y^2z^3}$

c) $\dfrac{-4p^3q^2y^3z^3}{2p^2q^3y^4z}$

d) $\dfrac{-6mp^3u^2z^3}{3m^2pu^3z}$

Ejercicios

e) $\dfrac{-8ab^2x^3}{2ab^2x}$, f) $\dfrac{-5cd^3t^2v}{15ab^2t^3v^2}$.

2. Escribir los cocientes exactos (enteros o fraccionarios) correspondientes a las siguientes divisiones y efectuar la prueba:

a) $(-2a^3bc+3b^2c^3x^2-2a^2b^3cx^4) \div 5bc$
b) $(-6m^2n^3u^3+4m^3n^2u^2v^3-8mnu^2) \div 2mnu^2$
c) $(3x^3y^2z^4+2x^2y^3z-5xy^2z) \div 4x^2y^3z^4$

3. Hallar los cocientes y los restos de las divisiones de polinomios que se indican; después realizar la prueba:

a) $(4x^4-2x^3+3x^2-x+2) \div (2x^2-x+1)$
b $(-6x^5+3x^4-4x^2+8) \div (3x^3+4x-5)$
c) $(-8x^6+4x^4-2x^2+8) \div (3x^4-3x^2+2)$

4. Aplicar la Regla de Ruffini a las siguientes divisiones para obtener su cociente y su resto.

a) $(5x^4-3x^2+1) \div (x+5)$
b) $(3x^8-4x^4+2x-1) \div (x-4)$
c) $(-2x^5+3x^4-2x^3+x^2-6x+8) \div (x+1)$
d) $(3x^4-2x^2+1) \div (x+6)$

5. Aplicar el *teorema del resto* para hallar los valores numéricos de los siguientes polinomios para los valores que se indican:

a) $6x^5-3x^4+2x^3+x^2-9x+280$ para $x=-5$
b) $-3x^4+2x^3-6x^2+8x-3$ para $x=5$
c) $4x^6-2x^4+x^3-x+1$ para $x=-10$

6. Encontrar los cocientes y restos de las siguientes divisiones sin efectuar las operaciones (recordando las leyes que siguen los cocientes y el teorema del resto, $R=D(a)$.):

a) $\dfrac{x^6-y^6}{x-y}$ b) $\dfrac{y^5+z^5}{y+z}$ c) $\dfrac{m^5-n^5}{m+n}$

d) $\dfrac{m^4-n^4}{m+n}$ e) $\dfrac{u^4+v^4}{u+v}$ f) $\dfrac{p^5-q^5}{p-q}$

g) $\dfrac{a^4+b^4}{a-b}$ h) $\dfrac{x^5+y^5}{x-y}$

Alina D. Costa

Ejercicios

7. Averiguar las divisiones de la forma $\dfrac{x^m \pm a^m}{x \pm a}$ de las cuales provienen los siguientes cocientes, sabiendo que son exactos:

a) x^2+x+1 b) x^2-x+1
c) a^2+ab+b^2 d) a^2-ab+b^2
e) $x^3+x^2y+xy^2+y^3$ f) $x^3-x^2y+xy^2-y^3$
g) $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$

2.5 POTENCIACION DE EXPRESIONES ENTERAS

I) POTENCIA DE UN MONOMIO:

Fundamento: La elevación de un monomio a un exponente entero (positivo, nulo o negativo) se funda en las siguientes reglas del cálculo con potencias:

a) $(a \,.\, b \,.\, c)^n = a^n \,.\, b^n \,.\, c^n$ (válida para n entero cualquiera).
b) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ (válida también para m y n enteros cualesquiera).

Ejemplos

1. $(x \,.\, y \,.\, z)^3 = x^3 \,.\, y^3 \,.\, z^3$
2. $(mnp)^{-2} = m^{-2} \,.\, n^{-2} \,.\, p^{-2} = \dfrac{1}{m^2} \cdot \dfrac{1}{n^2} \cdot \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{m^2n^2p^2}$
3. $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$
4. $(a^{-2})^{-4} = a^8$
5. $(a^0)^{-3} = a^0 = 1$

Si has comprendido las reglas de cálculo con potencias repasadas, (a) y (b), te parecerá natural la siguiente regla para elevar un monomio a un exponente entero cualquiera:

REGLA: Para elevar un monomio (entero o fraccionario) a un exponente entero cualquiera, se eleva el coeficiente a dicho exponente y los exponentes de las letras se multiplican por el mismo exponente.

Ejemplos

1. $(-3a^2b^3cx^5)^4=(-3)^4 \,.\, a^{2\cdot 4} \,.\, b^{3\cdot 4} \,.\, c^{1\cdot 4} \,.\, x^{5\cdot 4} = +\,81a^8b^{12}c^4x^{20}$
2. $(-2a^{-1}x^3y^{-2}z^4)^{-3} = (-2)^{-3} \,.\, a^{(-1)\cdot(-3)}\, x^{3(-3)}\, y^{(-2)\cdot(-3)}\, z^{4(-3)} = -\frac{1}{8}a^3x^{-9}y^6z^{-12}$
3. $(-\frac{1}{2}u^3v^{-2}z^{-3})^{-2}=(-\frac{1}{2})^{-2} \,.\, u^{3(-2)}\, v^{(-2)(-2)}\, z^{(-3)(-2)} = 4u^{-6}\,v^4z^6$
4. $(-\frac{1}{3}\,x^{-2}y^3z^{-4})^{-1} = (-\frac{1}{3})^{-1}\, x^{(-2)(-1)}\, y^{3(-1)}\, z^{(-4)(-1)} = -\,3x^2y^{-3}z^4$

Ejercicios

1. $(\frac{1}{4}\,a^2b^3cz^2)^3 = -?-$
2. $(-\frac{1}{3}\,u^{-2}v^3z^{-5})^{-2} = -?-$
3. $(-\frac{2}{3}\,p^2q^{-2}t^3)^5 = -?-$
4. $(-\frac{2}{5}\,a^2bc^3)^0 = -?-$
5. $(-\frac{1}{2}\,x^3y^2z^{-4})^{(-4)} = -?-$
6. $(-\frac{1}{3}\,a^2x^{-3}y^3)^{(-3)} = -?-$

II) POTENCIA DE UN BINOMIO:

Comenzaremos estudiando el cuadrado y el cubo de un binomio, para obtener después una regla general para hallar la potencia de un binomio, aunque este tema será estudiado más profundamente al final de este libro, cuando se traten los números combinatorios.

a) *CUADRADO DE UN BINOMIO:*

Sea el binomio $(a+b)$; para hallar su cuadrado basta multiplicarlo por sí mismo:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ + \, ba + b^2 \\ \hline (\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{2ab} + \mathbf{b}^2 \end{array}$$

La fórmula anterior se traduce en palabras mediante la siguiente

REGLA: *El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer monomio, más el doble producto del primer monomio por el segundo, más el cuadrado del segundo monomio.*

Ejemplos

1. $(x+2y)^2 = x^2+2 \,.\, x(2y)+(2y)^2=x^2+4xy+4y^2$
2. $(a^2bx+b^2xy)^2=(a^2bx)^2+2a^2bx \,.\, b^2xy+(b^2xy)^2 = a^4b^2x^2+2a^2b^3x^2y+b^4x^2y^2$
3. $(a-b)^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2 = \mathbf{a^2-2ab+b^2}$

   (Dar una regla para el cuadrado de una diferencia).

4. $(3xy-ab^2x)^2=(3xy)^2-2.3xy \,.\, ab^2x+(ab^2x)^2=9x^2y^2-6ab^2x^2y+a^2b^4x^2$

Ejercicios

1. $(3abx+2yz)^2 = -?-$
2. $(-2ax-3by)^2 = -?-$
3. $(5mn^2x-3m^2ny^3)^2 = -?-$
4. $(2ax+b)^2 = -?-$
5. $(-4pq+5bz^2)^2 = -?-$
6. $(-2m^2xy-5bz^2)^2 = -?-$

* * *

b) *CUBO DE BINOMIO:*
El cubo de un binomio se obtiene multiplicando $(a+b)^2$ por $(a+b)$:

$$\begin{array}{rcl} (a+b)^2 & = & a^2+2ab+b^2 \\ & & \underline{\quad a+b \qquad\qquad} \\ & & a^3+2a^2b+ab^2 \\ & & \underline{\qquad +ba^2+2ab^2+b^3} \\ \mathbf{(a+b)^3} & = & \mathbf{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3} \end{array}$$

Este resultado se traduce en la siguiente

REGLA: *El cubo de un binomio es igual al cubo del primer monomio, más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.*

Ejemplos

1. $(2x+3y)^3=(2x)^3+3(2x)^2 \,.\, 3y+3 \,.\, (2x) \,.\, (3y)^2+(3y)^3=$
   $=8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$
2. $(3a^2b+2b^2a)^3=(3a^2b)^3+3(3a^2b)^2 \,.\, (2b^2a)+3(3a^2b) \,.\, (2b^2a)^2+$
   $+(2b^2a)^3=27a^6b^3+54a^5b^4+36a^4b^5+8b^6a^3$
3. $(a-b)^3=[a+(-b)]^3=(a)^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3=$
   $=a^3-3a^2b+3ab^2+b^3$ (Dar una regla para el cubo de una diferencia).
4. $(2xy-3ax)^3=(2xy)^3-3(2xy)^2 \,.\, (3ax)+3(2xy)(3ax)^2-(3ax)^3=$
   $=8x^3y^3-36x^3y^2a+54x^3a^2y-27a^3x^3$

Ejercicios

1. $(2a+3b)^3$ = —?—
2. $(5xy-4uv)^3$ = —?—
3. $(ax+by)^3$ = —?—
4. $(ax-by)^3$ = —?—
5. $(mx^3y^3+nxy^2)^3$ = —?—
6. $(5xy-3uv)^3$ = —?—

POTENCIAS DE UN BINOMIO DE EXPONENTE SUPERIOR A TRES:

Tratemos de observar las potencias sucesivas de un binomio para encontrar una regla general que nos permita obtener rápidamente la potencia de cualquier grado de un binomio.

Ya conocemos hasta el cubo, o sea:

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Multiplicando $(a+b)^3$ por $(a+b)$ obtenemos $(a+b)^4$:

$$\begin{array}{rcl} (a+b)^3 & = & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ & & \underline{\qquad a+b \qquad\qquad\qquad} \\ & & a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3 \\ & & \underline{\qquad + a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4} \\ \mathbf{(a+b)^4} & = & \mathbf{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4} \end{array}$$

Si multiplicáramos $(a+b)^4$ por $(a+b)$ obtendríamos $(a+b)^5$, y así sucesivamente; pero tratemos de obtener una regla *directa* que nos permita hallar la potencia de un binomio rápidamente.

La ley que sigue la parte literal de los términos es muy sencilla: Se trata de polinomios homogéneos en las letras a y b, de igual grado que el exponente del binomio; por ejemplo, el desarrollo de $(a+b)^3$ es un polinomio homogéneo en a y b de *tercer* grado. Lo importante es descubrir la ley que siguen los coeficientes. Para ello vamos a colocar *los coeficientes* de las potencias sucesivas de $(a+b)$ en forma de triángulo *(El triángulo de Tartaglia)*, con el fin de descubrir la relación que existe entre los coeficientes de una potencia de $(a+b)$ y los de la potencia siguiente:

Potencias de $(a+b)$

$$\begin{array}{ll} (a+b)^1 = a+b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 1 & & & \end{array} \\ (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \ldots\ldots\ldots & \begin{array}{ccccccccc} & & 1 & & 2 & & 1 & & \end{array} \\ (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \ldots\ldots & \begin{array}{ccccccccc} & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \end{array} \\ (a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \ldots & \begin{array}{ccccccccc} 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array} \end{array}$$

Se observa que *los coeficientes extremos son "unos" y cada coeficiente no extremo es la suma de los dos que tiene encima.*

Ejemplos: $3=1+2$, $4=1+3$, $6=3+3$, etc.

Al final de este libro probaremos que esta ley se sigue cumpliendo siempre, pero ahora vamos a utilizarla para obtener los desarrollos de $(a+b)^5$ y $(a+b)^6$; para ello basta añadir dos nuevas filas al triángulo de Tartaglia, siguiendo la ley enunciada (extremos iguales a 1 y no extremos iguales a la suma de los dos de encima); los coeficientes de $(a+b)^5$ son por tanto: 1, 5, 10, 10, 5, 1; y los de $(a+b)^6$ son: 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. Los desarrollos correspondientes son:

$$\mathbf{(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5}$$
$$\mathbf{(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6}$$

De acuerdo con este método, si quisiéramos obtener por ejemplo el desarrollo de $(a+b)^{15}$, tendríamos que seguir ampliando el triángulo de Tartaglia (siempre con la ley enunciada) hasta llegar a su fila 15; esto no sería difícil, pero vamos a investigar una regla directa.

Observa atentamente el desarrollo de $(a+b)^6$ y comprueba tú mismo que se cumple la siguiente

REGLA: a) *El primer coeficiente es la unidad.*
b) *El segundo coeficiente es el exponente* (en este caso, 6).
c) *Cualquier otro coeficiente se obtiene multiplicando el coeficiente anterior por el exponente de* **a** *y dividiéndolo por el exponente de* **b** *aumentado en una unidad.*

Comprobemos la parte c) de la regla con algunos coeficientes:

$$15=\frac{6\times5}{2},\qquad 20=\frac{15\times4}{3},\qquad 15=\frac{20\times3}{4},\qquad 6=\frac{15\times2}{5}.$$

Esta ley de formación de los coeficientes, que hemos observado en el desarrollo de $(a+b)^6$, se cumple para cualquier potencia de un binomio, lo cual será probado más adelante. El uso de la ley expresada en a), b) y c), nos permite obtener **directamente** cualquier potencia de un binomio.

Apliquémosla al desarrollo de $(a+b)^7$:

$$(a+b)^7=a^7+7a^6b+\frac{7\times6}{2}a^5b^2+\frac{7\times6\times5}{2\times3}a^4b^3+$$
$$+\frac{7\times6\times5\times4}{2\times3\times4}a^3b^4+\frac{7\times6\times5\times4\times3}{2\times3\times4\times5}a^2b^5+$$
$$+\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2}{2\times3\times4\times5\times6}ab^6+\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times3\times4\times5\times6\times7}b^7=$$
$$=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7.$$

En la práctica se va calculando cada coeficiente (no se deja indicado como hemos hecho), y además se simplifica el trabajo porque los coeficientes extremos y equidistantes de los extremos son iguales, de forma que solo hay que calcular la mitad de los coeficientes (o la mitad más uno cuando el exponente es par).

Ejercicios

1. Desarrolla $(a+b)^4$, $(a+b)^5$ y $(a+b)^6$ aplicando las partes a), b) y c) de la regla anterior y comprueba que obtienes los mismos desarrollos ya dados en el texto.

2. Desarrolla $(a+b)^{10}$, primero formando un triángulo de Tartaglia hasta la fila décima, y después aplicando directamente la regla anterior.

III) CUADRADO DE UN POLINOMIO:

El cuadrado de $(a+b+c)$ se obtiene multiplicándolo por sí mismo:

$$\begin{array}{r}
a+b+c\\
a+b+c\\
\hline
a^2+ab+ac+b^2+bc\\
ab+ac\qquad +bc+c^2\\
\hline
(a+b+c)^2=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2,
\end{array}$$

o bien, ordenándolo,

$$\mathbf{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}$$

Esta fórmula se enuncia en palabras así·

REGLA: *El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de sus monomios, más la suma de dobles productos de cada monomio por cada uno de los que le siguen.*

La fórmula anterior se puede obtener también aplicando la propiedad asociativa de la suma, y el desarrollo del cuadrado de un binomio, así:

$$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2+2(a+b)c+c^2 =$$
$$= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

Ejemplos

1. *Obtener el desarrollo de* $(a+b+c+d)^2$. Aplicando la ley asociativa de la suma y el cuadrado de un binomio se tiene sucesivamente:

$$(a+b+c+d)^2 = [(a+b) + (c+d)]^2 = (a+b)^2+2(a+b)(c+d) + (c+d)^2 =$$
$$= a^2+2ab+b^2+2ac+2ad+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2 =$$
$$= a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

Rige la misma regla obtenida anteriormente con un trinomio.

2. $(axy+bzt+cuv)^2 = a^2x^2y^2+b^2z^2t^2+c^2u^2v^2+2abxyzt+2acxyuv+2bcztuv.$
3. $(a-b+c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc.$
4. $(a-b+c-d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2-2ab+2ac-2ad-2bc+2bd-2cd.$

Ejercicios

1. $(a-b-c)^2 =$ —?—
2. $(a-b-c+d)^2 =$ —?—
3. $(2xy-3zt-5uv)^2 =$ —?—
4. $(-x^2y+2z^3t-3xu^2)^2 =$ —?—
5. $(ab-cd+ef)^2 =$ —?—
6. $(a^2+b^2-c^2+d^2)^2 =$ —?—

2.6 RAIZ N-SIMA DE UN MONOMIO

Definición: *La raíz n-sima de un monomio es otro monomio, cuando existe, que elevado a* **n** *nos da el radicando.*

Demostremos el siguiente teorema fundamental:

$$\sqrt[n]{a\,.\,b\,.\,c} = \sqrt[n]{a}\,.\quad \sqrt[n]{b}\,.\quad \sqrt[n]{c}\,, \qquad (1).$$

El segundo miembro será la verdadera raíz n-sima del primero si elevado a *n* nos da el radicando del primer miembro; pero en efecto se tiene:

$$(\sqrt[n]{a}\,.\ \sqrt[n]{b}\,.\ \sqrt[n]{c}\,)^n = (\sqrt[n]{a})^n.\ (\sqrt[n]{b})^n.\ (\sqrt[n]{c})^n = a\,.\,b\,.\,c\,.$$

La fórmula (1) nos dice que: *La raíz n-sima de un monomio es igual al producto de las raíces n-simas de sus factores.*

Ejemplos

1. $\sqrt[3]{8a^6b^9c^{12}} = \sqrt[3]{8}\,.\quad \sqrt[3]{a^6}\,.\quad \sqrt[3]{b^9}\,.\quad \sqrt[3]{c^{12}} = 2\,.\,a^2\,b^3\,c^4.$

   Prueba· $(2a^2b^3c^4)^3 = 8a^6b^9c^{12}$, que es el radicando.

2. $\sqrt[5]{-32x^5y^{10}z^{15}} = -\,2xy^2z^3.$

   Prueba: $(-2xy^2z^3)^5 = -32x^5y^{10}z^{15}$, que es el radicando.

Ejercicios

1. $\sqrt{16a^4b^2c^6} =$ —?—
2. $\sqrt[3]{-27x^3y^6z^{18}} =$ —?—
3. $\sqrt[4]{81m^4n^8p^{12}} =$ —?—
4. $\sqrt[5]{32r^{10}s^{20}t^{30}} =$ —?—

REVISION DE CONCEPTOS DEL CAPITULO 2

1. ¿Qué es una expresión algebraica?

2. ¿Qué se entiende por valor numérico de una expresión algebraica? ¿Existe siempre valor numérico para una expresión algebraica o hay algunos casos en los que no se obtiene valor numérico real para la expresión al sustituir las letras por ciertos números? ¿Cuáles son estos casos? ¿Cómo se obtiene el valor numérico de una expresión algebraica?

3. ¿Qué es una fórmula? ¿Son útiles las fórmulas? Cita algunos ejemplos de fórmulas.

4. Conocida una regla (con palabras) que relacionan a varias cantidades por medio de ciertas operaciones (sumas, productos, cocientes, etc.), ¿se puede obtener una fórmula que represente a la regla? ¿Tiene esto utilidad?

5. ¿Qué es un monomio entero?

6. ¿Cuántas partes se distinguen en un monomio entero? (coeficiente numérico y parte literal, y en la parte literal se distinguen letras y exponentes).

7. ¿Qué se entiende por grado total de un monomio? ¿Y por grado respecto de algunas o alguna de sus letras?

8. ¿Cuándo se dice que dos monomios son semejantes? ¿Y opuestos? Cita algunos ejemplos de monomios semejantes y de monomios opuestos.

9. ¿Qué es un polinomio entero? ¿Qué es un binomio? ¿Y un trinomio?

10. ¿Qué se entiende por grado de un polinomio respecto de todas sus letras? ¿Y por grado respecto a varias de sus letras? ¿Y por grado respecto de una letra?

11. ¿Qué es un polinomio homogéneo?

12. ¿Qué es un polinomio ordenado respecto de las potencias de una letra? Escribe un polinomio de quinto grado, completo, ordenado según las potencias decrecientes de su variable, y otro de cuarto grado ordenado según las potencias crecientes de su variable.

13. Explica lo que son expresiones enteras.

14. ¿Qué es una fracción algebraica?. Cuando ni en el numerador ni en el denominador figuran signos + ó −, ¿se puede escribir la fracción algebraica en forma de monomio con exponentes negativos? Escribe algunos ejemplos.

15. ¿Qué es una expresión irracional? Escribe algunos ejemplos de expresiones irracionales.

16. Haz un cuadro sinóptico con la clasificación general de las expresiones algebraicas.

17. ¿Cómo se suman dos monomios? ¿Y si los monomios son semejantes? ¿Cuánto vale la suma de dos monomios opuestos?

18. ¿Cómo se suman varios polinomios? ¿Cómo se dispone la operación para reducir los términos semejantes? ¿En qué se basa la reducción de términos semejantes?

19. ¿Cómo se define la diferencia de dos monomios? ¿Cómo se obtiene la diferencia de dos monomios?

20. ¿Cómo se obtiene la diferencia de dos polinomios?

21. ¿Cumple la diferencia así obtenida la condición de que su suma con el sustraendo es igual al minuendo? ¿Por qué?

22. ¿Cómo se suprime un paréntesis precedido del signo +? ¿Y si está precedido del signo −?

23. ¿Cuál es el fundamento de la multiplicación de monomios? ¿Cómo se multiplican dos monomios?

24. ¿Cuál es el fundamento de la multiplicación de un monomio por un polinomio? ¿Cómo se multiplica un monomio por un polinomio?

25. Explicar el fundamento de la multiplicación de dos polinomios. ¿Cómo se disponen los cálculos en la práctica para realizar cómodamente la reducción de términos semejantes en la multiplicación de dos polinomios?

26. ¿Cuál es el grado del producto de dos polinomios?

27. ¿Cómo se define el cociente de dos monomios?

28. ¿Es posible, mediante algún artificio, lograr que el dividendo y el divisor aparezcan con las mismas letras? ¿Cómo se logra esto? ¿Cuál es el fundamento de la regla para dividir dos monomios?

29. ¿Cuál es la regla para obtener el cociente de dos monomios?

30. ¿Qué condición debe cumplirse para que el cociente sea un monomio entero, es decir, para que el dividendo sea múltiplo del divisor?

31. ¿Cuál es el fundamento para dividir un polinomio por un monomio? ¿Cuándo resultará como cociente un polinomio entero?

32. ¿Cómo se obtiene el primer término del cociente de dos polinomios? ¿Cómo se obtiene el primer dividendo parcial? ¿Cómo se obtiene el segundo término del cociente? ¿Cómo se obtiene el segundo dividendo parcial? ¿Cómo se obtiene el tercer término del cocien-

te? ¿Cuándo se detiene la operación? ¿De qué grado es el cociente? ¿Cuándo se dice que la división es exacta? ¿Qué relación existe entre el dividendo, el divisor y el cociente exacto? ¿Qué relación existe entre el dividendo, el divisor, el cociente y el resto de una división inexacta? ¿En qué consiste la prueba?

33. ¿Existe una regla especial para dividir un polinomio, ordenado según las potencias decrecientes de x, por el binomio $x-a$? ¿Cómo se llama esta regla?
¿Podrías obtener la ley que siguen los coeficientes del cociente de la división de $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$ por $x-a$?
¿Cuál es el grado del cociente? ¿Cómo se dispone en la práctica la operación? ¿Qué cambio hay que hacer cuando el divisor es $x+a$?

34. Enuncia y demuestra el teorema del resto.

35. ¿Cómo se averigua si una división de un polinomio por $x-a$ es exacta aplicando el teorema del resto?

36. ¿Cómo se halla el valor numérico de un polinomio para $x=a$ aplicando el teorema del resto? ¿Resulta este método más rápido que la sustitución directa de x por a en el polinomio?

37. ¿Cómo se obtienen rápidamente los cocientes de la forma $\dfrac{x^m \pm a^m}{x \pm a}$?

38. ¿En qué casos las divisiones de la forma $\dfrac{x^m \pm a^m}{x \pm a}$ dan cocientes exactos?

39. ¿Cuál es el fundamento para elevar un monomio a una potencia? ¿Cómo se eleva un monomio a una potencia?

40. Demuestra la regla para hallar el cuadrado de un binomio: $(a \pm b)^2$ = —?—

41. Demuestra la regla para hallar el cubo de un binomio: $(a \pm b)^3$ = —?—

42. Explica cómo se obtienen los coeficientes del desarrollo de la potencia de un binomio, mediante el triángulo de Tartaglia y directamente.

43. Demuestra la regla para obtener el desarrollo del cuadrado de un polinomio.

44. ¿Cómo se define la raíz n-sima de un monomio?

* * *

CUESTIONARIO DE SELECCION

Selecciona la afirmación que corresponda al concepto enunciado al principio:

1. Las letras que se usan en Algebra representan:

a) un número fijo cada letra;
b) cualquier número real cada letra;
c) números enteros o fraccionarios.

2. La expresión algebraica $\sqrt{x-a}$, $a>o$, tiene valor numérico real:

a) para todos los números reales;
b) solo para los números reales x que sean iguales o mayores que a;
c) solo para los valores reales de x que sean menores que a.

3. La expresión algebraica $\dfrac{x}{x-2}$ tiene valor numérico real:

a) para todo valor real de x distinto de 2;
b) para todos los valores reales de x;
c) para todo valor real de x mayor de 2.

4. La expresión algebraica $\dfrac{\sqrt{2}}{3+x} - 3\sqrt{5}x+1$ es:

a) entera;
b) fraccionaria;
c) irracional.

5. Un polinomio es homogéneo respecto de dos letras si:

a) tiene igual grado respecto de las dos letras;
b) en todos los términos intervienen las dos letras;
c) la suma de los exponentes de las dos letras es la misma en todos los términos del polinomio.

6. Un polinomio reducido completo de 5º grado respecto de una letra tiene:

a) cinco términos;
b) seis términos;
c) más de seis términos.

7. El polinomio opuesto de un polinomio dado se obtiene:

a) cambiando de signo su término de mayor grado;
b) cambiando de signo su término independiente;
c) cambiando de signo todos los términos del polinomio.

8. Dos términos semejantes son los que tienen:

a) el mismo coeficiente;
b) el mismo grado;
c) coeficiente distinto de cero y la misma parte literal.

9. La suma de dos monomios semejantes es:

a) otro monomio semejante cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes;
b) un binomio reducido;
c) cero.

10. El grado de una suma de polinomios es:
a) la suma de los grados de los polinomios que se suman;
b) el grado del polinomio sumando de menor grado;
c) el grado de los polinomios sumandos de menor grado;
d) igual o menor que el grado de los sumandos de mayor grado.

11. La suma de varios polinomios es:

a) siempre otro polinomio;
b) un polinomio, un monomio o un número real;
c) un polinomio de grado mayor que los grados de los sumandos.

12. Para restar dos monomios:

a) se forma un binomio con los dos monomios cambiados de signo;
b) se forma un binomio con los dos monomios, cambiando de signo al primero;
c) se forma un binomio con los dos monomios, cambiando de signo al segundo.

13. Para restar dos polinomios:

a) se forma un solo polinomio con todos los términos de los dos cambiados de signo;
b) se forma un solo polinomio con todos los términos de los dos y cambiando de signo a los términos del segundo;
c) se forma un solo polinomio con todos los términos de los dos y cambiando de signo a los del primero.

14. La regla para multiplicar dos monomios se funda en:

a) las leyes conmutativa y asociativa del producto y la ley para multiplicar potencias de igual base;
b) en la ley para multiplicar potencias del mismo exponente;
c) en la ley para elevar una potencia a otra potencia.

15. La multiplicación de un polinomio por un monomio se basa en:

a) la ley conmutativa de la suma;

b) la ley conmutativa de la multiplicación;
c) la ley distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

16. El grado del producto de dos polinomios es igual:

a) al grado del multiplicando;
b) al grado del multiplicador;
c) a la suma de los grados del multiplicando y del multiplicador.

17. Un monomio es múltiplo de otro, es decir, el cociente es un monomio entero, cuando se cumple que:

a) todas las letras del dividendo tienen exponentes mayores que las del divisor;
b) todas las letras del divisor figuran en el dividendo;
c) todas las letras del divisor figuran en el dividendo con exponentes iguales o mayores.

18. Para dividir un polinomio por un monomio:

a) se divide el primer término del polinomio por el monomio;
b) se divide cada término del polinomio por el monomio y se suman (algebraicamente) los cocientes obtenidos;
c) se restan a los exponentes de las letras del dividendo los exponentes de las letras del divisor.

19. En la división de dos polinomios el primer término del cociente se obtiene:

a) dividiendo el dividendo por el primer término del divisor;
b) dividiendo el primer término del dividendo por el primero del divisor;
c) dividiendo los coeficientes del primer término del dividendo y del divisor y elevando la variable al grado del divisor.

20. En la división de dos polinomios, ordenados según las potencias decrecientes de su variable, el primer dividendo parcial se obtiene:

a) restando del dividendo el divisor;
b) restando del dividendo el producto del primer término del cociente por el primero del divisor;
c) restando del dividendo el producto del primer término del cociente por todo el divisor.

21. En la división de dos polinomios, ordenados según las potencias decrecientes de su variable, el segundo término del cociente se obtiene:

a) dividiendo el segundo término del dividendo por el segundo del divisor;
b) dividiendo el primer término del primer dividendo parcial por el primer término del divisor;
c) dividiendo el segundo término del dividendo por el primero del divisor.

22. El resto de la división de dos polinomios, ordenados según las potencias decrecientes de su variable, es:

a) el tercer dividendo parcial;
b) el dividendo parcial de grado igual al divisor;
c) el primer dividendo parcial que se encuentra de grado menor que el divisor.

23. Cuando se divide un polinomio ordenado según las potencias decrecientes de la variable x por el binomio $x-a$, cada coeficiente del cociente (distinto del primero) es igual;

a) al coeficiente que ocupa el mismo lugar en el dividendo;
b) al coeficiente de igual lugar en el dividendo menos el anterior coeficiente del cociente multiplicado por a;
c) al coeficiente que ocupa igual lugar en el dividendo más el coeficiente anterior del cociente multiplicado por a.

24. La división $(x^m+a^m) \div (x+a)$ es exacta:

a) cuando el exponente es par;
b) cuando el exponente es impar;
c) siempre;
d) nunca.

25. La división $(x^m+a^m) \div (x-a)$ es exacta:

a) cuando el exponente es par;
b) cuando el exponente es impar;
c) siempre;
d) nunca.

26. La división $(x^m-a^m) \div (x+a)$ es exacta:

a) cuando el exponente es par;
b) cuando el exponente es impar;
c) siempre;
d) nunca.

27. La división $(x^m-a^m) \div (x-a)$ es exacta:

a) cuando el exponente es par;
b) cuando el exponente es impar;
c) siempre;
d) nunca.

28. La elevación de un monomio a una potencia se funda en:

a) la ley distributiva de la potenciación respecto del producto y en la regla para elevar una potencia a otra potencia;

Nuir 8º corto

b) en la regla para multiplicar potencias de la misma base;
c) en la regla para multiplicar potencias de igual exponente.

29. El cuadrado de un binomio es igual:

a) a la suma de cuadrados de sus términos;
b) a la suma de cuadrados de sus términos más su doble producto;
c) a la suma de cuadrados de sus términos más su producto.

30. El cubo de un binomio es igual:

a) a la suma de los cubos de sus términos;
b) a la suma de los cubos de sus términos más la suma de sus cuadrados;
c) a la suma de los cubos de sus términos más el triplo del cuadrado de cada término multiplicado por el otro término.

31. El cuadrado de un polinomio es igual:

a) la suma de cuadrados de sus términos más el doble producto de cada término por todos los que le siguen;
b) a la suma de cuadrados de sus términos más la suma de dichos términos;
c) a la suma de cuadrados de sus términos.

32. Cada coeficiente del desarrollo de $(a+b)^n$ a partir del segundo es igual:

a) al coeficiente anterior por el exponente de a;
b) al coeficiente anterior por el exponente de a y dividido por el exponente de b;
c) al coeficiente anterior por el exponente de a y dividido por el exponente de b aumentado en una unidad.

* * *

CUESTIONARIO DE DISTINCION

¿Puedes distinguir las afirmaciones verdaderas de las falsas?

1. Cuando en una expresión algebraica cualquiera se sustituyen sus letras por números reales dados, siempre se obtiene un valor numérico real.

2. Una expresión algebraica racional se puede expresar sin usar la raya de quebrado, pero usando exponentes negativos.

3. Un polinomio homogéneo es siempre completo.

4. El coeficiente del producto de dos monomios es siempre mayor que cada uno de los coeficientes de los factores. Corroborar la respuesta con un ejemplo.

5. El producto de un polinomio reducido (sin términos semejantes) por un monomio es otro polinomio reducido.

6. El producto de dos polinomios ordenados según las potencias decrecientes de una misma variable (reducidos ambos) completos, tiene como máximo un número de términos igual a la suma de los términos de los factores menos uno.

7. Para que un monomio sea múltiplo de otro sus exponentes deben ser múltiplos de los ponentes de este otro.

8. El número de dividendos parciales que ocurren en la división de dos polinomios ordenados según las potencias decrecientes de una misma variable, incluído el resto (que puede ser cero) es igual a la diferencia de sus grados.

9. El resto de una división del tipo Ruffini (divisor $x-a$) se obtiene sumando al último término del dividendo, el último del cociente multiplicado por a.

10. El valor numérico de un polinomio para $x=a$ *se puede obtener dividiendo el polinomio* por $x-a$ por la Regla de Ruffini.

11. El grado de la potencia n-sima de un monomio es igual al grado de la base multiplicado por n.

12. El cuadrado de un binomio es igual a la suma de cuadrados de sus términos.

13. Los coeficientes del desarrollo de la cuarta potencia de un binomio son:

 1º) los coeficientes extremos iguales a la unidad;
 2º) cada coeficiente no extremo del desarrollo de $(a+b)^4$ es igual a la suma del coeficiente del mismo orden de $(a+b)^3$ con el anterior de dicho desarrollo; por ejemplo coeficiente tercero del desarrollo de $(a+b)^4$ igual al coeficiente tercero de $(a+b)^3$ más el coeficiente segundo de $(a+b)^3$.

14. La división $\dfrac{x^m+a^m}{x+a}$ es siempre exacta, cualquiera que sea m (par o impar).

15. La división $\dfrac{x^m+a^m}{x-a}$ nunca es exacta.

16. La expresión x^2+ax+a^2 es el cociente exacto de $\dfrac{x^3-a^3}{x-a}$.

* * *

CUESTIONARIO DE COMPLETACION

1. El grado del producto de dos monomios es igual a... de los grados de los factores;

2. El grado total del cociente de dos monomios es igual a... de los grados del dividendo y divisor.

3. Si una letra figura en dos monomios el exponente con que figura en su producto es la ... de los exponentes, y el exponente con que figura en su cociente es la ... de los exponentes.

4. Para que $\dfrac{x^m+a^m}{x+a}$ sea exacta m debe ser...

5. Para que $\dfrac{x^m-a^m}{x+a}$ sea exactá m debe ser...

6. x^2-ax+a^2 es el cociente exacto de...

 (Se supone que se busca una división del tipo $\dfrac{x^m \pm a^m}{x \pm a}$).

7. El exponente de x en $(-2abx^2)^5$ es...

8. La $\sqrt[3]{a^6b^9c^{12}}$ es...

9. Si el polinomio $x^3+y^3+x^2y+$ .... es homogéneo de tercer grado en x, y y además *completo* (es decir, que tiene todos los términos posibles de tercer grado en x y en y), rellenar los términos que faltan por escribir, supuestos todos los coeficientes iguales a 1.

10. El tercer término del desarrollo de $(a+b)^7$ es... (Hágase directamente, sin formar el triángulo de Tartaglia).

11. El cuarto término del cociente de $\dfrac{x^n+a^n}{x+a}$ es...

12. La división de un polinomio por un monomio se basa en la ley...

PROBLEMAS SOBRE EL CAPITULO 2

(Problemas de repaso sobre cálculo algebraico).

1. Efectuar las siguientes adiciones reduciendo los términos semejantes:

 a) $(x-2y+3z-4t) + (3y-4z+5t-2x) + (5z-6t+3x-4y)$.

b) $(2x^4 - ax^3 + 2bx^2 - 3cx + d) + (-2x^2 + 2ax^3 - 2bx^2 + 4cx - d)$

c) $(5x^5 - 3ax^4 + 2x^2 - bx + c) + (-3x^5 + 4ax^4 - 3x^2 + bx - 2c)$

2. Efectuar las siguientes sustracciones reduciendo los términos semejantes:

a) $(3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1) - (3x^3 + 4x^2 - 4x + 1) - (-5x^3 - 3x^2 + 2x - 1)$

b) $[a - b - (b - 2a) + 2a - b] - [a - 2b - (2a - b) + b - 2a]$

3. Siendo $P_1 = 2x^4 - 3x^3y + 2x^2y^2 - y^4$,

$P_2 = 3x^4 - 4x^3y + 5x^2y^2 - 3y^3x + y^4$,

$P_3 = 3x^4 + 2x^3y - 5x^2y^2 + 3y^3x - 2y^4$,

$P_4 = 4x^4 - 3x^3y + 6x^2y^2 - 3y^4$, efectuar las operaciones que se indican a continuación:

a) $(P_1 + P_2) - (P_3 + P_4)$

b) $(P_1 - P_2) + (P_3 - P_4)$

c) $P_1 - [P_2 - (P_3 - P_4)]$

d) $P_1 - (P_2 - P_3 + P_4)$

e) $(P_1 + P_2) - (P_2 - P_4)$

4. Probar que $(a - b) - (b + c - d) + (b + c - d) + (2b - a) = b$

5. $[(x + y - v - r) - (z - t - u + s)] - [(x + r - s) - (y - u) - (z + t - v)] = 2(y + t - v - r)$

6. Multiplicar los siguientes monomios:

a) $(-3x^2y) \cdot (-\frac{2}{3}xy^2z^3)$

b) $(-2ab^2c) \cdot (-\frac{1}{2}a^2bc^2) \cdot (-\frac{1}{5}abc^3)$

c) $(-\frac{2}{5}xy) \cdot (\frac{5}{3}x^2y^2) \cdot (-\frac{3}{2}x^3y^3) \cdot (-4x^4y^4)$

7. Multiplicar los siguientes monomios por polinomios:

a) $\frac{2}{5}a^2b^3 \cdot (\frac{5}{4}b^2 - \frac{5}{2}a^2 + \frac{10}{2}ab)$.

b) $-\frac{2}{3}mn^2p(\frac{3}{2}m^2np - \frac{6}{4}mnp + \frac{8}{10}m^2n^2p^2)$

c) $0.5xy(2x^2y^2 + 4x^3y - 6xy^3)$

d) $2uv^2(-\frac{3}{2}u^2v + \frac{2}{5}u^2v^2 - 3u^3 + 4v^3)$

8. Multiplicar los siguientes binomios:

a) $(x - \frac{1}{3})(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2})$

b) $(x - 3)(x - 2)$

c) $(2a - b)(2b - a)$

d) $(3m + 4n)(3n - 4n)$

e) $(abc - x^2)(abc + x^2)$.

9. Efectuar los productos que se indican a continuación simplificando el resultado:

a) $(a - 1) \cdot (a - 2) \cdot (a - 3)$

b) $(x^3 + x^2a + xa^2 + a^3) \cdot (x - a)$

c) $(x^4 - x^3a + x^2a^2 - xa^3 + a^4) \cdot (x + a)$

d) $(a^2 - 2ab + b^2)(a - b)$

e) $(x + y + z)(x - y - z)$

f) $(a - b)(a^2 - b^2)(a^3 - b^3)$

g) $(0.5u^2 + uv - 0.2v^2)(0.2u + v)$

10. Comprobar la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{3}a^3bc - \left\{\frac{1}{2}abc(\frac{1}{3}c^2 - \frac{1}{2}b^2) - \frac{7}{12}ab^3c - \frac{1}{3}ab[a^2c - (2a^2c - \frac{3}{10}c^3)]\right\} = -\frac{1}{15}abc^3 + \frac{5}{6}ab^3c.$$

11. Dados los polinomios $P_1 = 2x^2 - 3x + 1$,

$P_2 = x^2 + 4x - 2$,

$P_3 = 3x^3 - 2x^2 + 1$,

$P_4 = 2x + 1$, efectuar las operaciones siguientes:

a) $(P_1 + P_2) \cdot (P_3 + P_4)$

b) $(P_1 - P_2) \cdot (P_3 - P_4)$

c) $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4$

d) $P_1 \cdot (P_2 + P_3 + P_4)$

e) $P_1 - P_2 \cdot (P_3 + P_4)$

f) $(P_1 + P_2) - P_3 \cdot P_4$

g) $P_1 \cdot P_2 - (P_3 + P_4)$

h) $P_1 P_2 P_3 - P_4$

i) $P_1 \cdot P_2 - P_3 \cdot P_4$

j) $P_1 + P_2 \cdot P_3 \cdot P_4$

12. Comprobar la siguiente igualdad:

$(m + n)^2(n + p - m)(p + m - n) + (m - n)^2(m + n + p)(m + n - p) = 4mnp^2$

13. Comprobar la siguiente igualdad:
$(a^2+a+1)(a^2-a+1) = a^4+a^2+1$

14. Comprobar la siguiente igualdad:
$(x^2+2xy+2y^2) \cdot (x^2-2xy+2y^2) = x^4+4y^4$

15. Comprobar la siguiente igualdad:
$(a-b)(c-d) + (a-c)(d-b) + (a-d)(b-c) = 0$

16. Obtener los cocientes de los monomios que se indican:

a) $18a^2b^3c^4 \div 6ab^2c^3$

b) $(-4a^2bx^3) \div (-2abx^2)$

c) $(-3m^2x^3y^2) \div (2mxy)$

d) $(-\frac{1}{3}x^2y^3z^4) \div (\frac{2}{3}x^2yz^3)$

e) $(-\frac{3}{4}ab^2x^3) \div (-\frac{3}{8}abx^2)$

17. Calcular los siguientes cocientes, usando los exponentes negativos cuando sea necesario:

a) $(4abx+6a^2b^2-ab+2b^2) \div (-\frac{1}{3}b)$

b) $(8x^2y^2-4x^3y+3xy^3) \div (2xy)$

c) $(\frac{1}{3}x^3y^2-\frac{1}{2}x^3y^5z+8x^3y^2) \div (\frac{2}{3}x^3y^2)$

d) $(8x^3-4x^2+2x-6) \div (2x)$

e) $(-3a^2bx+4ab^2x^3-5bx^2) \div (3a^2b^2x^2)$

f) $(-4c^2x^2y^2+8xy-6a^2x^2y^3) \div (2ax^3y^2)$

18. Obtener el cociente, el resto y el cociente completo, de las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(6x^5-3x^4+2x^3-3x^2+x-4) \div (2x^2-3x+1)$

b) $(4x^4-3x^3+x^2-4) \div (4x-1)$

c) $(x^6-2x^3+4) \div (x^3-4x+2)$

d) $(4x^5-3x^2+2x-8) \div (5x^2-2x+1)$

e) $(8x^6-4x^3+1) \div (4x^3+1)$

19. Considerando a la x como variable, obtener los cocientes y los restos de las siguientes divisiones:

a) $(x^2+2ax+a^2-b^2) \div x+(a-b)$

b) $(x^3-a^3) \div (x^2+ax+a^2)$

c) $(12x^5-11x^4y-26x^3y^2+28x^2y^3-5xy4) \div (3x^2-5xy+y2)$

20. Aplicar la Regla de Ruffini para obtener los cocientes y los restos de las divisiones siguientes:

a) $4x^6-3x^3+2x-2$ dividido por $x-1$ y después por $x+1$.
b) $6x^4+3x^2-2x+5$ dividido por $x-2$ y después por $x+2$.
c) $8x^5-3x^4+2x^3-x^2+3x-2$ dividido por $x-3$ y después por $x+3$.
d) $x^3+ax^2+a^2x+a^3$ dividido por $x-a$ y por $x+a$.

e) $4x^6-2x^4+3x^2-4$ dividido por x^2-1 y por x^2+1. (Hágase $x^2=z$).

f) $ax^6-2a^2x^3+3a^3$ dividido por x^3-a y por x^3+a (Hágase $x^3=z$).

21. Obtener directamente los cocientes y los restos de las siguientes divisiones:

a) $(m^5+n^5) \div (m+n)$

b) $(m^5+n^5) \div (m-n)$

c) $(u^6-v^6) \div (u-v)$

d) $(u^6-v^6) \div (u+v)$

e) $(x^5-32a^5) \div (x-2a)$

f) $(125a^3b^{21}-8a^{21}b^3) \div (5ab^7-2a^7b)$

22. Reconocer, sin efectuar la división, que las siguientes divisiones son exactas:

a) $(2x^3-5x^2+4x-1) \div (x-1)$

b) $[ax^4-2a^2x^3+2a^3x^2+(2-a^4)x-2a] \div (x-a)$

c) $(x^4+2x^3-8x^2-10x+15) \div (x-1)$

d) $(x^4+2x^3-8x^2-10x+15) \div (x+3)$

Ayuda: Aplíquese el teorema del resto.

23. Hallar el resto de cada una de las siguientes divisiones:

a) $(x^4-3ax^3-a^2x-a^3) \div (x+a)$

b) $(x^5-ax^3+a^3x-a) \div (x-a)$

(Hállese el valor del dividendo para $x=a$, respectivamente).

24. Calcular las potencias que se indican de los monomios siguientes:

a) $(-\frac{1}{2}a^2bxy^3)^4$

b) $(\frac{1}{3}x^2yz^3)^2$

c) $(-5a^2bx^3yz^2u^4)^3$

d) $(-\frac{5}{4}m^2nx^3y^2)^2$

e) $(-2abcx^3y^2z^4)^3$

f) $(-3a^2bu^2v^3t^4)^3$.

25. Calcular los cuadrados de los siguientes binomios:

a) $(3a-2b)^2$
b) $(2a^2x+by)^2$
c) $(5a^2b-3ab^2)^2$
d) $(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}y^3)^2$
e) $(\frac{3}{2}ax^2+\frac{2}{3}a^2x)^2$
f) $(\frac{2}{5}ax^2-\frac{5}{2}by^3)^2$

26. Desarrollar el cubo de los siguientes binomios:

a) $(2x+3y)^3$
b) $(2a-3b)^3$
c) $(4a^2x+3ax^2)^3$
d) $(5xy-2)^3$
e) $(\frac{1}{3}ax+\frac{1}{2}by)^3$
f) $(\frac{2}{3}ab-\frac{3}{4}x^2y)^3$
g) $(3xyz^2+2x^2y^2z^3)^3$

27. Desarrollar los cuadrados de los siguientes polinomios:

a) $(x+2y+3z)^2$
b) $(x-2y+z)^2$
c) $(a+2b+3c)^2$
d) $(x-y-z)^2$
e) $(3a^2x+2b^2y+5c^2z)^2$
f) $(a+b-c+d)^2$
g) $(x-y+z-t)^2$
h) $(2a-3b+4c-5d)^2$
i) $(\frac{1}{2}ax-\frac{1}{3}by+\frac{1}{4}cz)^2$
j) $(\frac{2}{3}a^2x-\frac{1}{4}by^2-\frac{1}{5}c^2z^2)^2$

28. Construir un triángulo de Tartaglia hasta la fila décima. (Puedes copiar el del texto y prolongarle las filas que le faltan hasta la fila décima).

29. Utilizar los coeficientes del triángulo de Tartaglia del ejercicio anterior para desarrollar las potencias de los binomios que se indican:

a) $(m+n)^8$
b) $(m-n)^7$
c) $(ax+by)^4$
d) $(ax-by)^5$
e) $(x^2y+xy^2)^6$
f) $(2x+3y)^9$
g) $(5x^2-2y^2)^{10}$
h) $(4x^2y+2xy^2)^9$
i) $(2abx^2+3ab^2y^3)^6$

(Ayuda: Puedes hacer el primer término del binomio igual a *a* y el segundo igual a *b*, y desarrollar $(a\pm b)^n$; después sustituyes en este desarrollo los valores correspondientes de *a* y de *b*, efectuando las potencias indicadas con dichos valores).

30. Calcular las siguientes raíces efectuando en cada caso la prueba:

a) $\sqrt{9a^2b^4c^6}$
b) $\sqrt[3]{-8x^3y^6z^{24}}$
c) $\sqrt[4]{16m^4n^{16}p^{32}}$
d) $\sqrt[3]{-27z^6t^{12}r^{30}}$

Unidad 3

"Con el auxilio de Dios y su precioso concurso —empieza Omar Khayyam su Algebra— digo que el Algebra es un arte científico cuyo objeto es el número absoluto y las magnitudes mensurables desconocidas, pero relacionadas con algo conocido, de modo que se puedan encontrar. Las cosas conocidas son cantidades o relaciones individualmente determinadas como se advierte cuando se examinan con atención. Lo que se busca en este arte son las relaciones que ligan los datos del problema con la (incógnita), que constituyen el objeto del Algebra".

Fue en Bagdad, la ciudad encantada de las "Mil y una noche" y bajo el reinado del Califa Harum-al-Raschid, donde se escribió un libro titulado "Al-Jabr u al-Mucábala" que es el primer tratado sistemático de Algebra.

Su autor fue Mohamed ibn Musa Al-Khowarizmi (Al-Juarizmi) persa de origen en el siglo VIII de nuestra era. Aunque el libro de Al-Juarizmi tenía por objeto según él "facilitar las operaciones que se presentan ante las necesidades de la vida", su conocimiento causó un gran impacto en la matemática de Europa.

Del nombre de Al-Juarizmi se derivó la palabra "algoritmo" (procedimiento de cálculo o teoría de los números) y del título del libro "Al-Jabr que en árabe significa "reducción" se obtuvo la palabra *álgebra.*

La incógnita, llamada "res" fue traducida como "cosa" y los cultivadores del álgebra se llamaron "algebristas" o "cosistas". También las personas que sabían arreglar los huesos dislocados se llamaron "algebristas" por cuanto hacían "reducciones" de las fracturas y luxaciones. Como los cirujanos de la antigüedad eran los barberos se leía frecuentemente en la puerta de sus establecimientos: BARBERO, ALGEBRISTA y SANGRADOR.

Los árabes tomaron de los hindúes el "cero", número correspondiente al conjunto vacío. Lo llamaron "as sifr" que significa "el vacío"; de allí se derivaron las palabras "cifra" y "cero".

El álgebra se introdujo en Europa por España. Juan el Hispánico tradujo el libro de Al-Juarizmi en el año 1140.

Omar Khayyam, poeta, astrónomo y filósofo persa, escribió un libro de Algebra en el año 1100 que explica la técnica o regla de encontrar las incógnitas".

"Con el auxilio de Dios y su precioso concurso -empieza Omar Khayyam su Algebra- digo que el Algebra es un arte científico cuyo objeto es el número absoluto y las magnitudes mensurables desconocidas, pero relacionadas con algo conocido, de modo que se puedan encontrar. Las cosas conocidas son cantidades o relaciones individualmente determinadas como se advierte cuando se examinan con atención. Lo que se busca en este arte son las relaciones que ligan los datos del problema con la (incógnita), que constituyen el objeto del Algebra".

CONTENIDO DE LA UNIDAD

3

3.1 INTRODUCCION

En este capítulo comenzamos el estudio de los tipos más sencillos de ecuaciones algebraicas, que son las ecuaciones enteras de primer grado; pero ¿qué es una ecuación?

Te lo vamos a explicar con algunos ejemplos, después vendrá la definición general.

Observa la siguiente igualdad:
$3x+2 = x+6, \quad (1)$

En el primer miembro figura una expresión algebraica entera con la variable *x*, y en el segundo otra expresión de la misma naturaleza. Sustituyamos la variable, *x*, por un número que se nos ocurra, por ejemplo por 3; el primer miembro toma entonces el valor numérico $3 \times 3 + 2 = 11$, y el segundo toma el valor $3+6=9$, y como 11 es distinto de 9 concluímos que para el valor 3 de la *x no es verdadera* la igualdad, lo que se expresa diciendo que el valor 3 de la *x no verifica* (no hace verdadera) a la igualdad (1).

Si sustituímos el valor $x=2$ obtenemos: $3 \times 2+2=8$ como valor numérico del primer miembro y $2+6=8$, como valor del segundo miembro, y ambos valores son iguales; en este caso se dice que el valor 2 de la *x* verifica (hace verdadera) a la igualdad (1).

Si continúas dando otros valores a la *x* (por ejemplo, 1, 4, 5, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, etc.), observarás que la igualdad *no se verifica* (no se hace verdadera) para ninguno de ellos. Llegamos así a la siguiente conclusión: Hay igualdades entre expresiones algebraicas (como la igualdad (1)) que solo se verifican (que solo son verdaderas) para ciertos valores de sus letras; por tanto son igualdades *condicionales*, es decir, que solo son tales igualdades con la condición de que las letras se sustituyan por ciertos valores numéricos. *Estas igualdades entre dos expresiones algebraicas, que sólo se verifican para ciertos valores de sus letras se llaman* **ecuaciones.**

Los valores numéricos de las letras que hacen verdadera a la igualdad condicional entre las dos expresiones algebraicas, es decir, los valores que *verifican* a la ecuación, se llaman *las raíces o soluciones* de la ecuación; la ecuación (1) tiene por raíz o solución al número **2.**

Veamos ahora un ejemplo de igualdad entre dos expresiones algebraicas que es *incondicional*, es decir, que se verifica para todos los valores numéricos que se atribuyan a sus letras:

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2, \qquad (2).$$

La igualdad (2) tiene sus dos miembros también expresiones algebraicas enteras, pero el segundo miembro resulta del primero por aplicación de las leyes formales de las operaciones, que no alteran el resultado de las mismas, *cualesquiera que sean los valores numéricos de las letras;* tú mismo puedes comprobar esta afirmación, dando a la x y a la y los valores que se te ocurran y viendo que los dos miembros toman igual valor numérico.

Las igualdades incondicionales entre dos expresiones algebraicas que se verifican **para todos** *los valores que se atribuyan a sus letras, se llaman* **identidades.**

Toda identidad entre dos expresiones algebraicas tiene como segundo miembro el resultado de aplicar al primero algunas leyes formales de las operaciones.

Ejercicios

EJERCICIOS 3.1

Clasificar las siguientes igualdades entre expresiones algebraicas en *ecuaciones* e *identidades.*

1. $5(x+y+z) = 5x+5y+5z$
2. $(x+y) \cdot (x-y) = x^2-y^2$
3. $3x+5 = 2x+4$
4. $2x+1 = 5x-2$
5. $x^3-y^3 = (x^2+xy+y^2) \cdot (x-y)$
6. $4x+2y = 3x-y+1$

3.2 CLASIFICACION DE LAS ECUACIONES. CONCEPTO DE EQUIVALENCIA.

Las ecuaciones se clasifican atendiendo a las expresiones algebraicas que figuran en sus miembros (no olvidemos que una ecuación es una igualdad *condicional* entre dos *expresiones algebraicas).*

I) *ECUACIONES ENTERAS: Una ecuación algebraica se llama entera cuando es la igualdad condicional de dos expresiones enteras, monomios o polinomios.*

II) *ECUACIONES FRACCIONARIAS: Una ecuación se llama fraccionaria cuando uno al menos de sus miembros es una expresión algebraica fraccionaria;* por tanto las letras que se consideran como variables o incógnitas de la ecuación, **deben figurar bajo denominador.**

III) *ECUACIONES IRRACIONALES: Son aquellas en las que la incógnita (o incógnitas) figuran bajo radical.*

IV) *ECUACIONES LITERALES: Son aquellas en las que, además de la incógnita, figuran otras letras que se consideran como constantes, aunque indeterminadas.*

Ejemplos

1. La ecuación $3x^2-2x+1=2x+3$, es entera, pues sus miembros son expresiones enteras.
2. La ecuación $5x-\frac{2}{x}+1=\frac{3}{x+2}+7$ es fraccionaria, pues su única letra, x, (la incógnita) se encuentra bajo denominador.
3. La ecuación $\frac{2}{x}+3\sqrt{x}=5x^2+1$, es *irracional,* pues la x figura bajo radical.
4. La ecuación $2ax+b=5x-2$, considerando únicamente a la x como incógnita y por tanto a las letras a y b como constantes (aunque indeterminadas), es una ecuación *literal;* además es entera respecto de su incógnita por no figurar bajo denominador ni bajo radical.

Ejercicios

Clasificar las siguientes ecuaciones:

1. $2x^2+\frac{3}{x}-1=3x+2$
2. $3x^3+2x-3=4x^2+x-6$
3. $\sqrt{3x}+1=2x^2-3$
4. $ax+by=3x^2+2y^2$ (la a y la b se consideran números fijos, aunque no determinados).
5. $\sqrt{x}+1=3x^2-2$

CONCEPTO DE EQUIVALENCIA:

El concepto fundamental de la teoría de ecuaciones es el de **ecuaciones equivalentes.**

Dos ecuaciones se llaman equivalentes cuando tienen exactamente las mismas soluciones.

De acuerdo con esta definición, para probar que dos ecuaciones son equivalentes hay que demostrar:

1°) Que toda solución de la primera lo es de la segunda, y
2°) Que toda solución de la segunda lo es de la primera.

De esta forma queda establecida perfectamente la equivalencia de las dos ecuaciones.

Toda la tarea de los métodos para resolver las ecuaciones consiste en transformarlas en otras equivalentes (o que no pierdan raíces) pero más fáciles de resolver, entendiendo por *resolver* una ecuación *obtener todas sus raíces.*

Ejemplos

1. Las ecuaciones $2x+1=3$ y $x^2-1=0$ no son equivalentes, pues si bien el valor $x=1$ es solución de ambas, la solución $x=-1$ de la segunda no lo es de la primera.
2. Las ecuaciones $2x-3=5x-6$, y $x=4x-3$ si son equivalentes, pues la raíz $x=1$ verifica a ambas y en seguida veremos que es la única raíz que tienen.

3.3 TRANSFORMACIONES DE LAS ECUACIONES ENTERAS

Ya hemos dicho que para resolver una ecuación (para encontrar sus raíces o soluciones) hay que *transformarla* en otras más fáciles de resolver, y el ideal es que las nuevas ecuaciones que se van obteniendo con estas transformaciones *sean equivalentes* a la ecuación de partida, pues resolviendo la última transformada, que puede ser de solución inmediata, las raíces que se obtengan son exactamente las de la ecuación original.

SUMA DE UN MISMO NUMERO A LOS DOS MIEMBROS

Una ecuación algebraica *cualquiera* con la incógnita x la representaremos así: $A(x)=B(x)$, donde $A(x)$ y $B(x)$ *simbolizan* o *representan* a las expresiones algebraicas de los dos miembros de la ecuación. Los valores que toman el primero y segundo miembros para $x=a$ se representan así: $A(a)$ y $B(a)$ respectivamente.

Ahora debes prestar atención para comprender el primer principio en que se basa la resolución de ecuaciones enteras, que se expresa así: **Si a los dos miembros de una ecuación se les suma un mismo número, se obtiene otra ecuación equivalente a la primera.**

Demostración: Dada la ecuación $A(x) = B(x)$, (1), si a sus dos miembros sumamos un mismo número real, h, obtenemos la ecuación $A(x)+h=B(x)+h$, (2).

Tenemos que probar que las ecuaciones (1) y (2) *son equivalentes*, para lo cual probaremos que toda raíz de la primera lo es de la segunda y toda raíz de la segunda lo es de la primera.

1º) Sea a una raíz de la primera; entonces se cumplirá que $A(a)=B(a)$, (3).

La igualdad (3) es ya una igualdad *numérica*, y si a sus dos miembros les sumamos el número h obtenemos otra igualdad numérica, $A(a)+h=B(a)+h$, (4), por la *ley uniforme* de la suma; ahora bien, la igualdad numérica (4) nos indica que el número a *verifica* a la ecuación (2), que es lo que queríamos probar en esta primera parte.

2º) Sea a una raíz de la segunda ecuación (de la ecuación (2)); entonces se cumplirá la (4), y aplicando a la (4) la *ley cancelativa* de la suma, se puede eliminar el sumando h de los dos miembros, quedando $A(a)=B(a)$, lo que nos indica que a es también raíz de la ecuación (1), con lo que el teorema ha quedado totalmente probado.

APLICACIONES:

1ª) Si queremos que un número pase de un miembro a otro de una ecuación lo que tenemos que hacer es sumar a los dos miembros *el opuesto de dicho número* con lo cual desaparece de su miembro y aparece en el otro *con signo cambiado.*

Por ejemplo, si en la ecuación $x-3=4$ queremos *pasar* el número -3 al segundo miembro, sumamos a los dos miembros su opuesto, $+3$, resultando $x-3+3=4+3$, o sea: $x=4+3=7$. La ecuación obtenida $x=7$, es equivalente a la propuesta al principio, y ella *está resuelta,* pues el valor de la incógnita está puesto en evidencia; en este caso se dice que la incógnita *está despejada.*

2ª) Aplicando reiteradamente la aplicación 1ª) podemos conseguir que *todos* los números que están precedidos del signo + o del − queden en un solo miembro de la ecuación.

SUMA DE UNA MISMA EXPRESION ENTERA A LOS DOS MIEMBROS:

El segundo principio en el que se basa la resolución de las ecuaciones se expresa así:

Si a los dos miembros de una ecuación se les suma una misma expresión entera (un monomio o un polinomio) *se obtiene otra ecuación equivalente.*

Demostración: Dada la ecuación $A(x)=B(x)$, (1), si a sus dos miembros les sumamos una misma expresión entera, que simbolizaremos por $E(x)$, obtenemos esta otra ecuación: $A(x)+E(x)=B(x)+E(x)$, (2).

Igual que antes tenemos que probar que toda raíz de la ecuación (1) lo es de la (2), y que toda raíz de la ecuación (2) lo es de la (1).

1º) Si a es solución (o raíz) de (1) se cumplirá que $A(a)=B(a)$, (3), que es una igualdad numérica.

Si representamos el valor numérico que toma $E(x)$ para $x=a$ por $E(a)$, y sumamos a los dos miembros de (3) el número $E(a)$, obtenemos $A(a)+E(a)=B(a)+E(a)$, (4), (por la ley uniforme de la suma). La igualdad numérica (4) nos indica que el número a es raíz de la ecuación (2), que es lo que teníamos que probar en esta primera parte.

2º) Si a es raíz de la (2) se cumplirá la (4), y por la *ley cancelativa* de la suma podemos suprimir el número $E(a)$ de los dos miembros, quedando $A(a) = B(a)$, que nos indica que el número a es raíz de la ecuación (1), con lo que queda el teorema totalmente demostrado.

APLICACIONES:

1ª) Se pueden pasar (trasponer) términos enteros en x de un miembro a otro de una ecuación, pues ello equivale a sumar a los dos miembros los términos opuestos, con lo que *desaparecen* del miembro donde están y *aparecen* en el otro miembro *con signos cambiados*. Por ejemplo, en la ecuación $3x - 2 = 2x + 6$ podemos pasar todos los términos en x al primer miembro y todos los números al segundo, con lo que se obtiene la ecuación $3x-2x=6+2$, ó bien: $x=8$ (ya resuelta).

Como resumen de las aplicaciones de los dos principios anteriores, de los cuales el primero es un caso particular del segundo, podemos enunciar la siguiente:

REGLA DE LA TRASPOSICION DE TERMINOS:

Todo número o término entero en x se puede pasar (trasponer) **de un miembro a otro de una ecuación cambiándolo de signo.**

En particular, se puede lograr que todos los términos con x queden en un miembro y los números en el otro, por ejemplo, todos los términos con x en el primer miembro y todos los números en el segundo.

También se pueden pasar todos los términos al primer miembro, quedando reducido el segundo a cero.

Si en una ecuación *entera* se pasan todos los términos a su primer miembro, en dicho primer miembro queda un polinomio, cuyo grado (después de reducir los términos semejantes) se llama *el grado de la ecuación*. De acuerdo con esto, una ecuación entera se dirá de primer grado, segundo grado, tercer grado, etc., según que el polinomio reducido que queda al pasar toda la ecuación a un miembro sea de primer grado, segundo, tercero, etc.

Las únicas ecuaciones que trataremos en este capítulo son las ecuaciones *enteras de primer grado*, que son las más sencillas de resolver.

Ejemplos

1. Pasar los términos que contienen x al primer miembro y los números al segundo en la siguiente ecuación:

$$3x-2+5x-3+4=4x-2x+3+x-1.$$

Aplicando la regla anterior de trasposición de términos obtenemos: $3x+5x-4x-x+2x=3-1+2+3-4$, y reduciendo términos semejantes: $5x=3$, y esta ecuación, es *equivalente* a la de partida, o sea, tiene exactamente las mismas raíces, siendo mucho más fácil de resolver.

2. Pasar al primer miembro todos los términos de la siguiente ecuación entera, reducir los términos semejantes e indicar el grado:

$$5x^3-3x^2+2x-4=5x^3+4x^2-2x+6.$$

Aplicando la regla de trasposición de términos obtenemos:

$$5x^3-3x^2+2x-4-5x^3-4x^2+2x-6=0$$

y reduciendo los términos semejantes:

$$-7x^2+4x-10=0.$$

Se trata de una ecuación de *segundo grado*, pues al reducir los términos semejantes se han anulado los términos de tercer grado.

Hacemos observar que siempre que en los dos miembros figure un término igual (como en este ejemplo $5x^3$) se puede suprimir en ambos miembros directamente.

Ejemplos

MULTIPLICACION DE LOS DOS MIEMBROS POR UN MISMO NUMERO:

El tercer principio necesario para resolver las ecuaciones enteras de primer grado se enuncia así:

Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por un mismo número distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente.

Demostración: Si los dos miembros de la ecuación $A(x) = B(x)$, (1), los multiplicamos por el número real $h \neq 0$, obtenemos la ecuación

$$A(x) \cdot h = B(x) \cdot h, \quad (2).$$

1º) Toda solución de (1) lo es de (2). En efecto, si a es solución de la ecuación (1) se cumplirá: $A(a) = B(a)$, (3), y si multiplicamos los dos miembros de la igualdad numérica (3) por el número $h \neq 0$, obtenemos otra igualdad en virtud de la *ley uniforme* de la multiplicación:

$A(a) \cdot h = B(a) \cdot h$, (4); si observamos la (4) y la (2) advertimos que el número a es también raíz de (2), que es lo que se quería probar en esta primera parte.

2°) Si a es raíz de (2) se cumplirá la (4), y por la propiedad *cancelativa* del producto podemos suprimir el factor $h \neq 0$ de los dos miembros, con lo que queda $A(a) = B(a)$, que nos muestra que a es también raíz de (1); así queda terminada la demostración.

APLICACIONES:

I) **Trasposición de factores (o divisores):**

Un factor numérico (o divisor) pasa de un miembro a otro de una ecuación como divisor (o factor), respectivamente.

En efecto: Si los dos miembros se multiplican por el número recíproco (se recuerda que el recíproco de α es $\frac{1}{\alpha}$), *desaparece* como factor (o como divisor) de su miembro, y *aparece* como divisor (o como factor) en el otro miembro.

Ejemplos

1. De la ecuación $3x=5$, multiplicando los dos miembros por $\frac{1}{3}$ (valor recíproco del factor 3) queda: $\frac{1}{3} \cdot 3x = 5 \cdot \frac{1}{3}$, o sea: $x=\frac{5}{3}$.

2. De la ecuación $\frac{x}{2}=4$, multiplicando los dos miembros por 2 (valor recíproco de $\frac{1}{2}$) queda: $\frac{x}{2} \cdot 2 = 4 \cdot 2$, o sea, $x=8$.

II) **Supresión de denominadores numéricos:**

Se pueden suprimir los denominadores numéricos de una ecuación multiplicando sus dos miembros por el m.c.m. de los denominadores con lo que se obtiene otra ecuación equivalente, pero que ya no tiene denominadores.

En efecto: Al multiplicar los dos miembros de la ecuación por un múltiplo de todos los denominadores (el más conveniente es el m.c.m), estos desaparecen.

Ejemplos

1. Transformar la siguiente ecuación en otra equivalente qué no tenga denominadores: $\frac{x}{2} - \frac{x}{4} + 3 = \frac{x}{6} + 1$. El m.c.m de los denominadores es 12; multiplicando los dos miembros de la ecuación por 12 se obtiene:

   $\frac{x}{2} \cdot 12 - \frac{x}{4} \cdot 12 + 3 \cdot 12 = \frac{x}{6} \cdot 12 + 1 \cdot 12$; o sea: $6x-3x+36=2x+12$, equivalente a la propuesta y que no contiene denominadores.

2. Transformar la siguiente ecuación entera en otra *equivalente* que no contenga denominadores:

   $$\frac{2}{5}x + \frac{5}{3} = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 1$$

   En este ejemplo el m.c.m de los denominadores es $5 \times 3 \times 2 = 30$; multiplicando los dos miembros de la ecuación por 30 se tiene:

   $30 \cdot \frac{2}{5}x + 30 \cdot \frac{5}{3} = 30 \cdot \frac{x}{2} + 30 \cdot \frac{x}{3} + 30 \cdot 1$, o sea,

   simplificando: $12x+50=15x+10x+30$, esta ecuación es *equivalente* a la propuesta y no contiene denominadores.

3. Despejar la x (es decir, dejarla sola en un miembro, lo cual equivale a resolver la ecuación, pues las soluciones aparecen en el otro miembro) en la ecuación $6x=12$.
   Pasando el factor 6 al segundo miembro como divisor queda:

   $x = \frac{12}{6} = 2.$

4. Despejar la x en la ecuación $\frac{x}{5} = 10$.
   Pasando el divisor 5 al segundo miembro como factor se obtiene:

   $x=10 \times 5=50.$

Ejercicios

1. Pasar todos los términos en x al primer miembro y los números al segundo, en la siguiente ecuación:
$2x-5+3x-2=4x+1-2x+3$.

2. Quitar los denominadores en las siguientes ecuaciones (es decir, transformarlas en otras equivalentes sin denominadores):

a) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{x}{3}+\frac{1}{2}+2$

b) $\frac{x}{4}-\frac{1}{5}+2=\frac{x}{5}+\frac{x}{2}+1$

c) $\frac{x}{6}-\frac{x}{2}+\frac{x}{12}=\frac{x}{2}+1$

d) $\frac{x}{3}-\frac{x}{5}+\frac{x}{7}=\frac{x}{2}+\frac{3}{5}-2$

3. Despejar el valor de x de las siguientes ecuaciones:

a) $5x=2$ c) $\frac{x}{2}=4$ e) $3x=18$

b) $\frac{x}{3}=4$ d) $\frac{x}{10}=6$ f) $\frac{x}{7}=3$

SUPRESION DE PARENTESIS EN UNA ECUACION

Para resolver una ecuación hay que suprimir los paréntesis que puedan figurar en los miembros de la ecuación. La supresión de paréntesis se funda en las reglas del cálculo algebraico estudiadas en el capítulo anterior:

a) *Un paréntesis precedido del signo + se suprime conservando los signos de sus términos interiores.*

b) *Un paréntesis precedido del signo − se suprime cambiando de signo a todos sus términos interiores.*

c) *Si un paréntesis está precedido (o seguido) de un factor, se pasa el factor dentro, multiplicándolo por todos los términos* (ley distributiva) *y después se aplica la regla a) o la b), según que el paréntesis quede precedido del signo + o del −. En la práctica se realizan los dos pasos de una sola vez.*

Ejemplos

Suprimir los paréntesis en las siguientes ecuaciones:

1. $(3x+2)-(5x+1)=x-(2x+3)$
2. $x-(7x+4)+(2x-5)=4x-(3x+2)-5$
3. $x-[3x-(2x-1)]+5=2+[3-(2-3x)]$
4. $5x-3\,.\,(2x+1)+2\,.\,(x-3)=2x-5\,(x-1)+4$
5. $3x+2\,.\,(5x-4)-3\,.\,(4x-1)=-4x+2\,.\,(x+1)-3\,.\,(x-1)$
6. $4\,.\,(x-1)-3\,.\,(x+1)=5\,.\,(2x-2)-4\,.\,(3x-1)$

SOLUCIONES

En la 1. se tiene: $3x+2-5x-1=x-2x-3$

2. $x-7x-4+2x-5=4x-3x-2-5$
3. $x-(3x-2x+1)+5=2+3-(2-3x)$, o sea: $x-3x+2x-1+5=2+3-2+3x$
4. $5x-6x-3+2x-6=2x-5x+5+4$
5. $3x+10x-8-12x+3=-4x+2x+2-3x+3$
6. $4x-4-3x-3=10x-10-12x+4$

Ejercicios

Suprimir los signos de agrupación (parentesis, corchetes, llaves) en las siguientes ecuaciones:

1. $3x-(2x+1)=4x+(5x-3)$
2. $4x+[3x-(2x-1)]=6x-(4x-1)$
3. $7x-[4x-(3x+2)]=4x-\{-2x-[4x-(2x-1)]\}$
4. $5\,.\,(3x-2x+1)-4\,.\,(3x-2)=6x+2\,.\,[3x-(2x-3)]$

Ejercicios

5. $4 \,.\, (5x - 2 + x) - 3 \,.\, [2x - (2 - 2x)] = 4 \,.\, (x - 1)$
6. $9 \,.\, [2x - (3x - 2)] = 4 \,.\, [2x - (3x - 4)] + 2$
7. $8x - 2\,[2x - (4x - 3) + 3x] = 6 \,.\, [8x - (2x - 6)]$
8. $9 \,.\, \{2x - 3 \,.\, [4x - (5x - 3)] + 2x\} = 3x - 2 \,.\, (x - 1)$

REGLA PARA RESOLVER UNA ECUACION ENTERA DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA:

Todo lo aprendido hasta aquí lo vamos a resumir en una regla para resolver una ecuación entera de primer grado con una sola incógnita. Esta regla tiene varias etapas, y en algunas ecuaciones no habrá que aplicar algunas de ellas, por carecer la ecuación de la dificultad correspondiente; por ejemplo, si una ecuación no contiene signos de agrupación naturalmente no habrá que aplicarle la etapa de supresión de tales signos.

Regla: Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita se procede así:

Primera Etapa: *Se suprimen los signos de agrupación en los dos miembros (si los hubiere).*

Segunda Etapa: *Se suprimen los denominadores numéricos (si los hubiere) multiplicando los dos miembros de la ecuación por el m.c.m de los denominadores.*

Tercera Etapa: *Se pasan todos los términos que contienen a la incógnita al primer miembro y los que no la contienen al segundo.*

Cuarta Etapa: *Se reducen los términos semejantes en ambos miembros, con lo cual se obtiene una ecuación, llamada reducida, de la forma* $\mathbf{ax=b}$, (1).

Quinta Etapa: Ahora pueden ocurrir varios casos:

1º Caso: $\mathbf{a \neq o}$ **y** $\mathbf{b \neq o}$, pasando el factor $a \neq o$ al segundo miembro queda

$$\boxed{x = \frac{b}{a}}$$

que es la única solución, pues la ecuación es **equivalente** a la de partida.

2º Caso: $\mathbf{a = o}$ **y** $\mathbf{b \neq o}$, o sea, $\mathbf{o \,.\, x = b}$; en este caso la ecuación se dice que es **imposible,** pues no hay ningún número que multiplicado por cero dé un producto igual a $b \neq o$.

3º Caso: $\mathbf{a \neq o}$ **y** $\mathbf{b = o}$, o sea $ax = o$; el único número que multiplicado por $a \neq o$ da un producto nulo es el cero, y por tanto la ecuación tiene solución única, $\mathbf{x = o}$.

4º Caso: $\mathbf{a = o}$ **y** $\mathbf{b = o}$, o sea, $o \,.\, x = o$; *cualquier* valor que se dé a la x verifica a la ecuación, pues el producto de *cualquier número* por cero es igual a cero. La ecuación se llama en este caso *indeterminada.* Lo que ocurre en realidad es que la ecuación es una identidad.

* * *

Veamos algunos ejemplos de los distintos casos:

1. La ecuación $3x = 9$ *($a \neq o$, $b \neq o$)* tiene una solución única, que se obtiene pasando el factor 3 al segundo miembro como divisor; esta solución es $x = \frac{9}{3} = 3$.

2. $3x + 2 = 3x + 4$. Antes de seguir adelante piensa un poco en el contenido de la ecuación: ¿Puede existir algún número cuyo triplo más 2 sea igual a su triplo más 4?
Pasando el $3x$ del segundo miembro al primero y el 2 del primero al segundo, queda: $3x - 3x = 4 - 2$, ó sea: $x(3-3) = 2$, o bien, $0.x = 2$, y no existiendo ningún número cuyo producto por cero sea 2 se concluye que la ecuación es *imposible;* no tiene ninguna solución.

3. $3x+1=3x+1$. Salta a la vista que se trata de una *identidad*, pero resolvámosla; pasando el $3x$ del segundo miembro al primero y el 1 del primero al segundo, queda: $3x-3x=1-1$, o sea, $0 \cdot x=0$, que se verifica para *cualquier número*, pues el producto de cualquier número por cero es igual a cero.

4. $3x+2=2x+2$ (piensa en el número cuyo triplo más 2 sea igual a su duplo más 2). Pasando $2x$ al primer miembro y el 2 del primero al segundo queda: $3x-2x=2-2$, o sea, $x=0$, que es la única solución de la ecuación.

A continuación resolvemos algunos ejemplos con los distintos grados de dificultad.

Ejemplos

Resolver las ecuaciones siguientes:

1. $3x-2+5x-1=4x+2-5+x$.

Primera Etapa: No ha lugar.
Segunda Etapa: No ha lugar
Tercera Etapa: $3x+5x-4x-x=2-5+2+1$
Cuarta Etapa: $3x=0$.
Quinta etapa: La ecuación reducida pertenece al tercer caso, ($ax=0$, con $a \neq 0$); su única solución es $\mathbf{x=0}$.

2. $3x-[2x-(4x+1)]=5x-3(2x-4)$.

Primera Etapa: $3x-(2x-4x-1)=5x-6x+12$, o bien: $3x-2x+4x+1=$ $=5x-6x+12$.
Segunda Etapa: No ha lugar.
Tercera Etapa: $3x-2x+4x-5x+6x=12-1$.
Cuarta Etapa: $6x=11$.
Quinta Etapa: $\mathbf{x=\frac{11}{6}}$

3. $\frac{2}{5}x-\frac{3}{4}(x-1)=\frac{1}{10}(x+2)$

Primera Etapa: $\frac{2}{5}x-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}=\frac{x}{10}+\frac{2}{10}$

Nina D'Costa

Segunda Etapa: El m.c.m. de los denominadores es 20; multiplicando los dos miembros de la ecuación por 20: $8x-15x+15=$ $=2x+4$.
Tercera Etapa: $8x-15x-2x=4-15$
Cuarta Etapa: $-9x=-11$
Quinta Etapa: $x=\frac{-11}{-9}=\mathbf{\frac{11}{9}}$

4. $-\frac{2}{5}\cdot\left[3x-\frac{1}{4}(x-2)\right]+\frac{1}{10}(2x-3)=\frac{1}{4}\left\{3x-[2x-(x-4)]\right\}$

Primera Etapa: Procediendo de dentro hacia afuera se tiene sucesivamente:

$$-\frac{2}{5}\left(3x-\frac{x}{4}+\frac{2}{4}\right)+\frac{2x}{10}-\frac{3}{10}=\frac{1}{4}[3x-2x+(x-4)],$$

o bien:

$$-\frac{6x}{5}+\frac{2x}{20}-\frac{4}{20}+\frac{2x}{10}-\frac{3}{10}=\frac{3x}{4}-\frac{2x}{4}+\frac{1}{4}(x-4),$$

y finalmente:

$$-\frac{6x}{5}+\frac{2x}{20}-\frac{4}{20}+\frac{2x}{10}-\frac{3}{10}=\frac{3x}{4}-\frac{2x}{4}+\frac{x}{4}-\frac{4}{4}.$$

Segunda Etapa: Multiplicando por 20 que es el m.c.m de los denominadores, queda:
$-24x+2x-4+4x-6=15x-10x+5x-20.$
Tercera Etapa: $-24x+2x+4x-15x+10x-5x=-20+4+6.$
Cuarta Etapa: $-28x=-10.$
Quinta Etapa: $x=\frac{-10}{-28}=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$

Ejemplos

EJERCICIOS 3.3

Ejercicios

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $3x+2=5x-1$ (Las etapas 1ª y 2ª no tienen lugar en este ejercicio).
2. $5x-2+4x-1=4x+2-3x+6$
3. $4x-(2x-1)=5x+(3x-2)$
4. $3x+(4x+2)-(2x-1)=0$
5. $2x-[5x-(3x+1)]=2-3\cdot(x-1)$
6. $4x-\left\{4-[3x-(2x-1)]\right\}=5x+\left\{4x-[x-(x-1)]\right\}$
7. $\frac{x}{2}+\frac{5}{4}-1=\frac{x}{8}-\frac{3x}{2}+2$

Ejercicios

8. $\frac{x}{4} - \frac{3x}{5} + \frac{3}{10} = \frac{2x}{5} - \frac{3x}{4} + 3$

9. $\frac{1}{4}(x + 2) = 3x - \frac{2}{5}(x - 3)$

10. $\frac{3}{5}[2x - (3x + 4)] = \frac{1}{4}(x - 2)$

11. $\frac{x}{10} - \frac{2}{5} + \frac{x}{5} = 3 \cdot (x - \frac{1}{2}) + \frac{x}{20}$

12. $\frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{5}(x+1) = \frac{x}{15} + 2x - 4$

13. $\frac{x}{6} + \frac{2}{3}(x - 1) - \frac{x}{12} = \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{4}\right)$

14. $\frac{x}{12} - \frac{3}{5}\left(x - \frac{1}{6}\right) + \frac{x}{30} = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{6} + \frac{1}{12}\right)$

15. $\frac{1}{3} \cdot \{3 - [2x - \frac{1}{4}(x - 2)]\} = \frac{1}{6} \cdot \{2x - [3x + (x - \frac{1}{4})]\}$

16. $7x - 2[3x - (x - \frac{1}{2})] = 5x + 2 \cdot (3x - \frac{1}{4})$

17. $9 \cdot \left(\frac{3}{2}x + 1\right) - 5\left(\frac{x}{3} - \frac{2}{5}\right) = 4 \cdot \{5x + [2x - (3x - 1)]\}$

18. $\frac{5}{4}(x + 1) - \frac{3}{5}(x - 2) = \frac{1}{2}\left(3x - \frac{1}{5}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{x}{2} - \frac{4}{5}\right)$

19. $\frac{2}{3}(4x - 2) + \frac{1}{5}[5 - (3x - 2)] = \frac{1}{4} \cdot [3x - (-2x + 1)]$

20. $\frac{4}{5}\left(3x - \frac{2}{4}\right) = 7x - 3 \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{10}\right)$

3.4 ECUACIONES LITERALES DE PRIMER GRADO

Ya dijimos que una ecuación se llama literal cuando en ella figuran letras además de la incógnita; estas letras representan a números fijos, aunque indeterminados. Es costumbre representar a la incógnita por una de las últimas letras del alfabeto y a las constantes por letras de las primeras (a, b, c, etc.).

La regla para resolver una ecuación literal es la misma dada en la sección anterior; la única diferencia es que las operaciones entre letras hay que dejarlas indicadas.

Algunos ejemplos servirán de orientación para resolver los problemas que propondremos después.

Ejemplos

1. Resolver la ecuación $ax - b = d - cx$.
Pasando $-cx$ al primer miembro y $-b$ al segundo *(Tercera Etapa)*, queda: $ax + cx = d + b$.
Sacando factor común a x (Cuarta Etapa): $x(a+c) = b+d$, y pasando $(a+c)$ al segundo miembro (Quinta Etapa), se obtiene:

$$\boxed{x = \frac{b+d}{a+c}}$$ que es la única solución de la ecuación.

2. Resolver la ecuación: $\frac{ax}{b} + \frac{2ab}{a+1} = \frac{(a+b)^2 x}{ab} - \frac{bx}{a}$

Multiplicamos los dos miembros por $ab(a+1)$ para quitar denominadores, quedando: $a(a+1)\,ax + ab \cdot 2ab = (a+1)(a+b)^2 x - b(a+1)\,bx$.
Pasamos los términos en x al primer miembro y sacamos factor común a x: $x[a^2(a+1) + b^2(a+1) - (a+b)^2(a+1)] = -2a^2b^2$.
Sacamos ahora factor común a $(a+1)$ en el primer miembro, quedando: $(a+1)x \cdot [a^2 + b^2 - (a+b)^2] = -2a^2b^2$, o sea, operando en el corchete: $(a+1) \cdot x(-2ab) = -2a^2b^2$, de donde:

$x = \frac{-2a^2b^2}{-2ab(a+1)} = \frac{ab}{a+1}$, que es la solución de la ecuación.

3. Resolver la ecuación: $\frac{x-a-b}{c} + \frac{x-a-c}{b} + \frac{x-b-c}{a} = 3$.

Multiplicando los dos miembros por abc para quitar denominadores, queda: $abx - a^2b - ab^2 + acx - a^2c - ac^2 + bcx - b^2c - bc^2 = 3abc$.
Sacando factor común a x y pasando los términos constantes al segundo miembro queda: $x(ab + ac + bc) = a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 3abc$.
El segundo miembro se puede escribir sacando factor común a ab de sus dos primeros términos, a ac de los dos siguientes, a $b \cdot c$ de los dos siguientes, y descomponiendo $3abc$ en $abc + abc + abc$, así: $x \cdot (ab + ac + bc) = ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c) + abc + abc + abc$; ahora sacamos factores comunes en el segundo miembro, así: $a \cdot b$ de los términos 1º y 4º, $a \cdot c$ de los términos 2º y 5º, y $b \cdot c$ de los términos 3º y 6º, así queda:

$x.(ab+ac+bc)=ab.(a+b+c)+ac.(a+c+b)+bc\ (b+c+a)$.
Finalmente sacamos factor común a $(a+b+c)$ en el segundo miembro, con lo que nos queda:
$x.(ab+ac+bc)=(a+b+c)\,(ab+ac+bc)$, y cancelando el factor $(ab+ac+bc)$ de los dos miembros, por la *ley cancelativa,* tenemos: $\mathbf{x=a+b+c}$ que es la solución de la ecuación.

Verificación: Si sustituimos la solución $x=a+b+c$ en la ecuación original obtenemos:

$$\frac{(a+b+c)-a-b}{c}+\frac{(a+b+c)-a-c}{b}+\frac{(a+b+c)-b-c}{a}=$$

$\frac{c}{c}+\frac{b}{b}+\frac{a}{a}=1+1+1=3$, que es el segundo miembro.

EJERCICIOS 3.4

Resolver las siguientes ecuaciones literales, verificando el resultado, es decir, comprobando si la solución obtenida *verifica* a la ecuación de partida:

1. $ax+b=c$
2. $mx+n=0$
3. $ax+b=cx+d$
4. $ax+bx-cx=d$
5. $ax-1=1-bx$
6. $a(x-1)=b(x+1)$
7. $b.(a-1+x)=a(b-1+x)$
8. $a\left(b-\frac{x}{c}\right)=d\left(c-\frac{x}{b}\right)$

3.5 APLICACION DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO A LA SOLUCION DE PROBLEMAS

Una de las aplicaciones más interesantes y bellas que se hacen del Algebra es la resolución de problemas por medio de las ecuaciones.

Un problema es una cuestión en la que nos piden que determinemos un número (o una cantidad) que está sometido (o sometida) a cumplir ciertas relaciones con otros números (o con otras cantidades) conocidos (o conocidas).

El número (o la cantidad) desconocido se llama **la incógnita** del problema, y los números (o las cantidades) conocidos se llaman **los datos** del problema.

Hay problemas en los que nos piden la determinación de varios números (o cantidades), es decir, problemas con varias incógnitas; en la sección siguiente trataremos de estos problemas.

EL METODO ALGEBRAICO

Cuando las relaciones que deben cumplirse entre los datos y la incógnita (o las incógnitas) se pueden expresar por medio de las operaciones algebraicas, se procede de la siguiente forma:

1º) Se elige la incógnita del problema y se representa por una letra, (si hay varias incógnitas se representarán con una letra cada una), generalmente de las últimas del alfabeto. La incógnita elegida debe ser tal, que conocida ella pueda obtenerse fácilmente, o inmediatamente, la respuesta a la cuestión del problema.

2º) Se expresan, con los signos del Algebra, las relaciones que deben cumplirse entre los datos y la incógnita (o las incógnitas), con lo que se obtiene una ecuación (o un sistema de ecuaciones).

3º) Se resuelve la ecuación, (o el sistema de ecuaciones), con lo que se obtiene el número (o los números) que cumplen con las condiciones del problema.

4º) Cuando la incógnita pedida sea una cantidad (o un número especial) hay que ver si la solución de la ecuación pertenece al *campo* *de realidad de dicha cantidad,* y en caso contrario se concluye que el problema no tiene solución real, con las condiciones exigidas en el enunciado; por ejemplo, si nos piden la edad de una persona y la ecuación del problema tiene como solución $x = 2{,}500$ años, evidentemente el problema sería irreal.

Insistimos pues en que, cuando la incógnita del problema sea una cantidad, hay que verificar si la solución de la ecuación del problema pertenece al *campo de realidad* de dicha cantidad.

A continuación damos algunos ejemplos resueltos que aclararán estas ideas.

EJEMPLOS RESUELTOS DE PROBLEMAS DE PRIMER GRADO:

Problema 1°): *Encontrar un número que sumado con 16 sea igual a su duplo.*

Resolución: Elijamos como incógnita el número pedido y representémosla por la letra x. Según las condiciones del enunciado deberá cumplirse que: $x+16=2x$, que es la ecuación del problema.

Resuelta esta ecuación nos da $x=16$, que es la solución del problema. (Piensa, analizando el enunciado, por qué la solución ha sido precisamente 16).

Problema 2°): *La edad de un padre es de 42 años y la de su hijo 18 años. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el triplo de la del hijo?*

Elección de incógnita: Tomemos como incógnita, x, el número de años que pregunta el problema, es decir, los años que han de transcurrir para que la edad del padre sea triplo que la del hijo.

Planteo: Dentro de x años el padre tendrá: $42+x$ años, y el hijo tendrá $18+x$ años, y según la condición exigida en el problema deberá ser $42+x=3\,.\,(18+x)$, con lo que tenemos la ecuación del problema.

Resolvámosla: $42 + x = 54 + 3x, \quad -2x=12, \quad x = \frac{12}{-2} = -6.$

La solución de la ecuación no corresponde *al campo de realidad* de la cantidad pedida, pues los tiempos futuros se consideran positivos;

decir que dentro de -6 años la edad del padre será triplo de la del hijo, equivale a decir que *nunca* en el futuro la edad del padre será triple de la del hijo; lo que nos indica la solución negativa -6 años es que la edad del padre *ya fue* triple de la del hijo *hace 6 años,* y en efecto, hace 6 años el padre tenía 36 años y el hijo 12 años, y $36=3\times12$.

Problema 3°): *Se quieren repartir \$ 3,870 entre tres personas, de manera que la primera reciba el duplo que la segunda, y la tercera el triplo que la primera. ¿Cuánto corresponderá a cada una?*

Elección de incógnita: Elegimos como incógnita, x, la cantidad que corresponderá a la segunda persona, pues de esta forma se facilita la representación.

Planteo de la ecuación: De acuerdo con las condiciones del problema, si al segundo corresponden x pesos, al primero corresponden **2x**, y al tercero el triplo de esta cantidad, o sea, $3\,.\,2x = \mathbf{6x}$.

La suma de las tres partes debe ser igual a \$ 3,870, o sea: $x+2x+6x=3{,}870$, o bien: $9x=3{,}870$, de donde:

$$x = \frac{3{,}870}{9} = 430.$$

Las cantidades pedidas en el problema son:

Para el segundo: \$ 430.
Para el primero: \$ 430×2=\$ 860.
Para el tercero: \$ 430×6=\$ 2,580.

Comprobación: \$ 430 + \$ 860 + \$ 2,580 = \$ 3,870 que es la cantidad total.

PROBLEMA 4°): *Un gavilán preguntó a una bandada de palomas: "Bandada de 100 palomas, ¿a dónde vais?" La paloma capitana respondió: "No somos 100, pero las que vamos, más otras tantas, más la mitad, más la cuarta parte, más tú gavilán, sumamos 100". ¿Cuántas palomas iban?*

Elección de incógnita: Tomemos como incógnita, x, el número de palomas que iban en la bandada, que es el que pide el problema.

Planteo de la ecuación: De acuerdo con las condiciones del problema, y con la incógnita elegida, deberá cumplirse que:

$$x+x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100,$$

que es la ecuación del problema.

Resolución de la ecuación: Multiplicando los dos miembros por 4 para quitar denominadores, queda:

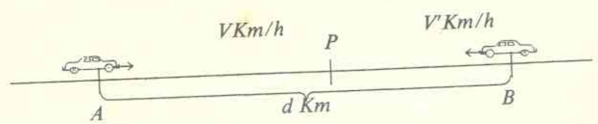
$4x+4x+2x+x+4=400$, o bien: $11x=396$, de donde

$$x = \frac{396}{11} = 36.$$

Verificación: $36+36+\frac{36}{2}+\frac{36}{4}+1=100.$

Interpretación de la solución: El número 36 pertenece al campo de realidad de la cantidad pedida en el problema, que es el campo de los números enteros positivos, y por tanto la solución de la ecuación lo es también del problema, de forma que iban 36 palomas.

Problema 5°): (Problema de los móviles).



Dos móviles parten en un mismo instante, con movimiento uniforme, de dos puntos, A y B, distantes **d** *km, al encuentro el uno del otro, con velocidades de* **v** *km/h y* **v'** *km/h, respectivamente. ¿Cuántas horas demorarán en encontrarse y a qué distancia del punto A estará el punto del encuentro?*

1°) *Elección de incógnita:* Elegimos como incógnita, **t**, el número de horas que transcurrirán desde el instante de la partida hasta el del encuentro; conocida esta incógnita se determina fácilmente la distancia $\overline{AP}$ pedida (siendo P el punto de encuentro).

2°) *Planteo de la ecuación:* Si representamos por P el punto del encuentro (ver la figura), se cumplirá: $AP+BP=AB=d$, (1).

Pero el camino AP recorrido por el primer móvil con velocidad uniforme de **v** Km/h en **t** horas es $AP=vt$, (2); análogamente, $BP=v't$, (3); puestos los valores de AP y de BP, dados por (2) y (3), en (1), queda: $vt+v't=d$, (4).

La ecuación (4) es la ecuación del problema.

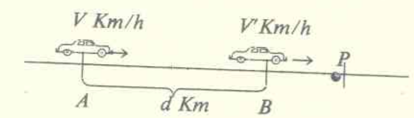
3°) *Resolución de la ecuación:* Sacando t factor común en el primer miembro de (4) queda: $t(v+v')=d$, y pasando $(v+v')$ al segundo miembro:

$$\boxed{t = \frac{d}{v+v'}}$$

4°) *Interpretación del resultado:* Considerando v y v' como cantidades absolutas (nº de km recorridos por cada móvil en 1 h) y d también como cantidad absoluta (nº de km que están separados A y B), la solución es positiva y nos indica que el encuentro se realiza *dentro de* $\frac{d}{v+v'}$ horas.

La distancia AP se calcula multiplicando la velocidad del primer móvil $(v \text{ Km/h})$ por el tiempo transcurrido hasta el encuentro $\left(\frac{d}{v+v'}\text{ h}\right)$, teniéndose así: $AP = \frac{d \cdot v}{v+v'}$ Km, que es la segunda cantidad pedida en el problema.

Problema 6°): *Dos móviles parten en el mismo instante de dos puntos A y B, situados a una distancia de* **d** *km, en la misma dirección* $\overrightarrow{AB}$*; el primero lleva una velocidad uniforme de* **v** *Km/h y el segundo una velocidad uniforme de* **v'** *Km/h. ¿Al cabo de cuánto tiempo se encontrarán y a qué distancia del punto A?*



1°) *Elección de incógnita:* Como en el ejercicio anterior, tomemos como incógnita, **t**, el número de horas transcurridas desde el instante de iniciarse el movimiento hasta el instante del encuentro.

2°) *Planteo de la ecuación:* (Ver la figura).

El móvil que parte de A recorrerá hasta llegar al punto de encuentro **d** Km más que el que parte de B, o sea, la diferencia entre el espacio recorrido por A y el recorrido por B es igual a **d** Km; refiriéndonos a la figura, si P es el punto de encuentro se tendrá:

$$AP - BP = AB = d, \quad (1).$$

Además, el espacio AP recorrido por el primer móvil es igual a su velocidad (**v**) por el tiempo invertido hasta el encuentro, **t**, o sea: $AP = vt$; análogamente, $BP = v't$, y puestos estos valores de AP, de BP en la ecuación (1) se tiene: $vt - v't = d$, (2), que es la ecuación del problema.

3°) *Resolución de la ecuación:* Sacando a **t** factor común en el primer miembro de (2) queda: $t \, . \, (v - v') = d$, pasando el factor $(v - v')$ al segundo miembro, $\boxed{t = \dfrac{d}{v - v'}}$ que es la solución de la ecuación.

4°) *Interpretación de la solución:* Considerando las cantidades d, v y v' como cantidades absolutas, igual que en el problema anterior, si $v > v'$, será **t** positivo y la solución pertenece *al campo de realidad* del problema, pues si el primer móvil es más veloz que el segundo lo alcanzará en el futuro (tiempo positivo); en cambio, si $v < v'$, la solución será negativa, lo que significa que en el futuro el móvil que parte de *A nunca encontrará* al que parte de *B*. Esta solución que nos da el Algebra está de acuerdo con nuestra intuición, pues si el móvil que parte de *A* es más lento que el que parte de *B*, *nunca lo alcanzará.*

Problema 7°): *La base de un rectángulo mide 5 m. más que su altura, y si la base se aumenta en 3 m. y la altura se disminuye en 2 m. el área disminuye en 12 m². ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?*

1°) *Elección de la incógnita:* Elegiremos como incógnita **x**, la altura del rectángulo, y por la condición del enunciado la base será $x + 5$; la base nueva será $\mathbf{x + 8}$ (aumentada de la anterior en 3 m.), y la altura nueva $\mathbf{(x - 2)}$.

2°) *Planteo de la ecuación:* Area del rectángulo inicial: $(x + 5) \, . \, x = x^2 + 5x$. Area del rectángulo nuevo: $(x + 8) \, . \, (x - 2) = x^2 + 6x - 16$. El área primera es 12 m^2 mayor que la segunda, o sea: $x^2 + 5x - (x^2 + 6x - 16) = 12$, y suprimiendo el paréntesis: $x^2 + 5x - x^2 - 6x + 16 = 12$, o sea $\mathbf{-x + 16 = 12}$, que es la ecuación del problema.

3°) *Resolución de la ecuación:* Pasando 16 al segundo miembro, $-x = 12 - 16 = -4$, y multiplicando los dos miembros por -1, $\mathbf{x = 4}$.

4°) *Interpretación de la solución:* La base del rectángulo será

$4 + 5 = 9$. El área es: $4 \times 9 = 36$ metros cuadrados. El área del nuevo rectángulo es $12 \times 2 = 24$, y la antigua menos la nueva: $36 - 24 = 12$.

Problema 8°): *Un capital de $ 50,000 se dividió en dos partes; la primera fue colocada al 8% y la segunda al 10%. La suma de los intereses de las dos partes en un año fue de $ 3,500. Hallar cada una de las partes.*

Elección de incógnita: Tomemos como incógnita la primera parte, **x**; la segunda parte será entonces **$ 50,000 − x.**

Planteo de la ecuación: El interés de la primera parte es: $\dfrac{x \, . \, 8}{100}$.

El interés de la segunda es: $\dfrac{(50{,}000 - x) \, . \, 10}{100}$.

La suma de intereses es: $\dfrac{x \, . \, 8}{100} + \dfrac{(50{,}000 - x) \, . \, 10}{100} = 3{,}500.$

Resolución de la ecuación: Multiplicando los dos miembros por 100, $8x + 500{,}000 - 10x = 350{,}000$; $-2x = -150{,}000$, $x = \$\,75.000$, y la otra parte es: $50{,}000 - 75.000 = -25.000$.

Interpretación de la solución: La solución no pertenece *al campo de realidad* del problema, pues las dos partes deben ser realmente menores que $ 50,000. Con los datos prefijados, el problema *no tiene solución.* Cámbiense los datos de forma que el problema tenga solución real (es decir, de acuerdo con la realidad).

EJERCICIOS 3.5

Ejercicios

1. Dividir el número 60 en dos partes tales que, $\frac{1}{5}$ de una más un tercio de la otra sumen 18.
(Ayuda: Si una parte es x, la otra será $60 - x$).
2. Encontrar un número tal que sus dos quintos disminuídos en 3, más sus cinco cuartos aumentados en 4, sean igual a 133.
3. De una pieza de tela se ha vendido su tercera parte, más su cuarta parte, más su sexta parte, y aún quedan 12 metros. ¿Cuántos metros tenía la pieza?

Ejercicios

4. En un corral se encuentran conejos y gallinas. El número total de cabezas es 30 y el de patas 100. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en el corral?
(Ayuda: Si los conejos se representan por x, las gallinas serán $30-x$).

5. Cuatro personas reunen un capital de \$ 360,000. El primero tiene doble parte que el segundo, el tercero cuádruplo que el primero y el cuarto cuádruplo que el segundo. ¿A cuánto asciende la parte de cada uno?
Ayuda: Tómese como incógnita la parte del segundo.

6. Un depósito tiene tres grifos de entrada. El primero demora 3 h en llenarlo el segundo 4 h. y el tercero 6 h. ¿En cuánto tiempo se llenará el depósito si se abren los tres grifos?

7. En una sala hay 420 personas entre mujeres, hombres y niños. El número de mujeres es doble que el de niños y el de hombres doble que el de mujeres. ¿Cuál es el número de mujeres, el de hombres y el de niños?

8. Un padre tiene el triplo de la edad de su hijo mayor, y éste el séxtuplo de la edad de su hermano menor. Entre los tres suman 50 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

9. Un padre tiene 46 años y su hijo 10. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será cuatro veces la del hijo? ¿Cuántos años hace que la edad del padre era 10 veces la del hijo?

10. Dos personas A y B, juegan al billar. Por cada partida que gana uno recibe \$ 1 del otro. A comenzó jugando con \$ 42 y B con \$ 24. Después de un cierto número de partidas el jugador A reunió 5 veces la cantidad de pesos que le quedaron a B. ¿Cuántas partidas de más ganó A que B?

11. Un almacén vendió en tres días \$ 58,500. Las ventas del segundo día fueron la tercera parte que las del primero, y las del tercero fueron la tercera parte que las del segundo. ¿Cuáles fueron las ventas de cada día?
Ayuda: Representar las ventas del primer día por $9x$.

12. ¿Qué número hace falta añadir a los dos términos de la fracción $\frac{23}{40}$ para que se haga igual a $\frac{2}{3}$?

13. Hallar tres números consecutivos cuya suma sea 63.

14. Pedro dijo a Luis: "Adivina los pesos que tengo, sabiendo que la tercera parte de ellos menos uno es igual a la sexta parte de ellos. ¿Cuántos pesos tenía Pedro?

15. Encontrar un número tal que al aumentarlo en cuatro unidades su cuadrado aumente en 120.

Niño 8º Castro.

16. Unos zapatos de hombre cuestan \$ 28 más que unos zapatos de niño. Sabiendo que 10 zapatos de niño y 20 de hombre cuestan juntos \$ 1,760, ¿cuánto valen unos zapatos de niño y cuánto unos de hombre?

17. La edad de un padre es triple que la de su hijo y dentro de 12 años será doble. ¿Qué edad tiene cada uno?

18. Una persona va de una población a otra en un automóvil a razón de 70 Km/h, y regresa en bicicleta a razón de 32 Km/h. Entre la ida y el regreso invierte 6 h. ¿Cuántos Km. separan a las dos poblaciones?
Ayuda: Si en la ida invierte x horas en la vuelta invertirá $6-x$ horas, y además el trayecto de ida *igual* al de vuelta.

19. Suponiendo que el agua de un mar cálido tenga el 4% de sal. ¿Cuántos litros de agua pura habrá que agregar a 30 litros de agua de ese mar para que la mezcla sólo contenga un 2.5% de sal?

20. Dos móviles parten de un mismo punto y se mueven en semirrectas opuestas. Después de 5 horas de iniciado el movimiento se encuentran a 60 Km. ¿Cuál es la velocidad de cada móvil, si la diferencia de las dos velocidades es de 2 Km?

Ejercicios

3.6 PRIMERAS NOCIONES SOBRE SISTEMAS DE DOS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS

Introducción: Ya hemos dicho que hay muchos problemas en los que nos piden determinar varios números o cantidades, es decir, problemas con varias incógnitas. En estos casos, al expresar las condiciones del problema con los símbolos del Algebra se obtienen generalmente varias ecuaciones *que deben verificarse simultáneamente*, y que forman *un sistema de ecuaciones.* Un conjunto de números que sustituídos en lugar de las incógnitas *verifican a todas* las ecuaciones del sistema se llama *una solución del sistema.*

Los sistemas más sencillos son los de primer grado con dos incógnitas, únicos que estudiamos en esta sección, pues más adelante volveremos sobre este tema con más profundidad.

Ejemplos

1. *Encontrar dos números cuya suma sea 22 y cuya diferencia sea igual a 6.*

Si representamos el primer número por x y el segundo por y, deberá cumplirse simultáneamente que:

$$\begin{cases} x + y = 22 \\ x - y = 6 \end{cases} \qquad (1)$$

El conjunto de dos ecuaciones (1) forman *un sistema de ecuaciones*, y los dos números que puestos en lugar de x y de y *verifican a las dos ecuaciones del sistema, forman la solución del sistema.* Pero, ¿cómo obtener la solución? Hay varios métodos que se estudiarán en esta sección, pero en este ejemplo el método más fácil es el llamado **método de reducción**.

Sumando las ecuaciones (1) se obtiene: $2x = 28$, (2) y en esta ecuación *se ha eliminado* la incógnita y; despejando la x de (2) se tiene: $x = \frac{28}{2} = 14$, y puesto este valor en la primera de las ecuaciones (1) se tiene: $14 + y = 22$, de donde $y = 22 - 14 = 8$.

La solución del sistema (1) es: $\begin{cases} x = 14 \\ y = 8 \end{cases}$ y estos son los dos números que cumplen las condiciones del enunciado.

El método que hemos seguido se llama **"Método de Reducción"** y lo aplicamos también al ejemplo siguiente:

2. *Encontrar dos números tales que el duplo del primero menos el quíntuplo del segundo sea igual a 1, y que el triplo del primero más el duplo del segundo sea igual a 3.*

Si representamos por x el primer número y por y el segundo deberá cumplirse:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases} \qquad (1)$$

En este caso, como los coeficientes de la x no son iguales, ni los de la y, al restar las dos ecuaciones *no se elimina* ninguna incógnita; pero podemos conseguir que los coeficientes de la x se hagan iguales multiplicando las ecuaciones por números convenientes; por ejemplo, multiplicando la primera ecuación por 3 y la segunda por 2 se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 6x - 15y = 3 \\ 6x + 4y = 6 \end{cases} \qquad (2)$$

Ejemplos

En el sistema (2) los coeficientes de la x son ya iguales, y al restar las ecuaciones *se elimina* la x, obteniéndose: $-19y = -3$, de donde:

$$\boxed{y = \frac{-3}{-19} = \frac{3}{19}}$$

Puesto este valor en la primera ecuación de (1) queda:

$$2x - \frac{15}{19} = 1, \quad \text{o bien,} \quad 2x = \frac{34}{19},$$

y por fin, $\boxed{x = \frac{17}{19}}$

Verificación: $\frac{34}{19} - \frac{15}{19} = \frac{19}{19} = 1$ (verificada).

$\frac{51}{19} + \frac{6}{19} = \frac{57}{19} = 3$ (verificada).

Tratemos ahora de resumir lo que hemos aprendido acerca del *"Método de Reducción"* en una regla práctica que aplicaras a otros ejercicios.

REGLA PARA RESOLVER UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS POR EL METODO DE REDUCCION:

Primera Etapa: *Se igualan los módulos de los coeficientes de una de las incógnitas* (si no fuesen iguales) *multiplicando las ecuaciones por números convenientes.*

Segunda Etapa: *Se suman o se restan las ecuaciones, de forma que se elimine la incógnita de coeficientes de igual módulo.*

Tercera Etapa: *Se resuelve la ecuación resultante con una sola incógnita, y el valor obtenido se sustituye en la ecuación más fácil del sistema, con lo que resulta una ecuación con la otra incógnita, que resuelta nos da su valor.*

Otro ejemplo: Resolver el sistema: $\begin{cases} 6x - 3y = 4 \\ 4x + 2y = 18 \end{cases}$ (1)

Multipliquemos la primera por *2* y la segunda por *3*, nos queda:

$$\begin{cases} 12x - 6y = 8 \\ 12x + 6y = 54 \end{cases} \quad (2).$$

Sumando las ecuaciones (2) se elimina la y (Restándolas se eliminaría la x, en este ejemplo), obteniendo: $24x = 62$, de donde

$$x = \frac{62}{24} = \frac{31}{12}.$$

Restando las ecuaciones (2) queda: $-12y = -46$, de donde

$$y = \frac{-46}{-12} = \frac{23}{6}.$$

Verifique el alumno que la solución $x = \frac{31}{12}$, $y = \frac{23}{6}$ satisface las dos ecuaciones del sistema (1).

Ejercicios

Resolver por el método de reducción los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} 2x + 4y = 30 \\ 5x - 3y = 18 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4x - 3y = 14 \\ 6x + y = 32 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x + 3y = 24 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3x - 5y = 26 \\ 4x + y = 48 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 9x - 4y = 2 \\ 18x + y = 56 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 3x - 7y = -8 \\ x + 2y = 38 \end{cases}$

EL METODO DE SUSTITUCION:

Otro método que se emplea con frecuencia para resolver un sistema es el de **sustitución;** he aquí la regla:

Primera Etapa: *Se despeja una de las incógnitas de una de las ecuaciones. Conviene elegir una incógnita de coeficiente pequeño, y el ideal es, si se puede, elegir una incógnita que tenga como coeficiente la unidad.*

Segunda Etapa: *El valor despejado de la incógnita* **se sustituye** *en la otra ecuación, con lo que* **se elimina** *la incógnita que se despejó, quedando una ecuación de primer grado con la otra incógnita, que resuelta nos da su valor.*

Tercera Etapa: *El valor encontrado en la etapa segunda se sustituye en el segundo miembro de la incógnita despejada en la etapa primera, con lo que se tiene el valor de la segunda incógnita.*

Ejemplos

Resolver los sistemas siguientes por el *método de sustitución:*

1. $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x + y = 24 \end{cases} \quad (1)$

Se despeja la y de la segunda que tiene coeficiente unitario y es la más cómoda de despejar: $y = 24 - 4x$, (2).

Se *sustituye* este valor en la primera ecuación del sistema (1), obteniéndose: $2x - 3 \cdot (24 - 4x) = 6$, o sea: $2x - 72 + 12x = 6$; resuelta esta última nos da:

$x = \frac{39}{7}$; puesto este valor en la (2) nos resulta: $y = 24 - 4 \cdot \frac{39}{7} = 24 - \frac{156}{7} = \frac{12}{7}$

Verificación:

$$\begin{cases} 2 \cdot \frac{39}{7} - 3 \cdot \frac{12}{7} = \frac{78}{7} - \frac{36}{7} = \frac{42}{7} = 6 \quad \text{(Verificada)} \\ 4 \cdot \frac{39}{7} + \frac{12}{7} = \frac{156}{7} + \frac{12}{7} = \frac{168}{7} = 24 \quad \text{(Verificada).} \end{cases}$$

2. $\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 5x - 4y = 14 \end{cases} \quad (1)$

Despejando y de la primera: $y = \frac{30 - 3x}{2}$, (2)

Puesto este valor (2) en la segunda:

Ejemplos

$5x-4\cdot\frac{30-3x}{2}=14$, o sea, simplificando: $5x-60+6x=14$, que resuelta nos da: $\boxed{x=\frac{74}{11}}$

Puesto este valor de x en (2), $y=\frac{30-3\cdot\frac{74}{11}}{2}=\frac{30-\frac{222}{11}}{2}=\frac{108}{22}=\frac{54}{11}$

Verificación: $\begin{cases} 3\cdot\frac{74}{11}+2\cdot\frac{54}{11}=\frac{222}{11}+\frac{108}{11}=\frac{330}{11}=30 & \text{(Verificada).} \\ 5\cdot\frac{74}{11}-4\cdot\frac{54}{11}=\frac{370}{11}-\frac{216}{11}=\frac{154}{11}=14 & \text{(Verificada).} \end{cases}$

Ejercicios

Resolver los siguientes sistemas por el *método de sustitución:*

1. $\begin{cases} 4x-y=7 \\ 2x+3y=32 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x+4y=40 \\ 3x-2y=18 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 7x-3y=9 \\ x+2y=24 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 6x+4y=31 \\ 7x+y=46 \end{cases}$

EL METODO DE IGUALACION

• Este método consiste en despejar una incógnita en ambas ecuaciones e igualar los resultados, con lo que queda eliminada dicha incógnita; después se continúa como en los métodos anteriores. Es el método que conduce casi siempre a cálculos más largos y por tanto no tiene interés práctico.

Ejemplo: Resolver por el método de igualación el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 3x+2y=6 \end{cases} \qquad (1)$$

Despejando la x en ambas ecuaciones e igualando los resultados: $\frac{1+3y}{2}=\frac{6-2y}{3}$, (2), o sea: $3+9y=12-4y$, y finalmente, $13y=9$, $\boxed{y=\frac{9}{13}}$; poniendo este valor en el primer miembro de (2) (que es la x despejada de la primera de (1)) queda:

$$x=\frac{1+3\cdot\frac{9}{13}}{2}=\frac{1+\frac{27}{13}}{2}=\frac{40}{26}=\frac{20}{13} \quad \text{(Verificar la solución).}$$

EJERCICIOS 3.6

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por el método que sea más adecuado en cada caso:

Ejercicios

1. $\begin{cases} 3x-y=4 \\ x+3y=2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x+4y=9 \\ x+y=2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 12x-7y=8 \\ 4x+2y=26 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x+y=16 \\ 2x+3y=27 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 9x-3y=12 \\ 2x+y=4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 7x-6y=1 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 2x+y=4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} -2x+6y=14 \\ 3x+6y=26 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 14x-7y=21 \\ 3x+y=4 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x-y=6 \\ 3x+y=12 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 9x+5y=4 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 12x-3y=6 \\ x+y=4 \end{cases}$

13. Resolver los siguientes sistemas y ver si tus soluciones coinciden con las que se dan:

a) $\begin{cases} 5x+3y=4 \\ 3x-4y=9 \end{cases}$ $\left(\text{Resp.: } x=\frac{43}{29},\ y=\frac{-33}{29}\right)$

b) $\begin{cases} 3x+2y=10 \\ 6x-3y=6 \end{cases}$ (Resp.: $x=2$, $y=2$)

c) $\begin{cases} 80x-30y=100 \\ 20x+10y=80 \end{cases}$ (Divídanse por 10 las ecuaciones para simplificarlas).

$\left(\text{Resp.: } x=\frac{22}{7},\ y=\frac{17}{7}\right)$

Ejercicios

d) $\begin{cases} \frac{x}{8} - \frac{y}{4} = 5 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 4 \end{cases}$ (Quitar denominadores multiplicando la primera por 8 y la segunda por 6). $\left(\text{Resp.: } x = \frac{88}{5},\ y = \frac{-56}{5}\right)$

e) $\begin{cases} 5x + 4y = 10 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$ $\left(\text{Resp.: } x = \frac{14}{11},\ y = \frac{10}{11}\right)$

f) $\begin{cases} 20x - 40y = 60 \\ 30x + 100y = 200 \end{cases}$ $\left(\text{Resp.: } x = \frac{35}{8},\ y = \frac{11}{16}\right)$

g) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 9 \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{7} = 2 \end{cases}$ $\left(\text{Resp.: } x = \frac{350}{23}, y = -\frac{96}{23}\right)$

REVISION DE CONCEPTOS DEL CAPITULO 3

1. ¿Qué diferencia existe entre una ecuación y una identidad?
¿Qué se entiende por raíz o solución de una ecuación?

2. ¿Cómo se clasifican las ecuaciones?

3. ¿Cuándo se dice que dos ecuaciones son equivalentes?
¿Qué partes hay que probar para demostrar que dos ecuaciones son equivalentes?

4. ¿Cómo se puede representar simbólicamente una ecuación cualquiera?
¿Cómo se representan los valores numéricos que toman los dos miembros de la ecuación $A(x) = B(x)$ para $x = a$?
Si a es raíz de la ecuación, ¿qué se cumple?

5. ¿Cómo es la ecuación que resulta de sumar a los dos miembros de una ecuación un mismo número? ¿Qué aplicaciones tiene esta transformación?

6. ¿Cómo es la ecuación que resulta de sumar a los dos miembros de una ecuación una misma expresión entera de la variable?
¿Qué aplicaciones tiene esta transformación?

7. ¿Cómo es la ecuación que resulta de multiplicar los dos miembros de una ecuación por un mismo número, distinto de cero?
¿Qué aplicaciones tiene esta transformación?

8. Enuncia la "Regla de trasposición de términos" y explica su fundamento.

9. Explica la regla para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita.

10. Explica lo que es un problema y cómo se puede expresar un problema mediante una ecuación algebraica.

11. Cuando la incógnita de un problema es una cantidad (no un número abstracto), ¿qué se entiende por *campo de realidad* de la incógnita? ¿Puede ocurrir que la ecuación de un problema tenga solución y que ésta no pertenezca al *campo de realidad* de la incógnita?

12. ¿En qué consiste el *"Método de Reducción"* para resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas?

13. Explica el "Método de Sustitución" para resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
¿Cuál método crees que es más ventajoso?

CUESTIONARIO DE SELECCION

Selecciona la afirmación que corresponda al concepto enunciado al principio:

1. La expresión $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$ es:
a) una identidad;
b) una ecuación.

2. La ecuación $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} = 3\sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{5}$ es:
a) entera
b) fraccionaria
c) irracional.

3. La ecuación $\frac{2}{5}x - \sqrt{2}x + 1 = \frac{2 + x}{x} - 3$ es:
a) entera;
b) fraccionaria;
c) irracional.

4. Si a es raíz de la ecuación $A(x) = B(x)$ se cumple:
   a) $A(a) > B(a)$;
   b) $A(a) = B(a)$;
   c) $A(a) < B(a)$.

5. Si h es un número real cualquiera, las ecuaciones $A(x) = B(x)$ y $A(x) + h = B(x) + h$ tienen:

   a) exactamente las mismas raíces;
   b) la primera tiene menos raíces que la segunda;
   c) la primera tiene más raíces que la segunda.

6. Si $E(x)$ representa una expresión entera en x, las ecuaciones $A(x) = B(x)$, y $A(x) + E(x) = B(x) + E(x)$ tienen:

   a) las mismas raíces;
   b) la segunda más raíces que la primera;
   c) la primera más raíces que la segunda.

7. Si $h \neq o$, $A(x) = B(x)$ y $A(x) \cdot h = B(x) \cdot h$ son ecuaciones *equivalentes*, y este principio se aplica para:

   a) trasponer términos de un miembro a otro;
   b) para suprimir paréntesis;
   c) para transformar una ecuación que tiene denominadores numéricos en otra equivalente sin denominadores.

8. Para resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas por el "Método de Reducción".

   a) se despeja una incógnita de una ecuación y se sustituye en la otra.
   b) se despeja una incógnita de ambas ecuaciones y se igualan resultados;
   c) se igualan los módulos de los coeficientes de una incógnita, multiplicando las ecuaciones por números convenientes, y se suman o restan las ecuaciones obtenidas de forma que se elimine una incógnita.

CUESTIONARIO DE DISTINCION

¿Puedes distinguir las afirmaciones verdaderas de las falsas?

1. Una ecuación es una igualdad incondicional.
2. Dos ecuaciones se llaman equivalentes cuando tienen exactamente las mismas soluciones.
3. Las transformaciones de una ecuación consistentes en sumar a sus dos miembros una

misma expresión entera, o en multiplicar los dos miembros por un mismo número, dan lugar a otras ecuaciones equivalentes a la de partida.

4. Cuando se quitan denominadores numéricos se puede elevar el grado de una ecuación.
5. Los módulos de los coeficientes de x en un sistema de dos ecuaciones de primer grado en x, y, se pueden igualar multiplicando la primera ecuación por el módulo del coeficiente de x en la segunda, y la segunda por el módulo del coeficiente de x en la primera.

CUESTIONARIO DE COMPLETACION

1. Completar el término que falta en las siguientes ecuaciones para que admitan la raíz $x=2$:

   a) $x + 3 = 2x + -?-$
   b) $2x - 5 = 4x - -?-$
   c) $5x + 8 = 7x + 2 + -?-$

2. Completar los términos que faltan en las siguientes igualdades para que se conviertan en identidades:

   a) $(x + y)^2 = x^2 + -?- + y^2$
   b) $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2 y + -?- + y^3$
   c) $\frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + -?- + a^2$
   d) $(x - y)^3 = x^3 - ? + 3xy^2 - y^3$

3. Para resolver el sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$ por el método de reducción se multiplica la primera ecuación por $-?-$ y la segunda por $-?-$. Así se puede eliminar la $-?-$.

4. Si el sistema $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$ tiene por solución para la x el número 2, la $y = -?-$.

5. Si en la ecuación $ax = b$, $a \neq o$, el número de soluciones de la ecuación es $-?-$.

6. Si en la ecuación $ax = b$, $a = o$, $b \neq o$, el número de soluciones es $-?-$. La ecuación se llama...

7. Si en la ecuación $ax = b$, $a = o$, $b = o$, el número de soluciones es $-?-$; la ecuación se llama...

8. Dada la ecuación $A(x) = B(x)$, (1), completar lo que falte en las siguientes ecuaciones para que sean equivalentes a la (1):

   a) $A(x) + \sqrt{2} = B(x) + -?-$.
   b) $\frac{3}{4} A(x) = ?\ B(x)$.

c) $A(x) + E(x) = B(x) + -?-$ ($E(x) =$ expresión entera de x).
d) $A(x) + x^2 + 1 = B(x) + \cdots$

e) $A(x) . \sqrt{3} = B(x) . -?-$.

PROBLEMAS SOBRE EL CAPITULO 3

Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado:

1. $\frac{5}{6}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{7}{6}\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{7}\right) = 4 + \frac{8}{9}$ (Resp.: $x = 5$)
2. $\frac{5x}{3} + 2x + 6\left(x - \frac{x}{3} - \frac{4x}{9}\right) = 450{,}000$ (Resp.: $x = 90{,}000$)
3. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = c$ $\left(\text{Res.: } x = \frac{abc}{a+b}\right)$
4. $\frac{x+a}{a} - \frac{x+b}{b} = 1$ $\left(\text{Resp.: } x = \frac{ab}{b-a}\right)$
5. $\frac{a(x-a)}{b} + \frac{b(x-b)}{a} = x$ (Resp.: $x = a + b$)
6. $\frac{x-3}{4} = \frac{x-5}{6} + \frac{x-1}{9}$ (Resp.: $x = 7$)
7. $\frac{5(x-5)}{6} - 10 = \frac{6(x-4)}{12} + 2$ (Resp.: $x = 42.5$)
8. $\frac{x+1}{4} - \frac{2x-5}{6} = -\frac{x+7}{12}$ (Resp.: imposible)

Resolver los siguientes sistemas por el método más conveniente:

9. $\begin{cases} 3x + 5y = 20 \\ 2x - 10y = 0 \end{cases}$ (Resp.: $x = 5$, $y = 1$)

10. $\begin{cases} 12x + 3y = 6 \\ 5x + y = 18 \end{cases}$ (Resp.: $x = 16$, $y = -62$)

11. $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2 \\ bx - ay = 0 \end{cases}$ (Resp.: $x = a$, $y = b$)

12. Una aleación de oro y plata pesa 128 gramos y tiene una ley de 0.915. ¿Cuánta plata hay que fundirle para rebajarle la ley a 0.840?

13. Dos toneles de capacidades v y v' respectivamente están llenos, el primero de vino y el segundo de agua. ¿Cuántos litros hay que intercambiar del uno al otro para que las dos mezclas sean idénticas?

14. Un tren parte de una estación y recorre 28 Km. en 5 h.; de otra estación situada 32 Km. antes que la primera, parte 8 horas después otro tren que recorre 20 Km. en 3 h. ¿Cuándo y dónde será alcanzado el primer tren por el segundo?
(Resp.: El primer tren es alcanzado después de 80 horas de su partida, y a 448 Km. de su estación de partida).

15. Una persona coloca $\frac{3}{5}$ de su capital al 8% y el resto al 10%., obteniendo un interés anual de \$ 18.000. Hallar el capital.

16. Una persona coloca los $\frac{2}{5}$ de su capital al 6% y el resto al 4.5%. La segunda parte del capital produce en 6 meses \$ 1.722,60 más que la primera. Averiguar el capital y cada una de las partes.

17. Una disolución de sal al 5% se quiere diluir al 4%. ¿Qué cantidad de agua habrá que agregarle?
(Resp.: $\frac{1}{4}$ de la cantidad que hay de disolución).

18. Un lingote se compone de oro y plata y pesa 2,500 gramos. Si el oro tiene un precio 19 veces superior al de la plata, y la parte de oro del lingote vale igual que la parte de plata, ¿cuál es el peso de cada metal contenido en el lingote?

19. Calcular las dimensiones de un rectángulo sabiendo que si la base se aumenta en 3 m. y la altura se aumenta en 2 m., el área aumenta en 16 m^2, y si la base se aumenta en 3 m. y la altura se disminuye 2 m. el área no varía.

20. Los lados de un rectángulo miden 10 m. y 15 m. Hallar los lados de otro rectángulo, semejante al primero, cuyo perímetro sea de 180 m.

21. La edad de una persona es doble que la de otra; hace 7 años, la suma de las edades de las dos personas era igual a la edad actual de la primera. ¿Cuáles son las edades de estas dos personas?

22. Un padre dice a su hijo: Hoy día tu edad es $\frac{1}{5}$ de la mía y hace 5 años no era nada más que $\frac{1}{9}$. ¿Qué edad tenemos nosotros?

23. Un reloj marca las 12. ¿A qué hora la aguja de los minutos alcanzará a la de las horas?

24. Un tonel contiene 120 litros de vino y 180 litros de agua; un segundo tonel contiene 90 litros de vino y 30 litros de agua; ¿cuántos litros hay que tomar de cada tonel para llenar un tercer tonel con 70 litros de vino y 70 litros de agua?

25. Una esfera de 10 cm. de diámetro contiene en su interior dos esferas tangentes entre sí

y tangentes a la primera. Los radios de las esferas interiores difieren 2 cm. ¿Cuál es el volumen que las dos esferas internas dejan libre en la mayor?

26. Un barco de transporte por río hace el recorrido entre dos puntos A y B en 4 horas cuando va a favor de la corriente y en 5 horas cuando va contra corriente. Hallar las velocidades del barco y de la corriente del río, sabiendo que la distancia entre A y B es de 65 Km.

27. ¿Cuál es el precio de venta de un artículo, sabiendo que al hacer sobre el mismo un descuento del 30% se gana sobre el precio de costo \$ 12.50, y si el descuento fuera del 40%, perdería \$ 10.00?
(Ayuda: Representar el precio de costo por x y el de venta por y).

28. ¿Cuáles son los precios de dos artículos sabiendo que por cuatro unidades del primero y siete del segundo hay que pagar \$ 47, y por 6 unidades del primero y 5 del segundo hay que pagar \$ 43?

29. Hallar un número de dos cifras tal que al invertirlas queda disminuído en 9 unidades, y el número invertido resulta además igual a $\frac{5}{6}$ del número original.

40. Un automóvil alcanza a un tren de 80 m. de largo, tardando en pasarlo 40 segundos; cuando se cruza con él tarda en hacerlo 5 segundos. ¿Cuál es la velocidad de uno y otro vehículo?

31. Se quieren mezclar café de \$ 2.80 la libra con café de \$ 3.50, de forma que se obtengan 80 Kg. de mezcla cuyo precio medio sea de \$ 3.10. ¿Qué cantidad hay que poner de cada clase?

32. Un amigo dice a otro: "si me das una naranja tendré el doble que tú; el otro le contesta· "si me la das tú a mí tendremos las mismas". ¿Cuántas naranjas tiene cada uno?

33. Los alumnos de una clase están sentados en un cierto número de bancos, habiendo igual número de alumnos en cada banco. Si hubiera 10 bancos más se podrían colocar todos exactamente sentándose un alumno menos por banco, y si hubiera habido 15 bancos menos, hubieran tenido que sentarse 2 alumnos más en cada banco. ¿Cuántos alumnos y cuántos bancos había en la clase?

34. Un tren tarda en pasar por un punto 7 segundos y en pasar por un puente de 378 metros de largo 25 segundos. Calcular la velocidad y la longitud del tren.

35. Las diagonales de un rombo difieren en 9 cm. Si ambas se aumentan en 4 cm., el área aumenta en 90 cm². ¿Qué longitud tiene cada diagonal?

36. Dos triángulos tienen un lado igual y las alturas relativas al lado igual suman 56 cm. Hallar las alturas si la razón de las áreas es $\frac{3}{4}$.

37. Un tren sale de A a las 9 h. 20 m. y llega a B a las 13. Otro tren sale de B a las 9 h. 20 m., y llega a A a las 21 h. ¿Al cabo de cuánto tiempo se encuentran?

38. Dos personas tienen el mismo capital. La primera lo coloca al 8% y la segunda al 10%. La renta anual de la segunda excede en \$ 600 a la de la primera. ¿Cuál es el capital que tienen?

39. Una campana se tañe en un punto A y a los 20 segundos se tañe otra en un punto B distante del A 10 Km. ¿En qué punto del segmento AB debe estar colocada una persona para percibir los dos tañidos en el mismo instante? Se supone que la velocidad del sonido es de 340 m/s.

40. Calcular la base y la altura de un rectángulo cuyo perímetro mide 120 metros y la altura es $\frac{3}{5}$ de la base.

41. Dos depósitos de petróleo están llenos y tienen igual capacidad. Si del primero se sacan 20 l. y del segundo 90 l. queda en el primero doble cantidad de petróleo que en el segundo. ¿Cuál es la capacidad de los depósitos?

42. Se compraron 25 litros de leche y para ver si contenía agua se pesaron resultando un peso de 25.57 Kg. Averiguar los litros de agua que contenían los 25, sabiendo que la densidad de la leche es 1.03.

43. Se han comprado 2,000 unidades de un artículo y al ir a venderlo se han tenido que desechar el 10% de las unidades por estar deterioradas. Si cada unidad costó \$ 3 y queremos ganar un 15% sobre la inversión hecha, ¿a cómo debe venderse cada unidad de las que quedaron buenas?

44. Se han repartido \$ 24,000 entre cuatro personas. La primera recibe doble que la segunda, ésta, triple que la tercera, y ésta, la mitad que la cuarta. ¿Cuánto ha recibido cada una?

45. El Rey Herón hizo construir una corona entregando al orfebre 5 Kg de oro puro. Para averiguar si le habían sustituido oro por plata, el Rey llamó a Arquímedes, el cual sumergió la corona en agua observando que ella perdió 400 gramos de su peso. Se sabe que el oro pierde 0.052 de su peso por unidad, y la plata pierde 0.095 por unidad al sumergirse en el agua. ¿Cuánto oro y cuánta plata contiene la corona?

46. Dos números son tales que al dividir el mayor por el menor se obtiene 11 de cociente y 10 de resto, y al dividir 30 veces el menor por el mayor resulta 2 de cociente y 140 de resto. ¿Cuáles son los dos números?

47. Dos móviles parten simultáneamente de dos puntos distantes entre sí d Km. Si marchan en sentido opuesto se encuentran al cabo de t minutos, y cuando marchan en el mismo sentido se encuentran al cabo de t' minutos. ¿Cuáles son sus velocidades respectivas, suponiendo que el movimiento de ambos sea uniforme?

48. Una persona divide una cantidad que ha heredado en dos partes, que coloca al 3% y al 4% respectivamente, obteniendo una renta anual de $ 2,400. Si hubiese colocado $\frac{1}{3}$ de la segunda parte al 4% y el resto al 3%, la renta hubiese sido de $ 2,070. Averiguar el importe de la herencia.

49. Un capital produce al 8% un interés de $ 800 en un cierto tiempo, y el capital aumentado en $ 2,000 produce el mismo interés en el mismo tiempo, al 6%. Averiguar el capital y el tiempo que estuvo colocado.

50. La suma de todas las aristas de un paralelepípedo rectángulo de base cuadrada es 72 dm. y la altura mide 6 dm. más que el lado de la base. Hallar las dimensiones del paralelepípedo.

Unidad 4

METODO DE SUSTITUCION DE BEN EZRA

Dada la ecuación
$m\ (ax + b) + c + 0,$
poniendo $ax + b = y$, se tiene
$my + c = 0$, de donde
$y = -c : m$, y, por tanto
$ax + b = -c : m$, que se
resuelve fácilmente.

Fue en Toledo durante el siglo V donde los árabes, judíos y cristianos españoles se mezclaron a estudiar la producción científica de las Universidades de Córdoba y Sevilla.

Los estudiosos italianos, alemanes e ingleses y los maestros de las recién fundadas Universidades de París y Bolonia, acudían a este centro cultural de España en donde se realizaba tan importante intercambio de ideas.

Ya el Monje Gerberto, formado en tierras hispánicas, había escrito dos tratados en latín de Matemática y Geometría con los conocimientos hispano-árabes-hindúes.

El Rabbi Ben Ezra de Toledo escribió un libro de Aritmética en el cual pretendió cambiar los números hindú-arábigos por letras hebreas y trató de explicar teorías de los números a la manera pitagórica.

Otro judío catalán, Savasorda, aplicó el calculo algebraico a la Geometría y resolvió las ecuaciones de segundo grado. Al Rabbi Ben Ezra y a Savasorda se atribuye el libro de Aumentos y Disminuciones que trae un método de "sustitución"

De la península española pasaron las teorías algebraicas a Europa.

4 DESCOMPOSICION DE POLINOMIOS ENTEROS EN FACTORES M.C.D. Y M.C.M. DE EXPRESIONES ENTERAS.-

4.1 - Concepto de descomposición de una expresión entera en factores. Definiciones y ejemplos.

4.2 - Casos notables de polinomios factorizables.

I) Polinomio con un factor común en todos sus términos.
II) Polinomios que se pueden factorizar agrupando partes de ellos.
III) Trinomios cuadrados perfectos.
IV) Diferencia de cuadrados.
V) Combinación del cuadrado de un binomio con la diferencia de cuadrados.
VI) Factorización de algunos trinomios especiales.
VII) Factorización de la diferencia de potencias semejantes.
VIII) Factorización de suma de potencias semejantes de exponente impar.
IX) Descubrimiento de factores de la forma $X—A$.

4.3 - Máximo común divisor de expresiones enteras.

I) Definiciones y ejemplos.
II) Máximo común divisor de varios monomios.
III) Máximo común divisor de dos o más polinomios.

4.4 - Mínimo común múltiplo de expresiones enteras.

I) Definiciones y ejemplos.
II) Mínimo común múltiplo de monomios.
III) Mínimo común múltiplo de varios polinomios.

4

Dina Jecoste

4.1 CONCEPTO DE DESCOMPOSICION DE UNA EXPRESION ENTERA EN FACTORES. DEFINICIONES Y EJEMPLOS:

Si multiplicamos dos expresiones enteras, que representaremos por $E_1(x)$ y $E_2(x)$, y que pueden ser monomios o polinomios, obtenemos otra expresión entera, que representaremos por $E_3(x)$, es decir que $E_3(x) = E_1(x) \cdot E_2(x)$. En este caso se dice que $E_1(x)$ y $E_2(x)$ son **factores** de $E_3(x)$.

Está claro que los grados de $E_1(x)$ y $E_2(x)$ son inferiores al grado de $E_3(x)$; precisamente, el grado de $E_3(x)$ es la suma de los grados de $E_1(x)$ y $E_2(x)$. De acuerdo con esta explicación daremos la siguiente

Definición: *Descomponer una expresión entera en factores, dentro de un cierto campo numérico, es obtener otras expresiones enteras (dos o más), cuyos coeficientes pertenezcan al campo numérico prefijado, y cuyo producto sea igual a la expresión entera primera.*

Los grados de los factores son inferiores a los de la expresión producto.

Cuando se han encontrado dos o más factores cuyo producto es igual a una expresión entera, se dice que la expresión entera *se ha factorizado*, o *se ha descompuesto en factores.*

Cuando una expresión no se puede factorizar en un determinado campo se dice que es **prima** *en* **dicho campo.** En particular se considera como expresión prima una letra, o un binomio lineal, como $(ax + b)$; pero hay polinomios de grado superior que son primos en un campo numérico prefijado; por ejemplo, el trinomio de segundo grado $x^2 + x + 1$

es primo en el campo de los números racionales, y aún en el de los reales, lo que quiere decir que no existen dos expresiones enteras lineales, de la forma $(ax+b)$ y $(cx+d)$, con a, b, c y d reales, cuyo producto sea igual a x^2+x+1.

La expresión x^2-3 *es prima* (no se puede factorizar) en *el campo de los números racionales,* en cambio *es compuesta* (es decir, se puede factorizar) *en el campo de los números reales;* en seguida comprenderás que $x^2-3=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

En los apartados de la sección siguiente vamos a explicar los métodos para factorizar ciertos tipos de expresiones enteras, factorizables en el campo numérico racional.

Evitamos la presentación de casos puramente artificiosos, carentes de generalidad, que después se resuelven con naturalidad cuando se conoce la ecuación cuadrática; en cambio damos los primeros pasos para comprender el verdadero sentido de la factorización como auxiliar de la resolución de ecuaciones, aplicando el Teorema del Resto, que fue explicado con ocasión de la Regla de Ruffini, a la factorización de polinomios en los casos sencillos.

Para terminar esta introducción añadiremos que se dice que una expresión entera se ha factorizado *completamente* en un determinado campo, cuando se ha descompuesto en factores *todos primos* en dicho campo, es decir, que ninguno de los factores admite otros factores dentro del campo.

En lo que sigue, cuando pidamos factorizar una expresión, se sobrentiende que se trata de factorizarla *completamente,* y además que nos referimos al campo numérico racional.

Por ejemplo, $x^4-16=(x^2-4).(x^2+4)$ no está factorizada *completamente,* pues $x^2-4=(x-2)(x+2)$; en cambio, x^2+4 es prima en el campo numérico racional (y aún en el real) de forma que la factorización completa de x^4-16, en el campo numérico real, es:

$$x^4-16=(x-2)(x+2)(x^2+4).$$

EJERCICIOS 4.1

Ejercicios

1. ¿Es correcto factorizar $(3x+2)$ de la siguiente forma: $3x+2=x\left(3+\frac{2}{x}\right)$? (Recuérdese la definición de factorización de una expresión entera).
2. Piensa si será factorizable x^2+1 en el campo de los números reales.
3. ¿Es correcta la factorización $x-ax+2=\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}-a\ \sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$?.

4.2 CASOS NOTABLES DE POLINOMIOS FACTORIZABLES

I) *POLINOMIO CON UN FACTOR COMUN EN TODOS SUS TERMINOS:*

El caso más sencillo, y que ocurre con más frecuencia, de factorización, es aquel en el que todos los términos del polinomio que se va a factorizar tienen un factor común; basta sacar dicho factor común fuera de un paréntesis y multiplicarlo por el polinomio que queda después de dividir todos los términos del polinomio propuesto por dicho factor común. El fundamento es la *ley distributiva.*

Ejemplos

Sacar todos los factores comunes posibles de los siguientes polinomios:

1. $3x^2y-2xy+5x^2y^2-xy^2$; se ve que todos los términos tienen el factor común $x.y$, que puede sacarse fuera de un paréntesis, quedando:

$$3x^2y-2xy+5x^2y^2-xy^2=x.y.(3x-2+5xy-y)$$

2. $16m^4+12m^2x-4m^3y=4m^2.(4m^2+3x-my)$
3. $12x^2y^2z^2-3xy^2z^2+6x^2yz^2-9xyz^2=3xyz.^{2}(4xy\cancel{z}-y\cancel{z}+2x\cancel{z}-3\cancel{z})$
4. $5a^2bx+3ab^2xy-7a^3b^3x^2y^2=abx.(5a+3by-7a^2b^2xy^2)$

Ejercicios

Sacar todos los factores posibles de los siguientes polinomios:

1. $-2p^2qr + 5pq^2r^2 - 3p^3q^2r + 2pqr = $ —?—
2. $16m^2np + 4mn^2p + 8mnp^2 = $ —?—
3. $14x^2yz^3 - 7x^2z + 21xyz = $ —?—
4. $18x^3y - 9x^2y^2 + 3xy^3 = $ —?—
5. $3a^4 + 6a^3x + 9a^2 = $ —?—
6. $11x^2y^2z^2 - 22x^4y^4z^4 + 33x^6y^6z^6 = $ —?—

II) *POLINOMIOS QUE SE PUEDEN FACTORIZAR AGRUPANDO PARTES DE ELLOS*

Hay casos en los que todos los términos del polinomio no tienen un factor común, pero ciertos polinomios parciales *si lo tienen,* y al sacar el factor común correspondiente a cada uno de los polinomios parciales los cofactores (los paréntesis) *coinciden,* en cuyo caso se puede sacar factor común, en una segunda etapa, a dichos cofactores, quedando factorizado el polinomio original; veamos algunos ejemplos que aclaren estas ideas.

Ejemplos

1. $mx + nx + my + ny = x\,.\,(m+n) + y\,.\,(m+n) = (m+n)\,.\,(x+y)$
2. $ax+by+az+bx+ay+bz = x\,.\,(a+b)+y\,.\,(a+b)+z\,.\,(a+b) =$
   $= (a+b)\,.\,(x+y+z)$
3. $a^3x+b^3x+c^3x-a^3y-b^3y-c^3y = x(a^3+b^3+c^3) - y(a^3+b^3+c^3) =$
   $=(a^3+b^3+c^3)\,.\,(x-y)$
4. $x^2+ax+bx+ab = (x^2+ax) + (bx+ab) = x(x+a) + b(x+a) =$
   $= (x+a)(x+b)$

Ejercicios

Descomponer en factores, por agrupaciones convenientes, los siguientes polinomios:

1. $y^2+(m-n)y-mn = $ —?— (quitar primero el paréntesis para agrupar de otra forma).
2. $6ax-bx+6ay-by = $ —?—
3. $am+ay-2ny-2nm = $ —?—
4. $x^3+x^2-2x-2 = $ —?—
5. $a^3+a^2+a+1 = $ —?—
6. $a^2+ab+a+b = $ —?—
7. $x^2+ax+bx+ab = $ —?—
8. $bx-5b-2x+10 = $ —?—
9. $mx-my+7bx-7by = $ —?—
10. $a^4+a^3-a^2-a = $ —?—

III) *TRINOMIOS CUADRADOS PERFECTOS:*

Recordamos aquí la fórmula del cuadrado de un binomio:

$$(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \pm 2\,\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$$

Esta fórmula nos indica que siempre que un trinomio esté formado por dos términos que sean cuadrados perfectos, y por un tercer término que sea el doble producto de sus raíces cuadradas, el trinomio coincide con el cuadrado de un binomio (del binomio formado por la suma o la diferencia de las raíces cuadradas de los términos cuadrados perfectos, según que el doble producto tenga signo + ɔ –).

Ejemplos

1. $x^2 + 4xy + 4y^2 = [x + (2y)]^2 = (x+2y)^2$
2. $x^4 - 2x^2y + y^2 = (x^2 - y)^2$
3. $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2$
4. $9a^4 - 12a^2b^2 + 4b^4 = (3a^2 - 2b^2)^2$

Ejercicios

1. $a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 =$ —?—
2. $4x^2 - 12xy + 9y^2 =$ —?—
3. $4x^2 - 8x + 4 =$ —?—
4. $4m^2x^2 - 4mnx + n^2 =$ —?—
5. $x^2 + x + \frac{1}{4} =$ —?—
6. $9a^2 - 3ab + \frac{b^2}{4} =$ —?—
7. $\frac{x^2}{16} - \frac{3}{2}xy + 9y^2 =$ —?—
8. $x^2 + x + \frac{1}{4} =$ —?—
9. $9x^2 + 12xy + 4y^2 =$ —?—
10. $\frac{x^2}{4} - \frac{xy}{3} + \frac{y^2}{9} =$ —?—

IV) *DIFERENCIA DE CUADRADOS*

Comprobemos esta identidad notable:
(a + b) . (a − b) = a² − b² , (1).

En efecto, por simple multiplicación se tiene:

$$\begin{array}{r} a + b \\ \times\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ -ba - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array}$$

La identidad (1), (leída en sentido inverso), nos dice que:

La diferencia de dos cuadrados es igual al producto de la suma de sus bases por la diferencia de dichas bases.

Esta regla se emplea para factorizar diferencias de cuadrados.

Ejemplos

1. $\frac{a^2}{4} - b^2 = \left(\frac{a}{2} + b\right) . \left(\frac{a}{2} - b\right)$
2. $5a^2 - 45m^2 = 5 . (a^2 - 9m^2) = 5\,(a + 3m) . (a - 3m)$
3. $x^3y - xy^3 = xy . (x^2 - y^2) = x . y\,(x + y) . (x - y)$
4. $a^2b^2 - c^2 = (ab + c)\,(ab - c)$
5. $x^2 - y^6 = (x - y^3) . (x + y^3)$

Ejercicios

Tarea

1. $150x^6a^2 - 24a^6x^2 =$ —?— (Sacar primero factor común a 6).
2. $a^4 - 1 =$ —?— (Descomponerlo completamente).
3. $x^2 - 16 =$ —?—
4. $x^2 - \frac{1}{16} =$ —?—
5. $x^2 - 9y^2 =$ —?—
6. $16a^2 - 9b^2 =$ —?—
7. $a^2x^2 - b^2y^2 =$ —?—
8. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} =$ —?—
9. $x^{2m} - y^{2m} =$ —?—
10. $x^4y^4 - 625z^8 =$ —?—
11. $16x^4y^8 - \frac{1}{81}z^4 =$ —?—
12. $a^2 - \frac{4}{25} =$ —?—
13. $\frac{1}{x^4} - \frac{1}{y^4} =$ —?—
14. $25x^2 - \frac{4}{9}y^6 =$ —?—
15. $x^2 - 25 =$ —?—

Ejercicios

16. $36a^2 b^4 - 49c^4 d^6 = $ —?—
17. $\frac{9}{16} x^2 y^4 - \frac{25}{36} z^2 t^6 = $ —?—
18. $(x - 2y)^2 - (x + 2y)^2 = $ —?—
19. $4a^2 b^2 x^2 - 9c^2 d^2 y^2 = $ —?—
20. $50m^4 z^2 - 32y^2 t^4 = $ —?—

V) *COMBINACION DEL CUADRADO DE UN BINOMIO CON LA DIFERENCIA DE CUADRADOS:*

Hay ciertos casos en los que después de agrupar los términos que forman el cuadrado de un binomio queda otro término que es un cuadrado perfecto, precedido del signo menos; en tales casos se puede lograr la factorización combinando los tipos II) y IV). Veamos algunos ejemplos y ejercicios.

Ejemplos

1. $x^2+2xy+y^2-9z^2 = (x+y)^2-9z^2 = (x+y+3z) \cdot (x+y-3z).$
2. $4x^2-12xy+9y^2 - 25z^2=(2x-3y)^2 - 25z^2=(2x-3y+5z) \cdot (2x-3y-5z).$
3. $x^2+2x+1-y^2-2y-1=(x+1)^2-(y+1)^2=(x+1+y+1)(x+1-y-1)=$
   $= (x+y+2) \cdot (x-y).$
4. $a^6+2a^3b^3+b^6-c^6+2c^3d^3-d^6=(a^3+b^3)^2-(c^3-d^3)^2=(a^3+b^3+c^3-d^3) \cdot$
   $\cdot (a^3+b^3-c^3+d^3).$
5. $64u^2-96uv+36v^2-4m^2+12mn-9n^2=(8u-6v)^2-(2m-3n)^2 =$
   $=(8u-6v+2m-3n)(8u-6v-2m+3n).$

Ejercicios

1. $4x^2 y^2-2xyz + z^2 - 16u^2 v^2 = $ —?—
2. $a^2+a + \frac{1}{4} -25 b^2 = $ —?—
3. $25m^2 - 20mn + 4n^2 - 36p^2 = $ —?—
4. $x^2y^2 - 2xy + 1 - z^4 - 4b^2z^2 -4b^4 = $ —?—
5. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 9z^2 - 12zt - 4t^2 = $ —?—
6. $x^2 - 2xy + y^2 - m^2 - 2mn - n^2 = $ —?—

Ejercicios

7. $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - z^4 + 2z^2t^2 - t^4 = $ —?—
8. $a^2 - 4ab + 4b^2 - 9c^2 - 6cd - d^2 = $ —?—
9. $25m^6 - 40m^3n^2 + 16n^4 - 36p^4 - 36p^2q^3 - 9q^6 = $ —?—
10. $4x^2y^2z^2 - 12xyzmnp + 9m^2n^2p^2 - a^2 + 2ab - b^2 = $ —?—

VI) *FACTORIZACION DE ALGUNOS TRINOMIOS ESPECIALES:*

La factorización de un trinomio de segundo grado se logra por un método general y muy natural y sencillo después de haber estudiado la ecuación de segundo grado, y así lo haremos cuando llegue su lugar, pues no creemos que sea conveniente recargar un texto de Algebra de artificios que den la impresión al estudiante de que se trata de un arte de adivinación.

Aquí nos limitamos a indicar cómo se consigue la factorización de unos tipos especiales de trinomios (además de los que son cuadrados perfectos), que llamaremos *"cuadrados perfectos incompletos"*.

Explicaremos el método con un ejemplo. Supongamos que nos piden factorizar el trinomio $x^4 + x^2 + 1$; se observa que los términos extremos son cuadrados perfectos (de $\mathbf{x^2}$ y de $\mathbf{1}$), y para que el término central sea el doble producto de las raíces cuadradas de los extremos falta x^2, pues $x^4 + 2x^2 + 1$ es el cuadrado de $(x^2 + 1)$; podemos por tanto *sumar* y *restar* x^2 al trinomio, con lo cual no se altera, y nos resulta:

$$x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x).$$

Lo importante para que este método sea aplicable es que el término que hay que sumar para completar el trinomio cuadrado perfecto sea un cuadrado.

Otro ejemplo: factorizar el trinomio $m^4 + 2m^2n^2 + 9n^4$; se ve que los términos extremos son cuadrados perfectos; el término central debe ser el doble producto de sus raíces cuadradas, o sea, $6m^2n^2$; por tanto, si sumamos y restamos $4m^2n^2$ obtenemos:

$$m^4 + 6m^2n^2 + 9n^4 - 4m^2n^2 = (m^2 + 3n^2)^2 - 4m^2n^2 =$$
$$= (m^2 + 3n^2 + 2mn) \,.\, (m^2 + 3n^2 - 2mn).$$

Pueden incluírse dentro de este tipo de "cuadrados perfectos incompletos" las sumas de cuadrados; por ejemplo, a $x^2 + y^2$ le falta $2\,xy$ para ser un cuadrado perfecto; si $2xy$ fuese un cuadrado, sumándolo y restándolo se podría efectuar la descomposición; por ejemplo, $a^4 + 4$ es una suma de cuadrados (de a^2 y de 2), y además el doble de sus raíces cuadradas, o sea, $2x2a^2 = 4a^2$ es un cuadrado perfecto; podemos por tanto escribir $a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2+2)^2 - 4a^2 = (a^2 + 2 + 2a)\,(a^2 + 2 - 2a)$.

Ejercicios

Factorizar los siguientes "cuadrados perfectos incompletos", agregando y quitando un cuadrado perfecto conveniente:

1. $x^4 + 4y^4 = ?$
2. $9x^4 + 8x^2\,y^2 + 16y^4 = ?$
3. $m^4 + 4m^2 + 16 = ?$
4. $4m^8 + 3m^4n^4 + 9n^8 = ?$
5. $64x^4 + y^4 = ?$

VII) *FACTORIZACION DE LA DIFERENCIA DE POTENCIAS SEMEJANTES:*

Primer Caso: Que el exponente sea par.

En este caso podemos considerar que se trata de una diferencia de cuadrados; por ejemplo, $x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2$; se procede a factorizar la diferencia de cuadrados y luego se continúa factorizando los factores que se puedan factorizar; en el ejemplo anterior se tiene:

$x^6 - y^6 = (x^3 + y^3) \,.\, (x^3 - y^3)$, (1); ahora, $x^3 + y^3$ es divisible por la suma de las bases, según se probó aplicando el teorema del resto, y $x^3 - y^3$ es divisible por $(x - y)$, según se probó también con el mismo teorema; y sabemos además que $\dfrac{x^3 + y^3}{x + y} = x^2 - xy + y^2$, de donde $x^3 + y^3 = (x^2 - xy + y^2)\,(x + y)$, y también que $\dfrac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2$, de donde $x^3 - y^3 = (x - y)\,(x^2 + xy + y^2)$; sustituyendo estos valores en (1) obtenemos:

$$x^6 - y^6 = (x^2 - xy + y^2)\,(x + y)\,(x^2 + xy + y^2)\,(x - y).$$

Ejemplos

1. $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)\,(x^2 + y^2) = (x - y)\,(x + y)\,(x^2 + y^2)$
2. $x^8 - y^8 = (x^4 + y^4)\,(x^4 - y^4) = (x^4 + y^4)\,(x^2 - y^2)\,(x^2 + y^2) = (x^4 + y^4)\,(x + y)\,(x - y)\,(x^2 + y^2)$

Ejercicios

1. $16m^4 - 81n^4 = —?—$
2. $64x^6 - y^6 = —?—$
3. $256a^8 - b^8 = —?—$
4. $81u^4 - 256v^4 = —?—$

Segundo Caso: *Que el exponente sea impar:*

En este caso sabemos que la diferencia de potencias es siempre divisible por la diferencia de sus bases, y podemos expresar la diferencia de potencias (dividendo) como producto del divisor (diferencia de bases) por el cociente.

Ejemplos

1. $8x^3 - 27y^3 = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$
2. $m^5 - n^5 = (m - n)(m^4 + m^3n + m^2n^2 + mn^3 + n^4)$
3. $32a^5 - b^5 = (2a - b)(16a^4 + 8a^3b + 4a^2b^2 + 2ab^3 + b^4)$

Ejercicios

1. $64p^3 - 27q^3 =$ —?— $(4p - 3q)(16p^2 + 4p3q + 9q^2)$
2. $32x^5 - 243y^5 =$ —?— $(2x - 3y)(16x^4 + 8x^3 3y + 4x^2 9y^2 + 2x\,27y^3 + 81y^4)$
3. $m^7 - n^7 =$ —?— $(m - n)(m^6 + m^5n + m^4n^2 + m^3n^3 + m^2n^4 + mn^5 + n^6)$
4. $125a^3 - 216b^3 =$ —?— $(5a - 6b)(25a^2 + 5a6b + 36b^2)$

VIII) *FACTORIZACION DE SUMA DE POTENCIAS SEMEJANTES DE EXPONENTE IMPAR:*

Si repasas los casos de divisibilidad de suma o diferencia de potencias semejantes (del mismo exponente) por suma o diferencia de sus bases, recordarás que la suma de potencias de igual exponente impar *es divisible* por la suma de sus bases; esta propiedad nos permite factorizar las sumas de potencias de igual exponente impar.

Ejemplos

1. $8a^3 + 27b^3 = (2a)^3 + (3b)^3 = (2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$
2. $32x^5 + y^5 = (2x)^5 + y^5 = (2x + y) \cdot (16x^4 - 8x^3y + 4x^2y^2 - 2xy^3 + y^4)$
3. $m^7 + n^7 = (m + n) \cdot (m^6 - m^5n + m^4n^2 - m^3n^3 + m^2n^4 - mn^5 + n^6)$

Ejercicios

Tarea

1. $8a^3b^3 + 64c^3 =$ —?—
2. $243x^5y^5 + 32z^5 =$ —?—
3. $125x^3 + z^3 =$ —?—
4. $a^7b^7 + c^7d^7 =$ —?—

IX) *DESCUBRIMIENTO DE FACTORES DE LA FORMA $x \pm a$:*

En este apartado vamos a dar un método para encontrar factores de la forma $x \pm a$, *siendo a un número natural,* en el caso de que el polinomio contenga factores de esa naturaleza.

Este procedimiento se basa en el teorema del resto (que debes repasar) y es de gran aplicación en Algebra, pues equivale en el fondo a encontrar las *raíces enteras* de una ecuación de grado superior (si las tiene), y a rebajar su grado en una unidad por cada raíz encontrada.

Veamos un ejemplo: *Investigar si el polinomio $x^3 - 10x + 3$ contiene algún factor de la forma $x \pm a$, siendo* **a** *entero.*

Por el teorema del resto, si $x^3 - 10x + 3$ es divisible por $x \pm a$ *se anulará cuando se sustituya x por $\mp a$,* es decir, se cumplirá que $\mp a^3 - 10(\mp a) + 3 = 0$; pero esta igualdad nos indica que el número 3 (término independiente del polinomio) es múltiplo de *a,* (positivo o negativo), pues si se despejara el 3 aparecería como una suma o diferencia de múltiplos de *a.* Llegamos así a la siguiente conclusión:

Los números **enteros** *que anulan a un polinomio* (si existen) *se encuentran entre los divisores* (positivos o negativos) *del término independiente del polinomio.*

Volvamos a nuestro ejemplo; el término independiente del polinomio $x^3 - 10x + 3$ es $+3$, y sus divisores son ∓ 1, y ∓ 3.

Ensayemos, por la Regla de Ruffini, si alguno de estos cuatro números, considerado como segundo término del divisor, da cociente exacto.

Primer ensayo:

$$\begin{array}{r|rrrl} & 1 & 0 & -10 & +3 \\ 1) & & 1 & 0 & -10 \\ \hline & 1 & 1 & -10 & -7 = R \end{array}$$

$(x-1)$ no es divisor del polinomio, o lo que es lo mismo, el número 1 no es raíz de la ecuación $x^3 - 10x + 3 = 0$.

Segundo ensayo:

$$\begin{array}{r|rrrl} & 1 & 0 & -10 & +3 \\ -1) & & -1 & 1 & 9 \\ \hline & 1 & -1 & -9 & 12 = R \end{array}$$

$(x+1)$ no es divisor de $x^3-10x+3$.

Tercer ensayo:

$$\begin{array}{r|rrrl} & 1 & 0 & -10 & +3 \\ 3) & & 3 & 9 & -3 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & 0 = R \end{array}$$

x − 3 *si es divisor de $x^3-10x+3$. Por tanto $x=3$ es raíz de la ecuación $x^3-10x+3=0$.*

Ahora, puesto que la división $(x^3-10x+3) \div (x-3)$ *es exacta,* podemos factorizar el dividendo (igual al divisor por el cociente), es decir: $x^3-10x+3=(x-3) \cdot (x^2+3x-1)$.

Ejemplos

Averiguar si los siguientes polinomios admiten divisores de la forma $x \pm a$, siendo a *un número natural.* (Este problema equivale a investigar si la ecuación que resulta de anular el polinomio tiene raíces enteras, cuestión fundamental en Algebra).

1. $x^4-4x^3+7x^2-7x+2$.

En este ejemplo los ensayos por la Regla de Ruffini se limitan a los divisores del término independiente, que es $+2$; estos divisores, positivos y negativos, son: ± 1 y ± 2.

Primer ensayo:

$$\begin{array}{r|rrrrl} & 1 & -4 & +7 & -7 & +2 \\ 1) & & 1 & -3 & 4 & -3 \\ \hline & 1 & -3 & 4 & -3 & -1 = R; \end{array}$$

$(x-1)$ no es divisor.

Segundo ensayo:

$$\begin{array}{r|rrrrl} & 1 & -4 & +7 & -7 & +2 \\ -1) & & -1 & +5 & -12 & +19 \\ \hline & 1 & -5 & 12 & -19 & 21 = R; \end{array}$$

$(x+1)$ no es divisor.

Tercer ensayo:

$$\begin{array}{r|rrrrl} & 1 & -4 & +7 & -7 & +2 \\ 2) & & 2 & -4 & 6 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & +3 & -1 & 0 = R; \end{array}$$

(x − 2) *si es divisor.*

Escribiendo que el dividendo de esta división **exacta** es igual al divisor por el cociente, se tiene:

$x^4-4x^3+7x^2-7x+2=(x-2) \cdot (x^3-2x^2+3x-1)$.

2. $x^4+x^3-7x^2-x+6$. Los divisores de $+6$ son: ± 1, ± 2, ± 3 y ± 6.

Primer ensayo:

$$\begin{array}{r|rrrrl} & 1 & 1 & -7 & -1 & +6 \\ 1) & & 1 & 2 & -5 & -6 \\ \hline & 1 & 2 & -5 & -6 & 0 = R; \end{array}$$

(x − 1) *es divisor del polinomio.*

Por tanto: $x^4+x^3-7x^2-x+6=(x-1) \cdot (x^3+2x^2-5x-6)$, (1).

Veamos si el cociente, x^3+2x^2-5x-6, tiene también divisores de la misma forma. Los divisores (positivos o negativos) de -6 son los mismos indicados antes.

Primer ensayo:

$$\begin{array}{r|rrrl} & 1 & 2 & -5 & -6 \\ 1) & & 1 & 3 & -2 \\ \hline & 1 & 3 & -2 & -8 = R; \end{array}$$

$(x-1)$ no es divisor.

Segundo ensayo:

$$\begin{array}{r|rrrl} & 1 & 2 & -5 & -6 \\ -1) & & -1 & -1 & +6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 = R; \end{array}$$

(x + 1) *si es divisor; por tanto:*

$x^3+2x^2-5x-6=(x+1)(x^2+x-6)$, (2).

Veamos si el cociente tiene divisores de la misma forma:

Primer ensayo:

$$\begin{array}{r|rrl} & 1 & 1 & -6 \\ 1) & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & -4 = R; \end{array}$$

$(x-1)$ no es divisor.

Segundo ensayo:

$$\begin{array}{r|rrl} & 1 & 1 & -6 \\ -1) & & -1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & -6 = R; \end{array}$$

$(x+1)$ no es divisor.

Ejemplos

Tercer ensayo:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -6 \\ 2) & & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 0 = R; \end{array}$$

(x − 2) *si es divisor;* por tanto:

$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$, (3).

Sustituyendo este valor (3) en (2), y el resultado en (1) queda: $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$, con lo que el polinomio ha quedado *completamente factorizado.*

Ejercicios

Investigar si los polinomios siguientes tienen divisores de la forma $x \pm a$, siendo a entero, y en caso afirmativo, factorizarlos.

1. $x^3 - 6x^2 + 10x - 4$
2. $x^4 - 4x^2 - x + 2$
3. $x^3 - 4x^2 + 4x - 3$
4. $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x - 6$
5. $x^3 - 10x - 3$
6. $x^4 - x^3 - 10x^2 + 7x + 3$

EJERCICIOS 4.2

Ejercicios

A continuación se dan polinomios para ser factorizados que pertenecen a los tipos explicados en esta sección, o son combinación de ellos; debes probar tu habilidad en aplicar a cada uno el método conveniente.

1. Sabiendo que $5x^3 + 7a^3 - 12a^2x$ es divisible por $x - a$ (comprobarlo aplicando el teorema del resto), factorizarlo. (Obténgase el cociente exacto $(5x^3 + 0x^2 - 12a^2x + 7a^3) \div (x - a)$ aplicando la Regla de Ruffini).

2. Comprobar que el polinomio $3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$ se anula para $x = 1$ y para $x = -1$, y por tanto que es divisible por $(x - 1)$ y por $(x + 1)$; después factorizarlo. (Ayuda: Divídase por $(x - 1)$ y luego el cociente por $(x + 1)$).
3. Factorizar completamente el polinomio $x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 10x + 15$. (Ayuda: Compruébese que es divisible por $(x-1)$, por $(x+3)$, por $(x-5)$ y por $(x+5)$.).
4. Factorizar completamente $x^3 - 8x^2 + 17x - 10$. (Sígase el método de los ejercicios anteriores).
5. Descomponer en factores el polinomio $x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc$ (Ayuda: Verificar que admite los divisores $(x+a)$, $(x+b)$ y $(x+c)$).
6. Factorizar $x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 10x + 15$. (Ayuda: Comprobar que es divisible por $(x-1)$ y por $(x + 3)$).
7. Factorizar $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$ (Ayuda: Póngase $-x^2 = x^2 - 2x^2$, y después sáquese factor común a x^2 de los tres primeros términos y a -2 de los tres últimos).
8. Factorizar: $2(x-y)^3 + (x^3 - y^3)$
9. Factorizar: $x^4y^2(x - y)^3 - x^2y^3(x-y)^3 + x^2y^3(x-y)^4$
10. Factorizar: $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$ (Recuérdese el cubo de un binomio).
11. Factorizar: $m^3 - 6m^2 + 12m - 8$ (Recuérdese el cubo de $(m-2)$).
12. Factorizar: $5a^2x^4y - 15a^2x^3y^3 + 15a^2x^2y^3 - 5a^2xy^4$ (Ayuda: Sacar factor común $5a^2xy$ y recordar el cubo de una diferencia).
13. Factorizar: $x^4 + x^3 - x^2 - x$. (Ayuda: Agrúpense los dos primeros términos y los dos últimos, sacando factor común a x^3 de los dos primeros y a $-x$ de los dos últimos).
14. Factorizar: $x^2 - xy - y - 1$. (Ayuda: Agrúpense el primero y cuarto términos y los dos centrales).
15. Factorizar: $16a^4b^8 - 81c^4d^{24}$
16. Factorizar: $a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2$

Ejercicios

Ejercicios

17. Factorizar: $a^2 - ax + a - x$

18. Factorizar: $(x^2 - y^2) + (x + y)^2 - 3(x + y)$

19. Factorizar: $5a - 5b + (a^2 - b^2) + (a - b)^2$

20. Factorizar: $a \,.\, (x + y) - x - y$ ✕

4.3 MAXIMO COMUN DIVISOR DE EXPRESIONES ENTERAS

I) *DEFINICIONES Y EJEMPLOS:*

La teoría del máximo común divisor (que se escribe abreviadamente m.c.d.) es en Algebra completamente análoga a la estudiada en Aritmética.

Una expresión algebraica entera (únicas que estudiamos en esta sección) *se llama* **prima,** *en un cierto campo numérico, cuando no admite como divisor a otra expresión entera con parte literal y coeficientes de dicho campo.*

En particular, se consideran como expresiones primas los monomios con una sola letra elevada a la unidad y los binomios de primer grado.

Ejemplos

Son primas las siguientes expresiones (en el campo numérico racional):

a) $2x$, b) $-3b$, c) $ax+b$, d) x^2+y^2, e) x^2+x+1.

Con otras palabras podemos decir que una expresión entera es prima en un campo numérico *cuando no se puede factorizar en dicho campo en dos expresiones* **literales** *al menos.*

Se dice que una expresión entera es divisor común de varias expresiones (también enteras), *cuando divide exactamente a cada una de ellas.*

Ejemplos

1. Las expresiones x^3-a^3, $(x-a)^2$ y x^2-a^2 tienen el divisor común $x-a$.
2. Los monomios $3a^2bx^3$, $-2a^3b^2x^2$, $5ab^2x^2$ admiten muchos divisores comunes; he aquí algunos: abx, bx^2, abx^2.

Entre todos los divisores comunes de varias expresiones enteras se llama m.c.d. al de mayor grado.

En el ejemplo anterior 2., el m.c.d. es abx^2.

Cuando varias expresiones enteras no tienen ningún divisor común, se llaman primas entre sí.

Igual que en Aritmética, recomendamos que no se confundan los conceptos de *expresión prima absoluta,* o simplemente *prima,* y de expresiones *primas entre sí.*

Ejemplos

1. Las expresiones $3a^2bx^3$ y $2c^3y^4$ son primas entre sí, pero no son primas absolutas. (Encontrar algunos divisores separados de ambas).
2. *Dos expresiones primas absolutas distintas* (como dos números primos absolutos en Aritmética) *son primas entre sí.*
3. *En cambio, dos expresiones primas entre sí pueden no ser primas absolutas;* como ocurre con las del ejemplo 1.

II) *MAXIMO COMUN DIVISOR DE VARIOS MONOMIOS:*

La regla para obtener el m.c.d de varios monomios es completamente análoga a la dada en Aritmética para hallar el m.c.d de varios números descompuestos en factores primos.

REGLA: *Para hallar el m.c.d. de varios monomios se pone por coeficiente el m.c.d. de los coeficientes y por parte literal el producto de las letras comunes a todos los monomios tomadas con sus menores exponentes.*

Ejemplos

1. El m.c.d.de $12a^4b^2x^3y^2$, $-16a^3b^3x^4z$, y $4a^2b^2x^5t^3$ es $\mathbf{4a^2b^2x^3}$. (El m.c.d.de los coeficientes se conviene en tomar positivo).

2. El m.c.d.de $15x^3y^4z^6$, $-20x^4y^4z^5t^4$, $30a^2x^3y^2z^3$, y $5ax^3y^3z^3$, es el siguiente: $\mathbf{5x^3y^2z^3}$.
3. El m.c.d.de $18m^5n^4z^3$, $-30am^3n^2z^4t^2$ y $\cdot 12a^2m^2n^2z^3t^2$ es el siguiente monomio: $\mathbf{6m^2n^2z^3}$.

Ejercicios

Hallar el m.c.d. de los siguientes monomios:

1. $-7u^3v^2t^5$, $14au^2v^3t^3$, $21a^2u^3v^2t^2$ *y* $28u^4v^5t^6z^2$.
2. $15a^3b^2cx^3y^4$, $25a^2bc^2x^2y^3$, *y* $30a^3b^3c^4xy^2$.
3. $24(a+b)^3x^2y^4$, $12(a+b)^2xy^3z^2$ y $36(a+b)^4xy^2z^3t$.
4. $45z^3t^4m^2n^3$, $-18ax^3z^3t^2m$, y $27b^3z^4t^3m^2n^3$:
5. $16p^3q^2r^6t^4$, $-24p^2q^3r^5t$, $+40p^2q^3t^2$.

III) *MAXIMO COMUN DIVISOR DE DOS O MAS POLINOMIOS:*

Distinguiremos dos métodos para hallar el m.c.d. de dos polinomios:

a) *Por descomposición en factores,* y b) *Por divisiones sucesivas.*

a) *M.C.D. de varios polinomios por descomposición en factores:* Cuando es posible, por los métodos dados en la sección anterior, descomponer *completamente* los polinomios en factores, cada factor de un polinomio se trata como si fuere una letra y el polinomio queda expresado como un monomio cuyas letras son los factores

Nina de Castro

en que se ha descompuesto el polinomio; por ejemplo, $x^2-y^2=$ $=(x+y).(x-y)$, y si en el segundo miembro tratamos al factor $(x+y)$ como una letra y al $(x-y)$ como otra letra, podemos tratar al segundo miembro como si fuese un monomio (producto de dos letras).

Una vez descompuestos los polinomios *completamente* en factores se convierten en monomios (con la aclaración de tratar a estos factores primos como si cada uno fuese una sola letra), y se les aplica la regla dada en el apartado II) para hallar el m.c.d. de varios monomios.

Ejemplos

Hallar el m.c.d. de los siguientes grupos de polinomios:

1. x^4-y^4, $x^4-2x^2y^2+y^4$, y x^6-y^6

   Factorizando cada uno de los tres polinomios, se tiene:

   $x^4-y^4=(x^2+y^2)(x^2-y^2)=(x^2+y^2)(x+y).(x-y)$

   $x^4-2x^2y^2+y^4=(x^2-y^2)^2=(x+y)^2.(x-y)^2$

   $x^6-y^6=(x^3+y^3).(x^3-y^3)=(x+y).(x^2-xy+y^2).(x-y)(x^2+xy+y^2)$

   Aplicando la regla del apartado anterior a los monomios de los segundos miembros se tiene:

   $m.c.d.\ [x^4-y^4,\quad x^4-2x^2y^2+y^4,\quad x^6-y^6]=(x+y).(x-y)=x^2-y^2$

2. Hallar el m.c.d $[a^2+2ab+b^2,\quad a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\quad a^6-b^6]$

   Procediendo como en el ejercicio anterior se tiene:

   $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$,

   $a^6-b^6=(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2).(a^2+ab+b^2)$.

   El m.c.d. es $\mathbf{a+b}$.

Ejercicios

Hallar el m.c.d. de los grupos de polinomios que se indican a continuación, descomponiéndolos previamente en factores:

1. $a^2-2ab+b^2$, a^4-b^4, $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.
2. x^3-27y^3, $x^2+3xy+9y^2$. (Ayuda: Al factorizar el primero resulta el segundo como uno de sus factores).

Ejercicios

3. x^3-3x^2+4x-2, x^3-1. (Ayuda: El primer polinomio se factoriza ensayando los divisores $(x\pm1)$ y $(x\pm2)$ por la Regla de Ruffini).
4. a^4-b^4, $a^3-a^2b+b^3-ab^2$, $a^4-2a^2b^2+b^4$.

b) *M.C.D. de dos polinomios por divisiones sucesivas.*

La obtención del m.c.d. de dos polinomios por el método de divisiones sucesivas se logra igual que en Aritmética la determinación del m.c.d. de dos números por el Algoritmo de Euclides, y el fundamento es el mismo. Para que se entienda mejor el tema, lo explicamos repasando primero los principios análogos que ya se demostraron en Aritmética.

Decíamos en Aritmética: *Si un número es múltiplo de otro, el menor es el m.c.d. de ambos.*

En Algebra se dice: *Si un polinomio es múltiplo de otro, el de menor grado es el m.c.d. de ambos.*

Decíamos en Aritmética: *Los divisores comunes de dos números, a y b, $a>b$, son los mismos que los divisores comunes del menor de ellos y del resto de la división del mayor por el menor.*

En Algebra se dice: *Los divisores comunes de dos polinomios,* **P(x)** *y* **Q(x),** *grado de $P(x)>$grado $Q(x)$, son los mismos que los divisores del polinomio de menor grado y del resto de la división del polinomio de mayor grado por el de menor.*

La demostración es completamente análoga a la que se dio en Aritmética, por lo que no la repetimos aquí; los alumnos interesados pueden reconstruirla. (Basta poner $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$, representando por $C(x)$ el cociente y por $R(x)$ el resto y seguir el mismo razonamiento de la Aritmética).

Una vez comprendido este principio, si $P(x)$ no es múltiplo de $Q(x)$ (si lo fuera, $Q(x)$ sería el m.c.d. de $P(x)$ y $Q(x)$) se dividen, obteniendo un resto $R_1(x)$; si $Q(x)$ es múltiplo de $R_1(x)$, éste será m.c.d. de $Q(x)$ y $R_1(x)$, y por tanto de $P(x)$ y $Q(x)$ que tienen los mismos divisores comunes que $Q(x)$ y $R_1(x)$.

Si $Q(x)$ no es múltiplo de $R_1(x)$, se dividen, obteniendo un resto $R_2(x)$; si $R_1(x)$ es múltiplo de $R_2(x)$, éste será el m.c.d. de ambos, y también de $P(x)$ y $Q(x)$; si $R_1(x)$ no fuera múltiplo de $R_2(x)$ se dividen, obteniendo un resto, $R_3(x)$, y se continúa el mismo proceso hasta llegar a una división exacta.

El m.c.d. es el último divisor empleado. Si este último divisor fuera un número (sin parte literal) *los polinomios serían primos entre sí.*

Los cálculos se disponen igual que en Aritmética, o sea, que los cocientes se colocan *sobre* los divisores.

Ejemplos

1. Hallar el m.c.d. de $3x^4+7x^3-11x^2+7x-2$, y x^3+4x^2+x-2.

La operación se dispone así·

$$\begin{array}{r|c|c}
 & 3x-5 & \frac{x}{6}+\frac{1}{6} \\
3x^4+7x^3-11x^2+7x-2 & x^3+4x^2+x-2 & 6x^2+18x-12 \\ \hline
-12x^3-3x^2+6x & -3x^2+2x & \\
-5x^3-14x^2+13x-2 & x^2+3x-2 & \\
+20x^2+5x-10 & -3x+2 & \\
6x^2+18x-12 & 0 &
\end{array}$$

El m.c.d. es $\mathbf{6x^2+18x-12}$.

2. Hallar el m.c.d. de x^3+5x^2+5x-2 y de x^2+x-2.

$$\begin{array}{r|c|c}
 & x+4 & \frac{1}{3}x-\frac{1}{3} \\
x^3+5x^2+5x-2 & x^2+x-2 & 3x+6 \\ \hline
-x^2+2x & -2x & \\
4x^2+7x-2 & -x-2 & \\
-4x+8 & +2 & \\
3x+6 & 0 &
\end{array}$$

El m.c.d. pedido es $\mathbf{3x+6}$.

Ejercicios

Hallar el m.c.d. de los pares de polinomios siguientes:

1. $x^4+x^3-3x^2-x+2, \quad x^3+x^2-5x+3.$
2. $x^5-7x^4+15x^3-12x^2-x+4, \quad x^3-4x^2-x+4.$
3. $4x^4-3x^3+2x^2-x+1, \quad 2x^2+3x-5.$
4. $x^4-6x^3+9x^2-3x-4, \quad x^2+x-20.$

4.4 MINIMO COMUN MULTIPLO DE EXPRESIONES ENTERAS

I) *DEFINICIONES Y EJEMPLOS:*

Dadas varias expresiones enteras, $E_1(x)$, $E_2(x)$, ..., se dice que una expresión entera, $E(x)$, es *múltiplo común* de todas ellas, si los cocientes de dividir $E(x)$ por $E_1(x)$, por $E_2(x)$, ..., etc., son **todos exactos.**

Entre todos los múltiplos comunes a varias expresiones enteras, *el de menor grado, se llama su mínimo común múltiplo, y se indica así: m.c.m.*

Ejemplos

1. Dadas las expresiones $3a^2b$, $(a+b)$, $2ab^2$, su producto forma un múltiplo común: $6a^3b^3 \cdot (a+b)$; otros múltiplos comunes son: $6a^2b^2(a+b)$, $6a^3b(a+b)$.

2. Cuando varias expresiones son primas entre sí (no tienen divisores comunes) su producto es su m.c.m., pues una expresión de menor grado dejaría de ser múltiplo de alguna de las expresiones. Por ejemplo: $2ab$, $3xy^2$, $4zt$ son primas entre sí; su producto $24abxy^2zt$ es su m.c.m.

Formar 3 múltiplos comunes de los siguientes grupos de expresiones algebraicas enteras:

1. $(a+b)^2, \quad 3ab, \quad 2a^2b;$
2. $(x-y)^3, \quad 4(x+y), \quad 2x^2y^2;$
3. $4x^2yz, \quad -2axy^2, \quad 6a^2bxz^2.$
4. Dadas varias expresiones enteras, ¿cuántas expresiones enteras se pueden formar que sean múltiplos comunes de todas ellas?

Ejercicios

II) *MINIMO COMUN MULTIPLO DE MONOMIOS:*

La regla para hallar el m.c.m., de varios monomios es completamente análoga a la que se dio en Aritmética para encontrar el m.c.m. de varios números descompuestos en sus factores primos:

REGLA: *Para hallar el m.c.m. de varios monomios se pone como coeficiente el m.c.m. de los coeficientes y como parte literal el producto de las letras comunes elevadas a sus mayores exponentes y de las no comunes.*

1. $m.c.m.\ (3a^2bc, \quad 2ab^2c, \quad 12abc^2) = 12a^2b^2c^2.$
2. $m.c.m.\ (4x^2y^2z, \quad 5xy^3z^2t, \quad 10ax^3y^2z) = 20ax^3y^3z^2t.$

Ejemplos

Ejercicios

Hallar el m.c.m. de los monomios que se indican:

1. m.c.m. $6a^3bx^2z$, $4ab^2xy^3t$, $12a^3b^3x^3y^3t$.
2. m.c.m. $-4m^3n^2p$, $3mn^3q^2$, $24mnpqx^2y^2$.
3. m.c.m. $-6a^2bc$, $5a^3x^2y^3z^4$, $15ab^3c^2xyz$.
4. m.c.m. $-8u^3v^2$, $4uvxz$, $32uv^3x^2y^2$.

III) *MINIMO COMUN MULTIPLO DE VARIOS POLINOMIOS:*

Para obtener el m.c.m. de varios polinomios se pueden seguir dos métodos: a) *por factorización;* b) *por medio del m.c.d.*

a) **M.C.M. por factorización:**

El m.c.m. de varios polinomios, si estos están factorizados, se obtiene aplicando la regla del apartado anterior, considerando cada factor como una sola letra.

Ejemplos

1. Hallar el m.c.m. de x^4-y^4, $x^4-2x^2y^2+y^4$, x^6-y^6.

   Factorizando se tiene:

   $x^4-y^4=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$,
   $x^4-2x^2y^2+y^4=(x^2-y^2)^2=(x+y)^2 \cdot (x-y)^2$,
   $x^6-y^6=(x+y) \cdot (x-y) \cdot (x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$.
   El m.c.m. pedido es:
   $(x^2+y^2) \cdot (x+y)^2 \cdot (x-y)^2 \cdot (x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$.

2. Hallar el m.c.m. de $a^2+2ab+b^2$, $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, a^3-b^3.
   Los polinomios factorizados son: $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, y $(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
   El m.c.m. es: $(a+b)^3 \cdot (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Los polinomios que se dan aquí son los mismos que se pusieron en los ejercicios del apartado III) de la sección anterior y allí se dieron ayudas para factorizarlos; si los conservas en tu cuaderno de ejercicios, puedes usarlos.

Ejercicios

1. m.c.m. de $a^2-2ab+b^2$, a^4-b^4, y $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.
2. m.c.m. de x^3-27y^3, $\frac{x^2}{4}+3xy+9y^2$.
3. m.c.m. de x^3-3x^2+4x-2, x^3-1.
4. m.c.m. de a^4-b^4, $a^3-a^2b+b^3-ab^2$, $a^4-2a^2b^2+b^4$.

b) **M.C.M. por medio del M.C.D.:**

El m.c.m. de dos polinomios se puede obtener por medio de su m.c.d. de igual forma que se obtenía en Aritmética el m.c.m. de dos números; la demostración es la misma que se dio allí, cambiando los números por polinomios.

REGLA: *Para hallar el m.c.m. de dos polinomios se halla su m.c.d. y se divide el producto de los polinomios por el m.c.d. hallado, o más cómodo se multiplica un polinomio por el cociente de dividir el otro por el m.c.d. de ambos.*

Ejemplos

1. Hallar el m.c.m. de $3x^4+7x^3-11x^2+7x-2$, y x^3+4x^2+x-2.

   El m.c.d. ya fue hallado en el ejemplo 1. del apartado III de la sección anterior, y es: $6x^2+18x-12$. Dividiendo el segundo polinomio por el m.c.d. se obtiene:

   $(x^3+4x^2+x-2) \div (6x^2+18x-12)=\frac{1}{6}(x+1)$

   Multiplicando este cociente por el primer polinomio obtenemos el m.c.m.:

   $(3x^4+7x^3-11x^2+7x-2) \cdot \frac{1}{6}(x+1)=\frac{1}{2}x^5+\frac{5}{3}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{6}x-\frac{1}{3}$

Ejemplos

2. Hallar el m.c.m. de x^3+5x^2+5x-2 y x^2+x-2.

   El m.c.d., encontrado en el ejemplo 2 del apartado III de la sección anterior, es $3x+6$.

   Dividiendo el segundo polinomio por $3x+6$ se obtiene:
   $(x^2+x-2) \div (3x+6) = \frac{1}{3}(x-1)$.

   Multiplicando este cociente por el primer polinomio se obtiene el m.c.m.:
   $(x^3+5x^2+5x-2) \cdot \frac{1}{3}(x-1) = \frac{1}{3}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}$

Ejercicios

Hallar el m.c.m. de los siguientes polinomios:

1. m.c.m. de $x^4+x^3-3x^2-x+2$ y x^3+x^2-5x+3
2. m.c.m. de $x^5-7x^4+15x^3-12x^2-x+4$ y x^3-4x^2-x+4
3. m.c.m. de $x^4-6x^3+9x^2-3x-4$ y x^2+x-20

REVISION DE CONCEPTOS DEL CAPITULO 4

1. ¿Qué se entiende por descomponer una expresión entera en factores dentro de un campo numérico?
2. ¿Cuándo se dice que una expresión entera es prima en un determinado campo numérico? ¿Cuándo se dice que una expresión entera se ha factorizado completamente?
3. ¿En qué ley se funda la factorización de un polinomio cuando todos sus términos tienen un factor común? ¿Cómo se logra esta factorización?
4. Explica cómo se descubre si un trinomio es igual al desarrollo de un cuadrado perfecto.
5. ¿Cómo se factoriza una diferencia de cuadrados?
6. Explica cómo pueden factorizarse ciertos polinomios combinando el cuadrado de un binomio con la diferencia de cuadrados.
7. ¿Cuándo se dice que un trinomio es un cuadrado perfecto incompleto? ¿Cómo se factorizan estos trinomios? Da algún ejemplo.

Luisa Dª Costa

8. ¿Cómo se factoriza una diferencia de potencias semejantes? (Explica los dos casos, según que el exponente común sea par o impar).
9. ¿Cómo se factoriza una suma de potencias semejantes de exponente impar?
10. Explica cómo se investiga si un polinomio, dependiente de la variable x, admite factores de la forma $x \pm a$, siendo a un número natural. ¿En qué teorema se funda la investigación?
11. ¿Cuándo se dice que una expresión entera es un divisor común de varias expresiones enteras?
12. ¿Cómo se define el m.c.d. de varias expresiones enteras?
13. ¿Cómo se halla el m.c.d. de varios monomios?
14. ¿Cuántos métodos conoces para hallar el m.c.d. de dos polinomios?
15. ¿Cómo se halla el m.c.d. de varios polinomios por descomposición en factores primos?
16. ¿Cómo se halla el m.c.d. de dos polinomios por divisiones sucesivas? ¿En qué teorema se funda este método?
17. ¿Cuándo se dice que una expresión entera es múltiplo común de varias expresiones enteras?
18. ¿Cómo se define el m.c.m. de varias expresiones enteras?
19. ¿Cómo se halla el m.c.m. de varios monomios?
20. ¿Cuántos métodos conoces para hallar el m.c.m. de dos polinomios?
21. ¿Cómo se halla el m.c.m. de dos polinomios por descomposición en factores primos?
22. ¿Cómo se halla el m.c.m. de dos polinomios por medio del m.c.d.?

CUESTIONARIO DE SELECCION

Selecciona la afirmación que corresponda al concepto que se enuncia al principio:

1. Descomponer una expresión entera en factores dentro de un campo numérico es:

   a) expresarla como producto de varios números y de una expresión entera del mismo grado;

   b) expresarla como producto de varias expresiones enteras con coeficientes numéricos cualesquiera;

c) expresarla como producto de varias expresiones enteras con coeficientes del campo numérico prefijado.

2. La expresión x^2-2 es compuesta en el campo de los números:

a) reales;

b) racionales;

c) enteros.

3. Una expresión entera se dice que está factorizada *completamente* en un campo cuando todos sus factores son:

a) de menor grado que la expresión entera;

b) de primer grado;

c) primos en dicho campo.

4. Si un trinomio es cuadrado perfecto de un binomio debe contener como términos:

a) dos cuadrados perfectos y su producto;

b) dos cuadrados perfectos y el doble producto de sus raíces cuadradas;

c) dos cuadrados perfectos y el producto de sus raíces cuadradas.

5. La diferencia de dos cuadrados es igual a:

a) el producto de sus bases;

b) la diferencia de sus bases elevada al cuadrado;

c) el producto de la suma de sus bases por la diferencia de las mismas.

6. La diferencia de potencias semejantes se puede factorizar;

a) siempre;

b) cuando el exponente es impar solamente;

c) cuando el exponente es par solamente.

7. La suma de potencias semejantes (de igual exponente) se puede factorizar:

a) siempre;

b) cuando el exponente es impar solamente;

c) cuando el exponente es par solamente.

8. Si un polinomio en x, $P(x)$, admite un factor de la forma $x \pm a$, siendo a entero, se cumple que:

a) a es múltiplo del término independiente de $P(x)$;

b) a es divisor del término independiente de $P(x)$, y $P(a)=0$;

c) a no necesita ser ni divisor ni múltiplo del término independiente de $P(x)$.

9. El m.c.d. de varias expresiones enteras es:

a) la suma de sus divisores;

b) el divisor común de mayor grado;

c) el producto de sus divisores.

10. Si varias expresiones enteras (monomios o polinomios) son primos entre sí, su m.c.d. es:

a) un número;

b) una expresión de primer grado;

c) una expresión de menor grado.

11. El m.c.d. de varios monomios es:

a) el monomio de menor grado;

b) el producto de todas las letras de los monomios con exponente unidad;

c) el producto del m.c.d. de los coeficientes por las letras comunes afectadas de sus menores exponentes.

12. El m.c.d. de varias expresiones enteras dadas tiene que tener siempre:

a) grado inferior a todas ellas;

b) grado igual a la de menor grado;

c) grado igual o menor que los grados de las expresiones enteras dadas.

13. Cuando se divide un polinomio por otro, y si la división no es exacta se divide el divisor por el resto, y así sucesivamente, hasta obtener una división exacta, el m.c.d. de los dos primeros polinomios es:

a) el último cociente;

b) el último divisor;

c) el último dividendo.

14. El m.c.m. de varias expresiones enteras es:

a) el producto de todas ellas;
b) el producto de las dos de mayor grado;
c) el múltiplo común de menor grado.

15. El m.c.m. de varios monomios se obtiene:
a) multiplicando todos los coeficientes por todas las letras comunes;
b) multiplicando el m.c.m. de los coeficientes por las letras comunes que tienen mayor exponente y por las letras no comunes;
c) multiplicando todos los monomios.

16. El m.c.m. de dos polinomios se puede hallar:
a) dividiendo su producto por su m.c.d.;
b) multiplicando el de mayor grado por el m.c.d. de ambos;
c) multiplicando el de menor grado por el m.c.d. de ambos.

CUESTIONARIO DE DISTINCION

¿Puedes distinguir las afirmaciones verdaderas de las falsas?

1. Una expresión prima en el campo numérico racional siempre es de primer grado.
2. Una expresión de primer grado es siempre prima en cualquier campo.
3. Una expresión entera se puede factorizar siempre en el campo de los números racionales con factores de primer grado.
4. Si un trinomio es cuadrado perfecto contiene: dos términos que son cuadrados perfectos y un tercer término que es el doble producto de sus raíces cuadradas.
5. La expresión $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$ es el cubo perfecto de un binomio.
6. Una diferencia de cuadrados se puede factorizar siempre, siendo igual al producto de la suma de las bases por la diferencia de las mismas.
7. $x^4+x^2y^2+y^4$ es un cuadrado perfecto *incompleto* de un binomio.
8. La expresión $x^4-y^4=(x^2+y^2).(x^2-y^2)$ está factorizada completamente.
9. $x^m \pm y^m$ se puede factorizar siempre, en el campo numérico racional, cualquiera que sea el signo (+ ó −), y cualquiera que sea el exponente m, siendo natural.

10. Si un polinomio, $P(x)$, admite un factor de la forma $x \pm a$, siendo a un número natural, a debe ser forzosamente un divisor del término independiente de $P(x)$.
11. El m.c.d. de varias expresiones enteras tiene que ser siempre de grado inferior a la de menor grado.
12. El m.c.d. de varios monomios puede ser un polinomio.
13. El m.c.d. de $3x^4+x^3+2x^2-x+1$ y de x^3-x^2-x-2 es $9x^2+9x+9$.
14. El m.c.m. de $3x^4+x^3+2x^2-x+1$ y de x^3-x^2-x-2 es $\frac{1}{3}x^5 - \frac{5}{9}x^4 - \frac{5}{9}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$.

CUESTIONARIO DE COMPLETACION

Completar las palabras o los símbolos que faltan en las siguientes afirmaciones para que sean correctas:

1. Una expresión prima es la que......... admite divisores literales de menor grado.
2. El m.c.d. de varias expresiones enteras es el divisor común de......... grado.
3. El m.c.m. de varias expresiones enteras es el múltiplo común a todas ellas de.... grado.
4. El m.c.d. de 12 $a^2b^3c^4$, y $8ab^2c^2$ es......
5. $25x^4 - 16y^8 = (5x^2 + 4y^4).(\ldots\ldots\ldots)$
6. $x^3 + y^3 = (x + y).(\ldots\ldots\ldots\ldots)$
7. $(x^4-y^4 = (x^2+y^2)(\ldots\ldots\ldots).(\ldots\ldots)$
8. $(a+b)^3 = a^3 + \ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots + b^3$
9. $(a^5+b^5) = (a+b)(\ldots\ldots\ldots)$
10. $x^4-x^3-x^2+9x-2 = (x+2).(\ldots\ldots\ldots\ldots)$
11. Los divisores comunes al dividendo y divisor son los mismos divisores comunes del divisor y del ....
12. $4a^4+8a^2b^2+9b^4 = (2a^2+3b^2)^2 - \ldots = (\ldots\ldots\ldots).(\ldots\ldots\ldots)$

PROBLEMAS SOBRE EL CAPITULO 4

Los problemas que se proponen a continuación son ejercicios de repaso de los tipos estudiados en este capítulo.

1. Descomponer en tres factores la siguiente expresión: $a^3b^2 - a^3c^2$.

2. Descomponer en cuatro factores la siguiente expresión: $a^3b - ab^3$.

3. Descomponer en cinco factores la expresión: $x^3yz - xy^3z$.

4. Descomponer en tres factores la siguiente expresión: $a^{5m} - a^{3m}\, b^{4n}$.

5. Factorizar: $9x^3 - 12x^2y + 4xy^2$.

6. Factorizar: $x^3 - 2x^2 - 3x$. (Ayuda: sáquese factor común x y después ensáyense divisores de la forma $x \pm a$ con a entero).

7. Factorizar: $m^3 + m^2 - 4m - 4$. (Ayuda: sáquese m factor común de los dos términos primeros y -4 de los dos últimos).

8. Factorizar: $x^2 - xy - y - 1$. (Ayuda: agrúpense primero y último términos y segundo y tercero).

9. Factorizar: $x^4 + x^3 - x^2 - x$.

10. Factorizar: $4(ad+bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2$, descomponiéndolo en cuatro factores de primer grado.

11. Factorizar: $25a^2 - 80ab + 64b^2$.

12. Factorizar: $16a^8 + 31a^4b^4 + 25b^8$. (Ayuda: súmese y réstese $9a^4b^4$ para completar el cuadrado de un binomio).

13. Factorizar: $9a^2 - 6a + 1$ (Observar si se cumple la condición de un trinomio cuadrado perfecto).

14. Factorizar: $27a^3 + 8b^3$.

15. Factorizar: $x^2 - 2xy + y^2 - xz + yz$.

16. Factorizar: $uv - v^2 + ut - vt$.

17. Factorizar: $a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc$.

18. Factorizar: $x^4 + 2x^2 + 9$ (súmese y réstese $4x^2$ para completar el cuadrado de un binomio).

19. Factorizar: $x^2 + 2xy + y^2 - x^3 - y^3$.

20. Factorizar: $x^2 + 6xy + 9y^2 - 16z^2$.

21. Factorizar: $x^4 + 3x^2 + 4$ (súmese y réstese x^2 para completar el cuadrado de un binomio).

22. Hallar por descomposición en factores el m.c.d. y el m.c.m. de $(x^3+y^3)^2$, $x^4 - y^4$, $(x^2-y^2)^2$.

23. Hallar el m.c.d. y el m.c.m., por divisiones sucesivas, de los dos polinomios siguientes: $3x^3 - 4x^2 - 3x - 2$ y $x^2 + x - 6$.

24. Hallar el m.c.d. y el m.c.m. de los polinomios: $x^6 - x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x - 1$, y $x^5 - x^4 + 2x^3 + 2x - 1$.

25. Hallar el m.c.d. de los siguientes monomios: $3a^2bc^3$, $6ab^2c^2$, $12ab^3c$.

26. Hallar el m.c.m. de los tres monomios del ejercicio anterior.

27. Investigar todos los divisores de la forma $x \pm a$, a natural, que tiene el polinomio $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$, y factorizarlo completamente.

28. Hallar el m.c.d. y el m.c.m. de los polinomios: $x^3 + 2x^2 - x - 2$, $x^3 + 3x^2 - x - 3$ y $x^3 - 3x^2 - x + 3$, factorizándolos previamente.

29. Descomponer $x^9 + y^9$ en tres factores.

30. Descomponer $x^6 - y^6$ en cuatro factores.

31. Factorizar: $25x^4 - 36x^2y^2 + 4y^4$ (súmese y réstese $16x^2y^2$).

32. Factorizar: $xzy + 4zy - 2xz - 8z$.

33. Factorizar: $a^4 - b^4 + b^2 - a^2$.

34. Factorizar: $3a^2 + 4ax + x^2$. (Ayuda: descompóngase primero $4ax$ en $3ax + ax$).

35. Descomponer en dos factores $x^5\, y^5 - 1$.

36. Descomponer en factores $x^5 - 4x^3 - x^2 + 4$, investigando los divisores de la forma $x \pm a$, a natural. (Ya sabes que para a se ensayan los divisores de 4, positivos y negativos).

37. Descomponer en factores $x^4 + x^3 - x^2 + 1$.

38. Factorizar: $1 - x^5y^{10}z^{20}$.

39. Factorizar: $x^3 - y^3 - 3xy\,(x-y)$.

40. Factorizar: $x^2 - y^2 + z^2 - t^2 + 2xz - 2yt$.

Unidad 5

EL PRIMER CONCURSO MATEMATICO

El "magister" Juan de Palermo, "abacista", propuso públicamente con la presencia del rey en la plaza de Palermo la siguiente ecuación cúbica, desconocida entonces, al extranjero "algorítmico".

$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$

La solución que Leonardo dio muestra su poderosa capacidad matemática:

$x = 1 \quad 22 \quad 7 \quad 42 \quad 33 \quad 4 \quad 40$

Al hacer la prueba moderna el resultado difiere del de Leonardo en

$\frac{1}{31.104.000.000}$ *de exceso.*

La contribución del Fibonacci a la cultura occidental con la explicación de la para entonces "nueva matemática" influyó poderosamente en el posterior movimiento intelectual del Renacimiento en donde se buscó la "divina proporción".

Un día en Palermo, ciudad del sur de Italia, la agitación de la corte

LEONARDO DE PISA, el Fibonacci, famoso "algorítmico" de su tiempo.-

del rey Federico II llegaba a extremos porque el matemático "abacista" Juan de Palermo sostenía una discusión pública con un rico peregrino extranjero, el "algorítmico" Leonardo de Pisa el Fibonacci. Este, con asombrosa facilidad resolvía los problemas propuestos por el de Palermo sin necesidad del ábaco y utilizaba tan solo los números hindú-arábigos.

Los viajeros han tenido mucha importancia en la matemática. Un peregrino fue Pitágoras y conoció la cultura científica oriental que relacionó con la filosofía griega.

Otro, Thales de Mileto, visitó a Egipto y adquirió los conocimientos geométricos de los constructores de las pirámides.

Leonardo, nacido en Pisa (1250) e hijo de Bonacci por lo cual se le llamó Fibonacci, fue un viajero que aplicó ingeniosamente los conocimientos matemáticos del mundo hispano-árabe.

Pisa, Venecia y Génova fueron ciudades poderosas que rivalizaban entre sí por el predominio del comercio con Oriente. Sus comerciantes tenían grandes depósitos y agencias en el Mediterráneo. La necesidad de hacer cálculos mercantiles con rapidez y seguridad obligaba a los comerciantes a estudiar los sistemas orientales. El padre de Leonardo, Bonacci, fue un representante de Pisa que controlaba los impuestos de los ricos mercaderes pisanos con agencias establecidas en Africa.

Leonardo viajaba con él, conocía la lengua árabe y estudiaba los diferentes procedimientos matemáticos. Encontró que el uso del ábaco manual para el cálculo podía ser remplazado ventajosamente por el sistema de numeración hindú-arábigo "posicional".

Los partidarios del ábaco se llamaron "abacistas" y los de la numeración posicional "algoritmistas". Estos últimos usaban el Algebra.

CONTENIDO DE LA UNIDAD

Lucio de Costa

5

5.1 CONCEPTO DE FRACCION ALGEBRAICA

Ya sabemos que una expresión algebraica se llama *racional* cuando sus letras están sometidas únicamente a las cuatro operaciones racionales de suma, resta, multiplicación y división.

La *potenciación de exponente natural* queda también incluida dentro de las *operaciones racionales,* por ser un caso particular del producto.

También sabemos que cuando en una expresión racional no figura ninguna división, sino únicamente operaciones de suma, diferencia y producto, la expresión se llama *racional entera,* o simplemente *entera,* y que las expresiones enteras se dividen en *monomios* y en *polinomios,* según que no contengan o sí contengan los signos de adición o sustracción.

Pues bien, *llamaremos fracción algebraica simple al cociente indicado de dos expresiones enteras, y fracción algebraica compuesta al cociente de dos expresiones racionales.*

Igual que en Aritmética, la primera expresión algebraica se llama numerador y la segunda denominador, y se escriben separadas por una raya.

Ejemplos

1. a) $\frac{-3a^2bc}{2axy}$ es una fracción algebraica *simple.*

b) $\frac{2x^2-3x+2}{5x+1}$ es otra fracción algebraica *simple.*

c) $\frac{\frac{3x}{2y}-\frac{2y}{3x}}{\frac{4+x}{2-x}}$ es una fracción algebraica *compuesta.*

Ejercicios

Escribir dos fracciones elgebraicas simples y otras dos compuestas.

Las fracciones compuestas serán estudiadas en la última sección de este capítulo y allí probaremos que toda fracción compuesta se puede reducir a otra fracción simple *equivalente;* pero digamos qué se entiende por *fracciones algebraicas equivalentes: Se dice que dos fracciones algebraicas son equivalentes cuando ellas toman los mismos valores numéricos para todos los valores que se asignen en sus letras, excepto para algunos valores particulares que puedan anular el denominador de una de las fracciones y no el de la otra.*

Ejemplos

1. Si multiplicamos el numerador y el denominador de la fracción $\frac{3x}{x+1}$ por $(x-1)$, obtenemos esta otra: $\frac{3x(x-1)}{x^2-1}$.

Estas dos fracciones algebraicas toman los mismos valores numéricos para todos los valores que se asignen a la letra x, excepto para $x=+1$, en que la primera fracción toma el valor numérico $\frac{+3}{+2}=\frac{3}{2}$, y la segunda carece de valor numérico determinado por anularse su denominador.

Esta afirmación se apoya en el hecho de que para todo valor numérico de x (distinto de 1), la fracción segunda (numérica ya) se deduce de la primera (numérica también) multiplicando su numerador y denominador por un mismo número, y sabemos por Aritmética que si el numerador y denominador de una fracción numérica se multiplican por un mismo número, se obtiene otra fracción equivalente.

Para el valor $x=-1$ ambas fracciones algebraicas carecen de valor numérico por anularse sus denominadores.

La explicación dada en este ejemplo tiene carácter general y nos permite enunciar la siguiente:

PROPIEDAD FUNDAMENTAL:

Si el numerador y el denominador de una fracción algebraica se multiplican por una misma expresión racional se obtiene otra fracción algebraica **equivalente** *a la primera.*

Ejemplos

1. Las fracciones $\frac{3x+2}{2x+3}$ *y* $\frac{(3x+2)(x+5)}{(2x+3)(x+5)}$ *son equivalentes,* pues se pasa de la primera a la segunda, multiplicando sus dos términos por la expresión $(x+5)$.

Estas dos fracciones toman valores iguales para todos los valores que se atribuyan a la x, excepto para $x=-5$ en que la primera toma el valor $\frac{-15+2}{-10+3}=\frac{-13}{-7}=\frac{13}{7}$, y la segunda carece de valor numérico por anularse su denominador.

Para $x=-\frac{3}{2}$ carecen de valor numérico ambas fracciones, por anularse los dos denominadores.

* * *

Para expresar que dos fracciones son equivalentes se separan con el signo igual; las fracciones del ejemplo anterior se pueden escribir separadas por el signo igual, por ser equivalentes, así:

$$\frac{3x+2}{2x+3}=\frac{(3x+2).(x+5)}{(2x+3).(x+5)}$$

Ejercicios

1. Obtener tres fracciones equivalentes a la fracción $\frac{2(x^2+1)}{3(x^2+2)}$.

   Indicar en cada caso los valores excepcionales de la x, si existen, para los cuales deja de cumplirse la igualdad de valores numéricos de la fracción propuesta y la fracción equivalente obtenida.

2. ¿Cuántas fracciones existen equivalentes a una fracción dada?

5.2 APLICACIONES DE LA PROPIEDAD FUNDAMENTAL: SIMPLIFICACION Y REDUCCION A COMUN DENOMINADOR

I) *SIMPLIFICACION:*

Simplificar una fracción es transformarla en otra **equivalente** *cuyos términos (numerador y denominador) sean de grados inferiores a los de la primera fracción.*

Veamos cómo se justifica la simplificación.

Sea $\frac{A(x)}{B(x)}$ una fracción algebraica y $E(x)$ una expresión entera; de acuerdo con la *propiedad fundamental,* las fracciones $\frac{A(x)}{B(x)}$ y $\frac{A(x).E(x)}{B(x).E(x)}$ son **equivalentes,** y por tanto podemos escribir:

$\frac{A(x).E(x)}{B(x).E(x)} = \frac{A(x)}{B(x)}$, lo que nos indica que *se pueden dividir los dos términos* (el numerador y el denominador) *de una fracción algebraica por una misma expresión entera* (que sea factor de los dos términos) obteniéndose *otra fracción equivalente.* Cuando se realiza esta operación la fracción queda simplificada.

Desde el punto de vista práctico podemos dar la siguiente:

REGLA: Para simplificar una fracción se siguen las siguientes etapas:

1ª) *se factorizan el numerador y el denominador,* y

2ª) *se suprimen los factores comunes en ambos términos.*

Naturalmente, cuando el numerador y denominador ya están factorizados no hay que realizar la primera etapa.

Cuando el numerador y el denominador, después de estar completamente factorizados, no tienen factores primos comunes, o sea, son primos entre sí, la fracción no se puede simplificar y se llama **irreducible.**

Ejemplos

1. $\frac{-2a^3bcx^2}{3a^2b^2cxy} = \frac{-2ax}{3by}$ (Se han suprimido los factores $a^2, b, c, x,$ del numerador y del denominador).

2. $\frac{5x^3y^2z^4}{15x^2yz^5} = \frac{xy}{3z}$

3. $\frac{3abc}{2xy}$, esta fracción es *irreducible* (no hay factores comunes en el numerador y en el denominador).

4. $\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{(a+b)(a^3+b^3)} = \frac{(a+b)^3}{(a+b)(a+b)(a^2-ab+b^2)} =$

   $= \frac{a+b}{a^2-ab+b^2}$

5. Simplificar la siguiente fracción: $\frac{2x^4+x^3-3x^2+5x-2}{x^3+2x^2-2x+3}$

   Como es difícil descubrir a simple vista factores comunes, hallamos el m.c.d. del numerador y del denominador; se obtiene: m.c.d. $(2x^4+x^3-3x^2+5x-2,\ x^3+2x^2-2x+3) = 7x^2-7x+7$.

   Dividiendo numerador y denominador por su m.c.d. se tiene:

$$\frac{(2x^4+x^3-3x^2+5x-2)\div(7x^2-7x+7)}{(x^3+2x^2-2x+3)\div(7x^2-7x+7)} = \frac{\frac{1}{7}(x^2+3x-2)}{\frac{1}{7}(x+3)} = \frac{x^2+3x-2}{x+3}$$

Cuando el numerador y el denominador de una fracción se dividen por su m.c.d., la fracción se transforma en otra equivalente **irreducible,** o sea, que ya no se puede simplificar más.

Ejercicios

Simplificar las siguientes fracciones, transformándolas en irreducibles:

1. $\dfrac{24a^3b^2c^4x^2y}{30a^2b^3c^2xz}$

2. $\dfrac{-18x^2y^3z^4u^3}{15xy^2z^3t^4}$

3. $\dfrac{2a^2x^2+4ax^2b-6a^3b^2x^3}{4a^2b^2x^2-2abx+8a^2bx^2y}$

4. $\dfrac{(a^2-b^2)\,(a^2+2ab+b^2)}{(a+b)^2\,(a-b)}$

5. $\dfrac{x^3+y^3-x-y}{x^2-y^2}$

6. $\dfrac{x^2-y^2+x+y}{x^2+y^2-2xy-1}$

7. $\dfrac{ab-ac+ad}{nb-nc+nd}$

8. $\dfrac{mnp-m^2p+mp^2}{n^2p-mnp+np^2}$

II) *REDUCCION A COMUN DENOMINADOR:*

Reducir varias fracciones a común denominador es transformarlas en otras respectivamente equivalentes y que tengan todas el mismo denominador.

Para reducir varias fracciones a común denominador pueden seguirse dos métodos:

1er. Método: *Se multiplican los dos términos de cada fracción por el producto de los denominadores de las demás fracciones.*

Con este procedimiento, cada fracción se transforma en otra equivalente, por la *propiedad fundamental.*

Ejemplos

Reducir a común denominador las siguientes fracciones:

1. $\dfrac{x}{y},\ \dfrac{z}{t},\ \dfrac{3}{u}.$ Aplicando a cada fracción la regla anterior, se tiene:

$\dfrac{xtu}{ytu},\ \dfrac{zyu}{ytu},\ \dfrac{3yt}{ytu};$ estas tres fracciones son respectivamente equivalentes a las tres primeras y tienen el mismo denominador.

2. $\dfrac{a-b}{a+b},\ \dfrac{a+b}{a-b},\ \dfrac{a}{b},\ \dfrac{b}{a};$ procediendo de igual forma:

$$\frac{(a-b)\,(a-b)\,.\,b\,.\,a}{(a+b)\,(a-b)\,.\,b\,.\,a}=\frac{(a-b)^2\,.\,b\,.\,a}{(a^2-b^2)\,.\,b\,.\,a},$$

$$\frac{(a+b)\,(a+b)b\,.\,a}{(a^2-b^2)\,.\,b\,.\,a}=\frac{(a+b)^2\,.\,b\,.\,a}{(a^2-b^2)\,.\,b\,.\,a},$$

$$\frac{a\,.\,(a+b)\,(a-b)\,.\,a}{(a^2-b^2)\,.\,b\,.\,a}=\frac{(a^2-b^2)a^2}{(a^2-b^2)\,.\,b\,.\,a},$$

$$\frac{b\,.\,(a+b)\,(a-b)\,.\,b}{(a^2-b^2)\,.\,b\,.\,a}=\frac{(a^2-b^2)\,.\,b^2}{(a^2-b^2)\,.\,b\,.\,a}$$

2º Método: *Se halla el m.c.m. de los denominadores y se multiplican los dos términos de cada fracción por el cociente de dividir este m.c.m. por el propio denominador de la fracción.*

De esta forma quedan las fracciones reducidas a su *mínimo denominador común,* es decir, al denominador común de menor grado.

Ejemplos

Reducir al mínimo denominador común las siguientes fracciones:

1. $\dfrac{2a}{bc},\ \dfrac{3b}{ac},\ \dfrac{4c}{ab}.$

El m.c.m. de los denominadores es *abc;* aplicando a cada fracción la regla anterior obtenemos:

Ejemplos

$$\frac{2a^2}{abc},\quad \frac{3b^2}{abc},\quad \frac{4c^2}{abc}.$$

2. $\dfrac{-3m^2n}{x^2y^3z^2},\ \dfrac{2ab^2}{x^3y^2z^2},\ \dfrac{5mn^2}{x^2y^2z^3}.$ El m.c.m. de los denominadores es $x^3y^3z^3$.

Procediendo igual que antes, se obtienen las siguientes fracciones:

$$\frac{-3m^2nxz}{x^3y^3z^3},\quad \frac{2ab^2yz}{x^3y^3z^3},\quad \frac{5mn^2xy}{x^3y^3z^3}$$

3. $\dfrac{x+y}{x-y},\ \dfrac{(x-y)}{x+y},\ \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ El m.c.m. de los denominadores es: x^2-y^2.

Las fracciones que resultan son: $\dfrac{(x+y)^2}{x^2-y^2},\ \dfrac{(x-y)^2}{x^2-y^2},\ \dfrac{2xy}{x^2-y^2}.$

4. $\dfrac{2x}{x+y},\ \dfrac{2y}{x^2+2xy+y^2},\ \dfrac{x^2+y^2}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}$

El m.c.m. de los denominadores es: $(x+y)^3$

Las fracciones que resultan son:

$$\frac{2x(x+y)^2}{(x+y)^3},\quad \frac{2y(x+y)}{(x+y)^3},\quad \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}$$

Ejercicios

Reducir al mínimo denominador común las siguientes fracciones:

1. $\dfrac{3a}{x+y},\ \dfrac{2b}{x-y},\ \dfrac{4c}{x^2-y^2}$

2. $\dfrac{5}{a^3+b^3},\ \dfrac{3}{a+b},\ \dfrac{2}{a^2-ab+b^2}$

3. $\dfrac{4a}{x^2+y^2},\ \dfrac{2b}{x^2-y^2},\ \dfrac{-c}{x^3+y^3},\ \dfrac{d}{x^3-y^3}$

Luis F Costa

4. $\dfrac{x}{x-2y},\ \dfrac{2xy}{x^2-4y^2},\ \dfrac{x-2y}{x^2+4xy+4y^2}$

5. $\dfrac{2x}{x^2-y^2},\ \dfrac{2y}{x^4-y^4},\ \dfrac{3xy}{x^2+y^2}$

6. $\dfrac{a+b}{a},\ \dfrac{5a}{a+b},\ \dfrac{a-b}{b^3-a^2b}$

Ejercicios

5.3 LA SUMA Y RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

I) *SUMA:*

Definición: *Se llama suma de varias fracciones algebraicas a otra fracción algebraica cuyo valor numérico es igual a la suma de los valores numéricos de los sumandos para todos los valores que se atribuyen a sus letras.*

De acuerdo con esta definición, para sumar fracciones algebraicas debemos proceder como en Aritmética, o sea, reduciéndolas a común denominador, poniendo como numerador de la suma la suma de los numeradores y como denominador el común.

Ejemplos

Sumar las fracciones siguientes:

1. $\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}+\dfrac{4}{c}=\dfrac{2bc}{abc}+\dfrac{3ac}{abc}+\dfrac{4ab}{abc}=\dfrac{2bc+3ac+4ab}{abc}$

2. $$\frac{5a}{a-x}+\frac{3b}{a+x}+\frac{2c}{a^2-x^2}=\frac{5a(a+x)}{a^2-x^2}+\frac{3b(a-x)}{a^2-x^2}+\frac{2c}{a^2-x^2}=$$
$$=\frac{5a(a+x)+3b(a-x)+2c}{a^2-x^2}$$

Ejemplos

3. $\frac{3x}{a+b}+\frac{y^2}{a-b}+\frac{2z}{(a+b)^2}=\frac{3x(a^2-b^2)}{(a-b)\,(a+b)^2}+\frac{y^2(a+b)^2}{(a-b)(a+b)^2}+\frac{2z(a-b)}{(a-b)(a+b)^2}=$

$$=\frac{3x(a^2-b^2)+y^2(a+b)^2+2z(a-b)}{(a-b)\,(a+b)^2}$$

4. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2-x}+\frac{1}{x^4-x^2}$; descomponemos los denominadores en factores para hallar su m.c.m.: $x,\ x(x+1),\ x(x-1),\ x^2(x+1)\,(x-1)$.

Se ve que el m.c.m. es el último denominador; reduciendo las fracciones al mínimo denominador común obtenemos:

$$\frac{x(x^2-1)}{x^2(x^2-1)}+\frac{x(x-1)}{x^2(x^2-1)}+\frac{x(x+1)}{x^2(x^2-1)}+\frac{1}{x^2(x^2-1)}=$$

$$=\frac{x(x^2-1)+x(x-1)+x(x+1)+1}{x^2(x^2-1)}$$

Ejercicios

Sumar las fracciones siguientes:

1. $\frac{x}{1+a}+\frac{y}{1-a}+\frac{2}{1-a^2}$.

2. $\frac{2x}{3a^2bc^3}+\frac{3y}{6a^3b^2c}+\frac{z}{12a^3b^3c^2}$

3. $\frac{4}{x}+\frac{5a}{2x-1}+\frac{3b}{4x^2-1}$

4. $\frac{1}{x}+\frac{2x}{4x^3-x}+\frac{x}{4x^2-1}$

5. $\frac{a}{x^2-y^2}+\frac{b}{(x+y)^2}+\frac{c}{(x-y)^2}$

6. $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{a+c}{(a-b)(b-c)}$

7. $\frac{1}{3x-6}+\frac{1}{6x}+\frac{1}{x-2}$

8. $\frac{a}{x^2-2xy+y^2}+\frac{b}{x-y}$

9. $\frac{4m}{x^2+x}+\frac{2n}{x+1}$

10. $\frac{x}{x^3-x}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}$

II) *RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS:*

Definicion: *La diferencia de dos fracciones algebraicas es otra fracción algebraica que sumada con la segunda nos da la primera.*

Regla: *Para restar dos fracciones de igual denominador se restan los numeradores y se pone por denominador el común.*

Si las fracciones que se quieren restar no tienen igual denominador, se reducen previamente a común denominador.

Ejemplos

1. $\frac{3x}{a}-\frac{2y}{a}=\frac{3x-2y}{a}$

2. $\frac{8a}{5b^2c^3}-\frac{4b}{10b^2c^2}=\frac{16a}{10b^2c^3}-\frac{4bc}{10b^2c^3}=\frac{16a-4bc}{10b^2c^3}$.

3. $\frac{2u}{(x-y)^2}-\frac{3v}{x-y}=\frac{2u}{(x-y)^2}-\frac{3v(x-y)}{(x-y)^2}=\frac{2u-3v\,(x-y)}{(x-y)^2}$

4. $\frac{a+b}{(a+b)^2}-\frac{2}{a+b}=\frac{1}{a+b}-\frac{2}{a+b}=\frac{1-2}{a+b}=\frac{-1}{a+b}$

Ejercicios

Restar las fracciones que se indican a continuación:

1. $\dfrac{3a^2}{a^2-2ab+b^2} - \dfrac{2b^2}{a-b}$

2. $\dfrac{4xy}{3x^2y^2z} - \dfrac{2yz}{6x^3y^2z^2}$

3. $\dfrac{2}{x+y} - \dfrac{3}{x-y}$

4. $\dfrac{5a}{3a^2-6a} - \dfrac{4b}{a^2-2a}$

5. $\dfrac{x+y}{2xy} - \dfrac{x-y}{4x^2y^2}$

Efectuar las siguientes sumas y restas combinadas:

6. $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^2+a} + \dfrac{1}{a^2-a} - \dfrac{1}{a^4-a^2}$

7. Comprobar que

$$\frac{(a+b)(a^2+b^2-c^2)}{ab} + \frac{(b+c)(b^2+c^2-a^2)}{bc} + \frac{(c+a)(c^2+a^2-b^2)}{ca} = 2(a+b+c)$$

8. $\dfrac{3uv}{(u+v)} - \dfrac{2u}{u^2-v^2}$

5.4 EXPRESIONES MIXTAS. REDUCCION A FRACCIONES

Una expresión mixta es la suma o la resta (es decir, la suma algebraica) de una expresión entera con una fraccionaria.

Las reglas para reducir expresiones mixtas a fracciones son las mismas que en la Aritmética.

Regla: *Se multiplica la parte entera por el denominador de la fracción, se le suma o resta, a este producto, según el caso, el numerador, y se pone por denominador el de la fracción.*

Esta regla se justifica simplemente poniendo denominador unidad a la parte entera y aplicando la regla general de suma o resta de fracciones.

Ejemplos

Reducir a fracciones las siguientes expresiones mixtas:

1. $x^2+1+\dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{(x^2+1).(x^2-1)+2x}{x^2-1} = \dfrac{x^4-1+2x}{x^2-1}$

2. $x-1+\dfrac{2x+2}{x+1} = \dfrac{(x-1)(x+1)+2x+2}{x+1} = \dfrac{x^2-1+2x+2}{x+1} = \dfrac{x^2+2x+1}{x+1} =$
$= \dfrac{(x+1)^2}{x+1} = x+1.$

3. $2x-\dfrac{4y^2}{8x} = \dfrac{2x\,.\,8x-4y^2}{8x} = \dfrac{16x^2-4y^2}{8x} = \dfrac{4x^2-y^2}{2x}$

4. $5x-1-\dfrac{3x-2}{4x+1} = \dfrac{(5x-1)(4x+1)-(3x-2)}{4x+1} = \dfrac{20x^2+x-1-3x+2}{4x+1} =$
$= \dfrac{20x^2-2x+1}{4x+1}$

Ejercicios

Reducir a fracciones las siguientes expresiones, simplificando los resultados:

1. $1+\dfrac{a-b}{a+b}$

2. $3-\dfrac{9-x}{3-x}$

3. $x^2-\dfrac{x^2-3xy}{x+y}$

Ejercicios

4. $a^2-ab+b^2 - \frac{b^3}{a+b}$

5. $a+b - \frac{3ab-b^2}{a}$

6. $a-1 - \frac{a^2+ab}{a+b}$

7. $m+n - \frac{m^2-n^2}{m-n}$

REDUCCION DE UNA FRACCION IMPROPIA A EXPRESION MIXTA EQUIVALENTE:

Una fracción se llama impropia cuando el numerador es de igual o mayor grado que el denominador.

En ciertas ocasiones (por ejemplo en Cálculo Integral) interesa descomponer una fracción impropia en suma (algebraica) de una expresión entera y una fracción *propia* (con grado del numerador menor que el del denominador).

Cuando el numerador y denominador son polinomios en una misma letra, por ejemplo polinomios en x, esto se logra simplemente por división completa del numerador por el denominador; la fracción es equivalente a la suma del cociente inexacto más una fracción propia que tiene por numerador el resto y por denominador el divisor.

Ejemplos

1. $\frac{4x^3+2x^2-x+1}{x^2-x+1} = 4x+6 + \frac{x-5}{x^2-x+1}$

2. $\frac{2x^2+x+2}{x^2+x-1} = 2 + \frac{-x+4}{x^2+x-1}$

Descomponer las siguientes fracciones impropias en su parte entera más una fracción propia, y comprobar cada descomposición reduciendo la expresión mixta a fracción:

1. $\frac{3x^3-2x^2+x+6}{x^2-2x+1}$

2. $\frac{4x^4-3x^3+2x^2-x+1}{x^2+x+1}$

3. $\frac{2x^3-3x^2+x-6}{x+2}$

4. $\frac{3x^5-2x^4+x^3-x^2+1}{x^3-4x^2+2x+2}$

Ejemplos

5.5 PRODUCTO Y COCIENTE DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

I) *MULTIPLICACION DE FRACCIONES:*

El producto de dos fracciones algebraicas se define de forma análoga a como se definió la suma.

Definición: *Se llama producto de dos fracciones algebraicas a otra fracción algebraica cuyo valor numérico es igual al producto de los valores numéricos de los factores, para todos los valores que se asignen a sus letras.*

De acuerdo con esta definición, la fracción producto debe obtenerse de tal forma que su valor numérico coincida con el producto de los valores numéricos de los factores (para valores numéricos cualesquiera de sus letras) y esto se logra siguiendo la misma regla de multiplicación que para las fracciones numéricas en Aritmética.

REGLA PARA MULTIPLICAR FRACCIONES ALGEBRAICAS:

El producto de varias fracciones algebraicas es la fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores.

Las fracciones deben simplificarse antes de ser multiplicadas, y si los numeradores y los denominadores están factorizados se pueden suprimir factores comunes de los numeradores y de los denominadores, aunque no sean de la misma fracción.

Ejemplos

A continuación se dan varios ejemplos de multiplicación de fracciones, simplificando previamente los factores y después el resultado.

Para poder realizar las simplificaciones (supresión de factores del numerador y denominador) hay que factorizar los dos términos de cada fracción, cuando no estén factorizados.

1. $\frac{6a^2bx^3}{2ab^2x^4} \cdot \frac{-4a^3bx}{3a^2bx^2} = \frac{3a}{bx} \cdot \frac{-4a}{3x} = \frac{-12a^2}{3bx^2}$

2. $\frac{2mnu^2v^3}{3m^2n^3uv^4} \cdot \frac{6m^2np^3u^2v^5}{4mnpuv} \cdot \frac{2mnu^6v^4}{3m^2n^2u^3v^3} = \frac{2p^2u^5v^4}{3mn^3}$

3. $\frac{4x^3y}{x^2-y^2} \cdot \frac{x-y}{2x^2y^2} \cdot \frac{3(x+y)}{2xy} = \frac{4x^3y}{(x+y)(x-y)} \cdot \frac{x-y}{2x^2y^2} \cdot \frac{3(x+y)}{2xy} = \frac{3}{y^2}$

4. $\frac{a^2-b^2}{b} \cdot \frac{2a}{a+b} \cdot \frac{a+b}{a^4-b^4} \cdot \frac{a^2+b^2}{a} = \frac{2}{b}$

Ejercicios

1. $\frac{4x^2}{x^3-x^2} \cdot \frac{x+y}{2x} \cdot \frac{x-1}{x^2-y^2}$

2. $\frac{(a+b-c)^2}{a^2b^2} \cdot \frac{c^2}{(a+b)^2-c^2} \cdot \frac{ab}{a+b+c}$

3. $\frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1+x}{1-x}$

4. $\frac{xy+2y^2}{2x^3} \cdot \frac{4x^2}{7x+14y}$

5. $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{a^3b-ab^3}{a^2-b^2}$ (Efectúese primero la suma del paréntesis).

6. $\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) \cdot \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}\right)$

7. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2}\right)$

Ejercicios

II) DIVISION DE DOS FRACCIONES ALGEBRAICAS:

El cociente de dos fracciones algebraicas, dividendo y divisor, es la fracción algebraica que multiplicada por el divisor nos da el dividendo.

Regla: *El cociente de dos fracciones algebraicas se obtiene multiplicando la fracción dividendo por la fracción divisor invertida* (es decir, intercambiando los términos)..

En efecto: $\frac{A(x)}{B(x)} \div \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)}{B(x)} \cdot \frac{D(x)}{C(x)}$, pues

$$\frac{A(x)}{B(x)} \cdot \frac{D(x)}{C(x)} \cdot \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)}{B(x)}$$ que es el dividendo.

Con esta regla, la división de dos fracciones se reduce a una multiplicación y puede aplicarse todo lo dicho en el apartado anterior respecto de las simplificaciones.

Ejemplos

1. $\frac{2x^2y^3z}{4xy^2z^2} \div \frac{2x^2y^3z^4}{4x^3y^4z^5} = \frac{xy}{2z} \cdot \frac{2xyz}{1} = \frac{x^2y^2}{1} = x^2y^2$

2. $\frac{1+x^2}{1-x^2} \div \frac{1+x}{1-x} = \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{1-x}{1+x} = \frac{1+x^2}{(1+x)^2}$

3. $\frac{(a-2)(a-3)}{a+b} \div \frac{a-3}{a+b} = \frac{(a-2)(a-3)}{a+b} \cdot \frac{a+b}{a-3} = a-2$

4. $\frac{a^4-1}{a^2} \div \frac{a^2+1}{a} = \frac{(a^2+1)(a^2-1)}{a^2} \cdot \frac{a}{a^2+1} = \frac{a^2-1}{a}$

Ejercicios

1. $\dfrac{4a^2b}{3ac^2} \div \dfrac{2ab^2}{6ac^3}$

2. $\left(1+\dfrac{x}{y}\right) \div \dfrac{2y}{x-y}$

3. $(4x^2 - \frac{1}{4}) \div (x + \frac{1}{4})$

4. $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right) \div \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2}\right)$

5. $\dfrac{8a^3}{a^3 - b^3} \div \dfrac{4a^2}{a^2+ab+b^2}$

6. $\left(\dfrac{a^2}{b^2} - \dfrac{b^2}{a^2}\right) \div \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right)$

7. $\left(a + \dfrac{a}{a-1}\right) \div \left(a - \dfrac{a}{a-1}\right)$

8. $\dfrac{x^2y^3}{x^2 - y^2} \div \dfrac{2x^3y^4}{x-y}$

9. $\dfrac{2m^2}{a^2+2ab+b^2} \div \dfrac{mn}{a+b}$

10. $\left(a^4-x^4+\dfrac{a^2+x^2}{2x^2}\right) \div (a^2+x^2)$. (Asóciense los dos primeros términos del dividendo).

5.6 POTENCIACION DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

La potenciación de fracciones algebraicas se define de manera análoga a la de números racionales.

Regla I): *Para elevar una fracción algebraica a un exponente natural se elevan el numerador y el denominador a dicho exponente.*

II): *Para elevar una fracción a un exponente entero negativo se eleva la fracción invertida al exponente opuesto, que es un número natural, con lo que estamos ya en el caso I).*

Antes de efectuar la operación de elevar el quebrado a una potencia es conveniente simplificarlo. Recordamos que para elevar un monomio a una potencia se eleva el coeficiente a dicha potencia y los exponentes de las letras se multiplican por el exponente de la potencia.

Ejemplos

1. $\left(\dfrac{3a^2bx^3}{-2ab^2x}\right)^3 = \left(\dfrac{3a^2x^2}{-2b}\right)^3 = -\dfrac{27}{8} \cdot \dfrac{a^6x^6}{b^3}$

2. $\left(\dfrac{2a^3b^2c^4}{-3a^2b}\right)^2 \div \left(\dfrac{3a^3bc^2}{2a^2b^2c^2}\right)^3 = \left(\dfrac{2abc^4}{-3}\right)^2 \div \left(\dfrac{3a}{2b}\right)^3 = \dfrac{4a^2b^2c^8}{9} \div \dfrac{27a^3}{8b^3} =$

$= \dfrac{4a^2b^2c^8}{9} \cdot \dfrac{8b^3}{27a^3} = \dfrac{32b^5c^8}{243a}$

3. $\left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}\right)^2 \div \dfrac{(x-y)^3}{x^2y^2} = \left(\dfrac{x^2-y^2}{xy}\right)^2 \cdot \dfrac{x^2y^2}{(x-y)^3} =$

$= \dfrac{(x+y)^2 \cdot (x-y)^2}{x^2y^2} \cdot \dfrac{x^2y^2}{(x-y)^3} = \dfrac{(x+y)^2}{x-y}$

4. $\left(a - \dfrac{1}{a}\right)^2 \div \dfrac{a^2-1}{a^2} = \left(\dfrac{a^2-1}{a}\right)^2 \cdot \dfrac{a^2}{a^2-1} = \dfrac{(a^2-1)^2}{a^2} \cdot \dfrac{a^2}{a^2-1} = a^2-1$

5. $\left(\dfrac{-2a^3x^2z}{3a^2bx^3z^2}\right)^{-3} = \left(\dfrac{3a^2bx^3z^2}{-2a^3x^2z}\right)^3 = \left(\dfrac{3bxz}{-2a}\right)^3 = \dfrac{27b^3x^3z^3}{-8a^3}$

6. $\left(\dfrac{x^2-1}{x+1}\right)^{-2} \div \dfrac{(x-1)^3}{(x-1)^2} = \left(\dfrac{x+1}{x^2-1}\right)^2 \cdot \dfrac{(x-1)^2}{(x-1)^3} = \left(\dfrac{1}{x-1}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{(x-1)} = \dfrac{1}{(x-1)^3}$

Ejercicios

1. $\left(\dfrac{-2a^2b^3z}{3ac^3z^2t}\right)^3$

2. $\left(\dfrac{3a+3ax^2}{2b+2bx^2}\right)^2$

3. $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2$

4. $\left(\dfrac{x-y}{a+y}\right)^2 \div \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

5. $\left(\dfrac{2a^2bx^3z^4}{-4ab^2xz}\right)^{-3} \div \left(\dfrac{3a^3bz^2t}{-5ab^3zt^2}\right)^{-2}$

6. $\left(\dfrac{3m^2uv}{5mnv^2}\right)^{-3} \div \left(\dfrac{4mnu^2v^2}{2m^3n^3uv}\right)^{-2}$

7. $\left(\dfrac{a^2-b^2}{a+b}\right)^3 \div \dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$

8. $\left(\dfrac{-5p^2qr^3}{4pq^3r^4}\right)^3\cdot\left(\dfrac{2pq}{3r^2p}\right)^2$

9. $\left(\dfrac{1}{a^2-b^2}\right)^2 \div \left(\dfrac{1}{a+b}\right)^2$

5.7 FRACCIONES COMPUESTAS Y SU REDUCCION A FRACCIONES SIMPLES

Ya dijimos que una fracción compuesta es aquella cuyos términos (numerador y denominador) no son expresiones enteras, sino que alguno de ellos, o los dos, son fracciones.

Si en el numerador y denominador figura una sola fracción basta dividir la fracción del numerador por la del denominador para tener reducida la fracción compuesta a una simple, y si en el numerador y denominador figuran varias fracciones simples separadas por los signos más o menos, se reducen a una sola fracción, y después se divide la fracción del numerador por la del denominador.

alina S Castro

Ejemplos

1. $$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}=\frac{\frac{y+x}{xy}}{\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}}=\frac{x+y}{xy}\div\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}=\frac{x+y}{x\cdot y}\cdot\frac{x^2y^2}{y^2-x^2}=\frac{xy}{y-x}$$

2. $$\frac{1-\frac{b^2+c^2}{2bc}}{1+\frac{b^2+c^2}{2bc}}=\frac{\frac{2bc-b^2-c^2}{2bc}}{\frac{2bc+b^2+c^2}{2bc}}=\frac{2bc-b^2-c^2}{2bc}\div\frac{2bc+b^2+c^2}{2bc}=$$

$$=\frac{-(b-c)^2}{2bc}\cdot\frac{2bc}{(b+c)^2}=-\frac{(b-c)^2}{(b+c)^2}$$

3. $$\frac{\left(1-\frac{m}{m+1}\right)^2}{1+\frac{m}{m+1}}\cdot\frac{\frac{2}{m}+\frac{1}{m^2}}{1-\frac{1}{m}}=\frac{\left(\frac{m+1-m}{m+1}\right)^2}{\frac{m+1+m}{m+1}}\cdot\frac{\frac{2m}{m^2}+\frac{1}{m^2}}{\frac{m-1}{m}}=$$

$$=\frac{1}{(m+1)^2}\cdot\frac{m+1}{2m+1}\cdot\frac{2m+1}{m^2}\cdot\frac{m}{m-1}=\frac{1}{(m+1)m(m-1)}$$

4. $$\frac{a+\frac{b-a}{1+ab}}{1-\frac{ab-a^2}{1+ab}}=\frac{\frac{a+a^2b+b-a}{1+ab}}{\frac{1+ab-ab+a^2}{1+ab}}=\frac{b(a^2+1)}{1+ab}\cdot\frac{1+ab}{1+a^2}=b$$

Ejercicios

Reducir las siguientes fracciones compuestas a fracciones simples:

1. $\dfrac{a-\frac{a+b}{3}}{a-\frac{(a-b)^2}{a}}$

2. $\dfrac{1}{x+\frac{1}{y}}$

3. $\dfrac{\frac{m^2-n^2}{a^2-b^2}}{\frac{m+n}{a-b}}$

4. $\dfrac{\frac{x^3-y^3}{z^3+t^3}}{\frac{x-y}{z+t}}$

5. $\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$

6. $\dfrac{\frac{2}{a+b}-\frac{1}{a-b}}{\frac{4(a-b)}{a+b}-\frac{a+b}{a-b}}$

Ejercicios

7. $\dfrac{\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}}{1+\dfrac{a+b}{a^2-b^2}}$

8. $\dfrac{x+y+\dfrac{x+y}{x-y}}{x-\dfrac{2}{x-y}}$

9. $\dfrac{1+\dfrac{b}{a+b}}{1+\dfrac{2b}{a-b}}$

5.8 VERDADERO VALOR DE UNA FRACCION DE LA FORMA $\frac{0}{0}$:

Ocurre algunas veces que al dar un valor numérico a la variable en una fracción, para dicho valor se anulan *simultáneamente* el numerador y el denominador, en cuyo caso la fracción toma la forma *indeterminada* $\frac{0}{0}$; y decimos indeterminada porque *cualquier* número multiplicado por el denominador cero, nos da el numerador que es también cero. ¿Cómo encontrar en este caso el verdadero valor de la fracción, para ese valor de la variable?

Estudiemos la cuestión con un ejemplo.

Si en la fracción $\dfrac{(x^2-2x+1)\,.\,(x-3)}{(2x+1\,.\,(x-3)}$ damos a la variable x el valor 3 se anulan el numerador y el denominador, pues el segundo factor, $(x-3)$, del numerador y del denominador vale cero para $x=3$; pero si simplificamos la fracción, dividiendo su numerador y denominador por $(x-3)$, queda la fracción simplificada $\dfrac{x^2-2x+1}{2x+1}$, cuyo valor para $x=3$ es $\dfrac{3^2-2x3+1}{2x3+1}=\dfrac{9-6+1}{6+1}=\dfrac{4}{7}$; convendremos en tomar este valor de la fracción simplificada, $\frac{4}{7}$, como el *verdadero valor* de la primera fracción.

Otro ejemplo: Hallar el valor de la fracción $\dfrac{x^3-5x+2}{3x^2-7x+2}$ para $x=2$.

Sustituyendo x por 2 resulta: $\dfrac{2^3-5\times 2+2}{3\times 2^2-7\times 2+2}=\dfrac{0}{0}$.

El hecho de anularse simultáneamente el numerador y el denominador para $x=2$ nos indica que *ambos son divisibles por $x-2$*, en virtud del *teorema del resto*, y por tanto podemos simplificar la fracción dividiendo sus dos términos por $x-2$; las divisiones se efectúan cómodamente aparte aplicando la regla de Ruffini; en este caso se tiene:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -5 & 2 \\ 2) & & 2 & 4 & -2 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 3 & -7 & 2 \\ 2) & & 6 & -2 \\ \hline & 3 & -1 & 0 \end{array}$$

Los cocientes son: $(x^3-5x+2)\div(x-2)=x^2+2x-1$,
$(3x^2-7x+2)\div(x-2)=3x-1$; la fracción simplificada (con el numerador y el denominador divididos por $x-2$), es: $\dfrac{x^2+2x-1}{3x-1}$ cuyo valor para $x=2$ es: $\dfrac{2^2+2x2-1}{3x2-1}=\dfrac{4+4-1}{6-1}=\dfrac{7}{5}$, que es *el verdadero valor* de la fracción primera.

Las conclusiones de estos ejemplos son de carácter general y pueden resumirse así:

Cuando al dar el valor $x=a$ en una fracción algebraica simple se anulan *simultáneamente* el numerador y el denominador, es porque ambos son divisibles por $x-a$, en virtud del teorema del resto; si la fracción simplificada dividiendo su numerador y denominador por $x-a$ no toma la forma $\frac{0}{0}$ para $x=a$, y el denominador no se anula, el valor de la nueva fracción simplificada se llama el *verdadero valor* de la fracción primera; si se vuelven a anular el numerador y denominador para $x=a$ es porque siguen siendo divisibles por $x-a$, volviéndose a aplicar el mismo proceso de simplificación (dividiendo otra vez numerador y denominador por $x-a$), hasta obtener una fracción de valor determinado para $x=a$, que se toma como verdadero valor de la fracción de partida. Si se llega a una fracción cuyo numerador se anula para $x=a$ y cuyo denominador es distinto de cero para $x=a$, la fracción vale cero para $x=a$, y si se llega a una fracción cuyo numerador es distinto de cero para $x = a$ y cuyo denominador se anula para $x = a$, la fracción *carece de valor* para $x = a$.

En los siguientes ejemplos se presentarán los diversos casos y servirán de aclaración de lo dicho.

Ejemplos

1. Hallar el valor de la fracción $\dfrac{x^3-3x^2-6x+8}{4x^2+6x-4}$ para $x=-2$.

Hallaremos el valor numérico del numerador y del denominador aplicando la Regla de Ruffini, pues de esta forma, si se anulan el numerador y denominador para $x=-2$ ya tenemos los cocientes necesarios para la fracción simplificada; los cálculos se disponen como de costumbre, con el esquema de Ruffini así:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -6 & 8 \\ -2) & & -2 & +10 & -8 \\ \hline & 1 & -5 & +4 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 4 & 6 & -4 \\ -2) & & -8 & +4 \\ \hline & 4 & -2 & 0 \end{array}$$

Vemos que el numerador y el denominador se anulan para $x=-2$, y por tanto la fracción toma la forma $\frac{0}{0}$ para $x=-2$; dividiendo sus dos términos por $x-(-2)=x+2$ se obtiene la fracción simplificada $\dfrac{x^2-5x+4}{4x-2}$ (los cocientes del numerador y denominador por $x+2$ resultan de los esquemas anteriores); esta última fracción, para $x=-2$, toma el valor:

$$\frac{(-2)^2-5\times(-2)+4}{4\times(-2)-2} = \frac{4+10+4}{-8-2} = \frac{18}{-10} = -1.8$$

que es el verdadero valor de la primera fracción.

2. Hallar el verdadero valor de $\dfrac{x^4+x^3-7x^2+7x-2}{x^3-3x+2}$ para $x=1$.

Los cálculos se disponen así:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -7 & +7 & -2 \\ 1) & & 1 & 2 & -5 & +2 \\ \hline & 1 & 2 & -5 & +2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1) & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Se ve que el numerador y denominador se anulan simultáneamente para

$x=1$; la fracción simplificada es: $\dfrac{x^3+2x^2-5x+2}{x^2+x-2}$; veamos el valor que toma para $x=1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -5 & 2 \\ 1) & & 1 & 3 & -2 \\ \hline & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -2 \\ 1) & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Vemos que el numerador y denominador se siguen anulando para $x=1$; la nueva fracción simplificada es $\dfrac{x^2+3x-2}{x+2}$ cuyo valor para $x=1$ es $\dfrac{1+3-2}{1+2}=\dfrac{2}{3}$, que es el *verdadero valor* de la fracción primera.

3. Hallar el valor de $\dfrac{x^3-6x^2+11x-12}{x^2-3x+4}$ para $x=4$.

Procediendo como en los ejercicios anteriores:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 11 & -12 \\ 4) & & 4 & -8 & 12 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & 4 \\ 4) & & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 8 \end{array}$$

Se ve que el numerador se anula para $x=4$, pero no el denominador (que vale $+8$); el valor de la fracción para $x=4$, es $\frac{0}{8}=0$.

4. Hallar el valor de $\dfrac{3x^3-2x^2+x+4}{x^2-x-20}$ para $x=5$.

Disponiendo los cálculos como de costumbre:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 5) & & 15 & 65 & 330 \\ \hline & 3 & 13 & 66 & 334 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -20 \\ 5) & & 5 & 20 \\ \hline & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

Se ve que el numerador no se anula para $x=5$ (vale 334), pero el denominador sí; por tanto, la fracción dada *carece* de valor para $x=5$.

Ejemplos

Ejercicios

Hallar los verdaderos valores de las siguientes fracciones, para los valores que se indican de su variable:

1. Valor de $\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-9x^2+24x-20}$ para $x=2$.

2. Valor de $\dfrac{x^3-4x^2+4x-3}{2x^2+5x-1}$ para $x=3$.

3. $\dfrac{x^3-6x^2+32}{x^4-7x^3+9x^2+8x+16}$ para $x=4$.

4. Valor de $\dfrac{x^2+3x+5}{x^3-x^2+x+3}$ para $x=-1$.

5. Valor de $\dfrac{x^3+6x^2+8x-3}{x^4+7x^3+14x^2+5x-3}$ para $x=-3$.

6. Valor de $\dfrac{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}{a^2+2ab+b^2}$ para $a=-b$.

REVISION DE CONCEPTOS DEL CAPITULO 5

1 ¿Qué es una fracción algebraica simple? ¿Y compuesta?

2. ¿Qué son fracciones algebraicas equivalentes?

3. Enuncia la propiedad fundamental de las fracciones algebraicas y explica las razones que la justifican.

4. ¿Cuáles son las aplicaciones más importantes de la propiedad fundamental de las fracciones algebraicas?

5. ¿Cómo se simplifica una fracción algebraica?

6. ¿Qué se entiende por *fracción irreducible?*

7. ¿Cómo se simplifica una fracción hasta convertirla en irreducible?

8. ¿Cuántos métodos conoces para reducir varias fracciones a común denominador?

9. Explica la regla general para reducir varias fracciones algebraicas a común denominador. ¿En qué principio se fundamenta esta regla?

10. Explica la regla para reducir varias fracciones al mínimo denominador común.

11. ¿Cuándo se dice que una fracción algebraica es la suma de varias fracciones algebraicas?

12. De acuerdo con la definición anterior, ¿cómo se obtiene la fracción algebraica suma de varias fracciones algebraicas?

13. ¿Cómo se define la diferencia de dos fracciones algebraicas?

14. ¿Cómo se obtiene la diferencia de dos fracciones algebraicas?

INSTITUTO BARRANQUILLA

15. ¿Qué es una expresión mixta? ¿Cómo se reduce una expresión mixta a fracción algebraica?

16. ¿Cuándo se dice que una fracción algebraica es propia?
¿Qué se entiende por una fracción algebraica impropia?

17. ¿Cómo se reduce una fracción impropia a expresión mixta equivalente?

18. ¿Qué se entiende por producto de dos fracciones algebraicas?

19. ¿Cómo se obtiene el producto de dos o varias fracciones algebraicas?

20. ¿Cómo se define el cociente de dos fracciones algebraicas?

21. ¿Cómo se obtiene el cociente de dos fracciones algebraicas?

22. ¿Cómo se eleva una fracción algebraica a un exponente natural?

23. ¿Cómo se eleva una fracción algebraica a un exponente entero negativo?

24. ¿Cómo se reduce una fracción compuesta a fracción simple equivalente?

25. ¿Qué se entiende por *verdadero valor* de una fracción algebraica para un valor de su variable que anule simultáneamente al numerador y al denominador?

26. ¿Cómo se obtiene el *verdadero valor* de una fracción algebraica cuando toma la forma $\frac{0}{0}$ al dar un cierto valor a la variable?

CUESTIONARIO DE SELECCION

Selecciona la afirmación que corresponda al concepto enunciado al principio:

1. Una fracción algebraica simple es:

   a) el cociente indicado de dos expresiones enteras;

   b) el cociente indicado de dos expresiones racionales (no enteras);

   c) el cociente indicado de dos expresiones irracionales.

2. Dos fracciones equivalentes son:

   a) las que tienen idéntica forma (los mismos coeficientes y las mismas letras elevadas a los mismos exponentes);

   b) las que toman igual valor numérico para todos los valores que se atribuyen a sus letras;

   c) las que toman igual valor numérico para todos los valores que se den a sus letras, excepto para aquellos que anulan al denominador de una fracción y no al de la otra.

3. Una fracción se simplifica:

   a) suprimiendo sumandos iguales en el numerador y denominador;

   b) suprimiendo factores iguales en el numerador y denominador;

   c) multiplicando sus dos términos por una misma expresión entera.

4. Para reducir varias fracciones al mínimo denominador común:

   a) se multiplican los dos términos de cada fracción por el m.c.m. de los denominadores;

   b) se multiplican los dos términos de cada fracción por el cociente de dividir el m.c.m. de los denominadores por el numerador de la fracción;

   c) se multiplican los dos términos de cada fracción por el cociente de dividir el m.c.m. de los denominadores por el denominador de la fracción.

5. Por la forma de haber definido la suma de fracciones esta operación debe cumplir:

   a) todas las leyes formales conocidas de la suma;

   b) algunas de las leyes de la suma y otras no;

   c) ninguna de las leyes de la suma.

6. La suma de dos fracciones propias de igual denominador es:

   a) siempre una fracción propia;

   b) unas veces una fracción propia y otras una impropia;

   c) siempre una fracción impropia.

7. Cuando se reduce una expresión mixta a fracción algebraica resulta:

   a) siempre una fracción propia;

   b) siempre una fracción impropia;

   c) unas veces una fracción propia y otras una impropia.

8. El producto de una fracción por su fracción invertida es:

   a) otra fracción;

   b) la unidad;

   c) el cuadrado de la primera fracción.

9. Para elevar una fracción a un exponente entero negativo:

   a) se les resta a todos los exponentes de las letras el valor absoluto del exponente negativo;

   b) se les suma a todos los exponentes de las letras el valor absoluto del exponente negativo;

   c) se eleva la fracción invertida al valor absoluto del exponente negativo.

10. Una fracción, $\frac{A(x)}{B(x)}$, que para $x = a$ toma la forma de indeterminación $\frac{0}{0}$:

    a) siempre tiene un verdadero valor para $x = a$;

    b) siempre carece de valor para $x = a$;

    c) unas veces puede hallarse un verdadero valor para $x = a$ y otras carece de él.

CUESTIONARIO DE DISTINCION

¿Puedes distinguir las afirmaciones verdaderas de las falsas?

1. Una fracción algebraica tiene valor numérico sin excepción, cualesquiera que sean los valores que se asignen a sus letras.

2. Una fracción algebraica, y la que resulta de simplificarla, toman siempre el mismo valor numérico, cualesquiera que sean los valores que se asignen a sus letras.

3. Cuando se suprimen factores comunes en el numerador y en el denominador de una fracción se obtiene otra fracción equivalente.

4. Cuando se suprimen sumandos comunes en el numerador y denominador de una fracción algebraica se obtiene otra fracción equivalente.

5. La equivalencia de fracciones tiene las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

6. El producto de dos fracciones propias es siempre una fracción propia.

7. La suma de dos fracciones impropias es siempre una fracción impropia.

8. Cuando los dos términos de una fracción se dividen por su m.c.d. se obtiene otra fracción equivalente irreducible.

9. El fundamento de la reducción a común denominador reside en la propiedad fundamental de las fracciones.

10. Para multiplicar dos fracciones hay que reducirlas a denominador común.

11. El producto de dos fracciones tiene siempre el numerador y el denominador de mayor grado que los numeradores y denominadores respectivamente de los factores.

12. Si llamamos grado de una fracción algebraica simple a la diferencia entre el grado del numerador y el del denominador (este grado puede ser positivo o negativo), el grado de una fracción propia es positivo.

13. Si nos interesa cambiar el signo del denominador de una fracción, para que sea común con el de otras, debemos cambiar también el signo de su numerador para que la fracción se conserve equivalente.

14. Toda potencia de exponente negativo de una fracción se convierte en potencia de exponente positivo invirtiendo la fracción.

15. Una fracción compuesta se puede reducir siempre a fracción simple equivalente dividiendo la fracción que resulta en el numerador por la que resulta en el denominador.

16. Si el numerador y el denominador de la fracción $\frac{A(x)}{B(x)}$ se anulan para $x = a$, ambos son divisibles por $x-a$ y la fracción se puede simplificar dividiendo sus dos términos por $x-a$.

17. Si una fracción $\frac{A(x)}{B(x)}$ toma la forma $\frac{0}{0}$ para $x = a$, siempre existe un verdadero valor de la fracción para $x = a$.

CUESTIONARIO DE COMPLETACION

1. El mínimo denominador común de $\frac{1}{ab}$, $\frac{1}{bc}$ y $\frac{1}{ac}$ es.....

2. La fracción irreducible equivalente a $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$ es.....

3. El cociente de las fracciones $\frac{a^2-2ab+b^2}{a+b}$ y $\frac{a-b}{a^2-b^2}$ es.....

4. El verdadero valor de $\frac{x^3-4x^2+3x-1}{x^2-1}$ para $x=1$ es.....

5. El cubo de $\frac{-2a^3bc}{3xy^2z^3}$ es.....

6. La diferencia de $\frac{a+b}{a-b}$ y $\frac{a-b}{a+b}$ es.....

7. La fracción producto de $\frac{2x^3b}{c^2x} \cdot \frac{3a^2b^3}{2a^2b^4} \cdot \frac{x^2y}{y^2xa}$, en forma irreducible, es.....

8. Para transformar una fracción en otra equivalente irreducible se dividen sus dos términos por...

PROBLEMAS SOBRE EL CAPITULO 5

Simplificar las siguientes fracciones:

1. $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$

2. $\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$

3. $\frac{m^4-n^4}{m^2+n^2}$

4. $\frac{a^6-b^6}{a^4-b^4}$

5. $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$

6. $\frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{a^4-b^4}$

7. $\frac{x+x^2}{y+xy}$

8. $\frac{ax+x^2}{ab^2+b^2x}$

9. $\frac{x^3+y^3}{(x-y)^2+xy}$

10. $\frac{a^2+2ab+b^2}{na+nb}$

11. $\frac{x^2+y^2+2xy-z^2}{x^2+z^2+2xz-y^2}$

12. $\frac{a^3+b^3+3ab(a+b)}{(a+b)^2 \cdot c}$

Transformar las siguientes expresiones mixtas en fracciones equivalentes:

13. $1+\frac{x-y}{x+y}$

14. $a+b-\frac{a^2-b^2}{a+2b}$

15. $1+a+a^2+\frac{a^3}{1-a}$

16. $1-x+x^2-\frac{x^3}{1+x}$

17. $3x-\frac{3x^2-9xy}{x+y}$

Efectuar las siguientes adiciones y sustracciones de fracciones:

18. $\frac{5m}{3a}+\frac{2m}{6a}-\frac{4m}{12a}$

19. $\frac{x+y}{3}-\frac{x-y}{4}$

20. $\frac{2m}{a-x}+\frac{2n}{a-x}$

21. $\frac{1+ax}{1-ax}-\frac{1-ax}{1+ax}$

22. $\frac{5a}{a-b}+\frac{2b}{a+b}-\frac{3c}{a^2-b^2}$

23. $\frac{x}{x-y}+\frac{x}{x+y}+\frac{2x^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{x^4-y^4}$

24. $\frac{a}{2x-3}-\frac{a}{2x+3}-\frac{2x+15}{4x^2-9}$

25. $\frac{x-y}{y}+\frac{2x}{x-y}-\frac{x^3+x^2y}{x^2y-y^3}$

Efectuar los siguientes productos y cocientes de fracciones:

26. $\left(b+\frac{a^2}{b}\right)\cdot\left(a-\frac{b^2}{a}\right)$

27. $\frac{mx}{m-x}\cdot\frac{y-x}{m(m+x)}\cdot\frac{m^2-x^2}{y^2-x^2}\cdot\left(1+\frac{x}{y}\right)$

28. $\frac{xy+2y^2}{6x^3}\div\frac{7x+14y}{10x^2}$

29. $\frac{a^2-4b^2}{a^2+4b^2}\div\frac{a+2b}{a-2b}$

30. $\left(\frac{2m}{m+n}\right)^2\div\frac{m^2n^2}{m+n}$

31. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}\right)\div\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}\right)$

32. $\left(a+\frac{b^2}{a}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$

33. $\frac{2x}{2y-z}\cdot\left(\frac{y+z}{3}-\frac{z}{2}\right)$

34. $\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\div\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

35. $\left(a+\frac{a}{a-1}\right)\div\left(a-\frac{a}{a-1}\right)$

Realizar las operaciones que se indican con fracciones compuestas, reduciéndolas a simples previamente:

36. $\frac{\left(1-\frac{m}{m+1}\right)^2}{1+\frac{m}{m+1}}\cdot\frac{\frac{2}{m}+\frac{1}{m^2}}{1-\frac{1}{m}}$

37. $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}\div\frac{1}{(a-b)^2}$

38. $\frac{1-\frac{b^2+c^2}{2bc}}{1+\frac{b^2+c^2}{2bc}}\cdot\left(1+\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\frac{2}{b}}\right)$

39. $\frac{\frac{a-b}{a+b}-\frac{a+b}{a-b}}{1-\frac{a^2-ab-b^2}{a^2-b^2}}$

40. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{\frac{y}{x}\div\frac{x}{y}}{\frac{y}{x}+\frac{x}{y}}$

41. $\frac{\frac{a^2+b^2}{2ab}-1}{\frac{(a^2-b^2)^2}{4a^2b^2}}\cdot\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}+1\right)$

42. $\frac{1+\frac{a+b}{a}}{\frac{1}{a-b}+\frac{a}{a^2-b^2}}$

43. $\dfrac{1-\dfrac{1}{1-x}}{\dfrac{x^2}{x^2-1}-\dfrac{x}{x+1}}$

44. $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y+z}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}} \div \dfrac{\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x+z}}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}}$

45. $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}\cdot\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\dfrac{a^2+b^2}{a-b}\cdot\dfrac{a-b}{a^2-b^2}}\cdot\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$

Hallar el verdadero valor de las siguientes fracciones para los valores que se indican:

46. $\dfrac{2x^3+9x^2+7x-6}{x^3+x^2-5x+3}$ para $x=-3$

47. $\dfrac{x^2-(a-1)x-a}{a^2-(a-2)x-2a}$ para $x=a$.

48. $\dfrac{2x^2+3x-2}{4x^3+16x^2-19x+5}$ para $x=\frac{1}{2}$

49. $\dfrac{x^2-2x-3}{x^3-5x^2+3x+9}$ para $x=3$.

50. $\dfrac{am+bm-2an-2bn}{am+m-2am-2n}$ para $m=2n$.

Unidad 6

La ecuación cúbica propuesta a Tartaglia:

$$X^3 + 3X^2 = 5$$

y $X^3 + 6X^2 + 8X = 1.000$

Solución general de Tartaglia:

$$X^3 + AX^2 = C$$

Con el perfeccionamiento de la imprenta, los Elementos de Euclides

NICOLAS TARTAGLIA, EJEMPLO DE SUPERACION.-

impresos en 1482 se popularizaron en Europa. El desarrollo de la navegación por el intenso comercio del Mediterráneo hizo que en Italia se concentraran los estudios matemáticos. La astronomía se desarrolló notablemente y con ella los cálculos trigonométricos.

La "ecuación de tercer grado" apasionó a los matemáticos. Un sabio "tartamudo" y autodidacta, Nicolás Tartaglia natural de Brescia (1506-1557), encontró la solución y la mantuvo en secreto que apenas compartió con Jerónimo Cardán. Cuando éste la publicó Tartaglia protestó públicamente.

En realidad ningún ser humano debe mantener en secreto un descubrimiento que interese a toda la humanidad, por lo cual la historia ha absuelto a Cardán.

Tartaglia publicó en Venecia (1556-60) en dos volúmenes un Tratado General de los números que es un libro de Algebra.

Tartaglia aplicó las matemáticas a la artillería y se anticipó de esta manera a los modernos matemáticos que han contribuido a la mejora de las armas atómicas.

Nicolás Tartaglia fue un matemático profesional que aprendió por sí mismo. Por su estudio y constancia superó sus defectos físicos para ganarse la vida enseñando matemáticas. Su capacidad fue tal que en un desafío público con Fior en el cual cada uno debía resolver 30 ecuaciones. Tartaglia las resolvió en 2 horas mientras su contrario en ese mismo tiempo no resolvió ninguna.

CONTENIDO DE LA UNIDAD

Nina R Cortés

6

6.1 CONCEPTO DE ECUACION FRACCIONARIA DE PRIMER GRADO. EJEMPLOS.

Una ecuación se llama fraccionaria cuando la incógnita figura bajo denominador.

Ejemplos

1. La ecuación $\frac{3}{2x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x-1} + \frac{5}{x^2-1}$ es una ecuación fraccionaria, pues la incógnita figura en ella bajo denominador.

2. La ecuación $\frac{2x}{5} - \frac{x}{4} = \frac{3x}{2} + \frac{1}{6}$ *no es fraccionaria* pues la incógnita no figura bajo denominador; se trata de una ecuación *entera*.

Ejercicios

1. Escribe tres ecuaciones fraccionarias, igualando en cada caso dos expresiones fraccionarias que se te ocurran.

2. Plantea el siguiente problema y clasifica la ecuación resultante, diciendo si es entera o fraccionaria: *Hallar un número tal que su inverso más 2 unidades sea igual a 5.*

En la sección siguiente aprenderás a transformar una ecuación fraccionaria en entera; cuando la ecuación entera que resulta es de primer grado puedes resolverla con los métodos explicados en el capítulo 3.

6.2 TRANSFORMACION DE UNA ECUACION FRACCIONARIA EN ECUACION ENTERA. TEOREMA FUNDAMENTAL.

Para resolver una ecuación fraccionaria hay que transformarla en ecuación entera, multiplicando los dos miembros de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores, pero entonces se plantea la siguiente cuestión: ¿Serán equivalentes la ecuación fraccionaria inicial y la ecuación entera que resulta de multiplicar sus dos miembros por el m.c.m. de los denominadores?

Esta cuestión la contesta el siguiente

TEOREMA FUNDAMENTAL: Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por una misma expresión entera se obtiene otra ecuación que tiene todas las raíces de la primera y que además puede tener otras raíces que no lo son de la primera, llamadas raíces extrañas.

Representaremos una ecuación *cualquiera* como de costumbre, con la notación $A(x) = B(x)$, (1). Representemos por $E(x)$ una *expresión entera* en x.

Si los dos miembros de (1) los multiplicamos por $E(x)$ obtenemos la ecuación $A(x) \,.\, E(x) = B(x) \,.\, E(x)$, (2)

a) Sea a una raíz de (1); se cumplirá: $A(a) = B(a)$, (3)
La igualdad (3) es una *igualdad numérica,* y si multiplicamos sus dos miembros por el número $E(a)$, obtenemos otra igualdad numérica, por la *ley uniforme* de la multiplicación, válida en todo el campo numérico real; esta igualdad es:

$$A(a) \,.\, E(a) = B(a) \,.\, E(a), \quad (4)$$

La igualdad (4) nos indica que a es raíz de la ecuación (2); por tanto, si un número es raíz de $A(x) = B(x)$, también lo es de $A(x) \,.\, E(x) = B(x) \,.\, E(x)$.

b) Supongamos ahora que a es raíz de (2); entonces se cumplirá: $A(a) \,.\, E(a) = B(a) \,.\, E(a)$, y puede ocurrir que $E(a) = 0$, siendo $A(a) \neq B(a)$, en cuyo caso a verifica a la ecuación (2), pero no a la (1).

Resumen: Cuando los dos miembros de una ecuación se multiplican por una misma expresión entera se obtiene otra ecuación que puede no ser equivalente a la de partida; pero la ecuación nueva contiene todas las soluciones de la antigua, o sea, con esta transformación (multiplicando los dos miembros de una ecuación por una expresión entera) *no se pierden raíces.* En la práctica, una vez encontradas las raíces de la ecuación $A(x) \,.\, E(x) = B(x) \,.\, E(x)$, se sustituyen en la primera, y si alguna no la verificara, se desecha como una de las raíces extrañas introducidas por la multiplicación de la ecuación por $E(x)$.

Insistimos en que una raíz a, será únicamente extraña, en el caso de que $E(a) = 0$ y $A(a) \neq B(a)$.

Ejemplos

1. Si en la ecuación $x=3$, cuya solución evidente es 3, multiplicamos sus dos miembros por $(x-2)$, obtenemos la ecuación $x(x-2)=3(x-2)$, que admite la raíz $x=2$ que no lo es de la ecuación de partida. En este caso la raíz 2 es una raíz extraña a la ecuación primera.

2. Si en la ecuación $1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ multiplicamos los dos miembros por x, obtenemos $x-1=1$, cuya raíz es $x=2$, que también verifica a la primera; por tanto, en este ejemplo, no se han introducido raíces extrañas.

3. Resolvamos el problema enunciado en el ejercicio 2, de la sección anterior. Si representamos el número pedido por x deberá cumplir la siguiente ecuación: $\frac{1}{x} + 2 = 5$, (1)

Multiplicando los dos miembros por x se obtiene la ecuación $1+2x=5x$, o sea, $1=5x-2x=3x$, de donde $x=\frac{1}{3}$.

Comprobación: El inverso de $\frac{1}{3}$ es 3, más 2 unidades, igual a 5 efectivamente.

Ejercicios

1. Explicar si la ecuación que se obtiene al multiplicar los dos miembros de $x+3=2x-1$ por $(x-1)$ es equivalente a ella.

2. Multiplicar los dos miembros de la ecuación

$$\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{1}{x^2-1} \text{ por } x^2-1$$

Comprobar si la raíz de la ecuación que se obtiene verifica a la ecuación dada. En caso afirmativo se dice que la multiplicación por x^2-1 no introduce raíces extrañas en la ecuación.

* * *

La aplicación del *Teorema Fundamental* permite transformar una ecuación fraccionaria en ecuación entera, multiplicando sus dos miembros por el m.c.m. de los denominadores, pero insistimos en que una vez resuelta la ecuación entera se comprueban sus raíces en la ecuación de partida, y si en algún caso se obtiene una raíz que no la verifique, se prescinde de ella, como una raíz extraña.

6.3 EJEMPLOS DE ECUACIONES FRACCIONARIAS

En esta sección resolvemos algunos ejemplos de ecuaciones fraccionarias, que te servirán de modelo para que resuelvas por tu cuenta los ejercicios que se propondrán después.

Ejemplos

1. *Resolver la ecuación:* $\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{3}{x-2}=1+\dfrac{4}{x+2}$

El m.c.m. de los denominadores es $x^2-4=(x+2)(x-2)$. Multiplicando los dos miembros por x^2-4 queda:

$$x^2-3(x+2)=x^2-4+4\,.\,(x-2)$$

Nino D'Costa

Suprimiendo el término x^2 de los dos miembros y operando queda:

$$-3x-6=-4+4x-8$$

Pasando los términos en x al primer miembro y los números al segundo, queda: $-3x-4x=6-4-8$, o sea: $-7x=-6$, de donde

$$x=\frac{-6}{-7}=\frac{6}{7}$$

Como $\frac{6}{7}$ no anula a x^2-4, no puede ser raíz extraña, pues las raíces extrañas se encuentran entre los valores que anulan a la expresión entera por la que se multiplica la ecuación, y que no den valores iguales a los dos miembros de la ecuación de partida.

Comprobemos que efectivamente $x=\frac{6}{7}$ es raíz de la ecuación de partida; su primer miembro toma el valor

$$\frac{\frac{36}{49}}{\frac{36}{49}-4}-\frac{3}{\frac{6}{7}-2}=\frac{12}{5}$$

y el segundo miembro toma el valor

$$1+\frac{4}{\frac{6}{7}+2}=1+\frac{28}{6+14}=1+\frac{28}{20}=1+\frac{14}{10}=1+\frac{7}{5}=\frac{12}{5}$$

Se ve que los dos miembros de la ecuación toman el mismo valor para $x=\frac{6}{7}$

2. *Resolver la ecuación:*

$$\frac{\frac{1}{3}(x+\frac{1}{4})}{x+\frac{1}{5}}+\frac{\frac{1}{6}(x+\frac{1}{5})}{x+\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6} \quad (1)$$

Multipliquemos el numerador y el denominador de cada fracción por 60; así nos queda:

$$\frac{20x+5}{60x+12}+\frac{10x+2}{60x+15}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \quad (2)$$

Ejemplos

Ejemplos

Multipliquemos ahora los dos miembros por $(60x+12).(60x+15)$, nos queda:

$$(60x+15)(20x+5)+(10x+2)(60x+12)=(30x+6)(60x+15)$$

Efectuando los productos indicados y reduciendo términos semejantes,

$$1{,}800x^2+840x+99=1{,}800x^2+810x+90$$

Suprimiendo el término $1{,}800x^2$, que figura en los dos miembros, pasando los términos en x al primer miembro y los números al segundo, queda:

$840x-810x=90-99$, o sea: $30x=-9$, de donde

$$x=\frac{-9}{30}=\frac{-3}{10}$$

Comprueba que esta solución verifica a la ecuación (2), que es equivalente a la de partida.

3. *Resolver la ecuación:* $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x+a}=\dfrac{1}{x^2-a^2}$

Multiplicando los dos miembros por el m.c.m. de los denominadores, que es $x^2-a^2=(x-a).(x+a)$, se obtiene: $x+a+x-a=1$, o sea: $2x=1$, de donde $\mathbf{x}=\frac{1}{2}$.

La solución $x=\frac{1}{2}$ no puede ser extraña porque no anula al m.c.m., x^2-a^2, por el que se ha multiplicado la ecuación.

4. Resolver la ecuación: $\dfrac{3x-1}{x^2}-\dfrac{2}{x}-1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x^2}$

El m.c.m. de los denominadores es $2x^2$; multiplicando toda la ecuación por $2x^2$ se obtiene:

$$6x-2-4x-2x^2=x^2-2$$

Pasando todos los términos al primer miembro y reduciendo términos semejantes: $-3x^2+2x=0$, y factorizando el primer miembro: $x(-3x+2)=0$. Para que se anule el producto del primer miembro debe anularse uno de sus factores, o sea, que $x=0$, o que $-3x+2=0$, de donde $\mathbf{x}=\frac{2}{3}$.

Ejemplos

De estas dos raíces, la $x=0$ no verifica a la ecuación de partida, pues aparecen denominadores nulos, y por tanto los miembros de la ecuación carecen de valor para $x=0$; por tanto $x=0$ es una raíz extraña, que no debe tenerse en cuenta; en cambio, la raíz $x=\frac{2}{3}$ sí verifica a la ecuación de partida, como debes comprobar tú mismo.

Respuesta: La ecuación propuesta tiene por raíz $x=\frac{2}{3}$.

Ejercicios

Resolver las siguientes ecuaciones fraccionarias, verificando en cada caso las soluciones en las ecuaciones de partida:

1. $\dfrac{3}{x}+2=1+\dfrac{3}{2}$
2. $\dfrac{3}{x-2}+5=4+\dfrac{1}{3}$
3. $\dfrac{3}{3x+2}=\dfrac{4}{x-1}$
4. $\dfrac{4x-3}{3x-1}=\dfrac{3}{2}$
5. $\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{5}{x-2}=\dfrac{3}{2}$
6. $\dfrac{3}{4x-2}+\dfrac{5}{4x-2}=\dfrac{1}{4}$
7. $\dfrac{3x-2}{2x+1}=\dfrac{6x+3}{4x-2}$
8. $\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{x-3}{x+3}$
9. $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{2}{x^2-4}$
10. $\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{x+3}{x-4}$

Ejercicios

11. $5 + \frac{2}{3x} + \frac{1}{6x} = \frac{5}{12x}$

12. $\frac{2}{x} - \frac{3}{x-2} = \frac{5}{x^2-2x}$

13. $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{c}{x}$

14. $\frac{x-a}{x+b} = \frac{x-c}{x+d}$

15. $\frac{2}{x-a} + \frac{3}{x-b} = 0$

16. $\frac{\frac{1}{3}(5x+1) + \frac{1}{4}}{3 + \frac{5}{6}x} = 3 - \frac{1}{4}$

17. $\frac{(2.4x-0.6)\,.\,0.5}{\frac{1}{3}(x+0.3)} = 1.5$

18. $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{5}{x^2-4}$

19. $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{4}{x-1}$

20. $\frac{2x+4}{2x-4} = \frac{4x-1}{4x+1}$

21. $\frac{a+b}{x+3} = \frac{a-b}{x-3}$

22. $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax+c}{cx+b}$

23. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{1+x}{x(x-1)}$

24. $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} = \frac{3}{x(x+1)}$

25. $\frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} = 0$

26. $a - \frac{b+c}{x} = d - \frac{b-c}{x}$

Ejercicios

27. $\frac{1+ax}{1-ax} = \frac{3+a^2x^2}{1-a^2x^2}$

28. $\frac{a}{x} + \frac{b}{2x} + \frac{c}{3x} = d$

29. $\frac{a}{b-x} = \frac{b}{a-x}$

30. $\frac{a}{x-a} - \frac{b}{x-b} = \frac{a-b}{x+a-b}$

6.4 APLICACION DE LAS ECUACIONES FRACCIONARIAS A LA RESOLUCION DE PROBLEMAS.

Existen muchos problemas que al ser planteados algebraicamente dan lugar a una ecuación fraccionaria respecto de la incógnita del problema; en estos casos, una vez planteada la ecuación del problema, se le aplican los métodos de la sección anterior para resolverla y después se comprueba si las soluciones encontradas pertenecen al campo de realidad del problema.

A continuación damos unos ejemplos que aclararán estas ideas y proponemos algunos problemas que debes resolver comprobando en cada caso dos cuestiones:

1ª) ¿Verifican las soluciones encontradas a la ecuación del problema?, y

2ª) ¿Están de acuerdo las soluciones encontradas con la naturaleza real del problema?

Ejemplos

1. *Descomponer el número 100 en dos partes cuya razón sea $\frac{2}{3}$.*

a) *Planteo de la ecuación:* Llamemos x a la primera parte, la segunda será $100-x$, y la razón de las dos partes, o sea, $\frac{x}{100-x}$ debe ser igual a $\frac{2}{3}$, y por tanto se llega a la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{100-x} = \frac{2}{3}, \quad (1)$$

Ejemplos

b) *Resolución de la ecuación:* se quitan denominadores multiplicando los dos miembros de la ecuación por $3 \cdot (100-x)$, obteniendo:

$$3x=200-2x, \quad 5x=200, \quad x=\frac{200}{5}=40.$$

c) *Verificación:* Sustituyendo $x=40$ en la ecuación del problema, (1), el primer miembro vale $\frac{40}{100-40}=\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$, que es efectivamente el valor del segundo miembro.

d) La solución está de acuerdo además con el sentido real del problema, pues las partes son números cuyas relaciones están todas contenidas en la ecuación.

2. ¿Qué número hay que sumar a los números, 1, 4, 10 y 22 para que ellos formen proporción?

a) *Planteo de la ecuación:* Sea x el número que hay que agregar; se cumplirá la siguiente ecuación:

$$\frac{1+x}{4+x}=\frac{10+x}{22+x}, \quad (1)$$

b) *Resolución de la ecuación:* Multiplicando los dos miembros por $(4+x) \cdot (22+x)$ se obtiene: $(1+x) \cdot (22+x)=(4+x) \cdot (10+x)$.

Efectuando los productos indicados:

$$22+x+22x+x^2=40+4x+10x+x^2.$$

Suprimiendo el término x^2, común a los dos miembros, pasando las x al primer miembro y los números al segundo, queda:

$$x+22x-4x-10x=40-22=18, \text{ o sea:}$$

$$9x=18, \text{ de donde } x=\frac{18}{9}=2.$$

c) *Verificación:* Sustituyendo $x=2$ en (1), queda: $\frac{3}{6}=\frac{12}{24}$, que efectivamente es cierta.

d) La solución satisface a los requisitos reales del enunciado.

3. La edad de un muchacho es de 10 años y la de su padre de 30 años. ¿Dentro de cuántos años la edad del hijo será $\frac{1}{5}$ de la del padre?

a) *Planteo de la ecuación:* Llamemos x al número de años que tienen que transcurrir para que la edad del hijo sea $\frac{1}{5}$ la del padre; en esa época el muchacho tendrá $10+x$ años y su padre $30+x$ años; además, la razón de estas edades debe ser $\frac{1}{5}$, o sea, que $\frac{10+x}{30+x}=\frac{1}{5}$, (1), que es la ecuación del problema.

b) *Resolución de la ecuación:* Quitando denominadores queda: $50+5x=30+x$, o sea:

$$5x-x=30-50=-20, \quad 4x=-20, \quad x=-\frac{20}{4}=-5.$$

c) *Verificación de la solución:* Sustituyendo $x=-5$ en la ecuación del problema, (1), obtenemos:

$$\frac{10-5}{30-5}=\frac{5}{25} \text{ que es igual al segundo miembro } (\tfrac{1}{5}).$$

d) La solución no está de acuerdo con las condiciones reales del problema, pues la solución negativa -5 nos indica que *nunca en el futuro* la edad del hijo estará en la razón $\frac{1}{5}$ con la del padre; *esto ya ocurrió hace 5 años,* en efecto: hace 5 años el muchacho tenía $10-5=5$ años y el padre $30-5=25$ años, y $\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$.

Conclusión: La ecuación del problema tiene solución, pero no el problema, lo que se interpreta como que las condiciones exigidas en el problema son imposibles de cumplir en la realidad.

4. Un grifo llena un depósito en 4 horas y otro en 5 horas. ¿En cuántas horas se llenaría el depósito corriendo los dos grifos?

a) *Planteo de la ecuación del problema:*

Sea x el número de horas necesarias para llenar el depósito los dos grifos juntos; la fracción de depósito llenada por los dos grifos en una hora será $\frac{1}{x}$, *que debe ser igual* a la suma de las fracciones de depósito llenadas por cada grifo en 1 hora; pero en 1 hora el primer grifo arroja $\frac{1}{4}$ del depósito, y el segundo $\frac{1}{5}$, teniéndose por tanto: $\frac{1}{x}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$, (1), que es la ecuación del problema.

Ejemplos

Ejemplos

b) *Resolución de la ecuación:* Multiplicando los dos miembros de la ecuación por $20x$ para quitar denominadores se obtiene:

$$20 = 5x + 4x = 9x, \quad \text{de donde} \quad x = \frac{20}{9} = 2 + \frac{2}{9}$$

c) *Verificación:* Sustituyendo $x = \frac{20}{9}$ en (1) queda: $\frac{9}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5}{20} +$

$+ \frac{4}{20} = \frac{9}{20}$ que efectivamente es cierta.

d) La solución está de acuerdo con la realidad del problema; el tiempo invertido por los dos grifos juntos en llenar el depósito es menor que cada tiempo invertido por un grifo solo; la respuesta del problema es por tanto: $2 + \frac{2}{9}$ horas.

Ejercicios

Resolver los siguientes problemas, cumpliendo las cuatro etapas desarrolladas en los ejemplos:

1. ¿Qué número hay que sumar a los dos términos de la fracción $\frac{7}{13}$ para que se obtenga una fracción equivalente a $\frac{2}{3}$?

2. Un grifo demora 3 horas y media más que otro en llenar un depósito. Juntos demoran 4 horas en llenar el depósito. ¿Cuánto demorará cada grifo en llenar el depósito solo?

3. Un depósito se llena en 4 horas por un grifo y en 6 horas por otro, y se vacia por un tercero en 3 horas. ¿Cuántas horas tarda en llenarse el depósito si están abiertos los tres grifos?

4. Un tren parte de una estación para hacer un recorrido de 600 Km. que lo efectúa en 12 horas. ¿Qué velocidad debe llevar un segundo tren que parte de la misma estación y en la misma dirección, 2 horas después, para que lo encuentre a los 400 Km. de la estación de partida?
(Ayuda: Obténgase la velocidad del primer tren dividiendo 600 por 12, después tomando como incógnita la velocidad del segundo, exprésese que el tiempo invertido por el primero, *espacio partido velocidad*, en recorrer 400 Km. es igual al invertido por el segundo más dos horas en recorrer el mismo espacio).

5. El perímetro de un rectángulo mide 62 metros, y si se aumentan sus dimensiones en 2 m., la razón de su base a su altura es de $\frac{4}{3}$. ¿Cuánto miden la base y la altura del rectángulo?

REVISION DE CONCEPTOS DEL CAPITULO 6

1. ¿Cuándo se dice que una ecuación es fraccionaria?
2. ¿Basta con que haya denominadores numéricos en una ecuación para considerarla como una ecuación fraccionaria?
3. Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por una expresión entera, ¿resulta siempre otra ecuación equivalente a la de partida?
4. Enuncia y demuestra el teorema fundamental de la multiplicación de los dos miembros de una ecuación por una expresión entera.
5. ¿Qué condiciones debe cumplir una raíz de $A(x) . E(x) = B(x) . E(x)$ para no ser raíz de $A(x) = B(x)$?
6. ¿Cómo se desechan en la práctica las raíces extrañas que pudieran introducirse al quitar denominadores en una ecuación fraccionaria?
7. Explica las etapas que hay que recorrer para resolver una ecuación fraccionaria.
8. Si una raíz de $A(x) . E(x) = B(x) . E(x)$ anula algún denominador de $A(x) = B(x)$, ¿será dicha raíz solución de esta última ecuación?

CUESTIONARIO DE SELECCION

Seleccionar la afirmación que corresponda al concepto enunciado al principio:

1. Una ecuación fraccionaria es:
   a) la que tiene denominadores numéricos;
   b) aquella en que la incógnita figura bajo algún denominador;
   c) la que tiene todos sus términos fraccionarios.

2. Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por una expresión entera, la ecuación resultante cumple que:

   a) siempre es equivalente a la ecuación de partida;

   b) siempre tiene más raíces distintas que la ecuación de partida;

   c) en unos casos tiene las mismas raíces que la ecuación de partida y en otros casos puede tener más raíces.

3. Las raíces extrañas que pueden introducirse en la ecuación $A(x) = B(x)$, al multiplicar sus dos miembros por la expresión entera $E(x)$ son:

   a) todas las raíces de $E(x) = 0$;

   b) las raíces de $E(x) = 0$ que no verifican a $A(x) = B(x)$;

   c) las raíces de $E(x) = 0$ que verifican a $A(x) = B(x)$.

CUESTIONARIO DE DISTINCION

¿Puedes distinguir las afirmaciones verdaderas de las falsas?

1. Si los dos miembros de una ecuación fraccionaria se multiplican por el m.c.m. de sus denominadores se obtiene una ecuación entera.

2. La ecuación que resulta de multiplicar los dos miembros de una ecuación por una misma expresión entera puede tener menos raíces que la ecuación de partida.

3. La ecuación que resulta al multiplicar los dos miembros de una ecuación por una expresión entera tiene todas las raíces que la ecuación de partida.

4. Cuando se multiplican los dos miembros de una ecuación por una expresión entera se obtiene *siempre* otra ecuación equivalente a la de partida.

5. Si de la ecuación $A(x) = B(x)$ se pasa a la ecuación $A(x) . E(x) = B(x) . E(x)$, el número a será una *"raíz extraña"* de la primera ecuación si $E(a) = 0$, y $A(a) \neq B(a)$.

CUESTIONARIO DE COMPLETACION

1. Para transformar la ecuación fraccionaria $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{5}{x^2-1}$ en ecuación entera hay que multiplicar sus dos miembros por . . .

2. Al quitar denominadores en la ecuación $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}=3-\frac{4}{x}$ se obtiene una ecuación de . . . grado.

3. La solución de $\frac{3}{x}+\frac{2}{x+1}=\frac{5}{x+1}-\frac{2}{x}$ es?

4. Al quitar denominadores en la ecuación $\frac{3}{x^2-4}+\frac{1}{x-2}=\frac{2}{x+2}$ las raíces que pueden ser extrañas son. . . y . . . (Ayuda: Las que anulan a $E(x)$, en este caso x^2-4).

PROBLEMAS SOBRE EL CAPITULO 6

1. Los catetos de un triángulo rectángulo suman 12 metros y si a ambos se le suman 5 m. resulta otro triángulo semejante al primero. ¿Cuánto mide cada cateto? ¿De qué clase es el triángulo?

2. Dos mujeres terminan una labor juntas en 6 horas, y si la hacen por separado una demora 1 hora más que la otra. ¿Cuánto demora cada mujer sola en hacer la labor?

3. Dos obreros trabajan en una fábrica; el primero gana por día lo que gana el segundo más $\frac{1}{5}$. El primero ha trabajado 5 días más que el segundo y ha recibido \$ 300 y el segundo ha recibido \$ 180. ¿Cuántos días ha trabajado cada obrero?

   (Ayuda: Si llamamos x a los días que ha trabajado el segundo, su sueldo será $\frac{180}{x}$; el primero habrá trabajado $x+5$ días y su sueldo será $\frac{300}{x+5}$; la diferencia de sueldos *es igual* a $\frac{180}{3x}$, por tanto:

   $$\frac{300}{x+5}-\frac{180}{x}=\frac{180}{3x})$$

4. Dos estaciones, A y B, están separadas 500 Km. Un tren que parte de A demora 10 horas en hacer el trayecto completo. ¿Qué velocidad debe llevar un segundo tren que sale de B hacia A, una hora después que el primero, para que se crucen en un punto entre A y B distante 330 Km. de A?

   (Aproximar la velocidad de B hasta los metros).

5. Se emplearon 12 obreros para ejecutar una obra, y al cabo de 8 días hicieron la quinta parte. ¿Cuántos obreros hubo que aumentar para terminar la obra en 6 días más? (Respuesta: 52 obreros).

6. Un barco que presta servicio de navegación a lo largo de un río recorrió una distancia de 600 Km. a favor de la corriente. La velocidad de la corriente del río es de 15 Km/h.

El mismo barco, conservando la misma velocidad propia, hizo un recorrido de 320 en contra de la corriente en el mismo tiempo. ¿Cuál es la velocidad propia del barco?

7. Una piscina se encuentra llena de agua y se abre un grifo que la llena en 20 horas y un desagüe que la vacia en 4 horas. ¿Dentro de cuántas horas quedará desocupada la piscina?

8. Un automóvil recorre 150 Km. por carretera pavimentada en el mismo tiempo que recorre 120 Km. por mal camino. Se sabe que la diferencia de velocidad del automóvil según que ruede por carretera pavimentada o por mal camino es de 20 Km/h. ¿Cuál es la velocidad que lleva el automóvil en cada clase de camino?

9. Los dos términos de una fracción difieren en 4 unidades, y si a ambos se les suman 6 unidades queda una fracción equivalente a $\frac{2}{3}$. ¿Cuál es la primera fracción?

10. El inverso de un número es igual al doble del inverso del número que resulta de sumar una unidad al primero. ¿Cuál es este número?

Unidad 7

Entre sus descubrimientos algebraicos, Cardán logró reducir la ecuación general al tipo $\chi^3 + b\chi = C$, estudió las ecuaciones irreductibles, las raíces de la ecuación de tercer grado e inició la teoría de las funciones simétricas.

La solución de las ecuaciones de tercer grado o cúbicas fue discutida por las gentes de su tiempo en ardientes polémicas. Cardán fue tratado de perjuro porque Tartaglia le había confiado sus descubrimientos.

Jerónimo Cardán fue un hombre de viceversas. Filósofo, astrólogo,

JERONIMO CARDAN, VERSATIL ALGEBRISTA.-

médico, unas veces enseñaba en la Universidad de Bolonia y otras veces le encerraban en un manicomio.

Su mayor mérito fue la originalidad en la investigación matemática y la publicación en Latín del Ars Magna, libro dedicado exclusivamente al Algebra.

Sin embargo, la solución de la ecuación cúbica se llama "solución cardánica". Con base en los estudios de Cardán, Ludovico Ferrari su discípulo y protegido cuyos trabajos cita en el Ars Magna y Rafael Bombelli (1530-1560) ampliaron sus investigaciones. Este último escribió un *Texto de Algebra* y enseñó la solución de la ecuación bicuadrática es decir aquella en que la incógnita aparece con la cuarta potencia.

Escribió 22 libros sobre diferentes temas científicos y astrológicos a la cual era muy aficionado como la mayoría de las gentes de esas épocas.

Cardán mezcló a su poderosa capacidad científica una desconcertante devoción por la magia y la astrología. Según el horóscopo que él mismo se hizo calculó su muerte y como no se efectuara en el día y hora que había previsto, desilusionado se dejó morir de hambre.

Jerónimo Cardán es considerado como el Precursor del Algebra Moderna.

Entre sus descubrimientos algebraicos, Cardán logró reducir la ecuación general al tipo $X^3 + bX = C$, estudió las ecuaciones irreductibles, las raíces de la ecuación de tercer grado e inició la teoría de las funciones simétricas.

La solución de las ecuaciones de tercer grado o cúbicas fue discutida por las gentes de su tiempo en ardientes polémicas. Cardán fue tratado de perjuro porque Tartaglia le había confiado sus descubrimientos.

CONTENIDO DE LA UNIDAD

7 EL CALCULO CON RADICALES Y LAS POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONAL.-

7.1 - Conceptos sobre la radicación en Algebra.
7.2 - Propiedad fundamental de los radicales y aplicaciones.
7.3 - Adición y sustracción de radicales.
7.4 - Producto y cociente de radicales. Extracción de factores fuera de un radical.
I) Raíz E-NESIMA de un producto de radicales del mismo índice.
II) Raíz E-NESIMA de un cociente y cociente de radicales del mismo índice.
III) Extracción de factores de un radical.
7.5 - Elevación de un radical a una potencia.
7.6 - Raíz de raíz: aplicaciones al cálculo numérico.
7.7 - Racionalización de denominadores.
I) Denominador monomio con una raíz cuadrada.
II) Denominador monomio con una raíz E-NESIMA.
III) Denominador de la forma a $\sqrt{A} + B\sqrt{B}$:
IV) Denominador binomio de la forma $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$
V) Denominador de la forma $\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$:
7.8 - Potencias de exponente racional cualquiera: definición y reglas de cálculo.
cálculo.
I) Producto de potencias de igual base.
II) Cociente de potencias de igual exponente.
7.9 - Ecuaciones irracionales sencillas.

METODO DE RESOLUCION DE LOS TIPOS SENCILLOS DE ECUACIONES IRRACIONALES.

I) Ecuaciones que contienen un solo radical.
II) Ecuaciones con dos radicales.

7

7.1 CONCEPTOS SOBRE LA RADICACION EN ALGEBRA

Llamaremos **radical** *a un símbolo con el cual se indica una operación de radicación.*

En todo radical hay que distinguir las siguientes partes:

a) el signo de radicación, $\sqrt{}$, de todos conocido;

b) el índice, que se coloca en la abertura superior del signo $\sqrt{}$, y que cuando se trata de una raíz cuadrada no se escribe;

c) finalmente, la expresión a la cual se le está extrayendo la raíz (un número o una expresión algebraica) que recibe el nombre de *radicando* o *cantidad subradical.*

Tanto en el caso de que el radicando sea un número como en el de que sea una expresión algebraica, la raíz n-sima se define así: $\sqrt[n]{\mathbf{A}}=\mathbf{a}$, **si** $\mathbf{a}^n=\mathbf{A}$.

Sólo consideramos como índices números naturales (enteros positivos).

Cuando el radicando es positivo y el índice par, sabemos que existen dos soluciones para la raíz en el campo numérico real, que son números opuestos; por ejemplo: $\sqrt{4}=\pm 2$, , pues $(+2)^2=4$ y $(-2)^2=4$. A la solución positiva se le llama *valor aritmético* de la raíz, y para evitar ambigüedades, siempre consideramos en un radical cuyo radicando sea positivo y cuyo índice sea par, únicamente el *valor aritmético.*

Cuando el radicando es negativo y el índice par, no existe solución en el campo numérico real; por ejemplo, $\sqrt{-4}$ no tiene solución real, pues el cuadrado de todo número real, positivo o negativo, es positivo, y por tanto no hay un número real cuyo cuadrado sea -4. Teniendo en cuenta esta falta de solución, cuando se trata de radicales algebraicos (cuyo radicando es una expresión algebraica), excluimos aquellos valores de las letras que den valor negativo al radicando, siendo el índice par.

Ejemplos

1. $\sqrt{1-x^2}$ sólo está definida para valores de x tales que $|x| \leqslant 1$.

2. $\sqrt[4]{-x^2-y^2}$ no está definida para ningún valor de x ni de y, pues cualesquiera que sean x y y, reales, el radicando es negativo y el índice par.

En este capítulo estudiaremos las reglas de cálculo con radicales, excluidos los casos en que el radicando se hace negativo, siendo el índice par, y limitándonos al valor positivo de la raíz, cuando el radicando es positivo y el índice par, con lo cual el valor de cada radical queda determinado de forma única.

Para terminar esta introducción de conceptos queremos llamar la atención sobre el siguiente hecho:

Todas las propiedades y reglas de cálculo que se establecerán en este capítulo tienen su fundamento en la definición de raíz y en las reglas de cálculo con potencias.

Téngase esto presente en cada propiedad y regla de cálculo que se demuestre.

7.2 PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LOS RADICALES Y APLICACIONES

INTRODUCCION:

El cálculo con radicales tiene una analogía muy estrecha con el de

fracciones, y en dicho cálculo el exponente del radicando juega un papel análogo al numerador de la fracción, y el índice se comporta de forma similar al denominador.

Esta analogía se observa muy bien en la propiedad fundamental y en sus aplicaciones, que estudiamos en esta sección, y se fundamenta en la representación de un radical como una potencia de exponente fraccionario, que será estudiada al final de este capítulo.

Antes de enunciar la propiedad fundamental recordamos que los radicales son equivalentes (como dos expresiones algebraicas cualesquiera) cuando toman el mismo valor numérico para todos los valores que se asignen a sus letras.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL:

Si el exponente del radicando y el índice de un radical se multiplican por un mismo número natural, se obtiene otro radical equivalente al primero.

Sean m, n, p números naturales; vamos a probar que:

$$\sqrt[nm]{a^{pm}} = \sqrt[n]{a^p}; \quad (1)$$

La igualdad (1) será cierta si elevando el segundo miembro al índice del primero, o sea a nm, nos da el radicando del primer miembro (en virtud de la definición de raíz); pero sabemos que para elevar una cantidad a $n.m$ se puede elevar primero a n y el resultado elevarlo a m (por la regla de elevación de una potencia a otra potencia); por tanto podemos escribir:

$$\left[\sqrt[n]{a^p}\right]^{nm} = \left[\left(\sqrt[n]{a^p}\right)^n\right]^m = (a^p)^m = a^{p\,m},$$

que efectivamente es el radicando del primer miembro. (Al pasar del segundo al tercer miembro hemos hecho uso del hecho de que raíz e-nésima elevada a n es igual al radicando).

La igualdad (1) se puede leer en los dos sentidos: Leída de izquierda a derecha nos dice que: se pueden dividir el exponente del radicando y el índice por un mismo número, que sea divisor común, obteniendo otro radical equivalente, y en esto consiste la *simplificación.*

Regla: *Para simplificar un radical se dividen el exponente del radicando y el índice por un mismo número, (si existe un divisor común).*

Cuando el exponente del radicando y el índice son primos entre sí el radical es *irreducible.* Dividiendo el exponente del radicando y el índice de un radical por el m.c.d. de ambos se obtiene otro radical *equivalente e irreducible.*

Ejemplos

Son equivalentes todos los radicales que se dan a continuación separados por el signo igual; observa en cada caso el por qué de la equivalencia.

1. $\sqrt{ab^3} = \sqrt[6]{a^3b^9}$
2. $\sqrt[3]{x^2+y} = \sqrt[12]{(x^2+y)^4}$
3. $\sqrt[5]{a^2b^3c} = \sqrt[10]{a^4 . b^6c^2}$
4. $\sqrt[12]{a^4b^8} = \sqrt[3]{ab^2}$
5. $\sqrt[4]{(x+2y)^2} = \sqrt{x+2y}$
6. $\sqrt[8]{x^{12}y^4z^8} = \sqrt{x^3yz^2}$

Ejercicios

Simplificar los siguientes radicales:

1. $\sqrt[4]{a^2b^4x^6y^8}$
2. $\sqrt[6]{a^3b^6c^{12}x^3y^6z^{12}}$
3. $\sqrt[10]{m^{20}n^{30}p^{40}}$
4. $\sqrt[8]{p^4q^8r^{12}}$
5. $\sqrt[12]{a^6b^{12}c^{18}}$

Reducir los siguientes radicales a otros equivalentes con los índices que se indican:

6. $\sqrt[3]{a^2bx^3}$ a índice 9
7. $\sqrt{a^3bc^5}$ a índice 10
8. $\sqrt[5]{m^2n^3p^4}$ a índice 20
9. $\sqrt[3]{a^2bc^4}$ a índice 12

REDUCCION A INDICE COMUN:

Reducir varios radicales a índice común (análogamente a reducir fracciones a común denominador) *es transformarlos en otros respectivamente equivalentes y que tengan todos el mismo índice.*

Para reducir varios radicales a un índice común se multiplican el exponente del radicando y el índice de cada uno por un número conveniente, con lo cual se obtiene en cada caso un radical equivalente; el número por el que hay que multiplicar el exponente del radicando y el índice del radical lo da la siguiente

Regla: *Para reducir varios radicales a índice común se procede así:*

1º) *se halla el m.c.m. de los índices;*

2º) *se multiplican el exponente del radicando y el índice de cada radical por el cociente de dividir el m.c.m. de los índices por el propio índice.*

Así se obtienen radicales equivalentes respectivamente a los primeros y todos con un índice común que es el m.c.m. de los índices.

Ejemplos

1. Reducir a índice común los siguientes radicales:

$\sqrt[3]{a^2bc^4}$, $\sqrt[4]{ab^3c}$, $\sqrt[6]{x^2yz}$, $\sqrt[12]{m^3n^2p^5}$.

El m.c.m. de los índices es 12.
Los exponentes del radicando y el índice del primer radical se multiplican por $12 \div 3 = 4$; los del segundo por $12 \div 4 = 3$; los del tercero por –?– y los del cuarto por $12 \div 12 = 1$ (o sea, no se cambian); así se obtiene:

$\sqrt[12]{a^8b^4c^{16}}$, $\sqrt[12]{a^3b^9c^3}$, $\sqrt[12]{x^4 . y^2 . z^2}$, $\sqrt[12]{m^3n^2p^5}$

2. Reducir a índice común:

$\sqrt[4]{a^2b^3c^5}$, $\sqrt[5]{m^2n^3p^4}$, $\sqrt[10]{x^3y^4z^5}$.

Ejemplos

Procediendo como en el ejemplo anterior se obtiene: m.c.m. (4, 5, 10)=20, que será el índice común. Los radicales que se obtienen son:

$$\sqrt[20]{a^{10}b^{15}c^{25}},\quad \sqrt[20]{m^8n^{12}p^{16}},\quad \sqrt[20]{x^6y^8z^{10}}.$$

3. Reducir a índice común:

$\sqrt[5]{ab^2c^3},\quad \sqrt[3]{xy^2z^4},\quad \sqrt[4]{m^2np^3}.$ m.c.m.(5, 3, 4)=60. Los radicales que se obtienen son: $\sqrt[60]{a^{12}b^{24}c^{36}},\quad \sqrt[60]{x^{20}y^{40}z^{80}},\quad \sqrt[60]{m^{30}n^{15}p^{45}}.$

Ejercicios

Reducir a índice común los grupos de radicales siguientes:

1. $\sqrt{x^3y^4z^3},\quad \sqrt[5]{a^2b^3c^4},\quad \sqrt[10]{m^2n^3p^4}.$
2. $\sqrt[3]{u^2v^3t},\quad \sqrt[4]{2ab^2c^3},\quad \sqrt[12]{x^2y^3z^4}.$
3. $\sqrt{x^3y^5z},\quad \sqrt[3]{a^2bc^4},\quad \sqrt[5]{m^2n^3t^6},\quad \sqrt[10]{3a^2bc^3}.$
4. $\sqrt[3]{5a^2b^5c},\quad \sqrt[5]{2x^2y^3z^4},\quad \sqrt[4]{4mnp}.$

7.3 ADICION Y SUSTRACCION DE RADICALES

. Para que varios radicales se puedan sumar o restar tienen que ser *semejantes,* entendiendo por radicales semejantes los que tienen el mismo radicando y el mismo índice; por ejemplo, son semejantes los siguientes radicales:

$$3\sqrt[3]{ab},\quad -2\sqrt[3]{ab}\quad \text{y}\quad \tfrac{3}{5}\sqrt[3]{ab}.$$

Regla: *Para sumar o restar radicales semejantes se saca factor común al radical en todos los términos.*

Ejemplos

Efectuar las siguientes sumas y restas combinadas de radicales *semejantes:*

1. $5\sqrt{a^3b} - 2\sqrt{a^3b} + 4\sqrt{a^3b} = \sqrt{a^3b}\,(5-2+4) = 7\sqrt{a^3b}.$
2. $-3\sqrt[3]{x^2y^5} + \tfrac{2}{3}\sqrt[3]{x^2y^5} - 4\sqrt[3]{x^2y^5} + \tfrac{4}{3}\sqrt[3]{x^2y^5} =$
   $= \sqrt[3]{x^2y^5}\,(-3 + \tfrac{2}{3} - 4 + \tfrac{4}{3}) = -5\sqrt[3]{x^2y^5}.$
3. $\tfrac{2}{5}\sqrt[4]{m^3n^2p} + 2\sqrt[4]{m^3n^2p} + \tfrac{3}{5}\sqrt[4]{m^3n^2p} = \sqrt[4]{m^3n^2p}\cdot(\tfrac{2}{5} + 2 + \tfrac{3}{5}) =$
   $= 3\sqrt[4]{m^3n^2p}.$

Ejercicios

Efectuar las siguientes sumas y restas combinadas de radicales semejantes:

1. $\sqrt{a-b} - 5\sqrt{a-b} + 2\sqrt{a-b} - \tfrac{2}{3}\sqrt{a-b} + 3\sqrt{a-b} - \tfrac{1}{3}\sqrt{a-b}$
2. $3\sqrt[3]{x^2yz^4} - \tfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^2yz^4} - 2\sqrt[3]{x^2yz^4} - \tfrac{5}{4}\sqrt[3]{x^2yz^4} + 6\sqrt[3]{x^2yz^4}$
3. $-2\sqrt[5]{p^2q^3} + 7\sqrt[5]{p^2q^3} + \tfrac{5}{2}\sqrt[5]{p^2q^3} - 3\sqrt[5]{p^2q^3} - \tfrac{3}{2}\sqrt[5]{p^2q^3}$
4. $-\tfrac{3}{4}\sqrt[4]{a^2-b^2} + 3\sqrt[4]{a^2-b^2} - 2\sqrt[4]{a^2-b^2} + \tfrac{7}{4}\sqrt[4]{a^2-b^2}$

7.4 PRODUCTO Y COCIENTE DE RADICALES. EXTRACCION DE FACTORES FUERA DE UN RADICAL.

Para poder multiplicar o dividir radicales tienen que tener el mismo índice; por esto, cuando hay que multiplicar o dividir radicales que no tienen el mismo índice se reducen previamente a índice común.

I) *RAIZ N-SIMA DE UN PRODUCTO Y PRODUCTO DE RADICALES DEL MISMO INDICE:*

La raíz n-sima de un producto es igual al producto de las raíces n-simas de los factores.

En símbolos: $\sqrt[n]{A.B.C.} = \sqrt[n]{A}.\ \sqrt[n]{B}.\ \sqrt[n]{C},$ (1), donde *A, B* y *C* representan números o expresiones algebraicas.

Demostración: El segundo miembro será la verdadera raíz n-sima del primero si elevado al índice *n* nos da el radicando; pero en efecto:

$(\sqrt[n]{A}.\ \sqrt[n]{B}.\ \sqrt[n]{C})^n = (\sqrt[n]{A})^n . (\sqrt[n]{B})^n . (\sqrt[n]{C})^n = A.B.C$ que es el radicando del primer miembro.

Para pasar del primero al segundo miembro hemos aplicado la regla para elevar un producto a una potencia (se eleva cada uno de los factores a dicha potencia), y para pasar del segundo miembro al tercero hemos aplicado la definición de raíz n-sima (la raíz n-sima elevada a *n* nos da el radicando).

La igualdad (1), leída de derecha a izquierda, nos indica que:

Para multiplicar varios radicales del mismo índice, n, *se forma un solo radical del mismo índice cuyo radicando es el producto de los radicandos.*

Si los radicales no tienen el mismo índice se reducen a índice común y después se aplica la regla anterior.

Ejemplos

Multiplicar los radicales siguientes:

1. $\sqrt[3]{a^2 b} \cdot \sqrt[3]{c^3 d} \cdot \sqrt[3]{x^2 y} = \sqrt[3]{a^2 bc^3 dx^2 y}$

2. $\sqrt[5]{a-b} \cdot \sqrt[5]{a+b} \cdot \sqrt[5]{a^2+b^2} = \sqrt[5]{(a-b)(a+b).(a^2+b^2)} =$
$= \sqrt[5]{(a^2-b^2)(a^2+b^2)} = \sqrt[5]{a^4-b^4}.$

3. $\sqrt{a^3 b^5} \cdot \sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[4]{abc.}$ Hay que reducir primero los radicales a índice común: $\sqrt{a^3b^5} = \sqrt[12]{a^{18} b^{30}},\ \sqrt[3]{a b^2} = \sqrt[12]{a^4 b^8},\ \sqrt[4]{abc} = \sqrt[12]{a^3 b^3 c^3};$ y ahora: $\sqrt[12]{a^{18} b^{30}} . \sqrt[12]{a^4 b^8} . \sqrt[12]{a^3 b^3 c^3} = \sqrt[12]{a^{18+4+3} . b^{30+8+3} . c^3} =$
$= \sqrt[12]{a^{25} . b^{41} . c^3}$

Ejercicios

1. $\sqrt[5]{x^2y} \cdot \sqrt[5]{xy^2} \cdot \sqrt[5]{x^3 y^2 z}$
2. $\sqrt[6]{a^3 b^2 c} \cdot \sqrt[6]{a^2 b^3 c} \cdot \sqrt[6]{abc}$
3. $\sqrt{x+y} \cdot \sqrt[3]{x-y} \cdot \sqrt[6]{x-y}$
4. $\sqrt[5]{(a+b)^2} \cdot \sqrt[4]{(a-b)^2} \cdot \sqrt[10]{(a+b)^2}$
5. $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[4]{xy^2} \cdot \sqrt[12]{x^2y^2z^2} \cdot \sqrt[6]{x^3y^3z^3}$
6. $\sqrt{m^3n^5} \cdot \sqrt[5]{m^2n^3} \cdot \sqrt[4]{mnp.}$

II) RAIZ N-SIMA DE UN COCIENTE Y COCIENTE DE RADICALES DEL MISMO INDICE:

La raíz n-sima de un cociente es igual al cociente de las raíces n-simas del dividendo y del divisor.

En símbolos: $\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$, (1), donde A y B representan números o expresiones algebraicas.

Demostración: El segundo miembro de (1) será la verdadera raíz n-sima del primero si elevado a n nos da el radicando; pero en efecto se tiene:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{A})^n}{(\sqrt[n]{B})^n} = \frac{A}{B},$$

que es el radicando del primer miembro.

La igualdad (1), leída de derecha a izquierda, nos indica que:

Para dividir dos radicales del mismo índice se forma un solo radical con el mismo índice cuyo radicando es el cociente de los radicandos.

Para dividir dos radicales de índices distintos se reducen previamente a índice común y después se aplica la regla anterior.

Ejemplos

1. $\frac{\sqrt[3]{x^2 y}}{\sqrt[3]{xy^2}} = \sqrt[3]{\frac{x^2 y}{xy^2}} = \sqrt[3]{\frac{x}{y}}$

2. $\frac{\sqrt[5]{x^3 y^2 z^4}}{\sqrt[5]{x^2 yz^3}} = \sqrt[5]{\frac{x^3 y^2 z^4}{x^2 yz^3}} = \sqrt[5]{xyz}$

3. $\frac{\sqrt[4]{a^2-b^2}}{\sqrt[4]{a-b}} = \sqrt[4]{\frac{a^2-b^2}{a-b}} = \sqrt[4]{a+b}$

4. $\frac{\sqrt{ab^3}}{\sqrt[3]{a^2 b^5}} = \frac{\sqrt[6]{a^3b^9}}{\sqrt[6]{a^4b^{10}}} = \sqrt[6]{\frac{a^3b^9}{a^4b^{10}}} = \sqrt[6]{\frac{1}{ab}}$

Ejercicios

1. $\frac{\sqrt{m^3p^5}}{\sqrt{m^7p^4}}$

2. $\frac{\sqrt[3]{ab^2c}}{\sqrt[3]{a^2bc^2}}$

3. $\frac{\sqrt[4]{x^3 y^2 z^5}}{\sqrt[4]{x^2 y^3 z^4}}$

4. $\frac{\sqrt[5]{x^3+y^3}}{\sqrt[5]{x+y}}$

5. $\frac{\sqrt[3]{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}}$

6. $\frac{\sqrt[4]{x^4-y^4}}{\sqrt{x^2-y^2}}$

III) *EXTRACCION DE FACTORES DE UN RADICAL:*

Cuando un *factor* figura en el radicando con un exponente mayor que el índice, se puede extraer fuera del radical; consideraremos dos casos, según que el exponente del factor sea múltiplo del índice o no lo sea.

a) *Si el exponente del factor es múltiplo del índice, se puede sacar fuera del radical con un exponente igual al cociente de dividir dicho exponente entre el índice.*

Por ejemplo: $\sqrt{ab^4c} = b^2\sqrt{ac}$; el factor b^4 salió fuera del radical con un exponente igual a $4 \div 2 = 2$.

La demostración es muy sencilla; sea

$$\sqrt[n]{ab^{kn}c} = \sqrt[n]{ac}.\ \sqrt[n]{(b^k)^n} = b^k\ \sqrt[n]{ac}.$$

(La $\sqrt[n]{(b^k)^n} = b^k$ porque la raíz n-sima de una potencia n-sima es igual a la base de la potencia).

b) *Si el exponente del factor no es múltiplo del índice, se puede sacar fuera del radical con un exponente igual al cociente entero por defecto del exponente por el índice, y queda dentro del radical con un exponente igual al resto de dicha división.*

Por ejemplo: $\sqrt[3]{ab^4c} = b\ \sqrt[3]{abc}.$ $\left(\begin{array}{l|l} 4 & 3 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right)$

La demostración es similar:

$$\sqrt[n]{ab^{nk+r} \cdot c} = \sqrt[n]{ac} \cdot \sqrt[n]{b^{nk}} \cdot \sqrt[n]{b^{r}} = b^{k} \sqrt[n]{acb^{r}}.$$

(Explica el fundamento de cada paso).

Ejemplos

Extraer de los siguientes radicales todos los factores cuyos exponentes sean mayores que el índice:

1. $\sqrt[3]{ab^4c^5} = bc\sqrt[3]{abc^2}$
2. $\sqrt[5]{x^6y^{12}z^{15}} = xy^2z^3\sqrt[5]{xy^2}$
3. $\sqrt[4]{a^3b^8c^{13}d^7} = b^2c^3d\sqrt[4]{a^3cd^3}$
4. $\sqrt{a^3bc^5d^6} = ac^2d^3\sqrt{abc}$

Ejercicios

Extraer todos los factores que sean posibles de los siguientes radicales:

1. $\sqrt[3]{x^2y^5z^6}$,
2. $\sqrt{m^3np^5}$,
3. $\sqrt[4]{p^5q^8r^3}$,
4. $\sqrt[5]{a^2b^3c^{12}}$,
5. $\sqrt[6]{x^3y^6z^9}$,
6. $\sqrt[3]{a^4b^5c^6}$,
7. $\sqrt[7]{x^3y^6z^9}$,
8. $\sqrt[5]{b^2c^6d^{18}}$.

Observación: En algunas ocasiones interesa *introducir* un factor dentro de un radical; la regla para hacerlo es la siguiente:

Para introducir un factor bajo radical se multiplica su exponente por el índice de la raíz.

Esta regla es la misma a), aplicada en sentido inverso.

Ejemplos

1. $a\sqrt{bc^2} = \sqrt{a^2bc^2}$
2. $c\sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{c^3a^2b}$
3. $x^2\sqrt[3]{y^4z^2} = \sqrt[3]{x^6y^4z^2}$

Ejercicios

Introducir bajo el radical todos los factores que están fuera:

1. $x^2y^3\sqrt{ab^3}$,
2. $xy^2\sqrt[3]{xyz^2}$,
3. $m^3n^2\sqrt[4]{abc^2}$,
4. $u^3v^4\sqrt[5]{uvz^3}$,
5. $a^2b^3\sqrt[4]{cd^2}$,
6. $p^5q^4\sqrt[6]{pq}$.

7.5 ELEVACION DE UN RADICAL A UNA POTENCIA

Regla: *Para elevar un radical a una potencia se eleva el radicando a dicha potencia.*

En símbolos: $\left(\sqrt[n]{A}\right)^m = \sqrt[n]{A^m}$, (1)

Demostración: Aplicando al primer miembro de (1) la definición de potencia se tiene:

$$\left(\sqrt[n]{A}\right)^m = \sqrt[n]{A}.\ \sqrt[n]{A}.\ \sqrt[n]{A}\ \overset{m}{\ldots\ldots}\ \sqrt[n]{A} =$$

$$= \sqrt[n]{A.A.A.\ \ldots\overset{m}{}\ldots\ A} = \sqrt[n]{A^m},$$ que es el segundo miembro de (1).

La igualdad (1), leída de izquierda a derecha, nos indica que un exponente al que está elevado un radical pasa dentro del radical como exponente del radicando; y leída de derecha a izquierda nos dice que un exponente del radicando puede salir fuera como exponente de todo el radical.

Ejemplos

1. $\left(\sqrt[3]{a^2b^5}\right)^2 = \sqrt[3]{a^4b^{10}}$

2. $\left(\sqrt[4]{x^3y^7}\right)^3 = \sqrt[4]{x^9y^{21}}$

3. $\left(\sqrt[5]{a^2b^3c}\right)^4 = \sqrt[5]{a^8b^{12}c^4}$

4. $\sqrt[6]{a^8b^4c^{12}} = \sqrt[6]{(a^2\,bc^3)^4} = \left(\sqrt[6]{a^2bc^3}\right)^4$

5. $\sqrt[3]{(m^2-n^2)^5} = \left(\sqrt[3]{m^2-n^2}\right)^5$

Ejercicios

1. $\left(\sqrt{abc}\right)^3$
2. $\left(\sqrt[5]{x^2\,y^3\,z^4}\right)^6$
3. $\left(\sqrt[3]{m^2p^4q^5}\right)^4$
4. $\left(\sqrt[4]{a^2\,b^3\,c^5}\right)^5$
5. $\left(\sqrt[3]{m^2p^5q^7}\right)^2$
6. $\left(\sqrt[6]{q^3\,r^4\,s^5}\right)^3$
7. $\left(\sqrt[7]{a^3\,b^5\,c^9}\right)^2$

7.6 RAIZ DE RAIZ. APLICACIONES AL CALCULO NUMERICO

Regla: *La raíz m-sima de la raíz n-sima de una cantidad es igual a la raíz mn-sima de la misma cantidad.*

En símbolos: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[mn]{A}$, (1)

Demostración: Para demostrar la igualdad (1) vamos a cambiar el orden de los miembros (en virtud de la propiedad simétrica de la igualdad) es decir, vamos a probar que:

$$\sqrt[mn]{A} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}, \quad (2)$$

La igualdad (2) será cierta si elevando su segundo miembro al índice *mn* del primero nos da el radicando de dicho primer miembro (por la definición de raíz); pero en efecto se tiene:

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}\right)^{mn} = \left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}\right)^m\right]^n = \left(\sqrt[n]{A}\right)^n = A,$$

que efectivamente es el radicando del primer miembro de (2).

Para pasar del primer miembro al segundo se ha aplicado la ley de elevación de una potencia a otra potencia, en sentido inverso; para pasar del segundo al tercero se ha aplicado la definición de raíz, y lo mismo para pasar del tercero al cuarto.

Ejemplos

1. $\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}} = \sqrt[6]{a^2b}$

2. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^3z^2}} = \sqrt[12]{x^3\,z^2}$

3. $\sqrt[5]{\sqrt{x^2-y^2}} = \sqrt[10]{x^2-y^2}$

4. $\sqrt[4]{\sqrt[5]{a+b}} = \sqrt[20]{a+b}$

5. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^3+y^3}} = \sqrt[15]{x^3+y^3}$

Ejercicios

3. $\sqrt[5]{\sqrt[6]{x^3 y^4 z^5}} = $ —?—

4. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{abc}} = $ —?—

1. $\sqrt{\sqrt[3]{m^3 b^2}} = $ —?—

5. $\sqrt[4]{\sqrt[5]{x^3 y^2 z^3}} = $ —?—

2. $\sqrt{\sqrt{m^3 n^4}} = $ —?—

6. $\sqrt[5]{\sqrt[7]{a^4 + b^4}} = $ —?—

Observación: El índice de la raíz m-sima de la raíz n-sima de una cantidad es *mn,* y como el producto tiene la propiedad conmutativa *(mn = nm),* podemos invertir el orden de las raíces, o sea, que:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{A}} = \sqrt[mn]{A}$$

APLICACION AL CALCULO DE RAICES NUMERICAS:

La propiedad anterior se aplica en sentido inverso para calcular más fácilmente la raíz de un número cuando el índice es un número compuesto; entonces se descompone el índice en factores primos y en vez de calcular una raíz sola de índice alto se calculan sucesivamente las raíces cuyos índices son los factores primos del índice antiguo.

Ejemplos

1. $\sqrt[8]{16} = \sqrt[2.2.2]{16} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{16}}} = \sqrt{\sqrt{4}} = \sqrt{2} = 1.4142\ldots$

2. $\sqrt[6]{64} = \sqrt[3\cdot 2]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$

3. $\sqrt[4]{256} = \sqrt{\sqrt{256}} = \sqrt{16} = 4$

4. $\sqrt[6]{64 \cdot 64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8} = 2 . 2 = 4$

El artificio aplicado en el ejemplo 4 es el más útil para simplificar los cálculos de raíces de índice compuesto. *Se descompone el índice en factores primos, y el radicando también se descompone en factores; después se descompone la raíz del producto en producto de raíces, y cada raíz de índice compuesto en raíces sucesivas de índice primo cada una.*

Ejercicios

Calcula tan rápidamente como puedas las siguientes raíces:

1. $\sqrt[4]{324} = ?$

2. $\sqrt[6]{729} = ?$

3. $\sqrt[8]{1,296} = ?$

4. $\sqrt[6]{46,656} = ?$

5. $\sqrt[4]{160,000} = ?$

6. $\sqrt[4]{50,625} = ?$

7.7 RACIONALIZACION DE DENOMINADORES

Supongamos que tenemos que calcular $\frac{3}{\sqrt{2}}$. Si tomamos como valor aproximado de $\sqrt{2}$ el valor 1.41421, tendríamos que efectuar la siguiente división: $3 \div 1.41421$.

Esta división es muy larga y además el error que se comete en el resultado es bastante grande; por estas razones se prefiere transformar $\frac{3}{\sqrt{2}}$ en otra expresión *equivalente* y más fácil de calcular.

Si multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{2}$ obtenemos:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Se ve que en el último miembro *ha desaparecido* la raíz del denominador, y por supuesto es mucho más fácil de calcular que el primero, pues su cálculo se reduce a multiplicar 1.5×1.41421.

Resumen: Cuando una expresión fraccionaria contiene radicales en el denominador, conviene transformarla en otra equivalente que no tenga radicales en el denominador.

Cuando se realiza esta transformación se dice que *se ha racionalizado el denominador.*

A continuación explicamos cómo se logra la racionalización de denominadores en los casos que suelen presentarse en la práctica.

I) *DENOMINADOR MONOMIO CON UNA RAIZ CUADRADA:*

Regla: *Para racionalizar un denominador monomio en el que figura una raíz cuadrada como factor, se multiplican el numerador y denominador de la fracción por la misma raíz cuadrada que figura en el denominador.*

Ejemplos

Racionalizar los denominadores de las fracciones siguientes:

1. $\dfrac{2a}{3\sqrt{b}} = \dfrac{2a\sqrt{b}}{3\sqrt{b}\ \sqrt{b}} = \dfrac{2a\sqrt{b}}{3\left(\sqrt{b}\,\right)^2} = \dfrac{2a\sqrt{b}}{3b}$

2. $\dfrac{4x}{5a\sqrt{y^3}} = \dfrac{4x\sqrt{y^3}}{5ay^3}$

3. $\dfrac{5x^2z}{3a^2bc\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{5x^2z\sqrt{a^2+b^2}}{3a^2bc(a^2+b^2)}$

4. $\dfrac{3ab^2c}{5x\sqrt{z^3}} = \dfrac{3ab^2c\sqrt{z^3}}{5xz^3}$

Ejercicios

Racionalizar los denominadores de las siguientes fracciones y simplificar el resultado tanto cuanto se pueda:

1. $\dfrac{3(a^2-b^2)}{\sqrt{a+b}}$
2. $\dfrac{5\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$
3. $\dfrac{2xz\,(x^2-z^2)}{\sqrt{x-z}}$
4. $\dfrac{(x^2-xy+y^2)}{\sqrt{x^3+y^3}}$
5. $\dfrac{2m^3np^2}{\sqrt{3m^3n^2p^2}}$
6. $\dfrac{6a^2bc}{\sqrt{an^2c}}$
7. $\dfrac{-2x^2yz}{4\sqrt{xy^2z}}$
8. $\dfrac{-5p^2q^3r}{\sqrt{10p^3q^3r^3}}$
9. $\dfrac{12a^4b^2c}{\sqrt{6a^3b^5c}}$

II) *DENOMINADOR MONOMIO CON UNA RAIZ N-SIMA:*

Regla: *Para racionalizar un denominador monomio que contiene como factor una raíz n-sima se multiplican el numerador y denominador por el radical elevado a* $n-1$.

FORMULA GENERAL: $$\frac{A}{\sqrt[n]{B}} = \frac{A\sqrt[n]{B^{n-1}}}{\sqrt[n]{B}\ \sqrt[n]{B^{n-1}}} = \frac{A\sqrt[n]{B^{n-1}}}{\sqrt[n]{B^n}} =$$

$$= \frac{A\sqrt[n]{B^{n-1}}}{B}, \quad (1)$$

Ejemplos

1. $\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{a^2}} = \dfrac{2x\ \sqrt[3]{(a^2)^2}}{3\sqrt[3]{a^2}\,.\,\sqrt[3]{(a^2)^2}} = \dfrac{2x\sqrt[3]{a^4}}{3\sqrt[3]{(a^2)^3}} = \dfrac{2x\sqrt[3]{a^4}}{3a^2}$

2. $\dfrac{3a^2b}{5\sqrt[5]{a^3b^4}} = \dfrac{3a^2b\ \sqrt[5]{(a^3\,b^4)^4}}{5\sqrt[5]{a^3b^4}\,.\,\sqrt[5]{(a^3b^4)^4}} = \dfrac{3a^2b\ \sqrt[5]{a^{12}b^{16}}}{5\sqrt[5]{(a^3b^4)^5}} =$

$= \dfrac{3a^2ba^2b^3\sqrt{a^2\,b}}{5a^3b^4} = \dfrac{3a\sqrt[5]{a^2\,b}}{5}$

3. $\dfrac{2\sqrt[n]{a^3}}{5\sqrt[n]{b^2}} = \dfrac{2\sqrt[n]{a^3}\ \sqrt[n]{(b^2)^{n-1}}}{5\sqrt[n]{b^2}\ \sqrt[n]{(b^2)^{n-1}}} = \dfrac{2\sqrt[n]{a^3b^{2\,n-2}}}{5\sqrt[n]{(b^2)^n}} = \dfrac{2\sqrt[n]{a^3b^{2\,n-2}}}{5b^2}$

Ejercicios

Racionalizar los denominadores de las siguientes fracciones, simplificando el resultado. (Pueden evitarse los pasos intermedios aplicando en cada caso el último miembro de la fórmula (1)).

1. $\dfrac{2a^3b^2}{4\sqrt[3]{a^2b^3}}$

2. $\dfrac{5m^2b^3n^4}{10\sqrt[4]{b^5m^2n^3}}$

3. $\dfrac{8a^2b^3c^4}{4\sqrt[5]{ab^2c^3}}$

4. $\dfrac{3(a-b)}{6\sqrt[5]{(a-b)^2}}$

5. $\dfrac{10(a^2-b^2)}{5\sqrt[3]{(a+b)^2}}$

6. $\dfrac{12(x^4-y^4)}{4\sqrt[5]{x^2-y^2}}$

7. $\dfrac{18a^3b(a+b)}{9a^2\sqrt[4]{a^2-b^2}}$

8. $\dfrac{15m^3n^2\ \sqrt{a^3}}{5m^2\sqrt[3]{a^2b}}$

9. $\dfrac{2(a-b)(a^2+b^2)}{\sqrt[4]{a^4-b^4}}$

III) *DENOMINADOR BINOMIO DE LA FORMA:*

$a\,.\,\sqrt{A} \pm b\,.\,\sqrt{B}$:

Dada una expresión de la forma $a\,.\,\sqrt{A} \pm b\,.\,\sqrt{B}$, llamaremos expresión conjugada de ella a la que resulta de cambiar el signo $+$ por $-$, o el $-$ por $+$; la indicaremos así: $a\,.\,\sqrt{A} \mp b\,.\,\sqrt{B}$.

REGLA: Para racionalizar un denominador de la forma $a\,.\,\sqrt{A} \pm b\,.\,\sqrt{B}$ *se multiplican el numerador y denominador por la expresión conjugada del denominador, o sea, por* $a\,.\,\sqrt{A} \mp b\,.\,\sqrt{B}$.

FORMULA GENERAL:

$$\frac{C}{a\,.\,\sqrt{A} \pm b\,.\,\sqrt{B}} = \frac{C\left(a\sqrt{A} \mp b\sqrt{B}\right)}{\left(a\sqrt{A} \pm b\sqrt{B}\right)\left(a\sqrt{A} \mp b\sqrt{B}\right)} =$$

$$= \frac{C\left(a\sqrt{A} \mp b\sqrt{B}\right)}{a^2A - b^2B}, \qquad (1)$$

Para resolver los ejemplos y ejercicios se puede aplicar directamente el último miembro de (1), sustituyendo las letras por los valores que correspondan en cada caso.

Ejemplos

Racionalizar los denominadores de las siguientes fracciones:

1. $\dfrac{3xy}{2\sqrt{x} - 3\sqrt{y}} = \dfrac{3xy\left(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y}\right)}{4x - 9y}$

2. $\dfrac{(a-b)^2\,.\,(a+b)^2}{\sqrt{a^2-b^2} - \sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{(a-b)^2\,.\,(a+b)^2\ \left(\sqrt{a^2-b^2} + \sqrt{a^2+b^2}\right)}{a^2-b^2-(a^2+b^2)} =$

$= \dfrac{(a-b)^2\,.\,(a+b)^2\,.\ \left(\sqrt{a^2-b^2} + \sqrt{a^2+b^2}\right)}{-2b^2}$

Ejemplos

3. $\dfrac{5ab^2}{x+\sqrt{y}}$; en este ejemplo basta que pongamos $x=\sqrt{x^2}$ para que estemos en el caso anterior; se llega al siguiente resultado:

$$\frac{5ab^2\left(x-\sqrt{y}\right)}{x^2-y}$$

4. $\dfrac{2xy}{\sqrt{3x}-2y}=\dfrac{2xy\left(\sqrt{3x}+2y\right)}{3x-4y^2}$

Ejercicios

Racionalizar los denominadores de las siguientes fracciones:

1. $\dfrac{12a^2b}{3\sqrt{a}+2\sqrt{b}}$
2. $\dfrac{6(x-y)}{2x-\sqrt{y}}$
3. $\dfrac{4x^2y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$
4. $\dfrac{2x(a+b)}{3\sqrt{x^3}-2\sqrt{y}}$
5. $\dfrac{7m^2n^3}{\sqrt{n^3}+\sqrt{m^5}}$
6. $\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$
7. $\dfrac{x^2+xy+y^2}{\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}}$
8. $\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^5}-\sqrt{y^5}}$

IV) *DENOMINADOR BINOMIO DE LA FORMA* $\sqrt[3]{A}\pm\sqrt[3]{B}$:

Primer Caso: *Denominador de la forma* $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$.

La racionalización de un denominador de la forma $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$ se consigue usando la descomposición en factores de una suma de cubos; partiremos de la siguiente identidad, explicada cuando se estudiaron las factorizaciones notables.

$$A+B=\left(\sqrt[3]{A}\right)^3+\left(\sqrt[3]{B}\right)^3=\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right).$$
$$\cdot\left[\left(\sqrt[3]{A}\right)^2-\sqrt[3]{A}.\sqrt[3]{B}+\left(\sqrt[3]{B}\right)^2\right] \quad (1)$$

La expresión entre corchetes del último miembro de (1) se llama *"la expresión conjugada"* de $\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)$

Regla: *Para racionalizar el denominador de la fracción* $\dfrac{C}{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}}$ *se multiplican el numerador y denominador de la fracción por la expresión conjugada del denominador.*

FORMULA GENERAL:

$$\frac{C}{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}}=\frac{C.\left(\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{A.B}+\sqrt[3]{B^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right).\left(\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{A.B}+\sqrt[3]{B^2}\right)}=$$

$$=\frac{C.\left(\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{A.B}+\sqrt[3]{B^2}\right)}{A+B} \quad (2)$$

Los denominadores de los miembros segundo y tercero de (2) son iguales en virtud de (1).

Ejemplos

Los siguientes ejemplos los resolvemos aplicando directamente el último miembro de la igualdad (2).

1. $\dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}=\dfrac{(a+x).\left(\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}\right)}{a^2+b^2}$

2. $\dfrac{2ax}{\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}}=\dfrac{2ax.\left(\sqrt[3]{a^4b^2}-\sqrt[3]{a^3b^3}+\sqrt[3]{a^2b^4}\right)}{a^2b+ab^2}=$

$$=\frac{2ax\left(a\sqrt[3]{ab^2}-ab+b\sqrt[3]{a^2b}\right)}{ab(a+b)}$$

3. $\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\dfrac{(a^2-b^2).\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a+b}=$

$$=(a-b)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$$

Ejercicios

Racionalizar los siguientes denominadores:

1. $\dfrac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$ 2. $\dfrac{4abx}{\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{2y}}$

3. $\dfrac{-5(x^2-y^2)}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$ 4. $\dfrac{7ax(a+x)}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x}}$

5. $\dfrac{2ab(a^2-b^2)}{\sqrt[3]{3a}+\sqrt[3]{3b}}$ 6. $\dfrac{4x(a^4-b^4)}{\sqrt[3]{4a}+\sqrt[3]{4b}}$

Segundo Caso: *Denominador de la forma* $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}.$

En este caso se usa la siguiente identidad, análoga a la (1) del caso anterior; $A-B=\left(\sqrt[3]{A}\right)^3-\left(\sqrt[3]{B}\right)^3=$

$$=\left(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}\right).\left(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{A.B}+\sqrt[3]{B^2}\right) \qquad (1)$$

Este último paréntesis de (1) se llama la "expresión conjugada" de $\left(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}\right)$.

REGLA: *Para racionalizar el denominador de la fracción* $\dfrac{C}{\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}}$ *se multiplican el numerador y el denominador por la expresión conjugada del denominador.*

FORMULA GENERAL:

$$\frac{C}{\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}}=\frac{C.\left(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{A.B}+\sqrt[3]{B^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}\right).\left(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{A.B}+\sqrt[3]{B^2}\right)}=$$

$$=\frac{C.\left(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{A.B}+\sqrt[3]{B^2}\right)}{A-B} \qquad (2)$$

Ejemplos

1. $\dfrac{2(a^2-b^2)}{\sqrt[3]{2a}-\sqrt[3]{2b}}=\dfrac{2(a^2-b^2)\left(\sqrt[3]{4a^2}+\sqrt[3]{4ab}+\sqrt[3]{4b^2}\right)}{2a-2b}=$

$$=(a+b).\left(\sqrt[3]{4a^2}+\sqrt[3]{4ab}+\sqrt[3]{4b^2}\right)$$

2. $\dfrac{3(a^4-b^4)}{\sqrt[3]{3a^2}-\sqrt[3]{3b^2}}=\dfrac{3(a^4-b^4).\left(\sqrt[3]{9a^4}+\sqrt[3]{9a^2b^2}+\sqrt[3]{9b^4}\right)}{3a^2-3b^2}=$

$$=(a^2+b^2).\left(\sqrt[3]{9a^4}+\sqrt[3]{9a^2b^2}+\sqrt[3]{9b^4}\right)$$

Ejercicios

Racionalizar los denominadores siguientes, aplicando el último miembro de (2).

1. $\dfrac{5a^2b^2}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$, 2. $\dfrac{3xy(x+y)}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}}$, 3. $\dfrac{3x^2y^2(x^2+y^2)}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{y^4}}$.

Observación: El método seguido para racionalizar un denominador de la forma $\sqrt[3]{A}\pm\sqrt[3]{B}$ se puede aplicar a la racionalización de denominadores de la forma $\sqrt[n]{A}\pm\sqrt[n]{B}$, con el signo $+$ cuando n es impar, y con el signo $-$ en todos los casos (n par o impar); dejamos al criterio del profesor el explicar estos casos generales para los alumnos más brillantes.

V) *DENOMINADOR DE LA FORMA* $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$:

Para racionalizar un denominador de la forma $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$ se utiliza la siguiente identidad:

$$\left[\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)+\sqrt{C}\right]\cdot\left[\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)-\sqrt{C}\right]=$$
$$=\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)^2-\left(\sqrt{C}\right)^2=A+2\sqrt{AB}+B-C=A+B-C+2\sqrt{AB}, \quad (1)$$

El segundo corchete del primer miembro se llama la *"expresión conjugada"* del primer corchete.

REGLA: *Para racionalizar un denominador de la forma* $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$ *se multiplican el numerador y el denominador de la fracción por la expresión conjugada del denominador, con lo cual el denominador toma la forma* $(A+B-C)+2\sqrt{AB}=\sqrt{(A+B-C)^2}+\sqrt{4AB}$, *que pertenece al tipo III) de esta sección y se racionaliza multiplicando nuevamente el numerador y el denominador por la expresión conjugada del denominador.*

FORMULA GENERAL:

$$\frac{D}{\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}}=\frac{D\,.\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}\right)}{(A+B-C)+2\sqrt{AB}}=$$
$$=\frac{D\,.\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}\right)\left(A+B-C-2\sqrt{AB}\right)}{(A+B-C)^2-4AB} \quad (2)$$

Ejemplos

Para resolver los ejemplos siguientes aplicamos directamente el último miembro de (2).

1. $\dfrac{2xyz}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}=\dfrac{2xyz\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)\left(x+y-z-2\sqrt{xy}\right)}{(x+y-z)^2-4xy}$

2. $\dfrac{(a+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\dfrac{(a+b)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(a+b-c-2\sqrt{ab}\right)}{(a+b-c)^2-4ab}$

Ejercicios

Racionalizar los siguientes denominadores:

1. $\dfrac{3x^2y}{\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{p}}$

2. $\dfrac{5a^2bc}{\sqrt{3a}+\sqrt{3b}+\sqrt{3c}}$

3. $\dfrac{-2(a+b)}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}}$

7.8 POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONAL CUALQUIERA: DEFINICION Y REGLAS DE CALCULO

Hasta el momento han sido definidas solamente las potencias de exponente entero; sabemos por ejemplo que $a^3 = a.a.a.$, que $a^0 = 1$, que $a^1 = a$, que $a^{-4}=\dfrac{1}{a^4}$, etc.

En esta sección definiremos las potencias de exponente fraccionario, positivo o negativo, y probaremos que se cumplen las mismas reglas de cálculo que con exponentes enteros.

Si queremos que se conserve la regla para elevar una potencia a otra potencia, es decir, si queremos que $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$, aunque m y n sean números fraccionarios, debemos definir $a^{\frac{1}{n}}$ de forma que $(a^{\frac{1}{n}})^n = a^1 = a$, lo cual se cumple si ponemos $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, *pues* $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Adoptaremos pues esta definición tentativa:

Definición 1: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, (1), *siendo* n *un entero positivo.*

Para que esta definición sea definitivamente aceptable, sin romper con la estructura del cálculo con potencias, habrá que demostrar que con ella se cumplen las mismas cinco leyes que fueron demostradas para exponentes enteros; pero antes de proceder a dar estas pruebas, daremos la definición completa de potencia de exponente racional.

Una vez definida $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, es inmediato que $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$; podemos por tanto dar la siguiente definición tentativa:

Definición 2: $\mathbf{a}^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\mathbf{a}^m}$, (2), *siendo* **m** *y* **n** *números naturales.*

Finalmente, una potencia de exponente fraccionario negativo se define como el valor recíproco de la potencia de igual base y exponente opuesto (por tanto positivo), o sea:

Definición 3: $\mathbf{a}^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{\mathbf{a}^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\mathbf{a}^m}}$, (3), *siendo* **m** *y* **n** *naturales.*

A continuación damos las demostraciones de algunas leyes del cálculo con potencias, y dejamos como ejercicio del alumno el probar las otras, siguiendo el mismo método.

I) **Producto de potencias de igual base:**

Probemos que si α y β son racionales y **a** *cualquier número real,* $\mathbf{a}^{\alpha} . \mathbf{a}^{\beta} = \mathbf{a}^{\alpha+\beta}$

Supongamos por ejemplo que α es fraccionario positivo, $\alpha = \frac{m}{n}$, y β fraccionario negativo, $\beta = -\frac{p}{n}$. (m, n, y p naturales).

(Hemos supuesto α y β de igual denominador, pero si no ocurriere así se reducen previamente a común denominador).

Aplicando las definiciones (2) y (3) y las reglas de cálculo con radicales se obtiene:

$$a^{\frac{m}{n}} . a^{-\frac{p}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{a^p}} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{a^p}} = \sqrt[n]{a^{m-p}} = a^{\frac{m-p}{n}} = a^{\frac{m}{n} + (-\frac{p}{n})}$$

El último miembro nos indica que se cumple la conocida ley de adición de exponentes.

El alumno debe demostrar esta misma ley en el caso de que los dos exponentes sean negativos fraccionarios, o uno entero positivo y el otro fraccionario negativo, etc.; comprobará que siempre el *producto de potencias de igual base tiene por base la misma y por exponente la suma de los exponentes.*

II) **Cociente de potencias de igual exponente:**

Probemos que $\dfrac{\mathbf{a}^{\alpha}}{\mathbf{b}^{\alpha}} = \left(\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\alpha}$, *siendo* **a** *y* **b** *reales* ($b \neq o$), *y* α *racional cualquiera.*

Supongamos que α sea fraccionario negativo, $\alpha = -\dfrac{m}{n}$ (m y n naturales).

Aplicando la definición (3) y las reglas de cálculo con radicales obtenemos:

$$\frac{a^{-\frac{m}{n}}}{b^{-\frac{m}{n}}} = \frac{\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}}{\frac{1}{b^{\frac{m}{n}}}} = \frac{b^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{b^m}}{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n]{\frac{b^m}{a^m}} = \sqrt[n]{\left(\frac{b}{a}\right)^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{m}{n}}$$

El último miembro nos indica que se cumple la ley de división de potencias del mismo exponente.

El alumno debe buscar la prueba para el caso de exponente fraccionario positivo, comprobará *que siempre el cociente de potencias de igual exponente tiene por base el cociente de las bases y por exponente el mismo.*

* * *

Ejercicios

Escribir las siguientes potencias de exponente fraccionario en forma de radicales, aplicando las definiciones (1), (2) ó (3) de esta sección:

1. $a^{\frac{1}{2}} = -?-$ 2. $a^{\frac{1}{3}} = -?-$ 3. $x^{\frac{3}{5}} = -?-$

4. $y^{-\frac{1}{4}} = -?-$ 5. $z^{-\frac{3}{2}} = -?-$ 6. $a^{-\frac{3}{5}} = -?-$

7. $x^{\frac{p}{q}} = -?-$ 8. $m^{-\frac{2}{3}} = -?-$ 9. $y^{-\frac{n}{5}} = -?-$

10. $2^{-\frac{3}{5}} = -?-$ 11. $\pi^{-\frac{2}{3}} = -?-$ 12. $(-4)^{-\frac{1}{3}} = -?-$

13. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{1}{3}} = -?-$ 14. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{5}} = -?-$ 15. $\left(\frac{m}{n}\right)^{-\frac{p}{q}} = -?-$

Escribir las siguientes expresiones en forma de potencias:

16. $\sqrt[3]{a^2} = -?-$ 17. $\frac{1}{\sqrt{b^3}}$ 18. $\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2}$

19. $\frac{1}{\sqrt[5]{\left(\frac{a}{b}\right)^2}}$ 20. $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}}$

Demostrar las leyes de cálculo que se indican a continuación:

21. $a^\alpha \cdot b^\alpha = (a \cdot b)^\alpha$, siendo α fraccionario negativo.

22. $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ siendo α entero negativo y β fraccionario negativo.

23. $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$ siendo α fraccionario positivo y β fraccionario negativo.

24. $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$, siendo α y β fraccionarios negativos.

25. $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$ siendo α entero negativo y β fraccionario positivo.

26. $\frac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha$ siendo α fraccionario positivo.

27. $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$ siendo α y β fraccionarios negativos.

28. $a^\alpha \cdot b^\alpha = (a \cdot b)^\alpha$, siendo α fraccionario positivo.

29. $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ siendo α y β fraccionarios positivos.

30. $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ siendo α entero positivo y β fraccionario positivo.

7.9 ECUACIONES IRRACIONALES SENCILLAS

Una ecuación se llama irracional cuando la incógnita figura bajo radical.

Ejemplos

Son irracionales las siguientes ecuaciones:

$\sqrt{2x+1} = 3 - \sqrt{3x-1}$, $\sqrt[3]{5x^2-3} = \sqrt{5x^2+2x-1}$

El método para resolver una ecuación irracional consiste en transformarla en ecuación entera elevando sus dos miembros a potencias convenientes.

En esta sección nos ocuparemos de las ecuaciones irracionales sencillas, que sólo contienen raíces cuadradas y que se transforman en ecuaciones enteras de primer grado por elevaciones convenientes de sus dos miembros al cuadrado.

Ahora se plantea la siguiente cuestión:

Cuando se elevan los dos miembros de una ecuación al cuadrado, ¿se obtiene una ecuación equivalente a la de partida?

Esta cuestión la responde el siguiente:

Teorema Fundamental:

Si los dos miembros de una ecuación, $A(x)=B(x)$, (1), se elevan al cuadrado, se obtiene otra ecuación, $[A(x)]^2=[B(x)]^2$, (2), que tiene todas las soluciones de la primera, pero además puede tener otras soluciones.

a) Demostremos que toda solución de (1) lo es de (2). En efecto, si a es raíz de (1) se cumplirá: $A(a)=B(a)$, (3), y elevando los dos miembros de (3) al cuadrado se obtiene otra igualdad, $[A(a)]^2= =[B(a)]^2$, que nos indica que a es también raíz de (2).

b) Demostremos ahora que puede haber raíces que verifiquen a (2) y no verifiquen a (1).

En efecto: Si a es raíz de (2) se cumplirá:

$[A(a)]^2=[B(a)]^2$, o bien: $[A(a)]^2-[B(a)]^2=o$, que se puede factorizar así: $[A(a)+B(a)]\,.\,[A(a)-B(a)]=o$, (4).

El primer miembro de (4) es un producto de dos factores, y para que sea nulo debe anularse uno al menos de los factores; entonces puede ocurrir que $A(a)+B(a)=o$, siendo $A(a)-B(a)\neq o$, es decir, $A(a)\neq B(a)$; en este caso, a sería raíz de la (2), pero no de la (1).

De acuerdo con el teorema acabado de demostrar, si para resolver una ecuación se efectúan elevaciones al cuadrado de sus dos miembros, *pueden introducirse soluciones extrañas* en la nueva ecuación, pero todas las soluciones de la primera lo son de la segunda.

En la práctica se sustituyen las soluciones de la segunda ecuación en la primera y se desechan las que no la verifiquen.

METODO DE RESOLUCION DE LOS TIPOS SENCILLOS DE ECUACIONES IRRACIONALES

I) ECUACIONES QUE CONTIENEN UN SOLO RADICAL:

Explicaremos el método mediante ejemplos.

1. La ecuación $\sqrt{4x^2+x-1}=2x+3$ contiene un solo radical cuadrático (una raíz cuadrada) *aislado en su primer miembro;* si elevamos los dos miembros de la ecuación al cuadrado obtenemos:

$$4x^2+x-1=4x^2+12x+9, \text{ o bien: } -11x=10,\ x=-\frac{10}{11}$$

Sustituida esta solución en la ecuación de partida obtenemos:

$$\sqrt{4\cdot\frac{100}{121}-\frac{10}{11}-1}=\sqrt{\frac{169}{121}}=\sqrt{\frac{13^2}{11^2}}=\frac{13}{11}$$

El segundo miembro vale: $-\frac{20}{11}+\frac{33}{11}=\frac{13}{11}$, que coincide con el valor del primero; por tanto la solución satisface a la ecuación de partida.

2. En la ecuación $\sqrt{9x^2-3x+1}+4x-2=7x+1$ hay un solo radical, *pero no está aislado* en un miembro; pasando *4x—2* al segundo miembro se obtiene:

$\sqrt{9x^2-3x+1}=3x+3$, y elevando los dos miembros al cuadrado:

$9x^2-3x+1=9x^2+18x+9$. o bien, $-21x=8$, $x=\frac{8}{-21}=\frac{-8}{21}$

Verifica que la solución hallada es solución de la ecuación de partida.

II) ECUACIONES CON DOS RADICALES:

3. Resolver la ecuación: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}=3$. Esta ecuación contiene 2 radicales; pasando $\sqrt{x+1}$ al segundo miembro, para dejar el primer radical aislado en el primer miembro queda:

$\sqrt{x-1}=3-\sqrt{x+1}$, y elevando al cuadrado:

$x-1=9-6\sqrt{x+1}+x+1$; aislando el radical que queda aún en el segundo miembro, queda: $-11=-6\sqrt{x+1}$, y elevando nuevamente al cuadrado: $121=36(x+1)=36x+36$, o bien $85=36x$, de donde $x=\frac{85}{36}$.

Comprueba que la solución encontrada verifica a la ecuación de partida.

Ejercicios

Resolver las siguientes ecuaciones irracionales, verificando los resultados:

1. $\sqrt{2x+5}=3$
2. $\sqrt{3x+2}=\sqrt{27}$
3. $\sqrt{3x-2}+1=4$
4. $\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-4}$
5. $3-2\sqrt{x+1}=5$
6. $\sqrt{3x-2}=4$
7. $\sqrt{x+2}=\sqrt{2x-3}$
8. $\sqrt{x+6}=\sqrt{x+4}$
9. $\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}=1$
10. $\sqrt{x^2+x-3}=2-x$
11. $\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x+1}=1$
12. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+1}=3$

REVISION DE CONCEPTOS DEL CAPITULO 7

1. ¿Cómo se define la raíz n-sima, si existe, de una expresión algebraica?
2. ¿Existe valor numérico real para una raíz de índice par y para aquellos valores de las letras que hacen al radicando negativo?
3. ¿Cuántos valores reales tiene una raíz de índice par y radicando positivo? ¿Cuál de estos valores se tiene en cuenta únicamente en el cálculo con radicales?
4. Enuncia y demuestra la propiedad fundamental de los radicales.
5. ¿Cuáles son las aplicaciones más importantes de la propiedad fundamental?
6. ¿Cómo se simplifica un radical?
7. ¿Cómo se reducen varios radicales al mínimo índice común?
8. ¿Qué son radicales semejantes? ¿Cómo se suman o restan radicales semejantes?
9. ¿Cómo se multiplican radicales de igual índice? ¿Y si no tienen el mismo índice?
10. ¿Cómo se dividen radicales de igual índice? ¿Y cuándo no tienen igual índice?

11. ¿Cómo se extrae un factor fuera de un radical, siendo su exponente múltiplo del índice? ¿Y cuándo el exponente no es múltiplo del índice, pero mayor que él?
12. ¿Cómo se eleva un radical a una potencia?
13. ¿Cómo se extrae la raíz de una raíz?
14. Si el índice de una raíz es un número compuesto, ¿puede calcularse la raíz mediante la extracción sucesiva de raíces cuyos índices sean los factores primos del índice? ¿Simplifica esto los cálculos?
15. ¿Es conveniente transformar una fracción que tenga radicales en el denominador en otra *equivalente* que no los tenga?
16. ¿Cómo se racionaliza un denominador de la forma $\sqrt{a}$?
17. ¿Cómo se racionaliza un denominador de la forma $\sqrt[n]{A}$?
18. ¿Cómo se racionaliza un denominador de la forma $\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$?
19. ¿Cómo se racionaliza un denominador de la forma $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} \pm \sqrt{C}$?
20. ¿Cómo se racionaliza un denominador de la forma $\sqrt[3]{A} \pm \sqrt[3]{B}$?
21. Da la definición de potencia de exponente racional en todos los casos posibles.
22. ¿Se cumplen las mismas leyes de cálculo con exponentes racionales que con exponentes enteros?
23. ¿Qué es una ecuación irracional?
24. ¿Se conserva la equivalencia cuando se elevan los dos miembros de una ecuación al cuadrado?
25. ¿Cómo se resuelve una ecuación irracional?

CUESTIONARIO DE SELECCION

Seleccione la afirmación que corresponda al concepto enunciado al principio:

1. Un radical con radicando negativo tiene valor real:
   a) cuando el índice es par
   b) cuando el índice es impar
   c) siempre, tanto cuando el índice es par como cuando es impar.

2. La propiedad fundamental de los radicales expresa que:

   a) Si al índice y al exponente del radicando se les suma un mismo número se obtiene otro radical equivalente.

   b) Si al índice y al exponente del radicando se les resta un mismo número se obtiene un radical equivalente.

   c) Si el índice y el exponente del radicando se multiplican por un mismo número se obtiene un radical equivalente.

3. Para poder rebajar el índice de un radical cuyo radicando es un monomio es necesario y suficiente que:

   a) Todos los exponentes de los factores del monomio sean mayores que el índice.

   b) Todos los factores del monomio tengan exponentes múltiplos del índice.

   c) Que sólo un factor del radicando tenga exponente múltiplo del índice.

4. Para reducir varios radicales a índice común:

   a) Se halla el m.c.d. de los índices y éste es el índice común; después se dividen los exponentes de los radicandos por el m.c.d.

   b) Se halla el m.c.m. de los índices; después se multiplican el índice y el exponente del radicando por el cociente de dividir el m.c.m. de los índices por el índice propio de cada radical.

   c) Se multiplica el índice y el exponente de cada radical por el m.c.d. de los índices.

5. Dos radicales semejantes son:

   a) Los que tienen igual índice.

   b) Los que tienen igual radicando.

   c) Los que tienen igual el índice y el radicando.

6. Para multiplicar varios radicales cualesquiera:

   a) Se pone por índice el producto de los índices y por radicando el producto de los radicandos.

   b) Se reducen a índice común y se multiplican los radicandos, poniendo por índice el común.

   c) Se pone por radicando el producto de los radicandos y por índice el mayor de los índices.

7. Para extraer un factor fuera de un radical, siendo su exponente mayor que el índice:

   a) Se le resta al exponente el índice, se saca fuera con un exponente igual al índice y se deja dentro con un exponente igual a la diferencia hallada.

Alina 2º Costa

   b) Se divide el exponente del factor por el índice, se saca fuera el factor con un exponente igual al cociente obtenido y se deja dentro con un exponente igual al resto por defecto de dicha división.

   c) Se saca el factor con un exponente igual al resto de la división de su exponente por el índice y se deja dentro con un exponente igual al cociente de dicha división.

8. Una raíz de índice 12 se puede calcular:

   a) Hallando una raíz cúbica, después la raíz cuadrada al resultado, y después la raíz cuadrada resultado.

   b) Hallando una raíz quinta, después la raíz quinta del resultado y después la raíz cuadrada al resultado.

   c) Hallando una raíz quinta, después raíz cuarta al resultado y después una raíz cúbica al resultado.

9. Para racionalizar un denominador de la forma $\sqrt[n]{A}$:

   a) Se multiplican el numerador y denominador por $\sqrt[n]{A}$

   b) Se multiplican el numerador y el denominador por A

   c) Se multiplican el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{A^{n-1}}$

10. Para racionalizar un denominador de la forma $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$:

   a) Se multiplican el numerador y el denominador por $\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$

   b) Se multiplican el numerador y el denominador por $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$

   c) Se multiplican el numerador y el denominador por $\left(\sqrt[3]{A^2} - \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}\right)$

   d) Se multiplican el numerador y el denominador por $\left(\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}\right)$

11. Una potencia de exponente fraccionario se define de la siguiente forma:

   a) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[m]{a^n}$, b) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, c) $a^{\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

12. Cuando los dos miembros de una ecuación se elevan al cuadrado se obtiene otra ecuación.

   a) Con las mismas raíces reales exactamente, siempre.

   b) Que puede tener más raíces que la ecuación de partida.

   c) Que puede tener menos raíces que la ecuación de partida.

CUESTIONARIO DE DISTINCION

¿Puedes distinguir las afirmaciones verdaderas de las falsas?

1. Si al índice y al exponente de un radical se les suma un mismo número se obtiene otro radical equivalente.
2. Para simplificar un radical se resta al índice y al exponente del radicando un mismo número.
3. Para multiplicar radicales del mismo índice se multiplican los radicandos y se pone por índice el común.
4. Para elevar un radical a una potencia, que sea divisor del índice, se divide el índice por el exponente de la potencia.
5. Para extraer la raíz de otra raíz se conserva el radicando y se pone por índice el producto de los índices.
6. Una raíz de índice compuesto puede reducirse a la extracción sucesiva de raíces cuyos índices sean los divisores primos del índice compuesto.
7. El cálculo de una fracción que contengan radicales en el denominador se simplifica transformando la fracción en otra equivalente que no contenga radicales en el denominador.
8. Para racionalizar un denominador de la forma $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}$ se multiplican el numerador y el denominador por $\left(\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}\right)$.
9. Un denominador de la forma $\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}$ se transforma en otro con un solo radical multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$.
10. Una ecuación irracional es la que contiene la incógnita bajo denominador.
11. Si los dos miembros de una ecuación se elevan al cuadrado se obtiene otra ecuación que siempre es equivalente a la primera.

CUESTIONARIO DE COMPLETACION

Sustituir los puntos o los interrogantes por las cantidades que correspondan para que las igualdades sean ciertas:

1. $\sqrt[3]{a^6} = -?-$ 2. $\sqrt[5]{a^7} = -?-\ \sqrt{a},$

3. $\sqrt[4]{a^5b^6c^7} = \ldots\ldots \sqrt[4]{abc},$

4. $\sqrt[3]{a^2b}\ .\ \sqrt[2]{ab^2} = \sqrt[?]{a^4\ldots}\ \sqrt[?]{a^3\ldots} = \sqrt[?]{\ldots\ldots\ldots} = a\,.\,b\sqrt[6]{\ldots}$

5. $\sqrt{x^3y^5} \div \sqrt[3]{x^2y} = \sqrt[?]{x^9\ldots} \div \sqrt[?]{x^4\ldots} = -?-$

6. $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[?]{a^?}$

7. $a^{-\frac{1}{4}} = -?-$

8. $a^{-\frac{2}{3}}\ .\ a^{+\frac{1}{4}} = a^{-?-}$

9. $(a^{-\frac{1}{3}}) = -?-$

10. $\dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\ .\ -?-}{2}$

11. $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \dfrac{2.(\ldots\ldots)}{2}$

12. $\sqrt[3]{x^6y^9z^{12}t^{15}} = ?,$

13. $\sqrt[6]{a^9\ .\ b^6\ .\ c^{12}} = \sqrt{a^?\,b^?\,c^?}$

14. $\left(\sqrt{a^2\ .\ b\ .\ c}\right) = \sqrt{a^?\ .b^?\ .c^?}$

15. $\sqrt{\sqrt[3]{a^6}} = ?$

16. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{?}}$

PROBLEMAS SOBRE EL CAPITULO 7

1. Calcular las siguientes raíces exactas:

a) $\sqrt{16x^4b^6y^8},$ b) $\sqrt[3]{-27m^3n^9p^{12}},$

c) $\sqrt[5]{-32a^5b^{10}c^{15}},$ d) $\sqrt{\dfrac{25x^2y^4z^6}{4a^2b^4c^6}},$

e) $\sqrt[3]{\dfrac{54a^5b^{10}c^{14}}{2a^2bc^2}},$ f) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{u^4v^8t^{12}}}$

2. Determinar el valor aritmético de las siguientes raíces, indicando aquellas que carecen de valor aritmético:

a) $\sqrt{-4},$ b) $\sqrt[3]{-8},$ c) $\sqrt{16},$

d) $\sqrt[5]{-32},$ e) $\sqrt[4]{16},$ f) $\sqrt{25}.$

3. Indicar si las siguientes raíces son exactas, y en caso afirmativo calcularlas:

a) $\sqrt{\dfrac{a^2+4ab+b^2}{x^2-4xy+y^2}},$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3}{8a^3-36a^2b+54ab^2+27b^3}}$

4. Efectuar las sumas y restas de radicales siguientes:

a) $\sqrt{ab^3} - 2\sqrt[4]{a^2b^6} + 5\sqrt[6]{a^3b^9}$

b) $-5\sqrt[5]{x^4y^2z} + 3\sqrt[10]{x^8y^4z^2} + \sqrt[15]{x^{12}y^6z^3}$

5. Calcular, mediante radicaciones sucesivas, las siguientes raíces de índice compuesto:

a) $\sqrt[4]{1{,}296}$ b) $\sqrt[6]{46{,}656}$ c) $\sqrt[4]{81a^4b^8}$

6. Calcular las siguientes raíces compuestas:

a) $\sqrt{\sqrt{16}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{4{,}096}}}$

d) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{24}b^{12}}}$

7. Extraer los factores que sea posible de los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{a^2b^4c^7d^9}$ b) $54\sqrt[4]{a^3b^7c^{12}d^{15}}$ c) $-3\sqrt{x^5y^6z^7}$

8. Simplificar los siguientes radicales:

a) $\sqrt{\frac{x^2}{y^2} - 1}$ b) $\sqrt[3]{16a^4b^3 - 2a^3b^4}$

c) $\sqrt[4]{(x^2-y^2)\cdot\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^5}$

9. Reducir a una expresión con dos radicales la siguiente expresión:

$$\left(\sqrt{a^3b^2} - \sqrt[3]{x^5y^2}\right) - \left(-2\sqrt{a^3b^2} + \sqrt[3]{x^5y^2}\right)$$

10. Calcular la siguiente suma de radicales:

$$\sqrt{x^2+1} - 3\sqrt{4x^4+4x^2} + \sqrt{16x^6+16x4}.$$

11. Multiplicar los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{x^2}\,.\,\sqrt{x^3}\,.\,\sqrt[4]{x^5}$

b) $\sqrt{ab^3}\,.\,\sqrt[3]{a^3b}\,.\,\sqrt[6]{a^2b^2}$

12. Dividir los siguientes radicales:

a) $\dfrac{\sqrt{m^3n^5}}{\sqrt[3]{m^4n^2}}$ b) $\dfrac{\sqrt[5]{x^2yz^4}}{\sqrt{x^3y^2z^5}}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{u^4v^5t^6}}{\sqrt[4]{u^6v^7t^8}}$.

13. Calcular las siguientes potencias:

a) $\left(\sqrt{a^3bc^5}\right)^3$ b) $\left(\sqrt[3]{a^2b^3c^5}\right)^4$ c) $\left(\sqrt[5]{a^2b^6c^8}\right)^2$

14. Efectuar las siguientes operaciones, simplificando los resultados:

a) $\sqrt{\frac{x^5}{y^3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{x^5}{y^3}}$ b) $\sqrt{\frac{a}{2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^2b}{8}}$

c) $\left(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}\right)\cdot\sqrt{a+b}$

15. Efectuar las siguientes operaciones, simplificando los resultados:

a) $\left(\sqrt{x^3y^4} - \sqrt[3]{x^2y} + \sqrt{xy}\right) \div \sqrt[6]{x^5y^5}$

b) $\left(\sqrt{x^3} + \sqrt{y^3}\right)^2$

c) $\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)^3$

16. Racionalizar los siguientes denominadores:

a) $\dfrac{x}{2\sqrt{y}}$ b) $\dfrac{m}{3\sqrt{n^3}}$ c) $\dfrac{5}{4\sqrt[3]{b^2}}$ d) $\dfrac{-3}{2\sqrt[4]{ab^3}}$

17. Reducir a un solo radical la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt{a}\,.\,\sqrt[3]{b}}{\sqrt{c}\,.\,\sqrt[6]{ab}}\cdot\frac{a \div \dfrac{1}{\sqrt{b}}}{\sqrt[4]{a^3}\,.\,\sqrt{a}}$$

18. Racionalizar los siguientes denominadores:

a) $\dfrac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ d) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}$

19. Racionalizar los siguientes denominadores:

a) $\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$ b) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$ c) $\dfrac{x^2-y^2}{x+\sqrt{y}-\sqrt{z}}$

20. Ordenar de menor a mayor los siguientes radicales: (Se consideran los valores aritméticos).

$\sqrt{3},\quad \sqrt[3]{9},\quad \sqrt[4]{6},\quad \sqrt[5]{30},\quad \sqrt[6]{40}.$

(Ayuda: Reducirlos a índice común).

21. Introducir bajo el signo radical todos los factores que están fuera en los siguientes radicales:

a) $5a^2b^3\sqrt{ab}$ b) $-3xy^3\sqrt[3]{x^2y}$ c) $2mn^3\sqrt[5]{m^2n^4}$

(Ayuda: Cada factor que se introduce en un radical debe ser elevado a un exponente igual al índice de la raíz).

22. Efectuar las operaciones que se indican a continuación con potencias de exponente racional:

a) $x^{-\frac{2}{3}}\cdot y^{-\frac{2}{3}}\cdot z^{-\frac{2}{3}}$

b) $x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{-1}\cdot x^{2}\cdot x^{\frac{1}{3}}$

c) $\dfrac{x^{-\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{4}{3}}}$

d) $(a^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

e) $\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{y^{-\frac{1}{2}}}$

f) $a^{\frac{5}{2}}\cdot a^{-\frac{5}{2}}$

g) $(x\cdot y\cdot z)^{-\frac{1}{4}}$

23. Racionalizar los siguientes denominadores:

a) $\dfrac{x+2\sqrt{y}}{x-2\sqrt{y}}$ b) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}-1}{\sqrt{x^2-1}+1}$

c) $\dfrac{5}{2+3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$

24. Calcular los valores aritméticos de los siguientes radicales, con dos cifras decimales de aproximación;

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt{2}-1}$ c) $\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

25. Simplificar los siguientes radicales, extrayéndole los factores que sea posible:

a) $\sqrt{\dfrac{a^2x-2ax^2+x^3}{a^2+2ax+x^2}}$

b) $\sqrt{\dfrac{a}{a^2bd-2ab^2d+b^3d}}$

c) $\sqrt{\dfrac{x^3+2x^2+x}{a^3+a^2b}}$

26. Comprobar que: $\left(x\sqrt{\dfrac{y}{x}}+y\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)\cdot\left(x\sqrt{\dfrac{y}{x}}-y\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)=0$

27. Comprobar la siguiente identidad:

$$\left(\sqrt{1-a}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}\right)\div\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\right)=\sqrt{1-a}$$

28. Racionalizar los siguientes denominadores:

a) $\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$

b) $\dfrac{xy(x^2+xy+y^2)}{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}$

29. Comprobar las siguientes identidades:

a) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{8a^3}}\right)^5=2a$

b) $\left(\sqrt[4]{\sqrt[6]{81a^4}}\right)^6=3a$

c) $\sqrt[n-1]{\dfrac{a}{\sqrt[n]{a}}}=\sqrt[n]{a}$

30. $\sqrt[2m]{\sqrt[3n]{x^5}}\cdot\sqrt[6m]{\sqrt[n]{x^5}}\cdot\sqrt[m]{\sqrt[6n]{x^9}}\cdot\sqrt[6n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[mn]{x^3}$

INDICE

INDICE

Unidad 4

4. DESCOMPOSICION DE POLINOMIOS ENTEROS EN FACTORES. M.C.D. Y M.C.M. DE EXPRESIONES ENTERAS

Unidad 5

5. FRACCIONES ALGEBRAICAS

Unidad 6

6. ECUACIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS DE PRIMER GRADO

Unidad 7

7. EL CALCULO CON RADICALES Y LAS POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONAL

Nina De Castro

Nina De Castro