Universidad del Atlántico	**CÓDIGO:** FOR-DO-109 **VERSIÓN:** 0 **FECHA:** 03/06/2020

AUTORIZACIÓN DE LOS AUTORES PARA LA CONSULTA, LA REPRODUCCIÓN PARCIAL O TOTAL, Y PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DEL TEXTO COMPLETO

Puerto Colombia, **20 de Marzo de 2021**

Señores
DEPARTAMENTO DE BIBLIOTECAS
Universidad del Atlántico

Asunto: Autorización Trabajo de Grado

Cordial saludo,

Yo, **EFREN MESINO ESPINOSA**, identificado(a) con **C.C. No. 1.140.891.371** de **BARRANQUILLA**, autor(a) del trabajo de grado titulado **UNA INTRODUCCION A LOS POLITOPOS CONVEXOS** presentado y aprobado en el año **2020** como requisito para optar al título Profesional de **MATEMATICO**; autorizo al Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico para que, con fines académicos, la producción académica, literaria, intelectual de la Universidad del Atlántico sea divulgada a nivel nacional e internacional a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios del Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico pueden consultar el contenido de este trabajo de grado en la página Web institucional, en el Repositorio Digital y en las redes de información del país y del exterior, con las cuales tenga convenio la Universidad del Atlántico.
- Permitir consulta, reproducción y citación a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato CD-ROM o digital desde Internet, Intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer.

Esto de conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.
Atentamente,

Firma
EFREN MESINO ESPINOSA
C.C. No. 1.140.891.371 de BARRANQUILLA

Universidad del Atlántico	**CÓDIGO: FOR-DO-110**
	VERSIÓN: 01
	FECHA: 02/DIC/2020

DECLARACIÓN DE AUSENCIA DE PLAGIO EN TRABAJO ACADÉMICO PARA GRADO

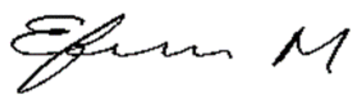
Este documento debe ser diligenciado de manera clara y completa, sin tachaduras o enmendaduras y las firmas consignadas deben corresponder al (los) autor (es) identificado en el mismo.

Puerto Colombia, **20 de Marzo de 2021**

Una vez obtenido el visto bueno del director del trabajo y los evaluadores, presento al **Departamento de Bibliotecas** el resultado académico de mi formación profesional o posgradual. Asimismo, declaro y entiendo lo siguiente:

- El trabajo académico es original y se realizó sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, en consecuencia, la obra es de mi exclusiva autoría y detento la titularidad sobre la misma.
- Asumo total responsabilidad por el contenido del trabajo académico.
- Eximo a la Universidad del Atlántico, quien actúa como un tercero de buena fe, contra cualquier daño o perjuicio originado en la reclamación de los derechos de este documento, por parte de terceros.
- Las fuentes citadas han sido debidamente referenciadas en el mismo.
- El (los) autor (es) declara (n) que conoce (n) lo consignado en el trabajo académico debido a que contribuyeron en su elaboración y aprobaron esta versión adjunta.

Título del trabajo académico:	**UNA INTRODUCCION A LOS POLITOPOS CONVEXOS**
Programa académico:	**MATEMATICAS**

Firma de Autor 1:							
Nombres y Apellidos:	**EFREN MESINO ESPINOSA**						
Documento de Identificación:	**CC**	**X**	**CE**		**PA**	**Número:**	**1.140.891.371**
Nacionalidad:						**Lugar de residencia:**	
Dirección de residencia:							
Teléfono:						**Celular:**	

Universidad del Atlántico	CÓDIGO: FOR-DO-111 VERSIÓN: 0 FECHA: 03/06/2020

FORMULARIO DESCRIPTIVO DEL TRABAJO DE GRADO

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO DE GRADO	**UNA INTRODUCCION A LOS POLITOPOS CONVEXOS**
AUTOR(A) (ES)	**EFREN MESINO ESPINOSA**
DIRECTOR (A)	**CARLOS ARAUJO MARTINEZ**
CO-DIRECTOR (A)	-
JURADOS	**BORIS LORA CASTRO** **TOVIAS CASTRO POLO**
TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TITULO DE	**MATEMATICO**
PROGRAMA	**MATEMÁTICAS**
PREGRADO / POSTGRADO	**PREGRADO**
FACULTAD	**CIENCIAS BÁSICAS**
SEDE INSTITUCIONAL	**SEDE NORTE**
AÑO DE PRESENTACIÓN DEL TRABAJO DE GRADO	**2020**
NÚMERO DE PÁGINAS	**100**
TIPO DE ILUSTRACIONES	**GRAFICOS Y DIAGRAMAS**
MATERIAL ANEXO (VÍDEO, AUDIO, MULTIMEDIA O PRODUCCIÓN ELECTRÓNICA)	**NO APLICA**
PREMIO O RECONOCIMIENTO	**NO APLICA**

Universidad del Atlántico
Facultad de Ciencias Básicas
Programa de Matemáticas

Una Introducción a los Politopos Convexos

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Matemático

Autor: Efren Mesino Espinosa

Director: Carlos Araujo Martínez Ph.D

Barranquilla, Atlántico
2020

Aprobación

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad del Atlántico como integrantes del jurado examinador del trabajo de grado titulado **"Una Introducción a los Politopos Convexos."**, presentado por el estudiante **Efren Mesino Espinosa.**, titular de la Cédula de Ciudadanía **1.140.891.371**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Universidad para optar al título de Matemático.

Director

Jurado

Jurado

Índice general

Resumen

En este trabajo se estudiarán los politopos convexos, algunas de sus propiedades topológicas y su estructura facial, tomando como fuente principal los dos primeros capítulos del libro An introduction to convex polytopes [3]. Inicialmente se hará un estudio de la estructura afín de $\mathbb{R}^d$ y los conjuntos convexos generales. Luego se entrará en detalle en la caracterización de los politopos y sus caras, se verá la existencia de un conjunto minimal que los genera. Finalmente, se introducirán unos conjuntos llamados poliédricos de los cuales también se darán algunas propiedades y se estudiará su estructura facial, se mostrará la relación entre lo conjuntos poliédricos acotados y los politopos, lo cual ayudará a dar propiedades adicionales de los politopos y sus caras.

Agradecimientos

A Dios por haberme permitido culminar esta etapa de mi vida. A mis padres, mis abuelos y mi hermana quienes siempre me han apoyado y a todos los miembros de mi familia que con mucho esfuerzo y apoyo incondicional me ayudaron a llegar hasta aquí.

Al profesor Carlos Araujo que aparte de ser mi asesor en este trabajo, fue mi profesor de álgebra lineal y álgebra abstracta que con su metodología ayudó al desarrollo de mi pensamiento matemático. A todos los profesores que fueron fundamentales en mi formación y se esforzaron por trasmitirme sus conocimientos, entre ellos: Oswaldo Dede, Tovias Castro y Boris Lora.

A mis compañeros y amigos que me acompañaron durante este proceso, quienes siempre me apoyaron en las dificultades y que finalmente después de largas jornadas de estudio juntos, pudimos lograr esta meta tan importante para nosotros.

Introducción

Un politopo convexo es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Estos conjuntos aparecieron en un contexto matemático en la civilización sumeria, en Babilonia y en Egipto. Las fuentes son el papiro de Moscú y el papiro Rhind. Algunos de los politopos regulares ya se conocían para entonces. Un problema básico era calcular los volúmenes de las pirámides truncadas. Esto era necesario para determinar la cantidad de ladrillos para fortificaciones y edificios. Los babilonios a veces hicieron los cálculos correctamente, a veces no, mientras que los egipcios usaron la fórmula correcta. En el siglo V a. C., Democritos también descubrió esta fórmula y Eudoxos la probó, utilizando el método del exhausción. Theaitetos desarrolló una teoría de los politopos regulares, luego tratada por Platón en el diálogo Timaios. Euclides, alrededor de 300 a. C., consideró las propiedades métricas de los politopos, el problema del volumen, incluido el método de exhausción, y los cinco politopos regulares, los sólidos platónicos.

Kepler investigó los politopos regulares y semi-regulares. Descartes consideró los politopos convexos desde un punto de vista métrico, casi llegando a la fórmula del politopo de Euler, descubierta por Euler solo cien años después.

Contribuciones a la teoría del politopo a finales del siglo XVIII y XIX se deben a Legendre, Cauchy, Steiner, Schlafli y otros. A principios del siglo XIX y en el siglo XX, Minkowski, Dehn, Sommerville, Steinitz, Coxeter y numerosos contemporáneos dieron importantes resultados. En la actualidad, el énfasis está en los aspectos combinatorios, algorítmicos y algebraicos. Relaciones modernas a otras áreas se remontan a Newton (polinomios), Fourier (optimización lineal), Dirichlet, Minkowski y Voronoi (formas cuadráticas) y Fedorov (cristalografía). En las últimas décadas, la teoría del politopo fue fuertemente estimulada y, en parte, reorientada por la optimización lineal, la informática y la geometría algebraica. La teoría del politopo, a su vez, tuvo cierto impacto en estas áreas.[4]

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se describen los conceptos básicos de álgebra lineal y topología en $\mathbb{R}^d$ necesarios para el desarrollo y comprensión de este trabajo. Tomados principalmente de [1] y [2].

1.1. Álgebra Lineal

Definición 1.1.1. *Un espacio vectorial (o espacio lineal) V sobre un cuerpo F consiste de un conjunto en el que están definidas dos operaciones $+, \cdot$ tales que*

$$\begin{array}{rccl} + : & V \times V & \longrightarrow & V \\ & (x, y) & \longmapsto & +(x, y) = x + y, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & F \times V & \longrightarrow & V \\ & (a, y) & \longmapsto & \cdot(a, y) = ax. \end{array}$$

de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

(EV1) $\forall\ x, y \in V,\ x + y = y + x.$

(EV2) $\forall\ x, y, z \in V,\ (x + y) + z = x + (y + z).$

(EV3) $\exists\ 0 \in V /\ 0 + x = x + 0 = x, \quad \forall\ x \in V.$

(EV4) $\forall\ x \in V, \exists\ y \in V /\ x + y = y + x = 0.$

(EV5) $\forall\ x \in V,\ 1x = x,\ 1 \in F.$

(EV6) $\forall\ a, b \in F,\ \forall\ x \in V,\ (ab)x = a(bx).$

(EV7) $\forall\ x, y \in V,\ \forall\ a \in F,\ a(x + y) = ax + ay.$

(EV8) $\forall\ a, b \in F,\ \forall\ x \in V,\ (a + b)x = ax + bx.$

A los elementos del conjunto V se le llaman vectores y a los elementos del cuerpo se le llaman escalares.

Ejemplo 1.1.2. *Para $d \in \mathbb{N}$, sea $\mathbb{R}^d := \{(a_1, \dots, a_d)/\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots d\}$, donde $(a_1, \dots, a_d) = (b_1, \dots, b_d) \Leftrightarrow a_i = b_i,\ \forall\ i = 1, \dots, d$.*

Para $x = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d,\ y = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ y $c \in \mathbb{R}$, definimos:

$$x + y = (a_1 + b_1, \dots, a_d + b_d) \qquad y \qquad cx = (ca_1, \dots, ca_d).$$

$\mathbb{R}^d$ con estas operaciones es un espacio vectorial.

Definición 1.1.3. *Un subconjunto W de un espacio vectorial V sobre un cuerpo F se llama un subespacio vectorial de V si W es un espacio vectorial sobre F, bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalar definidas en V.*

Teorema 1.1.4. *Sea V un espacio vectorial y W un subconjunto de V. Entonces, W es un subespacio de V si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:*

(1) $0 \in W$.

(2) $\forall\ x, y \in W,\ x + y \in W$.

(3) $\forall\ a \in F,\ \forall x \in W,\ ax \in W$.

Teorema 1.1.5. *Cualquier intersección de subespacios de un espacio vectorial V es un subespacio de V.*

Definición 1.1.6. *Si S_1 y S_2 son dos subconjuntos no vacíos de un espacio vectorial V, entonces la suma de S_1 y S_2, que se expresa como $S_1 + S_2$, es el conjunto $\{x + y/\ x \in S_1,\ y \in S_2\}$.*

Teorema 1.1.7. *Si W_1 y W_2 son subespacios de un espacio vectorial V, entonces $W_1 + W_2$ es un subespacio de V.*

Definición 1.1.8. *Se dice que un espacio vectorial V es la suma directa de W_1 y W_2, expresada como $V = W_1 \oplus W_2$, si W_1 y W_2 son subespacios de V tales que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ y $W_1 + W_2 = V$.*

Definición 1.1.9. *Sea V un espacio vectorial, W_1 y W_2 subepacios de V. Se dice que W_1 y W_2 son complementarios si $V = W_1 \oplus W_2$.*

Definición 1.1.10. *Sea V un espacio vectorial y S un subconjunto no vacío de V. Se dice que un vector x de V es una combinación lineal de elementos de S, si existe un número finito de elementos $x_1, \dots, x_n \in S$ y escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ tales que $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$. En este caso, es común decir que x es una combinación lineal de $x_1, \dots, x_n$.*

Definición 1.1.11. *Sea V un espacio vectorial sobre F. Sea $S \subset V$, $S \neq \emptyset$, definimos el generado por S, expresado como $gen(S)$, como:*

$$gen(S) = \left\{ \sum_i a_i x_i / \ x_i \in S, \ a_i \in F \right\}.$$

El conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de S.

Teorema 1.1.12. *Sea V un espacio vectorial sobre F y sea $S \subset V$, $S \neq \emptyset$. Entonces $gen(S)$ es un subespacio de V. Además, Si W es un subespacio de V tal que $S \subset W$ entonces $gen(S) \subset W$.*

Definición 1.1.13. *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F y sea $S \subset V$. Decimos que S es un conjunto linealmente dependiente(LD) si existe un número finito de vectores distintos $x_1, \ldots, x_n \in S$ y escalares $a_1, \ldots, a_n \in F$, no todos cero, tales que*

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0,$$

y en este caso diremos que los elementos de S son LD.
En caso contrario, diremos que el conjunto S es linealmente independiente(LI), es decir, para todo $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$ implica que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Definición 1.1.14. *Sea V un espacio vectorial sobre F y sea $B \subset V$, decimos que B es una base para V si B es linealmente independiente y $gen(B) = V$.*

Ejemplo 1.1.15. *En $\mathbb{R}^d$, sea $e_1 = (1,0,0,\ldots,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0,0)$, $\ldots$, $e_d = (0,0,0,\ldots,0,1)$; el conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$ es una base para $\mathbb{R}^d$ y se conoce como base estándar para $\mathbb{R}^d$*

Teorema 1.1.16. *Sea V un espacio vectorial sobre F y sea $B \subset V$. Entonces B es una base para V si y sólo si $\forall \ x \in V$, existen únicos escalares $a_1, \ldots, a_n \in F$ tales que $x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$.*

Teorema 1.1.17. *Sea V un espacio vectorial que tiene una base β con exactamente n elementos. Entonces, cualquier subconjunto de V que contenga mas de n elementos es linealmente dependiente. Consecuentemente, cualquier subconjunto de V linealmente independiente contiene como máximo n elementos.*

Definición 1.1.18. *Un espacio vectorial V se llama dimensionalmente finito si tiene una base que consta de un número finito de elementos; el único número de elementos en cada base de V se llama dimensión de V y se denota por $dim(V)$. Si un espacio vectorial no es dimensionalmente finito, se llama dimensionalmente infinito.*

Ejemplo 1.1.19. $\beta = \{e_1, \ldots, e_d\}$ *es una base para $\mathbb{R}^d$ así que $dim(\mathbb{R}^d) = d$.*

Teorema 1.1.20. *Si W es un subespacio de un espacio vectorial V dimensionalmente finito, entonces W tiene una base finita y cualquier base para W es un subconjunto de una base para V.*

Definición 1.1.21. *Sean V y W espacios vectoriales (sobre F). Una aplicación $T : V \to W$ es una transformación lineal de V en W si para todo $x, y \in V$ y $\lambda \in F$ se cumple que*

(1) $T(x + y) = T(x) + T(y)$.

(2) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$.

Definición 1.1.22. *Sea V un espacio vectorial y W_1 un subespacio de V. Una aplicación $\Pi : V \to V$ se llama proyección sobre W_1 si*

(1) Existe un subespacio W_2 tal que $V = W_1 \oplus W_2$.

(2) Para $x = x_1 + x_2$, donde $x_1 \in W_1$ y $x_2 \in W_2$, tenemos $\Pi(x) = x_1$.

Lema 1.1.23. *Sean V y W espacios vectoriales (sobre F) y $T : V \to W$ una aplicación. Entonces:*

(1) T es lineal si y sólo si $T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$ para todo $x, y \in V$ y $\lambda \in F$.

(2) T es lineal si y sólo si para $x_1, \ldots, x_n \in V$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ tenemos que

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(x_i).$$

Definición 1.1.24. *Sean V y W espacios vectoriales y sea $T : V \to W$ lineal.*

- *Definimos el espacio nulo (o kernel) de T, representado $N(T)$ como*

$$N(T) := \{x \in V / \ T(x) = 0\}.$$

- *Definimos la imagen de T, representada $Imag(T)$ como*

$$Imag(T) := \{w \in W / \ T(x) = w, \text{ para algún } \ x \in V\}.$$

Teorema 1.1.25. *Sean V y W espacios vectoriales y sea $T : V \to W$ lineal. Entonces:*

- *$N(T)$ es un subespacio de V.*
- *$Imag(T)$ es un subespacio de W.*

Teorema 1.1.26. *Sean V y W espacios vectoriales y sea $T : V \to W$ lineal. Entonces T es uno a uno $(1 - 1)$ si y sólo si $N(T) = \{0\}$.*

Teorema 1.1.27. *Sean V y W espacios vectoriales y supóngase que V es un espacio vectorial dimensionalmente finito con una base $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Para cualquier subconjunto $\{y_1, \ldots, y_n\}$ de W existe exactamente una transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(x_i) = y_i$ para $i = 1, \ldots, n$.*

Definición 1.1.28. *Sean V, W y Z espacios vectoriales y $T : V \to W$ y $U : W \to Z$ lineales. Definimos la composición $UT : V \to Z$ mediante $(UT)(x) = U(T(x))$, $\forall x \in V$.*

Teorema 1.1.29. *Sean V, W y Z espacios vectoriales y $T : V \to W$ y $U : W \to Z$ lineales. Entonces $UT : V \to Z$ es lineal.*

Definición 1.1.30. *Sean V y W espacios vectoriales y sea $T : V \to W$ lineal. Decimos que T tiene una inversa $U : W \to V$ si $TU = I_W$ y $UT = I_V$, donde*

$$\begin{array}{rccc} I_W : & W & \to & W \\ & x & \mapsto & I_W(x) = x, \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} I_V : & V & \to & V \\ & x & \mapsto & I_V(x) = x. \end{array}$$

En este caso decimos que U es la inversa de T y se escribe $U = T^{-1}$. Además, si T tiene inversa decimos que T es invertible.

Comentario 1.1.31. *Una aplicación es invertible si y sólo si es biyectiva.*

Teorema 1.1.32. *Sean V y W espacios vectoriales, y sea $T : V \to W$ lineal e invertible, entonces $T^{-1} : W \to V$ es lineal.*

Definición 1.1.33. *Sean V y W espacios vectoriales. Decimos que V es isomorfo a W si existe una transformación lineal $T : V \to W$ tal que T es invertible.*

Teorema 1.1.34. *Sean V y W espacios vectoriales dimensionalmente finitos (sobre el mismo cuerpo F). Entonces V es isomorfo a W si y sólo si $dim(V) = dim(W)$.*

Corolario 1.1.35. *Sea V un espacio vectorial de dimensión d, entonces V es isomorfo a $\mathbb{R}^d$.*

Definición 1.1.36. *Sea $F = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$. Sea V un espacio vectorial sobre F. Un producto interno sobre V es una función que asigna a cada par ordenado de vectores x y y en V un escalar en F tal que $\forall\ x, y, z \in V,\ \lambda \in F$ satisface los siguientes axiomas:*

(1) $\langle x + z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$.

(2) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.

(3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, *donde la barra indica conjugación compleja.*

(4) $\langle x, x\rangle > 0$, *si* $x \neq 0$.

Comentario 1.1.37. *Si $F = \mathbb{R}$, entonces* (3) *se reduce a* $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

Ejemplo 1.1.38. *Sean $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x = (a_1, a_2, \ldots, a_d)$; $y = (b_1, b_2, \ldots, b_d)$ la función definida por*

$$\begin{array}{rccc} \langle\ ,\ \rangle : & \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \langle x, y\rangle := \sum\limits_{i=1}^{d} a_i b_i. \end{array}$$

Es un producto interno llamado el producto interno estándar de $\mathbb{R}^d$

Definición 1.1.39. *Un espacio vectorial V con un producto interno específico definido en él, se le llama espacio con producto interno.*

Teorema 1.1.40. *Sea V un espacio con producto interno. Entonces $\forall\ x, y, z \in V$, $\forall\ \lambda \in F$ se tiene:*

(1) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.

(2) $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$.

(3) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(4) Si $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle$ *para todo* $x \in V$*, entonces* $y = z$.

Definición 1.1.41. *Sea V un espacio con producto interno. Para $x \in V$ definimos la norma (o longitud) de x mediante $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.*

Ejemplo 1.1.42. *En $\mathbb{R}^d$, sea $x = (a_1, a_2, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ entonces*

$$||x|| = ||(a_1, a_2, \ldots, a_d)|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_d^2}.$$

Esta norma se conoce como norma Euclidiana.

Teorema 1.1.43. *Sea V un espacio con producto interno. Entonces $\forall\ x, y \in V$, $\lambda \in F$ tenemos*

(1) $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$.

(2) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(3) $|\langle x, y\rangle| \leq ||x||||y||$ *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz).*

(4) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$. *(Desigualdad triangular)*

Definición 1.1.44. *Sea V un espacio con producto interno.*

- *Sean $x, y \in V$. Decimos que x, y son ortogonales (o perpendiculares) si $\langle x, y\rangle = 0$.*
- *Sea $S \subset V$. Decimos que S es ortogonal si cualesquiera dos elementos de S son ortogonales.*
- *Sea $S \subset V$. Definimos el complemento ortogonal de S, representado $S^\perp$, como*

$$S^\perp := \{x \in V/\ \langle x, y\rangle = 0,\ \forall y \in S\}.$$

Teorema 1.1.45. *Sea V un espacio con producto interno de dimensión finita. Sea W un subespacio de V. Entonces*

$$dim(W) + dim(W^\perp) = dim(V).$$

Definición 1.1.46. *[5] Sea V un espacio vectorial de dimensión $n(n \geq 1)$. Un subespacio H de V es un hiperplano en V si $dim(H) = n - 1$.*

Definición 1.1.47. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una transformación lineal $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada funcional lineal en V.*

Teorema 1.1.48. *[5] Sea V un espacio vectorial. Entonces H es un hiperplano en V si y sólo si existe un funcional lineal no-constante f tal que $H = f^{-1}(0)$.*

1.2. Topología en $\mathbb{R}^d$

Definición 1.2.1. *Sea V un espacio vectorial con norma $||\cdot||$. Dados $x, y \in V$, definimos la distancia de x a y mediante*

$$d(x, y) = ||x - y||.$$

Ejemplo 1.2.2. *En $\mathbb{R}^d$, sean $x = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, $y = (b_1, \ldots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ entonces*

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_d - b_d)^2}.$$

Teorema 1.2.3. *Sea V un espacio vectorial con norma $||\cdot||$. Entonces $\forall\ x, y, z \in V$ tenemos*

(1) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

(2) $d(x, y) = d(y, x)$.

(3) *Si* $x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0$.

Definición 1.2.4. *Sea $a \in \mathbb{R}^d$ y $r > 0$. Definimos*

- *La bola abierta de centro a y radio r como el conjunto*

$$B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^d / \ ||x - a|| < r\}.$$

- *La bola cerrada de centro a y radio r como el conjunto*

$$\overline{B}(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^d / \ ||x - a|| \leq r\}.$$

- *La esfera de centro a y radio r como el conjunto*

$$S(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^d / \ ||x - a|| = r\}.$$

Definición 1.2.5. *Sea $A \subset \mathbb{R}^d$, decimos que A es acotado si existe $c > 0$ tal que $||x|| \leq c, \forall\ x \in A$. Es decir, $\exists\ c > 0$ tal que $A \subset \bar{B}(0, c)$.*

Definición 1.2.6. *Una sucesión en* $\mathbb{R}^d$ *es una aplicación* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^d$, *definida en el conjunto* $\mathbb{N}$ *de los números naturales. El valor que esa aplicación asume en el número* k *denotado* x_k *se llama* $k-$*ésimo término de la sucesión.*
Usaremos la notación $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *para indicar a una sucesión cuyo* $k-$*ésimo término es* $x_k \in \mathbb{R}^d$.

Definición 1.2.7. *Una subsucesión de* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *es una restricción de la sucesión a un subconjunto infinito* $\mathbb{N}' = \{k_1 < k_2 < \cdots < k_i < \cdots\} \subset \mathbb{N}$. *Una subsucesión será denotada por* $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$.

Definición 1.2.8. *Una sucesión* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *se dice acotada, si existe* $c > 0$ *tal que* $||x_k|| \leq c$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$.

Definición 1.2.9. *Sea* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^d$ *una sucesión, se dice que* $a \in \mathbb{R}^d$ *es el límite de* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *si, para todo* $\epsilon > 0$ *dado, existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $||x_k - a|| < \epsilon$ *siempre que* $k \geq k_0$. *En este caso, se dice que* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge para* a *o tiende para* a *y se escribe* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$.
Si existe $a = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, *se dice que* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *es convergente. En caso contrario, se dice que* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *es divergente.*

Teorema 1.2.10. *Sea* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^d$. *Entonces*

(1) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} ||x_k - a|| = 0$.

(2) Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge entonces* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *es acotada.*

(3) Si $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ *entonces toda subsucesión de* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge para* a.

(4) Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge entonces* $a = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ *es único.*

Corolario 1.2.11. *Dadas las sucesiones convergentes* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^d$ *y* $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$, *sean* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = b$ *y* $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha$. *Entonces*

(1) $\lim\limits_{k\to\infty} (x_k + y_k) = a + b$.

(2) $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k \cdot x_k = \alpha \cdot a$.

Definición 1.2.12. *Sea* $f : X \to \mathbb{R}^d$ *una aplicación definida en un conjunto* $X \subset \mathbb{R}^m$. *Decimos que* f *es continua en* $a \in X$ *si*

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0;\ x \in X,\ ||x - a|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(a)|| < \epsilon.$$

Si $f : X \to \mathbb{R}^d$ *es continua en todos los puntos del conjunto* X, *decimos que* f *es una aplicación continua.*

Ejemplo 1.2.13. *Toda transformación lineal* $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ *es continua.*

Definición 1.2.14. *Sean $X \subset \mathbb{R}^m$ y $Y \subset \mathbb{R}^d$, un homeomorfismo entre X y Y es una biyeccion continua $f : X \to Y$, cuya inversa $f^{-1} : Y \to X$ también es continua. Decimos entonces que X y Y son conjuntos homeomorfos.*

Ejemplo 1.2.15. *Sea $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una transformación lineal invertible, entonces su inversa $T^{-1} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es lineal y por lo tanto continua. Así que T es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^d$ sobre si mismo.*

Definición 1.2.16. *Sea $X \subset \mathbb{R}^d$. Un punto $a \in X$ es un punto interior de X si existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset X$. Denotamos por int X al conjunto formado por todos lo puntos interiores de X.*

Definición 1.2.17. *Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ es abierto si todos sus puntos son interiores, esto es, cuando para cada $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset X$.*

Definición 1.2.18. *Sea $X \subset \mathbb{R}^d$. Llamamos frontera de X al conjunto de todos los puntos $a \in \mathbb{R}^d$ tales que para todo $\delta > 0$, $B(a, \delta) \cap X \neq \emptyset$ y $B(a, \delta) \cap (\mathbb{R}^d \setminus X) \neq \emptyset$. A la frontera de X la denotamos por bd X. Los puntos $y \in$ bd X son llamados puntos frontera de X.*

Teorema 1.2.19. *Los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^d$ gozan de las siguientes propiedades:*

(1) $\emptyset$ y $\mathbb{R}^d$ son abiertos.

(2) La intersección $A = A_1 \cap \cdots \cap A_k$ de un número finito de conjuntos abiertos $A_1, \ldots, A_k$ es un conjunto abierto.

(3) La unión $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de una familia cualquiera $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos abiertos A_λ es un conjunto abierto.

Teorema 1.2.20. *Sea $f : X \to \mathbb{R}^d$ una aplicación definida en un conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$. Entonces f es continua si y sólo si la imagen inversa $f^{-1}(A)$ de todo abierto $A \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto abierto en X.*

Definición 1.2.21. *Un punto $a \in \mathbb{R}^d$ se dice adherente a un conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ si es el límite de una sucesión de puntos de X.*
Al conjunto de los puntos adherentes a X se llama clausura de X y se denota como cl X.

Teorema 1.2.22. *Sean $X \subset \mathbb{R}^d$ y $a \in \mathbb{R}^d$. $a \in$ cl X si y sólo si $\forall\ \epsilon > 0$, $B(a, \epsilon) \cap X \neq \emptyset$.*

Definición 1.2.23. *Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ es cerrado si contiene todos sus puntos adherentes, esto es, $X =$ cl X.*

Teorema 1.2.24. *Los conjuntos cerrados de $\mathbb{R}^d$ gozan de las siguientes propiedades:*

(1) $\emptyset$ y $\mathbb{R}^d$ son cerrados.

(2) *La unión* $F = F_1 \cup \cdots \cup F_k$ *de un número finito de conjuntos cerrados* $F_1, \ldots, F_k$ *es un conjunto cerrado.*

(3) *La intersección* $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ *de una familia cualquiera* $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ *de conjuntos cerrados* F_λ *es un conjunto cerrado.*

Teorema 1.2.25. *Sea* $f : X \to \mathbb{R}^d$ *una aplicación definida en un subconjunto* $X \subset \mathbb{R}^m$. *Entonces* f *es continua si y sólo si la imagen inversa* $f^{-1}(F)$ *de todo cerrado* $F \subset \mathbb{R}^d$ *es un conjunto cerrado en* X.

Definición 1.2.26. *Un conjunto* $K \subset \mathbb{R}^d$ *es compacto si es cerrado y acotado.*

Teorema 1.2.27. *Un conjunto* $K \subset \mathbb{R}^d$ *es compacto si y sólo si toda sucesión de puntos* $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in K$ *posee una subsucesión que converge para un punto de* K.

Teorema 1.2.28. *Sea* $K \subset \mathbb{R}^d$. *Si* K *es finito entonces* K *es compacto.*

Teorema 1.2.29. *Sea* $f : X \to \mathbb{R}^d$ *continua en un conjunto* $X \subset \mathbb{R}^m$. *Para todo subconjunto compacto* $K \subset X$, *su imagen* $f(K)$ *es compacta.*

Corolario 1.2.30 (Weierstrass.)**.** *Toda función real continua* $f : K \to \mathbb{R}$, *definida en un compacto* $K \subset \mathbb{R}^d$, *alcanza su máximo y su mínimo en* K, *esto es, existen puntos* $x_0, x_1 \in K$ *tales que* $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$, $\forall x \in K$.

Capítulo 2

Conjuntos Convexos

En este capítulo se hace un desarrollo de la teoría de conjuntos convexos generales, estudiando algunas de sus propiedades. Luego se entrará en detalle con aquellos conjuntos convexos que son cerrados para así estudiar su estructura facial, más adelante nos centramos en los conjuntos convexos compactos que tienen al 0 como punto interior.

2.1. La Estructura Afín de $\mathbb{R}^d$

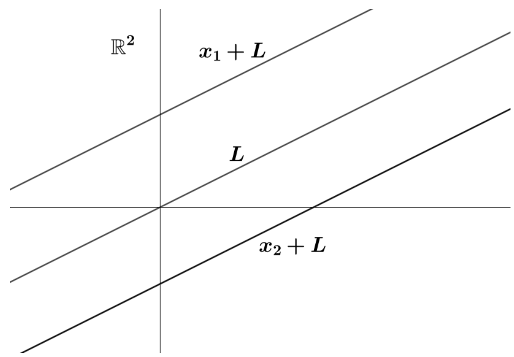
En esta sección se introduce la estructura afín de $\mathbb{R}^d$ como una teoría análoga a la estructura vectorial de $\mathbb{R}^d$. Se dan conceptos como espacios afines, combinaciones afines, independencia afín, bases, dimensión, transformaciones afines e isomorfismos.
Todos los enunciados aparecen propuestos en [3] y las pruebas fueron desarrolladas por el autor del trabajo.

Definición 2.1.1. *Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ es un subespacio afín de $\mathbb{R}^d$ si $A = \emptyset$ o $A = x + L = \{x + l/\ l \in L\}$, donde $x \in \mathbb{R}^d$ y L es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^d$. Es decir, A es una traslación de un subespacio vectorial.*
Por un espacio afín nos referimos a un subespacio afín de algún $\mathbb{R}^d$. Cuando A_1 y A_2 son subespacio afines de $\mathbb{R}^d$ tales que $A_1 \subset A_2$, llamaremos a A_1 un subespacio afín de A_2.

Observación 2.1.2. *Si $A = x + L$ es un subespacio afín, entonces L es único mientras que x puede ser escogido arbitrariamente en A.*

En efecto: Supongamos que $A = x+L$ y $A = x+L'$, donde L y L' son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^d$. Sea $l \in L$ entonces $x+l \in A$ así que existe $l' \in L'$ tal que $x+l = x+l'$ luego $l-l' = 0$ lo que implica que $l = l'$ entonces $l \in L'$ por lo tanto $L \subset L'$, de manera análoga se llega que $L' \subset L$ por lo tanto $L = L'$. Ahora sea $y \in A$, así que existe $l \in L$ tal que $y = x+l$, entonces $A = x + L = x + (l + (-l)) + L = (x + l) + ((-l) + L) = (x + l) + L = y + L$.

Ejemplo 2.1.3. *(1) En $\mathbb{R}^2$, cualquier recta L que pasa por el origen es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$, entonces los conjuntos $A_1 = x_1 + L$ y $A_2 = x_2 + L$ son subespacios afines.*



(2) Todo vector $y \in \mathbb{R}^d$ es un subespacio afín, ya que $\forall y \in \mathbb{R}^d$, $y = y + L$, donde $L = \{0\}$.

(3) Todo subespacio vectorial L de $\mathbb{R}^d$ es un subespacio afín, puesto que $L = 0 + L$, donde $0 \in \mathbb{R}^d$.

Definición 2.1.4. *Sean $A_1 = x_1 + L_1$ y $A_2 = x_2 + L_2$ subespacios afines no-vacíos de $\mathbb{R}^d$.*

(1) A_1 y A_2 son paralelos si $L_1 \subset L_2$ o $L_2 \subset L_1$.

(2) A_1 y A_2 son complementarios si L_1 y L_2 son complementarios(y ortogonales si L_1 y L_2 son ortogonales).

Lema 2.1.5. *Sean A_1 y A_2 subespacios afines complementarios entonces $A_1 \cap A_2 = \{x_0\}$, para algún $x_0 \in \mathbb{R}^d$.*

Demostración. Sean $A_1 = x_1 + L_1$ y $A_2 = x_2 + L_2$ entonces $L_1 \oplus L_2 = \mathbb{R}^d$ y $L_1 \cap L_2 = \{0\}$.
Como $x_1 \in \mathbb{R}^d$ entonces $x_1 = l_1 + l_2$, $l_1 \in L_1$, $l_2 \in L_2$.
Ahora, sea $x_0 \in A_1$ entonces $x_0 = x_1 + k_1$, $k_1 \in L_1$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_0 &= x_1 + k_1 &&= (l_1 + l_2) + k_1 \\ &= (l_1 + k_1) + l_2 &&= x_3 + l_2 \in A_2. \end{aligned}$$

Así que $x_0 \in A_1 \cap A_2$, luego por la Observación 2.1.2 tenemos que $A_1 = x_0 + L_1$ y $A_2 = x_0 + L_2$,

$$\Rightarrow A_1 \cap A_2 = (x_0 + L_1) \cap (x_0 + L_2) = x_0 + (L_1 \cap L_2) = x_0 + \{0\} = \{x_0\}.$$

$\square$

Teorema 2.1.6. *Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ es un subespacio afín si y sólo si $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A$ para todo $x_1, x_2 \in A$ y todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $A = x + L$ un subespacio afín y sean $x_1, x_2 \in A$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, entonces $x_1 = x + u$, $x_2 = x + v$ con $u, v \in L$.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 &= \lambda_1(x+u) + \lambda_2(x+v) \\
&= \lambda_1 x + \lambda_1 u + \lambda_2 x + \lambda_2 v \\
&= (\lambda_1 + \lambda_2)x + (\lambda_1 u + \lambda_2 v) \\
&= x + w \in A, \qquad (\lambda_1 u + \lambda_2 v = w \in L)
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$] Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ tal que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A$, $\forall x_1, x_2 \in A$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, definamos $L = A - x$, $x \in A$, probemos que L es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^d$.
$(*)$ Sean $l_1, l_2 \in L$, entonces existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $l_1 = x_1 - x$, $l_2 = x_2 - x$ y sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 &= \lambda_1(x_1 - x) + \lambda_2(x_2 - x) \\
&= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x \\
&= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - x \\
&= z - x \in L, \qquad (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = z \in A).
\end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que $\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 \in L$, $\forall l_1, l_2 \in L$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

(1) $0 = x - x \in L$.

(2) Sea $l \in L$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda l = (1-\lambda)0 + \lambda l \in L$.

(3) Sean $l_1, l_2 \in L$, entonces $l_1 + l_2 = 2[(1 - \frac{1}{2})l_1 + \frac{1}{2}l_2] \in L$.

De $(1-3)$ tenemos que $L = A - x$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^d$, luego $A = x + L$. Por lo tanto A es un subespacio afín de $\mathbb{R}^d$. $\square$

Definición 2.1.7. *Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $x_1 \neq x_2$; el conjunto*

$$\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\},$$

es llamado la recta a través de x_1 y x_2

Comentario 2.1.8. *El teorema 2.1.6 establece que la recta a través de dos puntos de A está contenida en A*

Definición 2.1.9. *Una combinación afín de puntos $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^d$ es una combinación lineal $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ tal que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Escribiremos*

$$\sum_{i=1}^{n}{}^{a} \lambda_i x_i.$$

Para indicar que la combinación lineal $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ es una combinación afín.(La combinación lineal vacía($n = 0$) no es una combinación afín. Por lo tanto, en una combinación afín $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ siempre tenemos $n \geq 1$.)

Teorema 2.1.10. *Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ un subespacio afín, entonces cualquier combinación afín de puntos de A esta en A*

Demostración. Sea $A = x + L$ y sean $x_1, x_2, ..., x_n \in A$ y $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$, así que $x_i = x + l_i$ con $x \in A$ y $l_i \in L$.

$\sum\limits_{i=1}^{n} {}^a\lambda_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} {}^a\lambda_i(x + l_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} {}^a\lambda_i x + \sum\limits_{i=1}^{n} {}^a\lambda_i l_i = x + \sum\limits_{i=1}^{n} {}^a\lambda_i l_i = x + v \in A, \quad (v = \sum\limits_{i=1}^{n} {}^a\lambda_i l_i \in L)$. □

Teorema 2.1.11. *La intersección de cualquier familia de subespacios afines de $\mathbb{R}^d$ es un subespacio afín de $\mathbb{R}^d$*

Demostración. Sea $A = \{A_i / i \in I\}$ una familia de subespacios afines de $\mathbb{R}^d$, $A_i = x_i + L_i, \forall A_i \in A$ con $x_i \in \mathbb{R}^d$ y L_i subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^d$.

Si $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \emptyset$ ya se tiene el resultado. Supongamos que $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, entonces existe $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$. Si $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$, entonces $A_i = x + L_i$, $\forall A_i \in A$ entonces $\bigcap A_i = x + \bigcap\limits_{i \in I} L_i$ por lo tanto $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ es un subespacio afín, ya que $\bigcap\limits_{i \in I} L_i$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^d$. □

Definición 2.1.12. *Sea $M \subset \mathbb{R}^d$, el subespacio afín generado por M o la envolvente afín de M, denotado por aff M. Se define como:*

$$affM = \bigcap A_i,\ M \subset A_i,\ A_i \text{ subespacios afines de } \mathbb{R}^d.$$

Es decir, el subespacio afín mas pequeño que contiene a M.

Teorema 2.1.13. *Sea $M \subset \mathbb{R}^d$, el subespacio afín generado por $M(affM)$ es el conjunto de todas las combinaciones afines de puntos de M.*

Demostración. Sea $P = \{\sum\limits_{i} {}^a\lambda_i x_i /\ x_i \in M,\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \sum\limits_{i} \lambda_i = 1\}$, el conjunto de todas las combinaciones afines de puntos de M.
P es un subespacio afín de $\mathbb{R}^d$. En efecto, sean $u, v \in P$ y $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\mu_1 + \mu_2 = 1$, veamos que $\mu_1 u + \mu_2 v \in P$, como $u, v \in P$ entonces $u = \sum\limits_{i=1}^{n} {}^a\lambda_i x_i$ y $v = \sum\limits_{i=1}^{m} {}^a\alpha_i y_i$, $x_i, y_i \in M$ y $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$. Luego

$\mu_1 u + \mu_2 v = \mu_1 \sum\limits_{i=1}^{n} {}^a\lambda_i x_i + \mu_2 \sum\limits_{i=1}^{m} {}^a\alpha_i y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_1\lambda_i x_i + \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_2\alpha_i y_i$ y

$\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_1\lambda_i + \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_2\alpha_i = \mu_1 \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i + \mu_2 \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = \mu_1 + \mu_2 = 1.$

Así $\mu_1 u + \mu_2 v$ es una combinación afín de puntos de M. Por lo tanto $\mu_1 u + \mu_2 v \in P$
Además para $x \in M$ y $\lambda = 1$ tenemos que $\lambda x \in P$, así $M \subset P$ lo cual implica que $affM \subset P$.
Solo falta probar que $P \subset affM$.
Sea $x \in P$, entonces $x = \sum_{i=1}^{n} {}^a \lambda_i x_i,\ x_i \in M,\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$
Como $x_i \in M$, entonces $x_i \in affM$ por lo tanto $x \in affM$ por el Teorema 2.1.10, ya que $affM$ es un subespacio afín, entonces $P \subset affM$. Por lo tanto $P = aff\ M$. $\square$

Ejemplo 2.1.14. *Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $x_1 \neq x_2$. El Teorema 2.1.13 nos dice que $aff\{x_1, x_2\}$ es el conjunto de todas las combinaciones afines de los puntos x_1 y x_2. Es decir*

$$aff\{x_1, x_2\} = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\},$$

que es la recta a través de x_1 y x_2 de la Definición 2.1.7.

Comentario 2.1.15. *Usaremos la notación $n-$familia $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para indicar el conjunto de los n puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$.*

Definición 2.1.16. *Una n-familia $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de puntos de $\mathbb{R}^d$ es afínmente independiente si una combinación lineal $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots \lambda_n x_n = 0$ con $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0$, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.*
Una n-familia la cual no es afínmente independiente es llamada afínmente dependiente. Es decir, existen reales $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ no todos ceros tales que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots \lambda_n x_n = 0$ con $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0$.

Comentario 2.1.17. *La familia vacía $(n = 0)$ es afínmente independiente.*

Observación 2.1.18. *Independencia afín es equivalente a decir que ninguno de los puntos es una combinación afín de los puntos restantes.*

En efecto: probaremos que la $n-$familia $(x_1, \ldots, x_n)$ es afínmente dependiente si y sólo si para algún i, $i = 1, \ldots, n$, $x_i = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \cdots + \lambda_n x_n$ tal que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_n = 1$.

$\Rightarrow]$ *Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una $n-$familia afínmente dependiente. Es decir, existen reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ no todos ceros tales que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots \lambda_n x_n = 0$ con $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0$.*
Supongamos que para algún i, $1 \leq i \leq n$, $\lambda_i \neq 0$, entonces

$$x_i = -(\frac{\lambda_1}{\lambda_i} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} x_{i-1} + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} x_{i+1} + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_i} x_n) \qquad y$$

$$\lambda_i = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_n).$$

Además

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} -\frac{\lambda_j}{\lambda_i} = -\frac{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_n)}{\lambda_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i} = 1.$$

Por lo tanto, x_i es combinación afín de $x_1, \dots, x_{i-1} + x_{i+1}, \dots, x_n$.

$\Leftarrow$] *Para algún i, $i = 1, \dots, n$, sea $x_i = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{i-1}x_{i-1} + \lambda_{i+1}x_{i+1} + \cdots + \lambda_n x_n$ tal que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_n = 1$.*

$$\Rightarrow \ \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{i-1}x_{i-1} + (-1)x_i + \lambda_{i+1}x_{i+1} + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \qquad y$$

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + (-1) + \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_n = 0.$$

Entonces $\lambda_i = -1 \neq 0$. Por lo tanto, la $n-$familia $(x_1, \dots, x_n)$ es afínmente dependiente.

Teorema 2.1.19. *Si $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ tal que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$, entonces los coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son únicos si y sólo si la n-familia$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es afínmente independiente.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $x = \sum\limits_{i=1}^{n} {}^a\lambda_i x_i$ tal que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son únicos.
Supongamos que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es afínmente dependiente, entonces existen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ no todos ceros tales que $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \cdots + \mu_n x_n = 0$ con $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i = 0$.

$$x = \sum_{i=1}^{n} {}^a\lambda_i x_i + 0 = \sum_{i=1}^{n} {}^a\lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) x_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) = 1.$$

Ahora $\mu_j \neq 0$ para algún $j \in \{1, ..., n\}$, entonces $\lambda_j \neq \lambda_j + \mu_j$ así hemos encontrado dos representaciones diferentes para x, absurdo. Por lo tanto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es afínmente independiente.

$\Leftarrow$] Sea $x = \sum\limits_{i=1}^{n} {}^a\lambda_i x_i$ tal que la familia $(x_1, \dots, x_n)$ es afínmente independiente y supongamos que existen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ con $\lambda_i \neq \mu_i$ tales que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} {}^a\mu_i x_i$, entonces

$$0 = x - x = \sum_{i=1}^{n} {}^a\lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{n} {}^a\mu_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) x_i \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) = 0.$$

Ahora como $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es afínmente independiente, entonces $\lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = \cdots = \lambda_n - \mu_n = 0$, así $\lambda_i = \mu_i$, $\forall i = 1, ..., n$. Por lo tanto los coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ son únicos. $\square$

Teorema 2.1.20. *Independencia afín de una n-familia $(x_1, \dots, x_n)$ es equivalente a independencia lineal de una/todas de las $(n-1)$-familias*

$$(x_1 - x_i, \dots, x_{i-1} - x_i, x_{i+1} - x_i, \dots, x_n - x_i),\ i = 1, \dots, n.$$

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $(x_1, \ldots, x_n)$ una $n-$familia afínmente independiente y veamos que la $(n-1)$-familia$(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_n - x_1)$ es linealmente independiente.

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_2(x_2 - x_1) + \mu_3(x_3 - x_1) + \cdots + \mu_n(x_n - x_1) \\ &= \mu_2 x_2 - \mu_2 x_1 + \mu_3 x_3 - \mu_3 x_1 + \cdots + \mu_n x_n - \mu_n x_1 \\ &= -(\mu_2 + \mu_3 + \cdots + \mu_n)x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 + \cdots + \mu_n x_n. \end{aligned}$$

Además $-(\mu_2 + \mu_3 + \cdots + \mu_n) + \mu_2 + \mu_3 + \cdots + \mu_n = 0$, entonces $\mu_2 = \mu_3 = \cdots = \mu_n = 0$ ya que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es afínmente independiente. Por lo tanto $(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_n - x_1)$ es linealmente independiente.

$\Leftarrow$] Sea $(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_n - x_1)$ linealmente independiente. Tomemos $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ con $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0$ y probemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \\ &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)x_1 \\ &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_1 - \cdots - \lambda_n x_1 \\ &= \lambda_2(x_2 - x_1) + \cdots + \lambda_n(x_n - x_1). \end{aligned}$$

Entonces $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$ lo cual implica que $\lambda_1 = 0$. Por lo tanto $(x_1, ..., x_n)$ es afinmente independiente. $\square$

Observación 2.1.21. *Sea $(x_1, ..., x_n)$ una $n-$familia de puntos de $A = x + L$, la $n-$familia $(x_1, ..., x_n)$ determina $(n-1)-$familias de vectores $(x_1 - x_i, ..., x_{i-1} - x_i, x_{i+1} - x_i, ..., x_n - x_i)$, $i = 1, ..., n$ de L, ya que $x_i = x + l_i$, entonces $x_j - x_i = (x + l_l) - (x + l_i) = (l_j - l_i) \in L$. Además el teorema anterior nos dice que si $(x_1, ..., x_n)$ es afínmente independiente, entonces todas las $(n-1)$-familias $(x_1 - x_i, ..., x_{i-1} - x_i, x_{i+1} - x_i, ..., x_n - x_i)$, $i = 1, ..., n$. son linealmente independientes.*
Recíprocamente dado un punto $x_j \in A$, $x_j = x + l_j$ y la $(n-1)-$familia de vectores $(l_1, l_2, ..., l_{n-1})$ en L, obtenemos la $n-$familia de puntos $(x_1, ..., x_{n-1}, x_j)$ en A con $x_i = x_j + l_i$, $i = 1, ..., n-1$. Además si $(l_1, l_2, ..., l_{n-1})$ es linealmente independiente, entonces $(x_1, ..., x_{n-1}, x_j)$ es afínmente independiente. En efecto, sea $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_j = 0$ con $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_j \\ &= \lambda_1(x + l_j + l_1) + \lambda_2(x + l_j + l_2) + \cdots + \lambda_{n-1}(x + l_j + l_{n-1}) + \lambda_n(x + l_j) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)(x + l_j) + \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \cdots + \lambda_{n-1} l_{n-1} \\ &= \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \cdots + \lambda_{n-1} l_{n-1}. \end{aligned}$$

Luego como $(l_1, l_2, ..., l_{n-1})$ es linealmente independiente, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ y así $\lambda_n = 0$ por lo tanto $(x_1, ..., x_{n-1}, x_j)$ es afínmente independiente.

Definición 2.1.22. *Una base afín de un espacio afín A es una $n-$familia$(x_1, ..., x_n)$ afínmente independiente de puntos de A tal que $A = aff\{x_1, ..., x_n\}$.*

Definición 2.1.23. *La dimensión(dim A) de un espacio afín no-vacío A es la dimensión del subespacio vectorial L tal que $A = x + L$(ya que L es único, dim A está bien definida). Cuando $A = \emptyset$, dim $A = -1$.*

Teorema 2.1.24. *Sea A un espacio afín. La dimensión de A es $n-1$ si y sólo si n es el entero no negativo mas grande tal que hay una $n-$familia afínmente independiente de puntos de A.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $A = x + L$ y $dim(A) = dim(L) = n-1$.
Supongamos que hay una $(n+1)-$familia$(x_1, ..., x_n, x_{n+1})$ afínmente independiente, esto implicaría que las $n-$familias $(x_1 - x_i, ..., x_{i-1} - x_i, x_{i+1} - x_i, ..., x_n - x_i, x_{n+1} - x_i)$, $i = 1, ..., n, n+1$ son linealmente independientes, lo cual es absurdo ya que $dim(L) = n-1$ por lo tanto cualquier conjunto con m elementos $(m > n-1)$ es linealmente dependiente.

$\Leftarrow$] Si n es el entero mas grande tal que hay una $n-$familia$(x_1, ..., x_n)$ afínmente independiente de puntos de A, entonces $n-1$ es el entero no negativo mas grande tal que las $(n-1)-$familias$(x_1 - x_i, ..., x_{i-1} - x_i, x_{i+1} - x_i, ..., x_n - x_i)$, $i = 1, ..., n$ son linealmente independientes por lo tanto $dim(L) = n - 1 = dim(A)$.
Otra manera siguiendo el argumento anterior. Supongamos que $dim(L) = m$. Si $m < n-1$ es absurdo ya que hay una $(n-1)-$familia linealmente independiente. Si $m > n-1$, entonces $m+1 > n$ y la $m+1$ familia es afínmente independiente lo cual es absurdo. Por lo tanto $m = n-1$. $\square$

Teorema 2.1.25. *Sea $A = x + L$ un espacio afín. Una $n-$familia afínmente independiente de puntos de A es una base afín de A si y sólo si $dim(A) = n-1$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $(x_1, \ldots, x_n)$ una base afín de A.
Como $x_1 \in A$, de la observación 2.1.2 tenemos que $A = x_1 + L$. Ahora, sea $l \in L$, entonces $x_1 + l \in A$ y como $(x_1, \ldots, x_n)$ es una base afín de A entonces existen únicos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ con $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ tales que $x_1 + l = \sum\limits_{i=1}^{n} {}^a\lambda_i x_i$.

$$\Rightarrow \quad l = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i - x_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i (x_i - x_1).$$

$\Rightarrow \quad l \in gen\{x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1\}$, así $L \subset gen\{x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1\}$ y $gen\{x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1\} \subset L$ por la Observación 2.1.21, lo cual implica que $L = gen\{x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1\}$ y la $(n-1)-$familia$(x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1)$ es linealmente independiente por el Teorema 2.1.20. Por lo tanto, la $(n-1)-$familia$(x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1)$ es una base para L, así $dim(L) = n - 1 = dim(A)$.

$\Leftarrow$] Sea $dim(A) = n-1$ y $(x_1, ..., x_n)$ una $n-$familia afínmente independiente de puntos de A. Veamos que $(x_1, ..., x_n)$ es una base afín de A. Es decir, hay que probar que $A = aff\{x_1, ..., x_n\}$.
Es claro que $aff\{x_1, ..., x_n\} \subset A$, ahora probemos que $A \subset aff\{x_1, ..., x_n\}$.
Sea $z \in A$, $z = x_1 + l$. Como $dim(A) = n - 1 = dim(L)$ y $(x_1, ..., x_n)$ es afínmente independiente, entonces la $(n-1)-$familia $(x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_n - x_1)$ es una base para L; Así existen únicos $\lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $l = \lambda_2(x_2 - x_1) + \lambda_3(x_3 - x_1) + \cdots + \lambda_n(x_n - x_1)$. Entonces

$$\begin{aligned} z &= x_1 + \lambda_2(x_2 - x_1) + \lambda_3(x_3 - x_1) + \cdots + \lambda_n(x_n - x_1) \\ &= x_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i(x_i - x_1) \\ &= (1 - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i)x_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i, \qquad ((1 - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i) + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i = 1). \end{aligned}$$

Es decir que z se puede expresar como combinación afín de puntos de la familia $(x_1, ..., x_n)$, entonces $z \in aff\{x_1, ..., x_n\}$ por lo tanto $A \subset aff\{x_1, ..., x_n\}$. $\square$

Lema 2.1.26. *Sea $M \subset \mathbb{R}^d$, y sea $dim(aff\, M) = n - 1$. Entonces existe una $n-$familia $(x_1, \ldots, x_n)$ afínmente independiente de puntos de M, i.e. Existe una base afín $(x_1, \ldots, x_n)$ de $aff\ M$ que consiste de puntos de M.*

Demostración. Como $dim(aff\, M) = n-1$ entonces el teorema 2.1.24 garantiza la existencia de una $n-$familia $(x_1, ..., x_n)$ afínmente independiente de puntos de M y además por el teorema 2.1.25 esta $n-$familia es una base afín para $aff\ M$. $\square$

Observación 2.1.27. *El lema 2.1.26 muestra que para cualquier subconjunto $M \subset \mathbb{R}^d$, existe una familia $(x_1, ..., x_n)$ afínmente independiente de puntos de M tal que*

$$aff\ M = \left\{ \sum_{i=1}^{n}{}^{a} \lambda_i x_i \ / \ x_i \in M,\ i = 1, ..., n \right\}.$$

Es decir que para generar $aff\ M$ basta con tomar todas las combinaciones afín de los puntos fijos $x_1, ..., x_n \in M$. Además, cada punto en $aff\ M$ tiene una única representación como una combinación afín de $x_1, ..., x_n$.

Observación 2.1.28. *Los espacios afines $0-$dimensionales son los conjuntos $1-$puntuales. Si x_2 y x_2 son dos puntos distintos de $\mathbb{R}^d$, entonces la $2-$familia (x_1, x_2) es afínmente independiente. En efecto, sea $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$ con $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, entonces $\lambda_2 = -\lambda_1$; Así $\lambda_1(x_1 - x_2) = 0$ lo cual solo se da cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ya que $x_1 \neq x_2$. Por lo tanto $aff\{x_1, x_2\}$ es $1-$dimensional, los espacios afines $1-$dimensionales son llamados rectas y son de hecho la recta a través de dos puntos x_1 y x_2 en el sentido usado en la definición 2.1.7. Recíprocamente, la recta a través de dos puntos x_1 y x_2 en el mismo sentido de la definición 2.1.7 es de hecho un espacio afín $1-$dimensional, i.e. una recta.*

Definición 2.1.29. *Sea A un espacio afín y $dim(A) = n\,(n \geq 1)$. Un subespacio afín H de A tal que $dim(H) = n - 1$ es llamado un hiperplano en A. Si A es un subespacio afín de $\mathbb{R}^d$, entonces los hiperplanos en A son los conjuntos $H \cap A$ donde H es un hiperplano en $\mathbb{R}^d$ tal que $H \cap A$ es un subconjunto propio no vacío de A.*

Ejemplo 2.1.30.

- *En $\mathbb{R}$, los hiperplanos son puntos.*
- *En $\mathbb{R}^2$, los hiperplanos son rectas.*
- *En $\mathbb{R}^3$, los hiperplanos son planos.*

Definición 2.1.31. *Sea A un subespacio afín de $\mathbb{R}^d$. Una aplicación $\varphi : A \to \mathbb{R}^e$ se dice que es una transformación afín si preserva combinaciones afines, i.e.*

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}{}^{a}\lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n}{}^{a}\lambda_i \varphi(x_i).$$

Ejemplo 2.1.32. (1) *Dado $u \in \mathbb{R}^d$ fijo, la aplicación traslación*

$$\begin{array}{rccl} T_u : & \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R}^d \\ & v & \mapsto & T_u(v) = u + v. \end{array}$$

es una transformación afín.
En efecto: sean $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 + \cdots \lambda_n = 1$. Entonces

$$T_u\left(\sum_{i=1}^{n}{}^{a}\lambda_i x_i\right) = u + \sum_{i=1}^{n}{}^{a}\lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i u + \sum_{i=1}^{n}{}^{a}\lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n}{}^{a}\lambda_i(u + x_i) = \sum_{i=1}^{n}{}^{a}\lambda_i T_u(x_i).$$

(2) *Toda transformación lineal es una transformación afín, el reciproco no es cierto.*

Lema 2.1.33. *Sea A un espacio afín. si $\varphi : A \to \mathbb{R}^e$ es una transformación afín, entonces $\varphi(A) := \{y \in \mathbb{R}^e / \varphi(x) = y, \text{para algún } x \in A\}$ es un subespacio afín de $\mathbb{R}^e$.*

Demostración. Sean $y_1, y_2 \in \varphi(A)$, entonces existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $y_1 = \varphi(x_1), y_2 = \varphi(x_2)$. Ahora sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Entonces $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1\varphi(x_1) + \lambda_2\varphi(x_2) = \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in \varphi(A)$, ya que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A$. Por lo tanto $\varphi(A)$ es un subespacio afín de $\mathbb{R}^e$. □

Teorema 2.1.34. *Sea $A = x + L$ un subespacio afín de $\mathbb{R}^d$. Entonces una aplicación $\varphi : A \to \mathbb{R}^e$ es afín si y sólo si existe una transformación lineal $\Phi : L \to \mathbb{R}^e$ y un punto $y \in \mathbb{R}^e$ tales que $\varphi(x + l) = y + \Phi(l)$ $\forall l \in L$.*

Demostración. $\Rightarrow$] [6] Sea $\varphi : A \to \mathbb{R}^e$ una transformación afín y definamos la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & L & \longrightarrow & \mathbb{R}^e \\ & l & \mapsto & \Phi(l) = \varphi(x + l) - \varphi(x) \qquad x \in A. \end{array}$$

Probemos que Φ es lineal, sean $l, k \in L$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} (*)\Phi(\lambda l) & = & \varphi(x + \lambda l) - \varphi(x) \\ & = & \varphi(\lambda(x + l) + (1 - \lambda)x) - \varphi(x) \\ & = & \lambda\varphi(x + l) + (1 - \lambda)\varphi(x) - \varphi(x) \\ & = & \lambda\varphi(x + l) - \lambda\varphi(x) \\ & = & \lambda(\varphi(x + l) - \varphi(x)) = \lambda\Phi(l). \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
(*)\Phi(l+k) &= \varphi(x+l+k)-\varphi(x)\\
&= \varphi((x+l)+(x+k)-x)-\varphi(x) \qquad [\lambda_1=1=\lambda_2,\ \lambda_3=-1]\\
&= \varphi(x+l)+\varphi(x+k)-\varphi(x)-\varphi(x)\\
&= [\varphi(x+l)-\varphi(x)]+[\varphi(x+k)-\varphi(x)]\\
&= \Phi(l)+\Phi(k).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto Φ es lineal. Ahora veamos que Φ está bien definida, es decir que no depende de $x \in A$. Sea $z \in A$

$$
\begin{aligned}
\Phi_z(l) &= \varphi(z+l)-\varphi(z) &&= \varphi((z+l)-x+b)-\varphi(z)\\
&= \varphi(x+l)-\varphi(x)+\varphi(z)-\varphi(z) &&= \varphi(x+l)-\varphi(x)\\
&= \Phi_x(l).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, Φ está bien definida.
$\Phi(l) = \varphi(x+l)-\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x+l) = \Phi(l)+\varphi(x)$, tomando $y=\varphi(x)$ obtenemos que $\varphi(x+l) = y+\Phi(l)$ que era lo que queríamos probar.

$\Leftarrow]$ Sean $\Phi : L \to \mathbb{R}^e$ lineal y $y \in \mathbb{R}^e$ tales que $\varphi(x+l) = y+\Phi(l)\ \forall\ l \in L$. Veamos que φ es una transformación afín.
Sean $x_1,...,x_n \in A$, $\lambda_1,...,\lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1+\cdots+\lambda_n = 1$. Como $x_i \in A$, entonces $x_i = x+l_i,\ l_i \in L,\ i=1,...,n$.

$\sum\limits_{i=1}^{n}{}^a\lambda_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{n}{}^a\lambda_i(x+l_i) = \sum\limits_{i=1}^{n}{}^a\lambda_i x + \sum\limits_{i=1}^{n}{}^a\lambda_i l_i = x + \sum\limits_{i=1}^{n}{}^a\lambda_i l_i = x+l,$

con $l = \sum\limits_{i=1}^{n}{}^a\lambda_i l_i,\ l \in L$. Ahora

$$
\begin{aligned}
\varphi(\sum_{i=1}^{n}{}^a\lambda_i x_i) &= \varphi(x+l) &&= y+\Phi(l) &&= y+\Phi(\sum_{i=1}^{n}{}^a\lambda_i l_i)\\
&= y+\sum_{i=1}^{n}{}^a\lambda_i\Phi(l_i) &&= \sum_{i=1}^{n}{}^a\lambda_i y+\sum_{i=1}^{n}{}^a\lambda_i\Phi(l_i) &&= \sum_{i=1}^{n}{}^a\lambda_i y+\lambda_i\Phi(l_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}{}^a\lambda_i(y+\Phi(l_i)) &&= \sum_{i=1}^{n}{}^a\lambda_i\varphi(x+l_i) &&= \sum_{i=1}^{n}{}^a\lambda_i\varphi(x_i).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto φ es afín. □

Comentario 2.1.35. *Las transformaciones afines son continuas.*

Definición 2.1.36. *Sean $A_1 = x_1+L_1$ y $A_2 = x_2+L_2$ subespacios afines complementarios de $\mathbb{R}^d$ y $A_1 \cap A_2 = \{x_0\}$, entonces $A_1 = x_0+L_1$ y $A_2 = x_0+L_2$ sea $\Pi : \mathbb{R}^d \to L_1$ la proyección en la dirección de L_2. Para cualquier $x \in \mathbb{R}^d$, definimos la proyección afín sobre A_1 en la dirección de A_2 como la aplicación*

$$
\begin{aligned}
\pi :\ \mathbb{R}^d &\longrightarrow A_1\\
x &\mapsto \pi(x) = x_0+\Pi(x-x_0).
\end{aligned}
$$

Cuando A_1 y A_2 son complementarios, entonces π es llamada proyección ortogonal sobre A_1.

Teorema 2.1.37. *[6] Sean A_1, A_2, A_3 espacios afines, $\varphi_1 : A_1 \longrightarrow A_2$, $\varphi_2 : A_2 \longrightarrow A_3$ transformaciones afines y sean Φ_1, Φ_2 sus transformaciones lineales asociadas respectivamente. Entonces $\varphi_2 \circ \varphi_1$ es una transformación afín. Además $(\varphi_2 \circ \varphi_1)(x+l) = w+(\Phi_2 \circ \Phi_1)(l)$.*

Demostración. Veamos que $\varphi_2 \circ \varphi_1 : A_1 \longrightarrow A_3$ es afín. Sean $x_1, ...x_n \in A_1$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

$$\begin{array}{rcccl} (\varphi_2 \circ \varphi_1)(\sum\limits_{i=1}^{n} {}^a\lambda_i x_i) & = & \varphi_2(\varphi_1(\sum\limits_{i=1}^{n} {}^a\lambda_i x_i)) & = & \varphi_2(\sum\limits_{i=1}^{n} {}^a\lambda_i \varphi_1(x_i)) \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} {}^a\lambda_i \varphi_2(\varphi_1(x_i)) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} {}^a\lambda_i (\varphi_2 \circ \varphi_1)(x_i). \end{array}$$

Ahora como $\varphi_2 \circ \varphi_1$ es una transformación afín, entonces existe una transformación lineal α tal que $(\varphi_2 \circ \varphi_1)(x + l) = w + \alpha(l)$. Probemos que $\alpha = \Phi_1 \circ \Phi_2 \;\; \forall\, l$.
Definamos α como $\alpha(l) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(x + l) - (\varphi_2 \circ \varphi_1)(x), \;\; \forall\, l$.

$$\begin{array}{rcccl} \alpha(l) & = & (\varphi_2 \circ \varphi_1)(x + l) - (\varphi_2 \circ \varphi_1)(x) & = & \varphi_2(\varphi_1(x + l)) - \varphi_2(\varphi_1(x)) \\ & = & \varphi_2(\varphi_1(x) + \Phi_1(l)) - \varphi_2(\varphi_1(x)) & = & \Phi_2(\Phi_1(l)) \\ & = & (\Phi_2 \circ \Phi_1)(l). & & \end{array}$$

Lo cual implica que α es lineal, ya que es composición de transformaciones lineales. Por lo tanto $(\varphi_2 \circ \varphi_1)(x + l) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(x) + (\Phi_2 \circ \Phi_1)(l)$. $\square$

Teorema 2.1.38. *[6] Sean $A_1 = x + L_1$ y $A_2 = y + L_2$ dos espacios afines. Sea $(x_1, ..., x_n)$ un base afín para A_1, entonces para cualquier n-familia $(y_1, ..., y_n)$ de puntos de A_2 existe una única transformación afín $\varphi : A_1 \longrightarrow A_2$ tal que $\varphi(x_i) = y_i$ para $i = 1, ..., n$.*

Demostración. Como $(x_1, ..., x_n)$ es una base afín para A_1 entonces $(x_2 - x_1, ..., x_n - x_1)$ es una base para L_1, así existe una única aplicación lineal $\Phi : L_1 \longrightarrow L_2$ tal que $\Phi(x_i - x_1) = y_i - y_1$, $i = 2, ..., n$. Definamos la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & A_1 & \longrightarrow & A_2 \\ & p & \mapsto & \varphi(p) = y_1 + \Phi(p - x_1). \end{array}$$

Notemos que $\varphi(x_i) = y_1 + \Phi(x_i - x_1) = y_1 + (y_i - y_1) = y_i$, $i = 1, ..., n$. Veamos que φ es una transformación afín. En efecto, dado $l \in L_1$.
$\varphi(x_1 + l) = y_1 + \Phi(x_1 + l - x_1) = y_1 + \Phi(l)$ por lo tanto φ es afín.
Ahora probemos que φ es única. Supongamos que existe otra transformación afín α tal que $\alpha(x_i) = y_i$, $\forall\; i = 1, ..., n$, entonces $\alpha(x_1 + l) = \alpha(x_1) + H(l)$ donde $H : L_1 \longrightarrow L_2$ es la transformación lineal asociada a α. Así $H(l) = \alpha(x_1 + l) - \alpha(x_1)$ por lo que $H(x_i - x_1) = \alpha(x_1 + x_i - x_1) - \alpha(x_1) = \alpha(x_i) - \alpha(x_1) = y_i - y_1$, luego por la unicidad de Φ tenemos que $\Phi(l) = H(l)$ $\forall l$ por lo tanto $\varphi = \alpha$.

$\square$

Teorema 2.1.39. *[6] Sean $A_1 = x + L_1$ y $A_2 = y + L_2$ subespacios afines de $\mathbb{R}^d$ y $\mathbb{R}^e$ respectivamente; y φ ($\varphi(x+l) = y+\Phi(l)$, $\forall\, l \in L$, $\Phi : L_1 \longrightarrow L_2$ lineal) una transformación afín de A_1 en A_2 . Entonces:*

(1) φ es $1 - 1$ si y sólo si Φ es $1 - 1$.

(2) φ es sobre si y sólo si Φ es sobre.

(3) φ es biyectiva si y sólo si Φ es biyectiva.

Demostración. (1) $\Rightarrow]$ Sea φ una transformación afín $1-1$ y sean $u, v \in L_1$. Si

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \Phi(v) \\ \varphi(x+u) - \varphi(x) &= \varphi(x+v) - \varphi(x) \\ \varphi(x+u) &= \varphi(x+v). \end{aligned}$$

Como φ es $1-1$ entonces $x+u = x+v \Rightarrow u = v$.

$\Leftarrow]$ Sea Φ $1-1$ y sean $x_1, x_2 \in A_1$; $x_1 = x+h, x_2 = x+k, h, k \in L_1$. Si

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) &= \varphi(x_2) \\ \varphi(x+h) &= \varphi(x+k) \\ \Phi(h) + \varphi(x) &= \Phi(k) + \varphi(x) \\ \Phi(h) &= \Phi(k). \end{aligned}$$

Como Φ es $1-1$ entonces $h = k \Rightarrow x_1 = x_2$.

(2) $\Rightarrow]$ Sean φ sobre y $k \in L_2$, entonces $y+k = y_1 \in A_2$. Ahora como φ es sobre $\exists\, x_1 \in A_1$, $x_1 = x+h$ tal que $\varphi(x_1) = y_1$.

$$y_1 = \varphi(x_1) = \varphi(x+h) = \varphi(x) + \Phi(h) = y + \Phi(h), \qquad \varphi(x) = y$$

entonces $\Phi(h) = k$.

$\Leftarrow]$ Sean Φ sobre y $y_1 \in A_2$, $y_1 = y+k$. Como Φ es sobre entonces $\exists\ h \in L_1$ tal que $\Phi(h) = k$.

$$\varphi(x_1) = \varphi(x+h) = \varphi(x) + \Phi(h) = y+k, \qquad y = \varphi(x).$$

(3) Consecuencia de (1) y (2).

□

Teorema 2.1.40. *Sean $A_1 = x + L_1$, $A_2 = y + L_2$ espacios afines y sea $\varphi : A_1 \longrightarrow A_2$ una transformación afín invertible. Entonces $\varphi^{-1} : A_2 \longrightarrow A_1$ también es una transformación afín y además si $\Phi : L_1 \longrightarrow L_2$ es la transformación lineal asociada a φ entonces Φ^{-1} es la transformación lineal asociada a φ^{-1}.*

Demostración. Sean $y_1, ..., y_n \in A_2$ y $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Entonces existen únicos $x_i \in A_1$ tales que $y_i = \varphi(x_i)$, $\forall i = 1, ..., n$.

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}{}^{a}\lambda_i y_i\Big) &= \varphi^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}{}^{a}\lambda_i \varphi(x_i)\Big) &&= \varphi^{-1}\Big(\varphi\Big(\sum_{i=1}^{n}{}^{a}\lambda_i x_i\Big)\Big) \\ &= (\varphi^{-1}\circ\varphi)\Big(\sum_{i=1}^{n}{}^{a}\lambda_i x_i\Big) &&= \sum_{i=1}^{n}{}^{a}\lambda_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}{}^{a}\lambda_i \varphi^{-1}(y_i). \end{aligned}$$

Por lo tanto φ^{-1} es afín. Ahora sea $\alpha : L_2 \longrightarrow L_1$ la transformación lineal asociada a φ^{-1} es decir $\varphi^{-1}(y+v) = \varphi^{-1}(y) + \alpha(v)$, $v \in L_2$ y sea $k \in L_2$ entonces existe un único $h \in L_1$ tal que $\Phi(h) = k$ ya que Φ es invertible por el teorema 2.1.39. Así $\varphi(x+h) = y+\Phi(h) = y+k$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \alpha(k) &= \varphi^{-1}(y+k) - \varphi^{-1}(y) \\
&= \varphi^{-1}(\varphi(x+h)) - \varphi^{-1}(\varphi(x)) \\
&= (\varphi^{-1} \circ \varphi)(x+h) - (\varphi^{-1} \circ \varphi)(x) \\
&= h = \Phi^{-1}(k).
\end{aligned}$$

Luego como $k \in L_2$ fue arbitrario entonces $\alpha = \Phi^{-1}$. $\square$

Definición 2.1.41. *Sean A_1, A_2 espacios afines. Una transformación afín $\varphi : A_1 \longrightarrow A_2$ es un isomorfismo(afín) si φ es 1-1 y sobre.*
Si existe un isomorfismo $\varphi : A_1 \longrightarrow A_2$ decimos que A_1 y A_2 son isomorfos(afín).

Teorema 2.1.42. *Sean $A_1 = x + L_1, A_2 = y + L_2$ espacios afines. Entonces A_1 y A_2 son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sean A_1 y A_2 isomorfos, entonces existe una transformación afín $\varphi : A_1 \longrightarrow A_2$ biyectiva, luego por el teorema 2.1.39 su transformación lineal asociada $\Phi : L_1 \longrightarrow L_2$ es biyectiva lo cual implica que los espacios vectoriales L_1 y L_2 son isomorfos entonces $dim(L_1) = dim(L_2)$. Por lo tanto $dim(A_1) = dim(A_2)$.

$\Leftarrow$] Sea $dim(A_1) = dim(A_2) = n$, entonces por el lema 2.1.26 existen $(x_1, ..., x_{n+1})$ y $(y_1, ..., y_{n+1})$ bases afines para A_1 y A_2 respectivamente y por el teorema 2.1.38 existe una transformación afín $\varphi : A_1 \longrightarrow A_2$ tal que $\varphi(x_i) = y_i$, $i = 1, ..., n+1$. Sea $\Phi : L_1 \longrightarrow L_2$ la transformación lineal asociada a φ construida en el teorema 2.1.38 y veamos que $N(\Phi) = \{l \in L_1 / \Phi(l) = 0\} = \{0\}$. Sea $l \in N(\Phi)$, $l = \sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i (x_i - x_1)$.

$$0 = \Phi(l) = \Phi\left(\sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i (x_i - x_1)\right) = \sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i \Phi(x_i - x_1) = \sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i (y_i - y_1).$$

Pero $(y_2 - y_1, ..., y_{n+1} - y_1)$ es linealmente independiente, entonces $\lambda_2 = \cdots = \lambda_{n+1} = 0$ así $l = 0$ lo cual implica que $ker(\Phi) = \{0\}$ entonces Φ es inyectiva y además biyectiva ya que $dim(L_1) = dim(L_2)$. Luego por el teorema 2.1.39 φ es biyectiva y por lo tanto A_1 y A_2 son isomorfos. $\square$

Observación 2.1.43. *Del comentario 2.1.35 y el teorema 2.1.40 tenemos que un isomorfismo es también un homeomorfismo, i.e. preserva la estructura topológica.*
Además del teorema 2.1.42, se deduce que cualquier subespacio afín d-dimensional A es isomorfo en particular al espacio afín d-dimensional $\mathbb{R}^d$. En otras palabras, A puede ser identificado con $\mathbb{R}^d$, no solo en el sentido afín sino también en un sentido topológico.

Definición 2.1.44. *Sea A un espacio afín. Una transformación afín $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada función afín sobre A.*

Teorema 2.1.45. *Sea $A = x + L$ un espacio afín de dimensión n, entonces H es un hiperplano en A si y sólo si existe una función afín no-constante φ tal que $H = \varphi^{-1}(0)$.*

Demostración. [5] $\Rightarrow$] Sea H un hiperplano en A, entonces para cualquier $a \in H$ tenemos que $H = a + L_1$ donde L_1 es un hiperplano en L. $L_1 = \Phi^{-1}(0)$ para algún funcional lineal no nulo $\Phi : L \longrightarrow \mathbb{R}$. Definamos $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\varphi(a + l) = \Phi(l)$, veamos que φ es una función afín.
Sean $x_1, ..., x_n \in A$ y $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

$$\begin{aligned} \varphi(\sum_{i=1}^{n}{}^a\lambda_i x_i) &= \varphi(\sum_{i=1}^{n}{}^a\lambda_i(x + l_i)) &= \varphi(x + \sum_{i=1}^{n}{}^a\lambda_i l_i) \\ &= \Phi(\sum_{i=1}^{n}{}^a\lambda_i l_i) &= \sum_{i=1}^{n}{}^a\lambda_i \Phi(l_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}{}^a\lambda_i \varphi(x_i). \end{aligned}$$

Por lo tanto φ es afín, además $H = \varphi^{-1}(0)$ y φ es no-constante ya que Φ es no nulo.

$\Leftarrow$] Sea φ una función afín no-constante en A, entonces $\varphi(x + l) = \varphi(x) + \Phi(l)$, donde $\Phi : L \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal. Ya que φ es no-constante, entonces Φ es no-nulo por lo tanto Φ es sobreyectiva, lo cual implica que φ sea sobreyectiva. Así existe $a \in A$ tal que $\varphi(a) = 0$ entonces $\varphi(a+l) = \Phi(l)\ \forall l \in L$, luego $\varphi(a+l) = 0 \Leftrightarrow \Phi(l) = 0$. Además $H_1 = \Phi^{-1}(0)$ es un hiperplano en L y $H = \varphi^{-1}(0) = a + H_1$ es un espacio afín de A con $dim(H) = dim(H_1) = n - 1$ por lo tanto H es un hiperplano en A. $\square$

Teorema 2.1.46. *[7] Sea $A = x + L$ un subespacio afín propio de $\mathbb{R}^d$ tal que $dim(A) = n$. Entonces $A = \bigcap_{i=1}^{d-n} H_i$, donde H_i son hiperplanos en $\mathbb{R}^d$.*

Demostración. Sea $A = x+L$ con $dim(A) = n$ donde L es un subespacio vectorial de dimensión n, entonces L se puede expresar como la intersección de ciertos subespacios vectoriales $L_1, \ldots, L_{d-n} \subset \mathbb{R}^d$ tales que $dim(L_i) = d - 1$, $i = 1, \ldots, d - n$.
Sean $H_i = x + L_i$, $1 \leq i \leq d - n$. Como $dim(L_i) = d - 1$ entonces los conjuntos H_i son hiperplanos en $\mathbb{R}^d$. Luego

$$\begin{aligned} L = x + L &= x + \bigcap_{i=1}^{d-n} L_i \\ &= \bigcap_{i=1}^{d-n} (x + L_i) \\ &= \bigcap_{i=1}^{d-n} H_i. \end{aligned}$$

$\square$

Corolario 2.1.47. *[7] Sea A un subespacio afín de $\mathbb{R}^d$. Entonces A es un conjunto cerrado.*

Demostración. Si $A = \emptyset$ o $A = \mathbb{R}^d$ se tiene el resultado. Asumamos que A es un subespacio afín propio de $\mathbb{R}^d$. Primero supongamos que A es un hiperplano, entonces por el Teorema 2.1.45 $A = \varphi^{-1}(0)$ para alguna función afín φ. Por lo tanto A es cerrado.
Si $dim(A) = n \leq d-2$. Por el Teorema 2.1.46 A es la intersección de $d-n$ hiperplanos $H_1, \ldots H_{d-n}$, como cada hiperplano H_i es un conjunto cerrado entonces su intersección $A = \bigcap_{i=1}^{d-n} H_i$ también es un conjunto cerrado. □

Definición 2.1.48. *Sea φ una función afín no-constante sobre un espacio afín A, llamaremos a los conjuntos $\varphi^{-1}(]-\infty,0[)$ y $\varphi^{-1}(]0,+\infty[)$ los semiespacios abiertos acotados por el hiperplano $H = \varphi^{-1}(0)$, y llamaremos a los conjuntos $\varphi^{-1}(]-\infty,0])$ y $\varphi^{-1}([0,+\infty[)$ los semiespacios cerrados acotados por el hiperplano $H = \varphi^{-1}(0)$.*

Comentario 2.1.49. *Los semiespacios abiertos(cerrados) son conjuntos abiertos(cerrados) no-vacíos, ya que son la preimagen de conjuntos abiertos(cerrados) y las funciones afines son continuas.*

Definición 2.1.50. *Si $H = \varphi^{-1}(0)$ es un hiperplano de A, entonces dos puntos de $A \setminus H$ están del mismo lado de H si ambos pertenecen a $\varphi^{-1}(]-\infty,0[)$ o ambos pertenecen a $\varphi^{-1}(]0,+\infty[)$; si cada uno de los dos semiespacios abiertos contiene uno de los dos puntos, diremos que están en lados opuestos de H.*
Una semirecta es un semiespacio en una recta.

Observación 2.1.51. *Sea A un subespacio afín de $\mathbb{R}^d$, y sea K un semiespacio cerrado en $\mathbb{R}^d$ tal que $A \cap K$ es un subconjunto propio no-vacío de A. Entonces $A \cap K$ es un semiespacio cerrado en A. Recíprocamente, cada semiespacio cerrado en A surge de esta manera.*
Lo mismo aplica para semiespacios abiertos.

Definición 2.1.52. *Sean $y \in \mathbb{R}^d$, $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos los conjuntos $H(y,\alpha)$ y $K(y,\alpha)$ como*

$$H(y,\alpha) := \{x \in \mathbb{R}^d | \langle x, y\rangle = \alpha\}.$$
$$K(y,\alpha) := \{x \in \mathbb{R}^d | \langle x, y\rangle \leq \alpha\}.$$

Teorema 2.1.53. *Sea $H \subset \mathbb{R}^d$. H es un hiperplano si y sólo si $H = H(y,\alpha)$ para $y \neq 0$.*

Demostración. Sea $H = a + L$ un hiperplano, $a \in \mathbb{R}^d$ y $dim(H) = d-1 = dim(L)$, entonces L es de la forma $L = \{l \in \mathbb{R}^d / \langle l, y\rangle = 0\}, y \neq 0$ y es única, excepto por múltiplos de y. Luego H es un hiperplano si y sólo si

$$\begin{aligned}
H = a + L &= \{a + l \in \mathbb{R}^d / \langle l, y\rangle = 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^d / \langle x - a, y\rangle = 0\},\ x = a + l,\ l = x - a \\
&= \{x \in \mathbb{R}^d / \langle x, y\rangle - \langle a, y\rangle = 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^d / \langle x, y\rangle = \langle a, y\rangle\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^d / \langle x, y\rangle = \alpha\},\ \alpha = \langle a, y\rangle \\
&= H(y,\alpha).
\end{aligned}$$

$\square$

Observación 2.1.54. *Note que* $H(0,\alpha) = \mathbb{R}^d$ *cuando* $\alpha = 0$, *y* $H(0,\alpha) = \emptyset$ *cuando* $\alpha \neq 0$. *El teorema 2.1.53 nos dice que las funciones afines sobre* $\mathbb{R}^d$ *son precisamente las funciones*

$$x \mapsto \langle x, y\rangle - \alpha, \quad y \in \mathbb{R}^d, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si $y \neq 0$, *entonces* y *es llamado una normal de* $H(y,\alpha)$.

Observación 2.1.55. *Note que* $K(0,\alpha) = \mathbb{R}^d$ *cuando* $\alpha \geq 0$, $K(0,\alpha) = \emptyset$ *cuando* $\alpha < 0$. *Para* $y \neq 0$, *el conjunto* $K(y,\alpha)$ *es uno de los dos semiespacios cerrados en* $\mathbb{R}^d$ *acotado por* $H(y,\alpha)$. *El otro semiespacio cerrado acotado por* $H(y,\alpha)$ *es* $K(-y,-\alpha)$.
Note que

$$bd\ K(y,\alpha) = H(y,\alpha),$$
$$int\ K(y,\alpha) = K(y,\alpha) \setminus H(y,\alpha),$$
$$cl(int\ K(y,\alpha)) = K(y,\alpha),$$

Cuando $y \neq 0$.

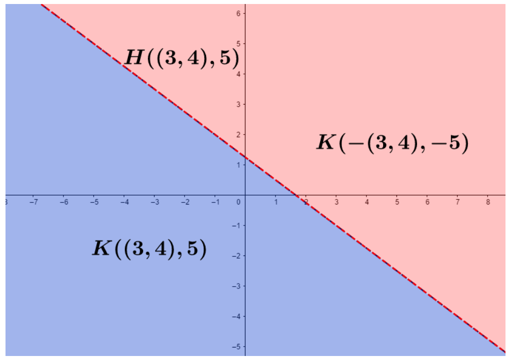
Comentario 2.1.56. *Algunas veces para indicar el hiperplano* H *usaremos la notación* $H(y,\alpha)$ *y para indicar los semiespacios cerrados acotados por el hiperplano* H *usaremos la notación* $K(y,\alpha)$ *y* $K(-y,-\alpha)$.

Ejemplo 2.1.57. *Sea* $(3,4) \in \mathbb{R}^2$ *y* $\alpha = 5$, *entonces*

$$H((3,4),5) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (x,y),(3,4)\rangle = 5\}$$
$$\langle (x,y),(3,4)\rangle = 3x + 4y = 5$$

$$K((3,4),5) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (x,y),(3,4)\rangle \leq 5\}$$
$$\langle (x,y),(3,4)\rangle = 3x + 4y \leq 5$$

$$K(-(3,4),-5) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (x,y),(3,4)\rangle \geq 5\}$$
$$\langle (x,y),(3,4)\rangle = 3x + 4y \geq 5$$



2.2. Conjuntos Convexos

En esta sección se introduce uno de los conceptos más importantes de este trabajo, el de conjunto convexo. Si tenemos un subconjunto M de $\mathbb{R}^d$ el cual no es convexo, es posible encontrar un conjunto convexo más pequeño que contiene a M, dicho conjunto denotado por *conv* M es el conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de M, esto nos puede llevar a pensar que como en el caso de *gen* M y aff M podríamos encontrar una base que genere a *conv* M, pero no es posible en general encontrar una familia fija de puntos de M que cumpla esta propiedad, sin embargo, es posible construir a *conv* M tomando solamente las combinaciones convexas de todas las familias afínmente independientes de M. Como toda combinación convexa es una combinación afín, podemos usar esta relación entre estos conceptos para encontrar el número máximo de elementos que pueden tener las familias que generan a *conv* M y se tienen algunas propiedades importantes de *conv* M dependiendo las estructura de M.

Definición 2.2.1. *Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $x_1 \neq x_2$; definimos el segmento cerrado entre x_1 y x_2 como el conjunto*

$$\begin{aligned}[x_1, x_2] &:= \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 / \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\} \\ &= \{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 / \lambda \in [0,1]\}.\end{aligned}$$

Análogamente se definen los segmentos semiabiertos $]x_1, x_2]$, $[x_1, x_2[$ y el segmento abierto $]x_1, x_2[$.

Definición 2.2.2. *Sea $C \subset \mathbb{R}^d$. C es un conjunto convexo si $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C$, $\forall\ x_1, x_2 \in C$ y $\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ y $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Es decir, el segmento cerrado entre cualesquiera dos puntos de C está contenido en C.*

Ejemplo 2.2.3. *(1) Todo subespacio afín de $\mathbb{R}^d$, incluyendo $\mathbb{R}^d$ y $\emptyset$ son convexos.*

(2) Cualquier semiespacio(abierto o cerrado) es convexo.

(3) La imagen de un conjunto convexo bajo una transformación afín es convexa. En particular, traslaciones de conjuntos convexos son convexas.

(4) $\overline{B}(a,r)$ *es convexa.*

En efecto:

(1) *Si A es un subespacio afín, entonces $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A$, $\forall\ x_1, x_2 \in A$ y $\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.En particular para $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ por lo tanto A es convexo.*

(2) *Sean φ una transformación afín y $\varphi^{-1}(]-\infty, 0[)$ el semiespacio abierto. Sean $x_1, x_2 \in \varphi^{-1}(]-\infty, 0[)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ y $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.*
Si $x_1, x_2 \in \varphi^{-1}(]-\infty, 0[)$, entonces $\varphi(x_1), \varphi(x_2) \in]-\infty, 0[$, es decir $\varphi(x_1), \varphi(x_2) < 0$. Luego
$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2) < 0.$$
Entonces $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \varphi^{-1}(]-\infty, 0[)$ por lo tanto $\varphi^{-1}(]-\infty, 0[)$ es convexo. Análogamente para el semiespacio cerrado.

(3) *Sea φ una transformación afín y C un conjunto convexo, veamos que $\varphi(C)$ es convexo. Sean $y_1, y_2 \in \varphi(C)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ y $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Luego existen $x_1, x_2 \in C$ tales que $y_1 = \varphi(x_1)$ y $y_2 = \varphi(x_2)$.*
$$\Rightarrow\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2) = \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in \varphi(C),$$
ya que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C$ por ser C convexo. Por los tanto $\varphi(C)$ es convexo.
Además, si C es convexo y definimos $A = x + C = \{x + c / c \in C\}$, $x \in \mathbb{R}^d$; veamos que A es convexo. Sean $x_1, x_2 \in A$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ y $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$.
Como $x_1, x_2 \in A$ entonces $x_1 = x + c_1$ y $x_2 = x + c_2$ para $c_1, c_2 \in C$. Luego
$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 &= \lambda_1(x + c_1) + \lambda_2(x + c_2) \\ &= \lambda_1 x + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 x + \lambda_2 c_2 \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)x + (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2) \\ &= x + c, \qquad [\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = c \in C, \textit{por ser } C \textit{ convexo}]. \end{aligned}$$
Así $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A$ por lo tanto A es convexo.

(4) *Sean $x, y \in \overline{B}(a,r)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ y $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.*
Como $x, y \in \overline{B}(a,r)$ tenemos que $||x - a|| \leq r$ y $||y - a|| \leq r$.
$$\begin{aligned} ||(\lambda_1 x + \lambda_2 y) - a|| &= ||(\lambda_1 x + \lambda_2 y) - (\lambda_1 + \lambda_2)a|| \quad [\lambda_1 + \lambda_2 = 1] \\ &= ||\lambda_1(x - a) + \lambda_2(y - a)|| \\ &\leq \lambda_1 ||x - a|| + \lambda_2 ||y - a|| \qquad [\textit{Desigualdad triangular}] \\ &\leq \lambda_1 r + \lambda_2 r \qquad [\lambda_1, \lambda_2 \geq 0] \\ &= r \end{aligned}$$
Así que $\lambda_1 x + \lambda_2 y \in \overline{B}(a,r)$. Por lo tanto, $\overline{B}(a,r)$ es convexa.

Definición 2.2.4. *Una combinación convexa de los puntos* $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ *es una combinación lineal* $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$*, donde* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ *y* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$*. Escribiremos*

$$\sum_{i=1}^{n}{}^{c} \lambda_i x_i.$$

Para indicar que la combinación $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ *es convexa.*

Comentario 2.2.5. *Toda combinación convexa es una combinación afín, el reciproco no siempre es cierto.*

Teorema 2.2.6. *Sea* $C \subset \mathbb{R}^d$*.* C *es convexo si y sólo si cualquier combinación convexa de puntos de* C *está en* C*.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que C es convexo y procedamos por inducción sobre n para probar que si $x = \sum_{i=1}^{n}{}^{c} \lambda_i x_i$, con $x_i \in C$ para todo i, entonces $x \in C$.
Para $n = 1$ es claro ya que si $x \in C$, $x = 1 \cdot x$ para este caso $\lambda = 1$. Para $n = 2$ se sigue de la definición que $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C$. Sea $n \geq 3$ y supongamos que es resultado es cierto para $n - 1$ y probemos que se cumple para n. Sean $x_1, \dots, x_n \in C$ y $x = \sum_{i=1}^{n}{}^{c} \lambda_i x_i$. Si $\lambda_i = 0$ para algún i, entonces x sería una combinación convexa de $n - 1$ puntos de C luego por la hipótesis inductiva $x \in C$.
Si $\lambda_i \neq 0$ para todo i, entonces $\lambda_i < 1$ para todo i ya que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0$, en particular $1 - \lambda_1 > 0$. Luego

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n}{}^{c} \lambda_i x_i \\ &= \lambda_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i \\ &= \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) \sum_{i=2}^{n} \tfrac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} x_i. \end{aligned}$$

Ahora sea $y = \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} x_i$, como $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ entonces $1 - \lambda_1 = \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ así que

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} = \frac{\lambda_2 + \cdots + \lambda_n}{1 - \lambda_1} = \frac{1 - \lambda_1}{1 - \lambda_1} = 1.$$

Por lo tanto, $y \in C$ por la hipótesis inductiva. Luego $x = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) y$ es una combinación convexa de dos puntos de C entonces por la convexidad de C tenemos que $x \in C$.

$\Leftarrow$] Si cualquier combinación convexa de puntos de C está en C, entonces en particular cualquier combinación convexa de dos puntos de C está en C. Por lo tanto C es convexo. $\square$

Lema 2.2.7. *Sea $(M_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^d$, entonces $\bigcap\limits_{i\in I} M_i$ es un conjunto convexo.*

Demostración. Si $\bigcap\limits_{i\in I} M_i = \emptyset$, se tiene el resultado. Supongamos que $\bigcap\limits_{i\in I} M_i \neq \emptyset$.
Sean $x_1, x_2 \in \bigcap\limits_{i\in I} M_i$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ y $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Como $x_1, x_2 \in \bigcap\limits_{i\in I} M_i$ entonces $x_1, x_2 \in M_i, \ \forall \ i \in I$.
Así $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in M_i$, para cada $i \in I$ por ser M_i conjuntos convexos, entonces $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \bigcap\limits_{i\in I} M_i$. Por lo tanto $\bigcap\limits_{i\in I} M_i$ es convexo. $\square$

Definición 2.2.8. *Sea $M \subset \mathbb{R}^d$. El conjunto convexo generado por M(o envolvente convexa de M) denotado por conv M se define como el conjunto*

$$conv\ M := \bigcap_{i\in I} M_i,\ \ M \subseteq M_i,\ \ M_i \ conjuntos\ convexos$$

Es decir, el conjunto convexo más pequeño que contiene a M.

Teorema 2.2.9. *Sea $M \subset \mathbb{R}^d$. El conv M es el conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos de M.*

Demostración. Sea $C = \{\sum\limits_i {}^c \lambda_i x_i / x_i \in M, \lambda_i \in M, \lambda_i \geq 0, \sum\limits_i \lambda_i = 1\}$, el conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos de M.
Veamos que $C \subset conv\ M$. Sea $x \in C$, entonces x es una combinación convexa de puntos de M. Ahora como $M \subset conv\ M$ y $conv\ M$ es un conjunto convexo, por el Teorema 2.2.6 cualquier combinación convexa de puntos de $conv\ M$ está en $conv\ M$ en particular combinaciones convexas de puntos de M lo cual implica que $x \in conv\ M$, por lo tanto $C \subset conv\ M$.
Ahora, para probar que $conv\ M \subset C$ es suficiente mostrar que C es un conjunto convexo que contiene a M.
$M \subset C$, ya que cada $x \in M$ tiene representación convexa trivial $x = 1 \cdot x$ entonces $x \in C$, falta probar que C es un conjunto convexo. Sean $y_1, y_2 \in C$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ y $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$.
Como $y_1, y_2 \in C$, entonces y_1 y y_2 son combinaciones convexas de puntos de M, digamos

$$y_1 = \sum_{i=1}^{n} {}^c \mu_i x_i, \qquad y_2 = \sum_{i=n+1}^{m} {}^c \mu_i x_i.$$

Entonces $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_1 \mu_i x_i + \sum\limits_{i=n+1}^{m} \lambda_2 \mu_i x_i$, por hipótesis tenemos que $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i = \sum\limits_{i=n+1}^{m} \mu_i = 1$ y $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 \mu_i + \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_2 \mu_i &= \sum_{i=1}^{n} (1-\lambda_2)\mu_i + \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_2 \mu_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i - \lambda_2 \sum_{i=1}^{n} \mu_i + \lambda_2 \sum_{i=n+1}^{m} \mu_i \\ &= 1 - \lambda_2 + \lambda_2 = 1. \end{aligned}$$

y además $\lambda_1\mu_i \geq 0$, $\lambda_2\mu_i \geq 0$. Así $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ es una combinación convexa de los puntos $x_1, \ldots, x_m \in M$, lo cual implica que $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in C$ entonces C es un conjunto convexo y además $M \subset C$ por lo tanto *conv* $M \subset C$. $\square$

Ejemplo 2.2.10. *(1) Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $x_1 \neq x_2$, entonces*

$$conv\{x_1, x_2\} = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 / \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\} = [x_1, x_2].$$

(2) $conv(S(0,1)) = \overline{B}(0,1)$.

En efecto: $\overline{B}(0,1)$ es convexa y $S(0,1) \subset \overline{B}(0,1)$, entonces $conv(S(0,1)) \subset \overline{B}(0,1)$. Falta probar que $\overline{B}(0,1) \subset conv(S(0,1))$.

Sea $x \in \overline{B}(0,1)$.
Si $x = 0$ y $z \in S(0,1)$, entonces $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}(-z) = 0$. Así que $x \in conv(S(0,1))$, ya que $z, -z \in S(0,1) \subset conv(S(0,1))$.
Si $x \neq 0$, entonces $0 < ||x|| \leq 1$.

$$\Rightarrow \; x = \left(\frac{1+||x||}{2}\right)\frac{x}{||x||} + \left(\frac{1-||x||}{2}\right)\frac{-x}{||x||} \qquad y$$

$$\left(\frac{1+||x||}{2}\right) + \left(\frac{1-||x||}{2}\right) = \frac{1+||x||+1-||x||}{2} = 1.$$

Así que x es combinación convexa de $\frac{x}{||x||}$ y $\frac{-x}{||x||}$, pero $\frac{x}{||x||}, \frac{-x}{||x||} \in S(0,1) \subset conv(S(0,1))$, entonces $\overline{B}(0,1) \subset conv(S(0,1))$.
Por lo tanto, $conv(S(0,1)) = \overline{B}(0,1)$.

Observación 2.2.11. *Sean $x \in \mathbb{R}^d$, $M \subset \mathbb{R}^d$ y φ una transformación afín, entonces:*

(1) $conv(x + M) = x + conv\ M$.

(2) $conv(\varphi(M)) = \varphi(conv\ M)$.

En efecto:

(1)

$$\begin{aligned} conv(x+M) &= \{\sum_i {}^c \lambda_i x_i /\ x_i \in (x+M)\} \\ &= \{\sum_i {}^c \lambda_i (x + m_i) /\ m_i \in M\} \\ &= \{\sum_i {}^c \lambda_i x + \sum_i {}^c \lambda_i m_i /\ m_i \in M\} \\ &= \{x + \sum_i {}^c \lambda_i m_i /\ m_i \in M\} \\ &= x + conv\ M. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} conv(\varphi(M)) &= \{\sum_i{}^c \lambda_i y_i / \ y_i \in \varphi(M)\} \\ &= \{\sum_i{}^c \lambda_i \varphi(x_i)/x_i \in M\} \\ &= \{\varphi(\sum_i{}^c \lambda_i x_i)/ \ x_i \in M\} \\ &= \varphi(conv\ M). \end{aligned}$$

Teorema 2.2.12. *Sea $M \subset \mathbb{R}^d$. El conv M es el conjunto de todas las combinaciones convexas*

$$\sum_{i=1}^{n}{}^c \lambda_i x_i,$$

tales que $\{x_1, \dots, x_n\}$ es una familia afínmente independiente de puntos de M.

Demostración. Vamos a probar que si un punto $x \in conv\ M$ es una combinación convexa de n puntos $x_1, \dots, x_n$ tal que $(x_1, \dots, x_n)$ es afínmente dependiente, entonces x ya es una combinación convexa de $n-1$ de los puntos $x_1, \dots, x_n$. Repitiendo este argumento, si es necesario, se sigue que hay una subfamilia afínmente independiente $(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})$ de $(x_1, \dots, x_n)$ tal que x es una combinación convexa de $x_{i_1}, \dots, x_{i_p}$.
Sea $x \in conv\ M$ entonces por el Teorema 2.2.9 $x = \sum\limits_{i=1}^{n}{}^c \lambda_i x_i$ donde $x_1, \dots x_n \in M$ y supongamos que $(x_1, \dots, x_n)$ es afínmente dependiente. Si $\lambda_i = 0$ para algún i, tendríamos que x es una combinación convexa de $n-1$ puntos de los puntos $x_1, \dots, x_n$. Por lo tanto, asumamos que $\lambda_i > 0$ para todo i.
Como $(x_1, \dots, x_n)$ es afínmente dependiente, entonces existes reales $\mu_1, \dots, \mu_n$ no todos ceros tales que

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 0.$$

Ahora para cualquier $t \in \mathbb{R}$, tenemos

$$x = \sum_{i=1}^{n}{}^c \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n}{}^c \lambda_i x_i - t \sum_{i=1}^{n} \mu_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - t\mu_i) x_i$$

$$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - t\mu_i) x_i \qquad (1)$$

Notemos que

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - t\mu_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - t \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1 - 0 = 1.$$

Ahora para que x sea una combinación convexa de $n-1$ puntos de $x_1, \dots, x_n$, buscamos un valor de t tal que $\lambda_i - t\mu_i \geq 0$ para todo i y $\lambda_i - t\mu_i = 0$ para al menos un i; así (1) será la

combinación buscada.
Si $\mu_i \leq 0$, $\lambda_i - t\mu_i > 0$ para cualquier $t > 0$.
Si $\mu_i > 0$, $\lambda_i - t\mu_i \geq 0$ siempre que $t \leq \frac{\lambda_i}{\mu_i}$ con $\lambda_i - t\mu_i = 0$ si y sólo si $t = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$.
Como $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i = 0$ y los μ_i son no todos ceros, entonces debemos tener que $\mu_i > 0$ para al menos un i. Definamos

$$t := min\{\frac{\lambda_i}{\mu_i}/\mu_i > 0\}.$$

Por lo tanto $x = \sum\limits_{i=1}^{n}(\lambda_i - t\mu_i)x_i$ es combinación convexa de $n-1$ puntos de $x_1, \ldots, x_n$.

□

Comentario 2.2.13. *El Teorema 2.2.12 nos dice que para generar el conv M no necesitamos tomar todas las combinaciones convexas de puntos de M como se describe en el Teorema 2.2.9; es suficiente tomar esas formadas por las familias afínmente independientes de puntos de M.*
Por otro lado, ninguna familia fija de puntos de M será suficiente, como en el caso de gen M o aff M.

Los dos corolarios siguientes son conocidos como Teoremas de Caratheodory.

Corolario 2.2.14. *Sea $M \subset \mathbb{R}^d$ y $dim(Aff\ M) = n$, entonces conv M es el conjunto de todas las combinaciones convexas de a lo más $n+1$ puntos de M.*

Demostración. Como $dim(aff\ M) = n$ entonces para cualquier $m-$familia$(x_1, \ldots, x_m)$ afínmente independiente de puntos de M, tenemos que $m \leq n+1$. Ahora por el Teorema 2.2.12 *conv M* está contenido en el conjunto de todas las combinaciones convexas de $n+1$ o menos puntos de M. Por otro lado, por el Teorema 2.2.9 el conjunto de todas las combinaciones convexas de $n+1$ o menos puntos de M está contenido en *conv M* □

Corolario 2.2.15. *Sea $M \subset \mathbb{R}^d$ y $dim(Aff\ M) = n$, entonces conv M es el conjunto de todas las combinaciones convexas de $n+1$ puntos de M.*

Demostración. Del Corolario 2.2.14 tenemos que *conv M* es el conjunto de todas las combinaciones convexas de a lo más $n+1$ puntos de M. Ahora si y es combinación convexa de m puntos de M, $m < n+1$. Entonces podemos agregar términos de la forma $0 \cdot x$ tal que $m = n+1$. □

Definición 2.2.16. *Un politopo convexo o simplemente un politopo, es un conjunto el cual es la envolvente convexa de un conjunto finito no-vacío $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Es decir, un politopo es un conjunto P tal que $P = conv\{x_1, \ldots, x_n\}$.*

Observación 2.2.17. *Sean $x \in \mathbb{R}^d$, $P = conv\{x_1, \ldots, x_n\}$ un politopo y φ una transformación afín, entonces:*

(1) Cualquier traslación $Q = x + P$ de P también es un politopo.

(2) $\varphi(P)$ es un politopo.

En efecto:

(1)

$$\begin{aligned} Q = x + P &= x + conv\{x_1, \ldots, x_n\} \\ &= conv(x + \{x_1, \ldots, x_n\}) \\ &= conv\{x + x_1, \ldots, x + x_n\}. \end{aligned}$$

(2) $\varphi(P) = \varphi(conv\{x_1, \ldots, x_n\}) = conv(\varphi(\{x_1, \ldots, x_n\})) = conv\{y_1, \ldots, y_n\}$, donde $y_i = \varphi(x_i)$ para $i = 1, \ldots, n$.

Lo anterior se hizo teniendo en cuenta los resultados de la Observación 2.2.11.

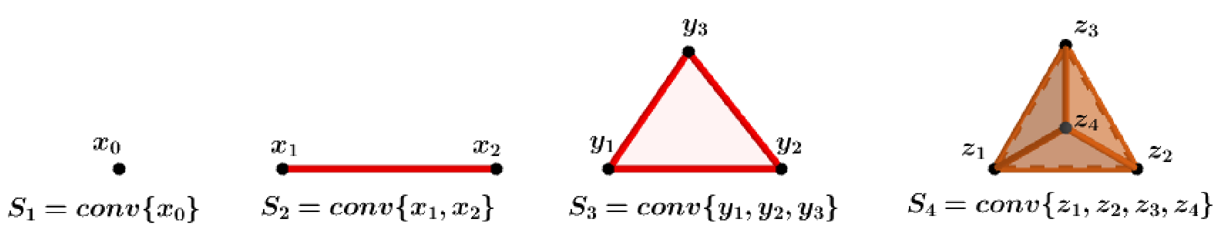
Definición 2.2.18. *Un politopo S con la propiedad de que existe una familia $(x_1, \ldots, x_n)$ afínmente independiente tal que $S = conv\{x_1, \ldots, x_n\}$ es llamado un simplex y los puntos $x_1, \ldots, x_n$ son llamados vértices de S.*

Ejemplo 2.2.19. *En $\mathbb{R}^3$.*

La $1-$familia(x_0), la $2-$familia(x_1, x_2), la $3-$familia(y_1, y_2, y_3) de puntos no colineales y la $4-$familia(z_1, z_2, z_3, z_4) de puntos no coplanares son afínmente independientes, entonces

$$S_1 = conv\{x_0\}, \quad S_2 = conv\{x_1, x_2\}, \quad S_3 = conv\{y_1, y_2, y_3\} \quad y \quad S_4 = conv\{z_1, z_2, z_3, z_4\},$$

son simplex.



Se podría decir que los simplices tienen una "base convexa", ya que si $x_1, \ldots, x_n$ son vértices de un simplex S entonces por la independencia afín cada punto en $aff\{x_1, \ldots, x_n\}$ tiene una única representación como combinación afín de $x_1, \ldots, x_n$ y en particular cada punto en $conv\{x_1, \ldots, x_n\} = S$ tiene una única representación como una combinación convexa de $x_1, \ldots, x_n$ por el Teorema 2.2.12.
El teorema siguiente muestra que los simplices son los únicos politopos que tienen una "base convexa".

Teorema 2.2.20. *Sea $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto finito de n puntos de $\mathbb{R}^d$ tal que la $n-$familia$(x_1, \ldots, x_n)$ es afínmente dependiente, entonces existen $M_1, M_2 \subset M$ tales que $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M_1 \cup M_2 = M$ y*

$$conv\ M_1 \cap conv\ M_2 \neq \emptyset.$$

Demostración. Como la $n-$familia$(x_1, \ldots, x_n)$ es afínmente dependiente, entonces existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ no todos ceros tales que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0.$$

Sea $I = \{1, \ldots, n\}$ y sean $I_1 := \{i \in I / \ \lambda_i > 0\}$, $I_2 := \{i \in I / \ \lambda_i \leq 0\}$ y $M_1 := \{x_i / \ i \in I_1\}$, $M_2 := \{x_i / \ i \in I_2\}$.
Notemos que $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ y $M_1 \cup M_2 = M$. Ahora tomemos

$$x := \sum_{i \in I_1} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i, \text{ donde } \qquad \lambda := \sum_{i \in I_1} \lambda_i.$$

Como $\lambda_i \in I_1$ entonces $\lambda > 0$ y así $\frac{\lambda_i}{\lambda} > 0$, $\forall i \in I_1$. Además $\sum\limits_{i \in I_1} \frac{\lambda_i}{\lambda} = 1$ entonces $x = \sum\limits_{i \in I_1} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i$ es una combinación convexa de puntos de M_1, es decir $x \in conv\ M_1$.
Por otro lado, tenemos que

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i \in I_1} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i + \sum_{i \in I_2} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i = x + \sum_{i \in I_2} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i,$$

$$\Rightarrow \ x = -\sum_{i \in I_2} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i = \sum_{i \in I_2} -\frac{\lambda_i}{\lambda} x_i$$

$-\frac{\lambda_i}{\lambda} \geq 0$ ya que $\lambda > 0$ y $\lambda_i \in I_2$. Ahora

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i \in I_1} \frac{\lambda_i}{\lambda} + \sum_{i \in I_2} \frac{\lambda_i}{\lambda} = 1 + \sum_{i \in I_2} \frac{\lambda_i}{\lambda},$$

$$\Rightarrow \ \sum_{i \in I_2} \frac{\lambda_i}{\lambda} = -1 \qquad \Rightarrow \ \sum_{i \in I_2} -\frac{\lambda_i}{\lambda} = 1.$$

Entonces $x = \sum\limits_{i \in I_2} -\frac{\lambda_i}{\lambda} x_i$ es una combinación convexa de puntos de M_2, es decir $x \in conv\ M_2$.
Así tenemos que $x \in conv\ M_1 \cap conv\ M_2$. Por lo tanto

$$conv\ M_1 \cap conv\ M_2 \neq \emptyset.$$

□

Corolario 2.2.21 (Teorema de Radon). *Sea $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto finito de n puntos de $\mathbb{R}^d$ tales que $n \geq d+2$. Entonces existen subconjuntos $M_1, M_2 \subset M$ tales que $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M_1 \cup M_2 = M$ y*

$$conv\ M_1 \cap conv\ M_2 \neq \emptyset.$$

Demostración. *dim* $\mathbb{R}^d = d$ entonces cualquier familia afínmente independiente tiene a lo más $d+1$ elementos, así la $n-$familia$(x_1, \ldots, x_n)$ es afínmente dependiente luego aplicamos el Teorema 2.2.20 y obtenemos el resultado buscado. □

Teorema 2.2.22. *Sea M un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^d$, entonces conv M es compacto.*

Demostración. Sea $(y_v)_{v\in\mathbb{N}}$ cualquier sucesión de puntos de *conv* M. Probaremos que la sucesión admite una subsucesión la cual converge a un punto de *conv* M.
Sea $n = dim(aff\ M)$, entonces por el Corolario 2.2.15 cada (y_v) en la sucesión tiene una representación como combinación convexa de $n+1$ puntos de M

$$y_v = \sum_{i=1}^{n+1}{}^c \lambda_{vi} x_{vi}, \qquad x_{vi} \in M.$$

Consideremos las $n+1$ sucesiones de puntos de M

$$(x_{v1})_{v\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_{v(n+1)})_{v\in\mathbb{N}},$$

y las $n+1$ sucesiones de números reales en el intervalo $[0,1]$

$$(\lambda_{v1})_{v\in\mathbb{N}}, \ldots, (\lambda_{v(n+1)})_{v\in\mathbb{N}},$$

Ahora por la compacidad de M existe una subsucesión $(x_{v_m i})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(x_{vi})_{v\in\mathbb{N}}$, $i = 1, \ldots, n+1$ la cual converge en M, digamos

$$\lim_{m\to\infty} x_{v_m i} = x_{0i}, \qquad i = 1, \ldots, n+1.$$

Además, el intervalo $[0,1]$ es compacto, entonces existe una subsucesión $(\lambda_{v_m i})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(\lambda_{v_i})_{v\in\mathbb{N}}$, $i = 1, \ldots, n+1$ la cual converge en $[0,1]$, digamos

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_{v_m i} = \lambda_{0i}, \qquad i = 1, \ldots, n+1.$$

Como $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_{v_m i} = 1$, $m \in \mathbb{N}$, entonces $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_{0i} = 1$ luego la combinación lineal

$$y_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{0i} x_{0i},$$

es una combinación convexa de puntos de M, así $y_0 \in conv\ M$.
Sea $y_{v_m} = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_{v_m i} x_{v_m i}$, $m \in \mathbb{N}$, $(y_{v_m})_{m\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(y_v)_{v\in\mathbb{N}}$ la cual converge a un punto en *conv* M. Por lo tanto *conv* M es compacto. □

Corolario 2.2.23. *Cualquier politopo convexo P en $\mathbb{R}^d$ es un conjunto compacto.*

Demostración. Como P es un politopo, entonces $P = conv\{x_1, \ldots, x_n\}$ donde $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es un conjunto finito de puntos de $\mathbb{R}^d$. $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es compacto por ser un conjunto finito, luego P es compacto por el Teorema 2.2.22. $\square$

Ejercicio 2.2.24. *Sea $(C_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos convexos distintos en $\mathbb{R}^d$. Mostrar que conv $\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right)$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas*

$$\sum_{v=1}^{n}{}^{c}\lambda_{i_v} x_{i_v}, \text{ donde } x_{i_v} \in C_{i_v}.$$

Deduzca en particular que cuando C_1 y C_2 son convexos, entonces $conv(C_1 \cup C_2)$ es la unión de todos los segmentos $[x_1, x_2]$ con $x_1 \in C_1$ y $x_2 \in C_2$.

Demostración. Sea

$$C := \bigcup_{i\in I} \left\{ \sum_{v=1}^{n}{}^{c}\lambda_{i_v} x_{i_v} / x_{i_v} \in C_{i_v} \right\}$$

Debemos probar que $C = conv \left(\bigcup_{i\in I} C_i\right)$, es claro que $C \subset conv \left(\bigcup_{i\in I} C_i\right)$. Ahora veamos la inclusión contraria.
Sea $x \in conv \left(\bigcup_{i\in I} C_i\right)$, sabemos que $conv \left(\bigcup_{i\in I} C_i\right)$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas de $\bigcup_{i\in I} C_i$, así que $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$, donde $x_1, \ldots, x_n \in \bigcup_{i\in I} C_i$ y $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$, donde cada x_i pertenecen a diferentes C_i.
Para ver esto supongamos que x_1 y x_2 pertenecen al mismo C_i, entonces el término $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ puede ser remplazado por $\lambda_0 x_0$, donde $\lambda_0 = \lambda_1 + \lambda_2$.
Así que, $\lambda_0 x_0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \Rightarrow x_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_0} x_2 \in C_i$, ya que $x_1, x_2 \in C_i$ y $\frac{\lambda_1}{\lambda_0} + \frac{\lambda_2}{\lambda_0} = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_0} = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} = 1$. Entonces $conv \left(\bigcup_{i\in I} C_i\right)$ es la unión de las combinaciones de la forma

$$\sum_{v=1}^{n}{}^{c}\lambda_{i_v} x_{i_v}, \text{ donde } x_{i_v} \in C_{i_v},$$

y los índices i_v son todos diferentes.
En particular, cuando A y B son convexos, entonces

$$\begin{aligned} conv(A \cup B) &= \bigcup \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 / \lambda_1 + \lambda_2 = 1; \lambda_1, \lambda_2 \geq 0; x_1 \in A; x_2 \in B\} \\ &= \bigcup \{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 / x_1 \in A, x_2 \in B, \lambda \in [0,1]\} \\ &= \bigcup [x_1, x_2], \quad x_1 \in A, x_2 \in B. \end{aligned}$$

$\square$

2.3. El Interior Relativo de un Conjunto Convexo

Si tenemos un triángulo T en $\mathbb{R}^3$, notamos que su interior es vacío. Sin embargo, su interior relativo($ri\ T$) en el espacio afín $2-$dimensional generado por T es no-vacío. En general, el interior relativo de cualquier conjunto convexo es no-vacío. Aquí surge la pregunta de que si existe algún conjunto convexo que tenga interior no-vacío, la respuesta es que si existen dichos conjuntos convexos, si tenemos un conjunto convexo C en $\mathbb{R}^d$ entonces $int\ C \neq \emptyset$ si y sólo si $dim\ C = d$. También se dan algunas propiedades del comportamiento de $ri\ C$, $cl\ C$ y $rb\ C$, lo cual permite introducir el concepto de *clconv* M que es la intersección de todos los conjuntos convexos cerrados que contienen a M.

Definición 2.3.1. *Sea C un conjunto convexo en $\mathbb{R}^d$. El interior relativo de C denotado por $ri\ C$ es el interior de C en la envolvente afín de $C(aff\ C)$.*

$$ri\ C := \{x \in C / B(x,r) \cap aff\ C \subset C \text{ para algún } r > 0\}.$$

Los puntos en $ri\ C$ son llamados puntos interiores relativos de C.

Comentario 2.3.2. *Por el Corolario 2.1.47 tenemos que $aff\ C$ es un conjunto cerrado, entonces la clausura relativa de C coincide con la clausura de C.*

Definición 2.3.3. *Sea C un conjunto convexo en $\mathbb{R}^d$. La frontera relativa de C denotada por $rb\ C$ se define como $rb\ C := cl\ C \setminus ri\ C$. Los puntos en $rb\ C$ son llamados puntos fronteras relativos de C.*

Observación 2.3.4. *La ri-operación no preserva inclusiones, por ejemplo, sea C_1 un lado de un triángulo C_2. Entonces $C_1 \subset C_2$, mientras que $ri\ C_1 \not\subset ri\ C_2$, de hecho $ri\ C_1$ y $ri\ C_2$ son conjuntos disjuntos no-vacíos.*

Definición 2.3.5. *Sea C un conjunto convexo de $\mathbb{R}^d$. Definimos la dimensión de C denotada por $dim\ C$ como la dimensión de $aff\ C$.*

$$dim\ C := dim(aff\ C).$$

Comentario 2.3.6. *El conjunto vacío tiene dimensión -1. Los conjuntos convexos 0-dimensionales son los 1-puntuales $\{x\}$. Los conjuntos convexos 1-dimensionales son los segmentos(cerrados, semi-abiertos o abiertos), las semirectas(cerradas o abiertas) y las rectas. Para un conjunto convexo 0-dimensional $C = \{x\}$, tenemos $ri\ C = C$, $cl\ C = C$, y $rb\ C = \emptyset$.*

Lema 2.3.7. *Sea S un simplex en $\mathbb{R}^d$. Entonces $ri\ S \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea S un simplex y $k = dim\ S$, entonces existe una $(k+1)-$familia$(x_1, \ldots, x_{k+1})$ afínmente independiente tal que $S = conv\{x_1, \ldots, x_{k+1}\}$ y además $(x_1, \ldots, x_{k+1})$ es una base afín de $aff\ S$. Por lo tanto para todo $x \in aff\ S$, $x = \sum_{i=1}^{k+1} {}^a\lambda_i x_i$ para únicos λ_i. Definamos

$$\begin{array}{rcl} \varphi: \ aff\ S & \longrightarrow & \mathbb{R}^{k+1} \\ x & \mapsto & \varphi(\sum_{i=1}^{k+1} {}^a\lambda_i x_i) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}). \end{array}$$

Como los λ_i son únicos entonces la aplicación φ está bien definida. Veamos que φ es una aplicación afín, sean $y_1, \ldots, y_n \in aff\ S$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$. Como $y_j \in aff\ S$ entonces $y_j = \sum_{i=1}^{k+1} {}^a \lambda_{ij} x_i$ y $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_{ij} = 1$, $1 \leq j \leq n$.
$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_{ij} x_i = \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_{ij} x_i$ y además $\sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_{ij} = 1$. Luego

$$\begin{aligned}
\varphi(\sum_{j=1}^{n} {}^a \alpha_j y_j) &= \varphi(\sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_{ij} x_i) \\
&= (\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_{1j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_{(k+1)j}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\lambda_{1j}, \ldots, \lambda_{(k+1)j}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} {}^a \alpha_j \varphi(y_j).
\end{aligned}$$

Por lo tanto φ es una aplicación afín, en particular es continua.
Sean $K_i := \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} / \lambda_i > 0\}$, $i = 1, \ldots, k+1$. Y definamos

$$\begin{array}{rccl}
\Phi_i : & \mathbb{R}^{k+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}) & \mapsto & \Phi_i((\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1})) = \lambda_i.
\end{array}$$

$i = 1, \ldots, k+1$. Φ_i son funciones afines y además $\Phi_i^{-1}(]0, \infty[) = K_i,\ i = 1, \ldots, k+1$. Entonces $K_1, \ldots, K_{k+1}$ son semiespacios abiertos en $\mathbb{R}^{k+1}$, lo cual implica que son abiertos, luego por la continuidad de φ tenemos que $\varphi^{-1}(K_i)$ $i = 1, \ldots, k+1$ son conjuntos abiertos en $aff\ S$.
Luego el conjunto $\bigcap_{i=1}^{k+1} \varphi^{-1}(K_i)$ es un conjunto abierto y además

$$\bigcap_{i=1}^{k+1} \varphi^{-1}(K_i) = \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} {}^a \lambda_i x_i / \lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1} > 0 \right\} \neq \emptyset.$$

Ahora como $\lambda_i > 0$ entonces las combinaciones en $\bigcap_{i=1}^{k+1} \varphi^{-1}(K_i)$ son combinaciones convexas, lo cual implica que $\bigcap_{i=1}^{k+1} \varphi^{-1}(K_i) \subset S$. Así S contiene un subconjunto abierto no-vacío. Por lo tanto $ri\ S \neq \emptyset$. $\square$

Teorema 2.3.8. *Sea C un subconjunto convexo no vacío en $\mathbb{R}^d$. Entonces $ri\ C \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $k := dim\, C$ $(= dim(aff\ C)$. Entonces existe una $(k+1)-$familia$(x_1, \ldots, x_{k+1})$ afínmente independiente de puntos de C. Sea

$$S := conv\{x_1, \ldots, x_{k+1}\}.$$

Así que S es un simplex y como $\{x_1, \ldots, x_{k+1}\} \subset C$ y C es convexo entonces $S \subset C$, lo cual implica que $aff\ S \subset aff\ C$. Por otro lado como $(x_1, \ldots, x_{k+1})$ es afínmente independiente y $dim(aff\ C) = k$ por el Teorema 2.1.25 tenemos que $(x_1, \ldots, x_{k+1})$ es una base afín de $aff\ C$, entonces $Aff\ C = aff\{x_1, \ldots, x_{k+1}\}$. Además, $\{x_1, \ldots, x_{k+1}\} \subset aff\ S$, entonces $aff\ C \subset aff\ S$. Por lo tanto $aff\ S = aff\ C$.
Luego el Lema 2.3.7 nos dice que S tiene interior no vacío relativo a $aff\ S$, entonces S tiene interior no vacío relativo a $aff\ C$ pero $S \subset C$ por lo tanto C tiene interior no vacío relativo a $aff\ C$. □

Corolario 2.3.9. *Sea C un conjunto convexo no-vacío de $\mathbb{R}^d$. Entonces $int\ C \neq \emptyset$ si y sólo si $dim\ C = d$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $x \in int\ C$, entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset C$. Luego $aff(B(x, r)) \subset aff\ C \subset \mathbb{R}^d$, pero $aff(B(x, r)) = \mathbb{R}^d$ entonces $aff\ C = \mathbb{R}^d$. Por lo tanto $dim\ C = d$.

$\Leftarrow$] Sea $dim\ C = d$, entonces como $C \subset \mathbb{R}^d$ y $dim(aff\ C) = d$ tenemos que $aff\ C = \mathbb{R}^d$ así que por la definición de $ri\ C$ concluimos que $ri\ C = int\ C$ pero $ri\ C \neq \emptyset$ por el Teorema 2.3.8. Por lo tanto, $int\ C \neq \emptyset$. □

Teorema 2.3.10. *Sea C un conjunto convexo en $\mathbb{R}^d$. Entonces para cualquier $x_0 \in ri\ C$ y cualquier $x_1 \in cl\ C$ tales que $x_0 \neq x_1$ tenemos que $[x_0, x_1[\subset ri\ C$.*

Demostración. Primero probaremos el caso particular donde $x_0 \in int\ C$ y $x_1 \in C$.
Para $\lambda \in]0, 1[$, sea $x_\lambda := (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$. Como $x_0 \in int\ C$, existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset C$ y definamos el conjunto $B_\lambda := (1 - \lambda)B(x_0, r) + \lambda x_1$. $B_\lambda \subset C$, ya que $x_1 \in C$, $B(x_0, r) \subset C$ y C es convexo.

$$B_\lambda = B((1 - \lambda)x_0, (1 - \lambda)r) + \lambda x_1 = B((1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1, (1 - \lambda)r) = B(x_\lambda, (1 - \lambda)r).$$

Así B_λ es una bola centrada en x_λ contenida en C. Por lo tanto $x_\lambda \in int\ C$.
Ahora probemos el caso general. Sean $x_0 \in ri\ C$ y $x_1 \in cl\ C$, $x_1 \neq x_0$ y para $\lambda \in]0, 1[$ definamos $x_\lambda := (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1$. Debemos probar que $x_\lambda \in ri\ C$.
Notemos que como $cl\ C \subset aff\ C$ entonces $x_1 \in aff\ C$ y así $x_\lambda \in aff\ C$ por ser combinación afín de puntos de $aff\ C$. Como $x_0 \in ri\ C$, existe un subconjunto abierto(relativo) U de $aff\ C$ tal que $x_0 \in U \subset C$. Sea

$$V := \lambda^{-1}(x_\lambda - (1 - \lambda)U),$$

tenemos que $x_\lambda \in aff\ C$, $U \subset aff\ C$ y

$$\lambda^{-1} - \lambda^{-1}(1 - \lambda) = \lambda^{-1} - \lambda^{-1} + 1 = 1$$

por lo tanto $V \subset aff\ C$, además V es un abierto(relativo) de $aff\ C$.
Notemos que $x_1 = \lambda^{-1}(x_\lambda - (1 - \lambda)x_0)$, esto implica que $x_1 \in V$ ya que $x_0 \in U$. Además, por hipótesis $x_1 \in cl\ C$ luego $V \cap C \neq \emptyset$, entonces existe $y_1 \in V \cap C$. Sea

$$W := (1 - \lambda)U + \lambda y_1.$$

W es un subconjunto abierto(relativo) de $aff\ C$ y como $U \subset C$ y $y_1 \in C$ entonces $W \subset C$ por ser C un conjunto convexo. Ahora mostremos que $x_\lambda \in W$.
Como $y_1 \in V$, existe $y_0 \in U$ tal que $y_1 = \lambda^{-1}(x_\lambda - (1-\lambda)y_0)$,

$$\Rightarrow\ \lambda y_1 = x_\lambda - (1-\lambda)y_0\ \Rightarrow x_\lambda = (1-\lambda)y_0 + \lambda y_1 \in (1-\lambda)U + \lambda y_1 = W.$$

Por lo tanto $[x_0, x_1[\subset ri\ C$. □

Lema 2.3.11. *[7] Sean $B, C \subset \mathbb{R}^d$ tales que $B \subset C$ y $aff\ B = aff\ C$. Entonces $ri\ B \subset ri\ C$.*

Demostración. Sea $x \in ri\ B$, entonces existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap aff\ B = B(x,r) \cap aff\ C \subset B \subset C$. Así $x \in ri\ C$ por lo tanto $ri\ B \subset ri\ C$. □

Teorema 2.3.12. *Sea C un conjunto convexo en $\mathbb{R}^d$. Entonces:*

(a) $cl\ C$ es convexo.

(b) $ri\ C$ es convexo.

(c) $cl\ C = cl(cl\ C) = cl(ri\ C)$.

(d) $ri\ C = ri(cl\ C) = ri(ri\ C)$.

(e) $rb\ C = rb(cl\ C) = rb(ri\ C)$.

(f) $aff\ C = aff(cl\ C) = aff(ri\ C)$.

(g) $dim\ C = dim(cl\ C) = dim(ri\ C)$.

Demostración. Si $C = \emptyset$, no habría nada que probar. Por eso asumiremos que $C \neq \emptyset$ cuando sea necesario.

(a) Sean $x_0, x_1 \in cl\ C$, $\lambda \in]0,1[$ y $x_\lambda := (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$. Debemos probar que $x_\lambda \in cl\ C$. Como $x_0, x_1 \in cl\ C$, existen sucesiones $(x_{0_v})_{v\in\mathbb{N}}$, $(x_{1_v})_{v\in\mathbb{N}}$ en C tales que

$$\lim_{v\to\infty} x_{0_v} = x_0, \qquad \lim_{v\to\infty} x_{1_v} = x_1.$$

Tenemos que $(1-\lambda)x_{0_v} + \lambda x_{1_v} \in C$, $\forall v \in \mathbb{N}$ por ser C convexo. Además

$$\lim_{v\to\infty}((1-\lambda)x_{0_v} + \lambda x_{1_v}) = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 = x_\lambda.$$

Así x_λ es el límite de una sucesión de puntos de C, entonces $x_\lambda \in cl\ C$. Por lo tanto $cl\ C$ es convexo.

(b) Sean $x_0, x_1 \in ri\ C$, $\lambda \in]0,1[$ y $x_\lambda := (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$. Debemos probar que $x_\lambda \in ri\ C$. Tenemos que $ri\ C \subset cl\ C$, entonces $x_1 \in cl\ C$ luego por el Teorema 2.3.10 concluimos que $x_\lambda \in ri\ C$.

(c) Como $cl\ C$ es un conjunto cerrado, entonces $cl(cl\ C) = cl\ C$.
$ri\ C \subset C$ entonces $cl(ri\ C) \subset cl\ C$, solo falta probar que $cl\ C \subset cl(ri\ C)$. Por el Teorema 2.3.8 tenemos que $ri\ C \neq \emptyset$, sean $x_0 \in ri\ C$ y $x_1 \in cl\ C$. Si $x_1 = x_0$ entonces $x_1 \in ri\ C \subset cl(ri\ C)$ y se tendría el resultado.
Ahora sea $x_1 \neq x_0$, entonces $[x_0, x_1[\subset ri\ C$ por el Teorema 2.3.10. Así para cada vecindad V de x_1 tenemos que $V \cap ri\ C \neq \emptyset$ entonces $x_1 \in cl(ri\ C)$ luego $cl\ C \subset cl(ri\ C)$.
Por lo tanto $cl\ C = cl(cl\ C) = cl(ri\ C)$.

(d) $C \subset cl\ C \Rightarrow aff\ C \subset aff(cl\ C)$, por el Corolario 2.1.47 $aff\ C$ es cerrado, entonces $cl\ C \subset aff\ C \Rightarrow aff(cl\ C) \subset aff\ C$. Por lo tanto

$$aff\ C = aff(cl\ C). \qquad (1)$$

.
De lo anterior y por el Lema 2.3.11 concluimos que $ri\ C \subset ri(cl\ C)$.
Ahora probaremos que $ri(cl\ C) \subset ri\ C$. Sean $x \in ri(cl\ C)$ y $x_0 \in ri\ C$, $ri\ C \neq \emptyset$ por el Teorema 2.3.8. Si $x = x_0$ entonces $x \in ri\ C$ como se quería.
Si $x \neq x_0$, entonces $aff\{x_0, x\}$ es una recta y $\{x_0, x\} \subset cl\ C$ así tenemos que

$$aff\{x_0, x\} \subset aff(cl\ C) = aff\ C.$$

Como $x \in ri(cl\ C)$, existe un punto $x_1 \in aff\{x_0, x\}$ tal que $x_1 \in cl\ C$ y $x \in]x_0, x_1[$ luego por el Teorema 2.3.10 tenemos que $x \in ri\ C$. Por lo tanto $ri\ C = ri(cl\ C)$.
Ahora probaremos que $ri\ C = ri(ri\ C)$. Primero probemos que

$$aff\ C = aff(ri\ C). \qquad (2)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} aff(ri\ C) &= aff(cl(ri\ C)) && \text{De (1) aplicado a } ri\ C \\ &= aff(cl\ C) && \text{De (c)} \\ &= aff(C). && \text{De (1)} \end{aligned}$$

Ahora usamos la notación $int_{aff\ C}C$ para $ri\ C$. Entonces

$$\begin{aligned} ri(ri\ C) &= int_{aff(ri\ C)}(ri\ C) \\ &= int_{aff\ C}(ri\ C) && \text{De (2)} \\ &= int_{aff\ C}(int_{aff\ C}C) \\ &= int_{aff\ C}C && int(int\ M) = int\ M \\ &= ri\ C. \end{aligned}$$

Por lo tanto $ri\ C = ri(cl\ C) = ri(ri\ C)$.

(e) Por definición tenemos

$$\begin{array}{rcllll} rb\ C & = & cl\ C \setminus ri\ C & & & \\ rb(cl\ C) & = & cl(cl\ C) \setminus ri(cl\ C) & = & cl\ C \setminus ri\ C & \text{De (c) y (d)} \\ rb(ri\ C) & = & cl(ri\ C) \setminus ri(ri\ C) & = & cl\ C \setminus ri\ C. & \text{De (c) y (d).} \end{array}$$

Por lo tanto $rb\ C = rb(cl\ C) = rb(ri\ C)$.

(f) Usando (1) y (2) de las pruebas de los incisos anteriores.

(g) De (f).

□

Teorema 2.3.13. *Sea C un conjunto convexo en $\mathbb{R}^d$ y $x \in C$ los tres enunciados siguientes son equivalentes:*

(a) $x \in ri\ C$.

(b) Para cualquier recta $A \subset aff\ C$ tal que $x \in A$, existen punto $y_0, y_1 \in A \cap C$ tales que $x \in]y_0, y_1[$.

(c) Para cualquier $y \in C$, $y \neq x$, existe $z \in C$ tal que $x \in]y, z[$. Es decir, cualquier segmento $[y, x]$ en C puede ser extendido más allá de x en C.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Sea $x \in ri\ C$ y sea A cualquier recta en $aff\ C$ tal que $x \in A$. Como $x \in ri\ C$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap aff\ C \subset C$. Consideremos $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $\delta < r$ luego A corta a la esfera $S(x, \delta)$ en dos puntos distintos digamos $A \cap S(x, \delta) = \{y_0, y_1\}$ y $x \in]y_0, y_1[$. Además $S(x, \delta) \subset B(x, r)$ entonces $S(x, \delta) \cap aff\ C \subset B(x, r) \cap aff\ C \subset C$ así que $y_0, y_1 \in A \cap C$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Sea $y \in C$ tal que $y \neq x$ y tomemos la recta $A = aff\{x, y\}$ luego como $\{x, y\} \subset C$ entonces $A \subset aff\ C$ así que existen $y_0, y_1 \in A \cap C$ tales que $x \in]y_0, y_1[$. Ahora supongamos que es y_0 tal que $y_0 \in]y, x[$ y tomando $y_1 = z$ entonces $x \in]y, z[$.

$(c) \Rightarrow (a)$ Por el Teorema 2.3.8 tenemos que $ri\ C \neq \emptyset$, entonces existe $y \in ri\ C$. Si $y = x$ entonces $x \in ri\ C$.
Si $y \neq x$ entonces existe $z \in C$ tal que $x \in]y, z[$ luego por el Teorema 2.3.10 concluimos que $x \in ri\ C$. □

Definición 2.3.14. *Sea $M \subset \mathbb{R}^d$. Definimos la envolvente convexa cerrada de M denotado por clconv M como*

$$\textit{clconv } M := \left\{ \bigcap_{i \in I} C_i / M \subset C_i, C_i \textit{ conjuntos convexos cerrados} \right\}.$$

Teorema 2.3.15. *Sea $M \subset \mathbb{R}^d$. Entonces clconv $M = cl(conv\ M)$.*

Demostración. Por el Teorema 2.3.12(a) tenemos que $cl(conv\ M)$ es un conjunto convexo cerrado y además $M \subset cl(conv\ M)$, entonces $clconv\ M \subset cl(conv\ M)$.
Por otro lado, por el Lema 2.2.7 tenemos que $clconv\ M$ es un conjunto convexo y además $M \subset clconv\ M$ por definición, entonces $conv\ M \subset clconv\ M$ y $clconv\ M$ es un conjunto cerrado por ser intersección de conjuntos cerrados. Así $cl(conv\ M) \subset clconv\ M$.
Por lo tanto $cl(conv\ M) = clconv\ M$. □

2.4. Semiespacios e Hiperplanos Soporte

Los hiperplanos son la generalización de las rectas en $\mathbb{R}^2$ y los planos en $\mathbb{R}^3$. Es decir, un hiperplano H divide el espacio en dos semiespacios acotados por H.
Estos conjuntos son muy importantes en el estudio de los conjuntos convexos, si x está en la clausura relativa de un conjunto convexo C entonces existe un hiperplano H tal que $x \in H$ y C está contenido en uno de los semiespacios acotados por H. Además, si C es cerrado, podemos describirlo por medio de una "representación externa" como la intersección de sus semiespacios soportes.

Definición 2.4.1. *Sea C un conjunto convexo cerrado no-vacío de $\mathbb{R}^d$. Un semiespacio cerrado K en $\mathbb{R}^d$ es un semiespacio soporte de C si*

(1) $C \subset K$.

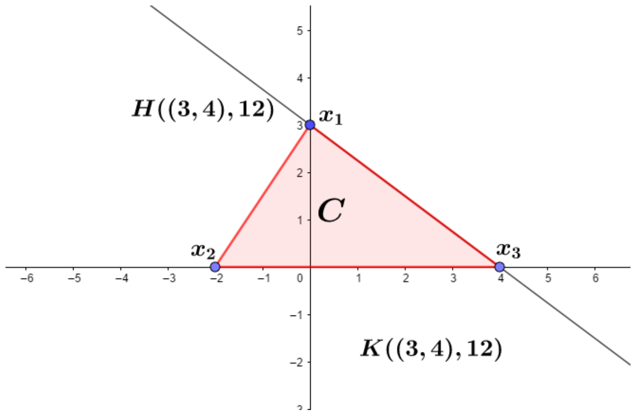
(2) $H \cap C \neq \emptyset$.

Donde H es el hiperplano delimitador de K.

Definición 2.4.2. *El hiperplano H de la Definición 2.4.1 es llamado hiperplano soporte de C.*

Observación 2.4.3. *En la Definición 2.4.1 puede que $C \subset H$. En este caso ambos semiespacios cerrados limitados por H son semiespacios soporte de C.*
Si $C \not\subset H$, llamaremos a H un hiperplano soporte propio.

Ejemplo 2.4.4. *En* $\mathbb{R}^2$.
Sean $x_1 = (0,3)$, $x_2 = (-2,0)$, $x_3 = (4,0)$ *y* $C = conv\{x_1, x_2, x_3\}$. *El semiespacio cerrado* $K((3,4),12)$ *acotado por el hiperplano* $H((3,4),12)$ *es un semiespacio soporte de* C.



Teorema 2.4.5. *Un hiperplano* $H(y,\alpha)$ *es un hiperplano soporte de un conjunto convexo cerrado no-vacío* C *si y sólo si* $\alpha = \max\limits_{x \in C}\langle x, y\rangle$ *o* $\alpha = \min\limits_{x \in C}\langle x, y\rangle$.

Demostración. $H(y,\alpha)$ es un hiperplano soporte de $C \Leftrightarrow H \cap C \neq \emptyset$, $C \subset K(y,\alpha)$ o $C \subset K(-y,-\alpha) \Leftrightarrow \forall\, x \in C$, $\langle x, y\rangle \leq \alpha$ o $\langle x, -y\rangle \leq -\alpha \Leftrightarrow \forall\, x \in C$, $\langle x, y\rangle \leq \alpha$ o $\langle x, y\rangle \geq \alpha$ $\Leftrightarrow \alpha = \max\limits_{x \in C}\langle x, y\rangle$ o $\alpha = \min\limits_{x \in C}\langle x, y\rangle$. $\square$

Teorema 2.4.6. *Sea* C *un conjunto convexo no-vacío en* $\mathbb{R}^d$, *y sea* H *un hiperplano en* $\mathbb{R}^d$. *Entonces las dos condiciones siguientes son equivalente:*

(a) $H \cap ri\ C = \emptyset$.

(b) C *está contenido en uno de los dos semiespacios limitados por* H, *pero no en* H.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Por el Teorema 2.3.8 tenemos que $ri\ C \neq \emptyset$, sea $x_0 \in ri\ C \subset C$ entonces por hipótesis $x_0 \notin H$, luego $C \not\subset H$.
Como H es un hiperplano existen y y α tales que $H = H(y,\alpha)$ y supongamos que existe un punto $x_1 \in C$ tal que x_0 y x_1 están en lados opuestos de H, entonces $\langle x_0, y\rangle < \alpha < \langle x_1, y\rangle$,

$$\Rightarrow 0 < \alpha - \langle x_0, y\rangle < \langle x_1, y\rangle - \langle x_0, y\rangle \ \Rightarrow 0 < \frac{\alpha - \langle x_0, y\rangle}{\langle x_1, y\rangle - \langle x_0, y\rangle} < 1.$$

Tomemos $\lambda := \frac{\alpha - \langle x_0, y\rangle}{\langle x_1, y\rangle - \langle x_0, y\rangle}$ y definamos $x_\lambda = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$. Como $\lambda \in]0,1[$ entonces

$x_\lambda \in]x_0, x_1[$.

$$\begin{aligned}
\langle x_\lambda, y\rangle &= \langle (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1, y\rangle \\
&= (1-\lambda)\langle x_0, y\rangle + \lambda\langle x_1, y\rangle \\
&= \langle x_0, y\rangle + \lambda(\langle x_1, y\rangle - \langle x_0, y\rangle) \\
&= \langle x_0, y\rangle + \lambda(\tfrac{\alpha - \langle x_0, y\rangle}{\lambda}) \\
&= \langle x_0, y\rangle + \alpha - \langle x_0, y\rangle \\
&= \alpha.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $x_\lambda \in H$.
Además como $x_0 \in ri\ C$, $x_1 \in C$ y $x_\lambda \in]x_0, x_1[$ entonces por el Teorema 2.3.10 tenemos que $x_\lambda \in ri\ C$. Así $x_\lambda \in H \cap ri\ C$, lo cual es absurdo ya que contradice la hipótesis de que $H \cap ri\ C = \emptyset$. Por lo tanto C está contenido en el semiespacio cerrado limitado por H que contiene a x_0.

$(b) \Rightarrow (a)$ Supongamos que $H \cap ri\ C \neq \emptyset$, entonces existe $x \in H \cap ri\ C$. Ahora por hipótesis existe $y \in C \setminus H$, luego por el Teorema 2.3.13[$(a) \Rightarrow (c)$] existe un punto $z \in C$ tal que $x \in]y, z[$, entonces $x = (1-\lambda)y + \lambda z$ para un adecuado $\lambda \in]0, 1[$. Ahora, como H es un hiperplano, existen u y α tales que $H = H(u, \alpha)$ y $C \subset K(u, \alpha)$. Entonces $\langle y, u\rangle < \alpha$ y $\langle z, u\rangle \leq \alpha$. Luego

$$\begin{aligned}
\langle x, u\rangle &= \langle (1-\lambda)y + \lambda z, u\rangle \\
&= (1-\lambda)\langle y, u\rangle + \lambda\langle z, u\rangle \\
&< (1-\lambda)\alpha + \lambda\alpha = \alpha.
\end{aligned}$$

Así $\langle x, u\rangle < \alpha$ pero como $x \in H$ entonces también se tiene que $\langle x, u\rangle = \alpha$, absurdo. Por lo tanto $H \cap ri\ C = \emptyset$. □

Corolario 2.4.7. *Un hiperplano soporte H de un conjunto convexo cerrado no-vacío C en $\mathbb{R}^d$ es un hiperplano soporte propio de C si y sólo si $H \cap ri\ C = \emptyset$.*

Demostración. $H = H(y, \alpha)$ es un hiperplano soporte propio de $C \Leftrightarrow C \subset K(y, \alpha)$ y $C \not\subset H$ $\Leftrightarrow H \cap ri\ C = \emptyset$. □

Lema 2.4.8. *Sea C un conjunto convexo abierto no-vacío en $\mathbb{R}^d$, y sea $x \in \mathbb{R}^d \setminus C$. Entonces existe un hiperplano H en $\mathbb{R}^d$ tal que $x \in H$ y $H \cap C = \emptyset$.*

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre d. El enunciado es válido para $d = 0, 1$. Necesitamos una prueba para $d = 2$, sea C un conjunto convexo abierto no-vacío de $\mathbb{R}^2$, y sea $x \in \mathbb{R}^2 \setminus C$. Como en $\mathbb{R}^2$ los hiperplanos son rectas, probaremos que existe una recta L en $\mathbb{R}^2$ tal que $x \in L$ y $L \cap C = \emptyset$. Sea S un circulo con centro en x y para cada $u \in C$ sea u' el único punto de S donde la semirecta $\{(1-\lambda)x + \lambda u / \lambda > 0\}$ de x a través de u corta a S. Entonces el conjunto

$$C' = \{u' / u \in C\},$$

es un arco abierto en S. Como $x \notin C$ y C es convexo, entonces dos puntos opuestos de S no pueden estar ambos en C'. Por lo tanto, el angulo entre las dos semirectas de x a través de

los puntos finales de C' es a lo más π. Cualquiera de las dos rectas determinadas por una de la dos semirectas puede ser usada como L.(Si el angulo es π, entonces L es única.)
Ahora, sea $d > 2$, y asumamos que el enunciado es válido para toda dimensión menor que d. Sea C un conjunto convexo abierto no-vacío en $\mathbb{R}^d$, y sea $x \in \mathbb{R}^d \setminus C$. Tomemos cualquier subespacio afín $2-$dimensional A de $\mathbb{R}^d$ tal que $x \in A$ y $A \cap C \neq \emptyset$. Como C es un conjunto convexo abierto y A es convexo, entonces $A \cap C$ es un conjunto convexo abierto(relativo) no-vacío de A con $x \notin A \cap C$. Luego como A es $2-$dimensional, A es isomorfo a $\mathbb{R}^2$, entonces podemos identificar a A con $\mathbb{R}^2$ y usando el resultado sobre $\mathbb{R}^2$, existe una recta L en A tal que $x \in L$ y

$$L \cap (A \cap C) = L \cap C = \emptyset.$$

Sea B cualquier hiperplano en $\mathbb{R}^d$ ortogonal a L, y sea $\pi : \mathbb{R}^d \to B$ la proyección ortogonal. Entonces $\pi(C)$ es un conjunto convexo abierto no-vacío en B. Además, como $\pi^{-1}(\pi(x)) = L$, entonces $\pi(x) \notin \pi(C)$. Entonces, por hipótesis, existe un hiperplano H' en B tal que $\pi(x) \in H'$ y $H' \cap \pi(C) = \emptyset$. Entonces

$$H := aff(H' \cup L) = \pi^{-1}(H'),$$

es un hiperplano en $\mathbb{R}^d$ con $x \in H$ y $H \cap C = \emptyset$. □

Teorema 2.4.9. *Sea C un conjunto convexo cerrado en $\mathbb{R}^d$, $x \in rb\ C$. Entonces existe un hiperplano soporte propio H de C tal que $x \in H$.*

Demostración. Sea C un conjunto convexo cerrado en $\mathbb{R}^d$ y $x \in rb\ C$. Si $dim\ C = -1$ o 0, entonces no hay nada que probar, sea $dim\ C = e \geq 1$. $ri\ C$ es no-vacío por el Teorema 2.3.8, convexo por el Teorema2.3.12(b) y abierto en $aff\ C$. Como $x \in rb\ C$ y C es cerrado, entonces $x \in aff\ C$. Ahora como $dim(aff\ C) = e$ por el Teorema 2.1.42 tenemos que $aff\ C$ puede ser identificado con $\mathbb{R}^e$. Luego aplicando el Lema 2.4.8 a $ri\ C$ y a $x \notin ri\ C$, existe un hiperplano H' en $aff\ C$ tal que $x \in H'$ y $H' \cap ri\ C = \emptyset$. Como H' es un hiperplano en $aff\ C$ entonces existe un hiperplano H de $\mathbb{R}^d$ tal que $H' = H \cap aff\ C$ (Si $aff\ C = \mathbb{R}^d$, entonces $H = H'$). Entonces $x \in H$ y $H \cap ri\ C = \emptyset$. Como $H \cap ri\ C = \emptyset$ entonces por el Teorema 2.4.6(a) $\Rightarrow$ (b) tenemos que H es un hiperplano soporte propio de C. □

Teorema 2.4.10. *Sea C un conjunto convexo cerrado en $\mathbb{R}^d$. Entonces C es la intersección de sus semiespacios soportes.*

Demostración. Cuando $dim\ C = 0$, el teorema es cierto. Cuando $C = \mathbb{R}^d$, no hay semiespacios soportes, por lo tanto el teorema es cierto en este caso.
Sea $dim\ C \geq 1$, y sea $x \in \mathbb{R}^d \setminus C$, probaremos que existe un semiespacio soporte K de C tal que $x \notin K$. Si $x \notin aff\ C$, existe un hiperplano H en $\mathbb{R}^d$ con $aff\ C \subset H$ y $x \notin H$. El semiespacio cerrado acotado por H el cual no contiene a x tiene la propiedad deseada. Si $x \in aff\ C$, $ri\ C \neq \emptyset$ por el Teorema 2.3.8, sea $z \in ri\ C$. Entonces $[z, x] \cap C$ es un segmento cerrado $[z, u]$, donde $u \in rb\ C$ y $[z, u[\in ri\ C$ por el Teorema 2.3.10. Ahora por el Teorema 2.4.9 existe un hiperplano soporte propio H de C tal que $u \in H$. El semiespacio soporte K acotado por H tiene la propiedad deseada. De hecho, supongamos que $x \in K$,

como $z \in ri\ C$, por el Corolario 2.4.7 tenemos que $z \notin H$, entonces $z \in int\ K$, luego por el Teorema 2.3.10 tenemos que $]z, x[\in int\ K$, lo cual es absurdo por el hecho que $u \in]z, x[$ y $x \in H = bd\ K$. $\square$

2.5. La Estructura Facial de un Conjunto Convexo Cerrado

Desde estudios básicos tenemos la idea intuitiva de lo que es una cara. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$ si tenemos un cubo decimos que está compuesto por caras, aristas y vértices. En la definición de una cara de un conjunto convexo cerrado C en $\mathbb{R}^d$ las aristas y los vértices también son caras, solamente que reciben ese nombre particular porque están clasificadas según su dimensión, en el caso del cubo las que conocemos como caras son las $2-$caras(facetas), las aristas son las $1-$caras y los vértices las $0-$caras.
Hay ciertas caras de C que tienen una forma particular en términos de hiperplanos. Además, el conjunto de los interiores relativos de las caras de C excluyendo al vacío forman una partición de C.
Cada cara de un conjunto convexo cerrado es un conjunto convexo cerrado así que tiene sentido hablar de la cara de una cara, si C es convexo compacto este tiene una "representación interna" ya que son generados por sus caras 0-dimensionales es decir por sus puntos extremos.

Definición 2.5.1. *Sea C un conjunto convexo cerrado en $\mathbb{R}^d$. Un subconjunto convexo F de C es una cara de C si para cualesquiera dos puntos distintos $y, z \in C$ tales que $]y, z[\cap F \neq \emptyset$, entonces $[y, z] \subset F$.*
Los subconjuntos C y $\emptyset$ son ambos caras de C, llamadas caras impropias, todas las demás caras son propias.

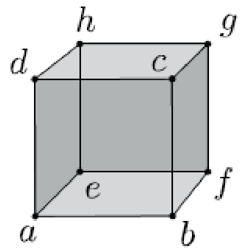
Comentario 2.5.2. *Note que por la convexidad de F para tener que $[y, z] \subset F$ es suficiente tener que $y, z \in F$.*

Definición 2.5.3. *Un punto $x \in C$ es un punto extremo de C si $\{x\}$ es una cara. Es decir, x no es un punto interior relativo de algún segmento $[y, z]$ en C, o equivalentemente que $C \setminus \{x\}$ es convexo. El conjunto de puntos extremos de C es denotado por ext C.*

Definición 2.5.4. *Una cara F de C es una $k-$cara si dim $F = k$.*

Comentario 2.5.5. *Las $0-$caras son los puntos extremos.*

Ejemplo 2.5.6. *Caras $k-$dimensionales de un cubo:*



$0-$ *caras* : $a, b, c, d, e, f, g.$

$1-$ *caras* : $[a, b], [b, c], [c, d], [a, d], [e, f], [f, g],$
$[g, h], [e, h], [a, e], [b, f], [c, g], [d, h].$

$2-$ *caras* : $conv\{a, b, c, d\}, conv\{a, b, e, f\},$
$conv\{e, f, g, h\}, conv\{c, d, g, h\},$
$conv\{a, d, e, h\}, conv\{b, c, f, g\}.$

Definición 2.5.7. *Una cara F de C es una faceta si $0 \leq dim\ F = dim\ C - 1$.*

Lema 2.5.8. *Sea C un conjunto convexo cerrado de $\mathbb{R}^d$ y*

$$\mathscr{A} := \{F_i/F_i \text{ es un cara de } C\ ,\ i \in I\},$$

un conjunto de caras de C. Entonces

$$F := \bigcap_{i \in I} F_i$$

es un cara de C.

Demostración. Si $F = \emptyset$ tenemos el resultado. Supongamos que $F \neq \emptyset$.
Como cada F_i es una cara de C, entonces F_i es convexo y $F_i \subset C$, $\forall i \in I$, lo que implica que F es convexo y $F \subset C$. Ahora sean $y, z \in C$ tales que $]y, z[\, \cap F \neq \emptyset$, entonces $]y, z[\, \cap F_i \neq \emptyset$ luego como los F_i son caras de C tenemos que $[y, z]\ \subset F_i$, $\forall i \in I$, así $[y, z]\ \subset F$. Por lo tanto F es una cara de C. □

Definición 2.5.9. *Un conjunto parcialmente ordenado $(M, \preceq)$ es un lattice si $\inf N$ y $\sup N$ existen para cada subconjunto finito no-vacío N de M. Si $\inf N$ y $\sup N$ existen para cualquier subconjunto N de M, entonces el lattice $(M, \preceq)$ es llamado un lattice completo.*

Definición 2.5.10. *Sea $(M, \preceq)$ un lattice y M' un subconjunto no-vacío de M. Diremos que el conjunto parcialmente ordenado $(M', \preceq)$ es un sublattice del lattice $(M, \preceq)$ si $\inf N \in M'$ y $\sup N \in M'$ para cada subconjunto finito no-vacío N de M'(Aquí $\inf N$ y $\sup N$ en $(M, \preceq)$).*

Definición 2.5.11. *Sean $(M_1, \preceq)$ y $(M_2, \preceq)$ dos lattices.*

(1) Una aplicación $\varphi : (M_1, \preceq) \to (M_2, \preceq)$ es un isomorfismo de lattices si φ es biyectiva y $x \preceq y \Leftrightarrow \varphi(x) \preceq \varphi(y)$, $\forall\ x, y \in M_1$
Si existe φ diremos que $(M_1, \preceq)$ y $(M_2, \preceq)$ son isomorfos.

(2) Una aplicación $\Phi : (M_1, \preceq) \to (M_2, \preceq)$ es un anti-isomorfismo de lattices si Φ es biyectiva y $x \preceq y \Leftrightarrow \Phi(y) \preceq \Phi(x)$, $\forall\ x, y \in M_1$.
Si existe Φ diremos que $(M_1, \preceq)$ y $(M_2, \preceq)$ son anti-isomorfos.

Teorema 2.5.12. *Sean C un conjunto convexo cerrado de $\mathbb{R}^d$ y*

$$\mathscr{F}(C) := \{F/F \text{ es una cara de } C\}$$

el conjunto de todas las caras de C. Entonces el conjunto parcialmente ordenado $(\mathscr{F}(C), \subset)$ es un lattice completo con las operaciones de lattice

$$\text{ínf}\, \mathscr{A} := \bigcap \{F \in \mathscr{F}(C)/F \in \mathscr{A}\},$$

$$\sup \mathscr{A} := \bigcap \{G \in \mathscr{F}(C)/\forall F \in \mathscr{A} : F \subset G\}.$$

$\mathscr{A} \subset \mathscr{F}(C)$. Llamaremos a $(\mathscr{F}(C), \subset)$ la cara lattice de C.

Demostración. Sea $\mathscr{A} := \{F_i/F_i$ es un cara de C , $i \in I\}$. Del Lema 2.5.8 podemos concluir que existe un cara más grande de C contenida en cada uno de los miembros de $\mathscr{A}$. Es decir, la intersección de todos los miembros de $\mathscr{A}$.
Además, también podemos concluir que existe una cara más pequeña de C que contiene a todos los miembros de $\mathscr{A}$. Es decir, la intersección de todas las caras de C que contienen a los miembros de $\mathscr{A}$. Por lo tanto $(\mathscr{F}(C), \subset)$ es un lattice completo. □

Lema 2.5.13. *Sea C un conjunto convexo cerrado de $\mathbb{R}^d$ tal que dim $C \geq 1$ y H un hiperplano soporte propio de C. Entonces el conjunto $F := H \cap C$ es una cara propia de C.*

Demostración. Como H es un hiperplano soporte propio de C, $C \not\subset H$, entonces $F = H \cap C$ es un subconjunto propio de C y además es convexo por ser intersección de conjuntos convexos.
Sean $y, z \in C$, $y \neq z$, tales que $]y, z[\, \cap F \neq \emptyset$, entonces existe $\lambda \in]0, 1[$ tal que $(1-\lambda)y + \lambda z \in H$. Por el Teorema 2.1.53 existen $u \in \mathbb{R}^d$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $H = H(u, \alpha)$ y como $H(u, \alpha)$ es un hiperplano soporte de C, entonces $C \subset K(u, \alpha)$. Luego $\langle y, u\rangle \leq \alpha$, $\langle z, u\rangle \leq \alpha$ y $\langle (1-\lambda)y + \lambda z, u\rangle = \alpha$.

$$\begin{aligned} \alpha &= \langle (1-\lambda)y + \lambda z, u\rangle \\ &= (1-\lambda)\langle y, u\rangle + \lambda\langle z, u\rangle \\ &\leq (1-\lambda)\alpha + \lambda\alpha \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Como $\lambda > 0$, entonces $\langle y, u\rangle = \langle z, u\rangle = \alpha$. Lo que implica que $y, z \in H \cap C = F$, así que $[y, z] \subset F$. Por lo tanto F es una cara de C. □

Definición 2.5.14. *Sea C un conjunto convexo cerrado de $\mathbb{R}^d$. Una cara F de C es una cara expuesta(propia) si F es de la forma $F = H \cap C$, donde H es un hiperplano soporte propio de C. Consideramos al $\emptyset$ y C como caras expuestas de C, las que llamaremos caras expuestas impropias.*
El conjunto de caras expuestas de C es denotado por $\mathscr{E}(C)$.

Definición 2.5.15. *Sea C un conjunto convexo cerrado de $\mathbb{R}^d$. Un punto $x \in C$ es un punto expuesto de C si $\{x\}$ es una cara expuesta de C. El conjunto de puntos expuestos de C es denotado por $exp\ C$.*

Comentario 2.5.16. *De la definición de puntos expuestos, tenemos que $exp\ C \subset ext\ C$.*

Teorema 2.5.17. *Sea C un conjunto convexo cerrado de $\mathbb{R}^d$. Si F es una cara de C entonces F es un conjunto cerrado.*

Demostración. Si $dim\ F = -1, 0$ se tiene el resultado. Asumamos que $dim\ F \geq 1$ y sea $x \in cl\ F$ y $x_0 \in ri\ F$, el cual existe ya que $ri\ F \neq \emptyset$ por el Teorema 2.3.8. Si $x = x_0$ tendríamos que $x \in F$.
Sea $x \neq x_0$, por el Teorema 2.3.10 tenemos que $[x_0, x[\subset ri\ F$ entonces $]x_0, x[\ \cap F \neq \emptyset$, luego como F es una cara concluimos que $x \in F$. Por lo tanto F es cerrado. $\square$

Comentario 2.5.18. *El Teorema 2.5.17 no dice que tiene sentido hablar de la cara de una cara, porque si C es un conjunto convexo cerrado entonces sus caras también lo son.*

Teorema 2.5.19. *Sean C un conjunto convexo cerrado de $\mathbb{R}^d$, F una cara de C y $G \subset F$. Entonces G es una cara de C si y sólo si G es una cara de F.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Supongamos que G es una cara de C, entonces $\forall\ y, z \in C$, $y \neq z$, tales que $]y, z[\ \cap\ G \neq \emptyset$ tenemos que $y, z \in G$. Ahora como $G \subset F \subset C$ entonces en particular $\forall\ y, z \in F$, $y \neq z$, tales que $]y, z[\ \cap\ G \neq \emptyset$ tenemos que $y, z \in G$. Por lo tanto G es una cara de F.

$\Leftarrow]$ Supongamos que G es una cara de F y sean $y, z \in C$, $y \neq z$, tales que $]y, z[\ \cap\ G \neq \emptyset$. Luego como $G \subset F$ entonces $]y, z[\ \cap\ F \neq \emptyset$ de donde tenemos que $y, z \in F$ ya que F es una cara de C, así $y, z \in G$ puesto que G es una cara de F y además $G \subset F \subset C$. Por lo tanto G es una cara de C. $\square$

Teorema 2.5.20. *Sea C un conjunto convexo cerrado de $\mathbb{R}^d$ y F una cara de C tal que $F \neq C$. Entonces $F \subset rb\ C$.*

Demostración. Para $dim\ C = -1, 0$, no hay nada que probar. Asumamos que $dim\ C \geq 1$, mostraremos que si para algún $x \in F$ también $x \in ri\ C$ tendríamos que $F = C$ lo cual contradice la hipótesis.
Sea $x \in F$ tal que $x \in ri\ C$ y sea $y \in C$ un punto arbitrario. Si $y = x$, entonces $y \in F$ y $F = C$. Sea $y \neq x$ por el Teorema 2.3.13[$(a) \Rightarrow (c)$] existe $z \in C$ tal que $x \in\ ]y, z[$ lo que implica que $]y, z[\ \cap\ F \neq \emptyset$ luego como F es una cara de C entonces $y \in F$ de donde $F = C$, absurdo. Por lo tanto $F \subset rb\ C$. $\square$

Corolario 2.5.21. *Sean F y G caras de un conjunto convexo cerrado C en $\mathbb{R}^d$ tales que $G \subsetneq F$. Entonces $G \subset rb\ F$.*

Demostración. Del Teorema 2.5.19 tenemos que G es una cara de F y por hipótesis $G \subsetneqq F$ entonces por Teorema 2.5.20 concluimos que $G \subset rb\ F$. □

Corolario 2.5.22. *Sean F y G caras de un conjunto convexo cerrado C en $\mathbb{R}^d$ tales que $G \subsetneqq F$. Entonces $dim\ G < dim\ F$.*

Demostración. Como $G \subset F$, tenemos que $aff\ G \subset aff\ F$. Supongamos que $aff\ G = aff\ F$ entonces por el Lema 2.3.11 $ri\ G \subset ri\ F$. Además por el Corolario 2.5.21 tenemos que $G \subset rb\ F$ lo cual implica que $ri\ G \subset rb\ F$ así que tenemos que $ri\ G \subset ri\ F$ y $ri\ G \subset rb\ F$ por lo tanto $ri\ G = \emptyset$. Ahora como G es un conjunto convexo, por el Teorema 2.3.8 tenemos que $G = \emptyset$, así $F = \emptyset$ ya que $aff\ G = aff\ F$, absurdo. Por hipótesis $G \neq F$, luego $aff\ G \subsetneqq aff\ F$. Por lo tanto $dim\ G < dim\ F$. □

Observación 2.5.23. *Sea C un conjunto convexo cerrado de $\mathbb{R}^d$ y $M \subset C$, entonces existe la cara más pequeña de C que contiene a M. Es decir, la intersección de todas las cara de C tales que contienen a M.*
El Teorema 2.5.20 muestra todas las caras propias de C están contenidas en $rb\ C$. Por lo tanto, cuando M contiene un punto de $ri\ C$, entonces C mismo es la cara más pequeña que contiene a M.

Teorema 2.5.24. *Sean C un conjunto convexo cerrado de $\mathbb{R}^d$, $x \in C$ y F una cara de C tal que $x \in F$. Entonces F es la cara más pequeña de C que contiene a x si y sólo si $x \in ri\ F$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sea F la cara más pequeña que contiene a x.
Supongamos que $x \notin ri\ F$, entonces $x \in rb\ F$. Luego por el Teorema 2.4.9 existe un hiperplano soporte propio H de F tal que $x \in H$.
Sea $G = H \cap F$, G es una cara expuesta propia de F por el Lema 2.5.13, además $x \in F$ y $x \in H$ entonces $x \in G$. Ahora por el Teorema 2.5.19 G es una cara de C y $x \in G \subsetneqq F$. Por lo tanto F no es la cara más pequeña de C que contiene a x, absurdo. Contradice la hipótesis. Por lo tanto $x \in ri\ C$.

$\Leftarrow$] Sea $x \in ri\ F$ y supongamos que G es la cara más pequeña de C que contiene a x, entonces $G \subsetneqq F$. Luego por el Corolario 2.5.21 tenemos que $G \subset rb\ F$ lo que implica que $x \in rb\ F$, absurdo. Contradice la hipótesis de que $x \in ri\ F$. Por lo tanto F es la cara más pequeña de C que contiene a x. □

Corolario 2.5.25. *Sea C un conjunto convexo cerrado en $\mathbb{R}^d$. Entonces los conjuntos $ri\ F$, donde $F \in \mathscr{F}(C) \setminus \{\emptyset\}$, forman una partición de C.*

Demostración. El Corolario es equivalente a decir que para cada punto $x \in C$ existe una única cara F de C tal que $x \in ri\ F$, sin embargo el Teorema 2.5.24 nos da una cara única, la cara más pequeña de C que contiene a x. □

Teorema 2.5.26. *Sea F una faceta de un conjunto convexo cerrado C de $\mathbb{R}^d$. Entonces F es una cara expuesta.*

Demostración. Como F es una faceta, entonces $dim\ F \geq 0$ luego por el Teorema 2.3.8 tenemos que $ri\ F \neq \emptyset$. Sea $x \in ri\ F$, por el Teorema 2.5.24 F es la cara más pequeña de C que contiene a x. Ahora como F es una faceta de C, tenemos que $F \subset rb\ C$ así que $x \in rb\ C$ luego por el Teorema 2.4.9 existe un hiperplano soporte propio H de C tal que $x \in H$, entonces $x \in G := H \cap C$, G es una cara expuesta propia de C y como F es la cara más pequeña que contiene a x tenemos que $F \subset G \subsetneqq C$. Ahora por el Corolario 2.5.22

$$\Rightarrow\ dim\ C - 1 = dim\ F \leq dim\ G < dim\ C$$

$$\Rightarrow\ dim\ F = dim\ G \quad \Rightarrow\ F = G. \qquad \text{(Por el Corolario 2.5.22)}$$

Por lo tanto F es una cara expuesta. $\square$

Teorema 2.5.27. *Sea $\{F_i / i \in I\}$ un conjunto de cara expuestas de un conjunto convexo cerrado C en $\mathbb{R}^d$, y sea*

$$F := \bigcap_{i \in I} F_i.$$

Entonces F es una cara expuesta de C.

Demostración. Si F es C o $\emptyset$ no hay nada que probar. Asumamos que F es la intersección no-vacía de caras expuestas propias F_i, $i \in I$.
Primero veamos el caso donde I es un conjunto finito, digamos $I = \{1, \dots, n\}$.
Ahora como F_i es una cara expuesta para cada i, existe un hiperplano soporte $H(y_i, \alpha_i)$ tal que $F_i = H(y_i, \alpha_i) \cap C$ y $C \subset K(y_i, \alpha_i)$. Asumiremos sin pérdida de generalidad que $0 \in int\ C$. Entonces $0 \in int(K(y_i, \alpha_i))\ \forall\ i \in I$, así $0 = \langle 0, y_i \rangle < \alpha_i$ y por lo tanto $\alpha_i > 0$, $\forall\ i \in I$. Sea $z_i := \alpha_i^{-1} y_i$,

$$\begin{aligned} H(y_i, \alpha_i) &= \{x \in \mathbb{R}^d / \langle x, y_i \rangle = \alpha_i\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d / \alpha_i^{-1} \langle x, y_i \rangle = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d / \langle x, \alpha_i^{-1} y_i \rangle = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d / \langle x, z_i \rangle = 1\} \\ &= H(z_i, 1). \end{aligned}$$

De donde $F_i = H(z_i, 1) \cap C$ y $C \subset K(z_i, 1)$. Ahora sea $z_0 := \sum_{i=1}^{n} n^{-1} z_i$ entonces para cualquier $x \in C$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle x, z_0 \rangle &= \langle x, \sum_{i=1}^{n} n^{-1} z_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} n^{-1} \langle x, z_i \rangle \qquad (\langle x, z_i \rangle \leq 1 \text{ ya que } C \subset K(z_i, 1)) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} n^{-1} \cdot 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ \langle x, z_0\rangle \leq 1,\ \forall\, x \in C$, lo que implica que $C \subset K(z_0, 1)$. Además tenemos que $x \in H(z_0, 1)$ si y sólo si $\langle x, z_0\rangle = 1$ si y sólo si $x \in H(z_i, 1)$, $\forall\, i \in I$. Luego

$$\begin{aligned} F = \bigcap_{i\in I} F_i &= \bigcap_{i\in I} (H(y_i, \alpha_i) \cap C) \\ &= \bigcap_{i\in I} H(y_i, \alpha_i) \cap C \\ &= \bigcap_{i\in I} H(z_i, 1) \cap C \\ &= H(z_0, 1) \cap C. \end{aligned}$$

Por lo tanto F es una cara expuesta de C.
Cuando I es infinito, es suficiente con probar que existen $i_1, \ldots, i_n \in I$ tales que

$$F = \bigcap_{v=1}^{n} F_{i_v}.$$

Sea i_1 cualquiera de los $i's$ en I. Si $F = F_{i_1}$, F sería una cara expuesta. Si $F \subsetneqq F_{i_1}$ entonces existe $i_2 \in I$ tal que

$$F \subset F_{i_1} \cap F_{i_2} \subsetneqq F_{i_1}.$$

Entonces por el Corolario 2.5.22 tenemos que $dim(F_{i_1} \cap F_{i_2}) < dim\ F_{i_1}$. Si $F = F_{i_1} \cap F_{i_2}$, F sería una cara expuesta. Si $F \subsetneqq F_{i_1} \cap F_{i_2}$ entonces existe $i_3 \in I$ tal que

$$F \subset F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap F_{i_3} \subsetneqq F_{i_1} \cap F_{i_2}.$$

Entonces por el corolario 2.5.22 tenemos que $dim(F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap F_{i_3}) < dim(F_{i_1} \cap F_{i_2})$. Si $F = F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap F_{i_3}$, F sería una cara expuesta. Si $F \subsetneqq F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap F_{i_3}$, existe $i_4 \in I$, etc.
Ya que en cada paso la dimensión es menor al menos 1, y como cada intersección siguen siendo caras expuestas su dimensión debe ser mayor o igual a 0 ya que excluimos el caso donde la intersección es vacía. Así que debemos finalizar con $i_1, \ldots, i_n \in I$ tales que

$$F = \bigcap_{v=1}^{n} F_{i_v}.$$

Por lo tanto F es una cara expuesta. $\square$

Teorema 2.5.28. *Sean C un conjunto convexo cerrado de $\mathbb{R}^d$ y*

$$\mathscr{E}(C) := \{F/F \text{ es una cara expuesta de } C\}$$

el conjunto de todas las caras expuestas de C. Entonces el conjunto parcialmente ordenado $(\mathscr{E}(C), \subset)$ es un lattice completo con las operaciones de lattice

$$\text{ínf}\, \mathscr{A} := \bigcap \{F \in \mathscr{E}(C)/F \in \mathscr{A}\},$$

$$\sup \mathscr{A} := \bigcap \{G \in \mathscr{E}(C)/\forall F \in \mathscr{A} : F \subset G\}.$$

$\mathscr{A} \subset \mathscr{E}(C)$.

Demostración. Sea $\mathscr{A} := \{F_i/F_i$ es un cara expuesta de C , $i \in I\}$. Del Teorema 2.5.27 podemos concluir que existe un cara expuesta más grande de C contenida en cada uno de los miembros de $\mathscr{A}$. Es decir, la intersección de todos los miembros de $\mathscr{A}$.
Además, también podemos concluir que existe una cara expuesta más pequeña de C que contiene a todos los miembros de $\mathscr{A}$. Es decir, la intersección de todas las caras expuestas de C que contienen a los miembros de $\mathscr{A}$. Por lo tanto $(\mathscr{E}(C), \subset)$ es un lattice completo. □

Observación 2.5.29. *Note que en general $(\mathscr{E}(C), \subset)$ no es un sublattice de $(\mathscr{F}(C), \subset)$. De hecho, cuando $\mathscr{A}$ es un subconjunto de $\mathscr{E}(C)$, entonces* $\sup \mathscr{A}$ *computado en $(\mathscr{E}(C), \subset)$ puede ser diferente del* $\sup \mathscr{A}$ *computado en $(\mathscr{F}(C), \subset)$. El* ínf *si es el mismo siempre.*

Teorema 2.5.30 (Teorema De Minkowski)**.** *Sea C un conjunto convexo compacto de $\mathbb{R}^d$, y sea M un subconjunto de C. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

(a) $C = conv\ M$.

(b) $ext\ C \subset M$.

En particular,

(c) $C = conv(ext\ C)$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Supongamos que existe un punto extremo x de C tal que $x \notin M$. Entonces $M \subset C \backslash \{x\}$ y como $C \backslash \{x\}$ es convexo ya que $x \in ext\ C$, así $C = conv\ M \subset C \backslash \{x\}$, absurdo. Encontré un conjunto convexo más pequeño que contiene a M y $conv\ M$. Por lo tanto $ext\ C \subset M$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Para probar esta implicación, es suficiente con probar que $C = conv(ext\ C)$, puesto que si $C = conv(ext\ C)$ y $ext\ C \subset M$ entonces $conv(ext\ C) \subset conv\ M$ así que $C \subset conv\ M$ y además $M \subset C$, entonces $conv\ M \subset C$. Por lo tanto, $C = conv\ M$, esto quiere decir que $C = conv\ M$ para cualquier subconjunto M de C tal que $ext\ C \subset M$.
$ext\ C \subset C$, entonces $conv(ext\ C) \subset C$ falta probar que $C \subset conv(ext\ C)$. Procederemos por inducción sobre la dimensión de C. Si $dim\ C = -1, 0$ no hay nada que probar. Para $dim\ C = 1$ es claro ya que son los segmentos cerrados. Supongamos que se cumple para un conjunto convexo compacto de dimensión $< e$, donde $e \geq 2$, y sea C un conjunto convexo compacto tal que $dim\ C = e$.
Sea $x \in C$, un punto arbitrario. Probaremos que x es combinación convexa de puntos extremos de C. Es decir, $x \in conv(ext\ C)$.
Si $x \in ext\ C$ no hay nada que probar. Si $x \notin ext\ C$, existe un segmento $[y_0, y_1] \subset C$ tal que $x \in]y_0, y_1[$. Extendiendo el segmento, si es necesario, de tal manera que $y_0, y_1 \in rb\ C$. Sean F_0 y F_1 las caras más pequeñas de C que contienen a y_0 y y_1 respectivamente. Luego por el Corolario 2.5.25 F_0 y F_1 son caras propias de C, en particular son conjuntos convexos compactos, ya que son cerradas por ser caras de C y acotadas por ser subconjuntos de un conjunto

compacto. Además por el Corolario 2.5.22 tenemos que la dimensión de F_0 y F_1 es menor que e, luego por la hipótesis inductiva existen $x_{0_1}, \ldots, x_{0_p} \in ext\ F_0$ y $x_{1_1}, \ldots, x_{1_q} \in ext\ F_1$ tales que y_0 es una combinación convexa de los puntos x_{0_i}, $1 \leq i \leq p$ y y_1 es combinación convexa de los puntos x_{1_j}, $1 \leq j \leq q$. Ahora como $x \in]y_0, y_1[$, entonces x es combinación convexa de y_0 y y_1 por lo tanto x es combinación convexa de x_{0_i} y x_{1_j} y como $x_{0_i} \in ext\ F_0$ y $x_{1_j} \in ext\ F_1$, entonces los x_{0_i} y x_{1_j} son puntos extremos de C por el Teorema 2.5.19. Por lo tanto $C \subset conv(ext\ C)$. □

Corolario 2.5.31. *Sea C un conjunto convexo compacto con $dim\ C = n$. Entonces cada punto de C es una combinación convexa de a lo más $n+1$ puntos extremos de C.*

Demostración. Del Teorema 2.5.30 tenemos que $C = conv(ext\ C)$ y $dim\ C = n$ entonces por el Corolario 2.2.14 cada punto en $C = conv(ext\ C)$ es combinación convexa de a lo más $n+1$ puntos de $ext\ C$. □

2.6. Polaridad

Para cualquier subconjunto M de $\mathbb{R}^d$ podemos asociarle un conjunto convexo cerrado M° llamado el polar de M, esta operación puede ser iterada. Además, si C es un conjunto convexo compacto tal que $0 \in int\ C$ tenemos que C y C° juegan un papel simétrico es decir $C^{\circ\circ} = C$, para C todos sus hiperplanos soportes son propios y tienen una representación particular como $H(y,1)$ con $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ lo cual permite dar una relación entre los hiperplanos de C y C°.

Definición 2.6.1. *Sea $M \subset \mathbb{R}^d$. El conjunto polar de M es el subconjunto M° de $\mathbb{R}^d$ definido por*

$$\begin{aligned} M^\circ &:= \{y \in \mathbb{R}^d / \forall x \in M, \langle x, y\rangle \leq 1\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^d / \sup_{x\in M}\langle x, y\rangle \leq 1\}. \end{aligned}$$

Equivalentemente

$$M^\circ = \bigcap_{x \in M} K(x,1).$$

Ejemplo 2.6.2. *(1) Sea $x \in \mathbb{R}^d$, entonces*

$$\{x\}^\circ = \{y \in \mathbb{R}^d \ / \ \langle x, y\rangle \leq 1\} = K(x,1).$$

Si $x = 0$, entonces $\{0\}^\circ = \mathbb{R}^d$ ya que $\langle 0, y\rangle = 0 \leq 1$, $\forall y \in \mathbb{R}^d$.

(2) En $\mathbb{R}^2$, el polar de eje X es el eje Y.
Si $(x,y) \in X^\circ$, entonces $\langle (a,0),(x,y)\rangle \leq 1$, $\forall a \in \mathbb{R}$, así que $ax \leq 1$ $\forall a \in \mathbb{R}$, lo que se da solamente si $x = 0$.

Observación 2.6.3. *Sean $M, M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^d$. Entonces:*

(1) $y \in M^\circ$ *si y sólo si* $M \subset K(y,1)$.

(2) M° *es un conjunto convexo cerrado, y contiene al cero.*

(3) Si $M_1 \subset M_2$ *entonces* $M_2^\circ \subset M_1^\circ$.

En efecto:

(1) $y \in M^\circ \Leftrightarrow \forall\, x \in M,\ \langle x, y\rangle \leq 1 \Leftrightarrow \forall\, x \in M,\ x \in K(y,1) \Leftrightarrow M \subset K(y,1)$.

(2) Como $M^\circ = \bigcap_{x\in M} K(x,1)$ *y* $K(x,1)$, $\forall\, x \in M$ *son conjuntos convexos cerrados, entonces* M° *es un conjunto convexo cerrado. Además* $0 \in M^\circ$, *ya que* $\langle x, 0\rangle = 0 < 1$, $\forall\, x \in M$.

(3) Si $M_1 \subset M_2$, *entonces*

$$M_2^\circ = \bigcap_{x\in M_2} K(x,1) = \left(\bigcap_{x\in M_1} K(x,1)\right) \cap \left(\bigcap_{x\in M_2\setminus M_1} K(x,1)\right) = M_1^\circ \cap \left(\bigcap_{x\in M_2\setminus M_1} K(x,1)\right).$$

Por lo tanto $M_2^\circ \subset M_1^\circ$.

Teorema 2.6.4. *Sea $M \subset \mathbb{R}^d$. Entonces:*

(a) Si M *es acotado, entonces* 0 *es un punto interior de* M°.

(b) Si 0 *es un punto interior de* M, *entonces* M° *es acotado.*

Demostración. (a) Sea $\overline{B}(0,r)$ la bola cerrada centrada en 0 y de radio $r > 0$, entonces $\bar{B}(0,r)^\circ = \{y \in \mathbb{R}^d / \sup_{x\in\bar{B}(0,r)}\langle x, y\rangle \leq 1\}$.

Tenemos que $|\langle x, y\rangle| \leq ||x||\ ||y||$, entonces

$$\sup_{x\in\bar{B}(0,r)} \langle x, y\rangle = ||x||\ ||y|| = r\ ||y||,\ \forall y \in \mathbb{R}^d,\ r > 0.$$

Ahora $\sup_{x\in\bar{B}(0,r)}\langle x, y\rangle \leq 1 \Leftrightarrow r||y|| \leq 1 \Leftrightarrow ||y|| \leq r^{-1}$. Es decir, $y \in \bar{B}(0, r^{-1})$. Por lo tanto $\bar{B}(0,r)^\circ = \bar{B}(0, r^{-1})$.

Si M es acotado, entonces $M \subset \bar{B}(0,r)$, para algún $r > 0$. Luego por la Observación 2.6.3(3) tenemos que $\bar{B}(0,r)^\circ \subset M^\circ \Rightarrow \bar{B}(0,r^{-1}) \subset M^\circ$. Lo que implica que $B(0,r^{-1}) \subset M^\circ$. Por lo tanto 0 es un punto interior de M°.

(b) Supongamos que 0 es un punto interior de M, entonces existe $r > 0$ tal que $B(0,r) \subset M$.
Sea $0 < s < r$, así $\bar{B}(0,s) \subset B(0,r) \subset M$. Luego por la Observación 2.6.3(3) tenemos que $M^\circ \subset \bar{B}(0,s)^\circ \Rightarrow M^\circ \subset \bar{B}(0,s^{-1})$. Por lo tanto M° es acotado.

□

Definición 2.6.5. *Sea $M \subset \mathbb{R}^d$. Definimos el bipolar de M como $M^{\circ\circ} = (M^\circ)^\circ$.*

Teorema 2.6.6. *Sea $M \subset \mathbb{R}^d$. Entonces*

$$M^{\circ\circ} = clconv(\{0\} \cup M).$$

Es decir, $M^{\circ\circ}$ es el conjunto convexo cerrado más pequeño que contiene al 0 y a M.

Demostración.

$$M^{\circ\circ} = \bigcap_{y \in M^\circ} K(y,1) = \bigcap_{M \subset K(y,1)} K(y,1). \qquad (1)$$

Así que $M^{\circ\circ}$ es un conjunto convexo cerrado que contiene al cero y a M. Por lo tanto $clconv(\{0\} \cup M) \subset M^{\circ\circ}$.
Ahora, probaremos que $M^{\circ\circ} \subset clconv(\{0\} \cup M)$, sea $z \notin clconv(\{0\} \cup M)$. Como $clconv(\{0\} \cup M)$ es un conjunto convexo cerrado y $z \notin clconv(\{0\} \cup M)$, por el Teorema 2.4.10 existe un semiespacio soporte $K(y,\alpha)$ de $clconv(\{0\} \cup M)$ tal que $z \notin K(y,\alpha)$. Además $clconv(\{0\} \cup M) \subset K(y,\alpha)$ y $clconv(\{0\} \cup M) \cap H(y,\alpha) \neq \emptyset$, entonces tenemos que

$$\text{máx}\{\langle x,y\rangle / x \in clconv(\{0\} \cup M)\} = \alpha < \langle z,y\rangle.$$

como $0 \in clconv(\{0\} \cup M)$ entonces $\alpha \geq 0$. Por lo tanto existe $\beta > 0$ tal que

$$\text{máx}\{\langle x,y\rangle / x \in clconv(\{0\} \cup M)\} \leq \beta < \langle z,y\rangle.$$

Entonces

$$\text{máx}\{\langle x,\beta^{-1}y\rangle / x \in clconv(\{0\} \cup M)\} \leq 1 < \langle z,\beta^{-1}y\rangle.$$

Sea $u := \beta^{-1}y$. Luego

$$\text{máx}\{\langle x,u\rangle / x \in clconv(\{0\} \cup M)\} \leq 1 < \langle z,u\rangle.$$

Lo que implica que $M \subset K(u,1)$ y $z \notin K(u,1)$, así por (1) tenemos que $z \notin M^{\circ\circ}$. Por lo tanto $M^{\circ\circ} \subset clconv(\{0\} \cup M)$.

□

Corolario 2.6.7. *Sea C un conjunto convexo compacto en $\mathbb{R}^d$ tal que 0 es un punto interior de C. Entonces C° es un conjunto convexo compacto que contiene al 0 en su interior. Además $C^{\circ\circ} = C$.*

Demostración. Como C es compacto y contiene al 0 en su interior, entonces por el Teorema 2.6.4 tenemos que C° es acotado y 0 es un punto interior de C°. Además C° es un conjunto convexo cerrado por la Observación 2.6.3. Por lo tanto C° es un conjunto convexo compacto. Ahora

$$C^{\circ\circ} = clconv(\{0\} \cup C) = clconv(C) = C,$$

ya que C es un conjunto convexo cerrado y $\{0\} \subset C$. □

En lo que sigue, asumiremos que C es un conjunto convexo compacto de $\mathbb{R}^d$ tal que $0 \in int\ C$, notaremos a C° por D. Además si $H(u, \alpha)$ es un hiperplano soporte de C, como $int\ C \neq \emptyset$ entonces $C \not\subset H(u, \alpha)$. Por lo tanto todo hiperplano soporte de C es propio, y además puesto que $0 \notin H(u, \alpha)$ entonces $\alpha > 0$ por lo que tenemos que $H(u, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^d / \langle x, u \rangle = \alpha\} = \{x \in \mathbb{R}^d / \langle x, \alpha^{-1} u \rangle = 1\} = H(y, 1)$, $y = \alpha^{-1} u$. Por lo tanto H es de la forma $H(y, 1)$ para un único $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Entonces $C \subset K(y, 1)$ de donde tenemos que $y \in D$ por la Observación 2.6.3(1).

Teorema 2.6.8. *Sea $y \in \mathbb{R}^d$, las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

(a) $H(y, 1)$ es un hiperplano soporte de C.

(b) $y \in bd\ D$.

Similarmente, para $x \in \mathbb{R}^d$, las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(c) $H(x, 1)$ es un hiperplano soporte de D.

(d) $x \in bd\ C$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que $H(y, 1)$ es un hiperplano soporte de C. Entonces $C \subset K(y, 1)$, así por la Observación 2.6.3 tenemos que $y \in D$ y $\sup_{x \in C} \langle x, y \rangle = 1$ que realmente es un máximo ya que $H(y, 1) \cap C \neq \emptyset$.
Si $y \in int\ D$, entonces existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda y \in D$. Ahora como $D = C^\circ$ tenemos que $\sup_{x \in C} \langle x, \lambda y \rangle \leq 1$ lo que implica que $\sup_{x \in C} \langle x, y \rangle \leq \frac{1}{\lambda} < 1$, lo cual es absurdo. Por lo tanto $y \in D \setminus int\ D = bd\ D$ puesto que D es cerrado.

$(b) \Rightarrow (a)$ Si $y \in bd\ D$. En particular $y \in D \setminus \{0\}$ por el Corolario 2.6.7. Ahora como D es el polar de C y $0 \in int\ C$, entonces $0 < \sup_{x \in C} \langle x, y \rangle \leq 1$ así que para un $\lambda > 1$ adecuado $\sup_{x \in C} \langle x, \lambda y \rangle = 1$ por lo que $\lambda y \in C^\circ (= D)$. Como $0 \in int\ D$ y $y \in]0, \lambda y[$ entonces por el Teorema 2.3.10 tenemos que $y \in int\ D$, absurdo, por hipótesis $y \in bd\ D$. Por lo tanto $\sup_{x \in C}\langle x, y\rangle = 1$. Además el supremo es en realidad un máximo ya que C es compacto y $\langle \cdot, y\rangle$ es continuo, lo que implica por el Teorema 2.4.5 que $H(y,1)$ es un hiperplano soporte de C.

$(c) \Leftrightarrow (d)$ Como $C = C^{\circ\circ} = D^{\circ}$ entonces el resultado se tiene a partir de $[(a) \Leftrightarrow (b)]$. $\square$

Corolario 2.6.9. *Sean $x, y \in \mathbb{R}^d$, las siguientes cuatro condiciones son equivalentes:*

(a) $H(y,1)$ es un hiperplano soporte de C en x.

(b) $H(x,1)$ es un hiperplano soporte de D en y.

(c) $\langle x, y\rangle = 1, x \in bd\ C, y \in bd\ D$.

(d) $\langle x, y\rangle = 1, x \in C, y \in D$.

Demostración. $(a) \Leftrightarrow (c)$ Por el Teorema 2.6.8$[(a) \Leftrightarrow (b)]$ tenemos que $H(y,1)$ es un hiperplano soporte de C en x si y sólo si $\langle x, y\rangle = 1, x \in bd\ C, y \in bd\ D$. $x \in bd\ C$ ya que $x \in H$ y H es un hiperplano soporte propio de C y por el Corolario 2.4.7 $H(y,1) \cap int\ C = \emptyset$.

$(b) \Leftrightarrow (c)$ Por el Teorema 2.6.8$[(c) \Leftrightarrow (d)]$ tenemos que $H(x,1)$ es un hiperplano soporte de D en y si y sólo si $\langle x, y\rangle = 1, x \in bd\ C, y \in bd\ D$. $y \in bd\ D$ ya que $y \in H$ y H es un hiperplano soporte propio de D y por el Corolario 2.4.7 $H(x,1) \cap int\ D = \emptyset$.

$(c) \Rightarrow (d)$ $\langle x, y\rangle = 1, x \in bd\ C, y \in bd\ D$, entonces $x \in C$ y $y \in D$ ya que C y D son cerrados.

$(d) \Rightarrow (a)$ Sea $\langle x, y\rangle = 1, x \in C, y \in D$. Como $y \in D(= C^{\circ})$ entonces por la Observación 2.6.3(1) $C \subset K(y,1)$ y por hipótesis $\langle x, y\rangle = 1$ entonces $x \in H(y,1)$ luego $C \cap H(y,1) \neq \emptyset$ ya que $x \in C$. Por lo tanto $H(y,1)$ es un hiperplano soporte de C en x. $\square$

Definición 2.6.10. *Sea F una cara expuesta de C, propia o impropia, definimos la cara conjugada $F^{\triangle}$ de F como:*

$$F^{\triangle} := \{y \in D(= C^{\circ}) /\ \forall\ x \in F, \langle x, y\rangle = 1\}.$$

Similarmente, sea G una cara expuesta de $D(= C^{\circ})$, definimos la cara conjugada $G^{\triangle}$ de G como:

$$G^{\triangle} := \{x \in C /\ \forall\ y \in G, \langle x, y\rangle = 1\}.$$

Observación 2.6.11. *Si F es una cara expuesta propia de C, entonces un punto $y \in \mathbb{R}^d$ esta en $F^{\triangle}$ si y sólo si $H(y,1)$ es un hiperplano soporte de C tal que $F \subset H(y,1)$. Lo mismo aplica para una cara expuesta propia G de D.*
En efecto:

$$\begin{aligned} y \in F^{\triangle} &\Leftrightarrow y \in D, \forall\, x \in F, \langle x,y\rangle = 1 \\ &\Leftrightarrow H(y,1) \text{ Es un hiperplano soporte de } C \text{ y } F \subset H(y,1). \end{aligned}$$

Además, para las cara expuestas impropias C y $\emptyset$ de C, tenemos que $C^{\triangle} = \emptyset$ y $\emptyset^{\triangle} = D$. Y para las caras expuestas impropias D y $\emptyset$ de D, tenemos que $D^{\triangle} = \emptyset$ y $\emptyset^{\triangle} = C$.

Teorema 2.6.12. *Sea F una cara expuesta propia de C. Entonces $F^{\triangle}$ es una cara expuesta propia de D. Similarmente para una cara expuesta propia G de D.*

Demostración.

$$\begin{aligned} F^{\triangle} &= \{y \in D / \forall x \in F, \langle x,y\rangle = 1\} \\ &= \bigcap_{x\in F} D \cap H(x,1). \end{aligned}$$

Como F es una cara propia de C, tenemos por el Teorema 2.5.20 para cada $x \in F$ entonces $x \in bd\ C$ de donde $H(x,1)$ es un hiperplano soporte de D por el Teorema 2.6.8[$(d) \Rightarrow (c)$]. Entonces cada conjunto $D \cap H(x,1)$ es una cara expuesta de D y además es propia puesto que $0 \in int\ C$ y así $D \not\subset H(x,1)$. Luego por el Teorema 2.5.27 tenemos que $F^{\triangle} = \bigcap_{x\in F} D \cap H(x,1)$ es una cara expuesta de D. Como cada $D \cap H(x,1)$ son caras expuestas propias, entonces $F^{\triangle}$ es propia o vacía. Por hipótesis F es una cara expuesta propia de C, entonces existe un hiperplano soporte propio $H(y,1)$ de C tal que $F = H(y,1) \cap C$ luego de la Observación 2.6.11 tenemos que $y \in F^{\triangle}$. Por lo tanto $F^{\triangle} \neq \emptyset$. □

Observación 2.6.13. *El Teorema 2.6.12 nos dice que $F^{\triangle}$ es una cara expuesta propia de D. Es decir que podemos iterar la $\triangle-$operación, $F^{\triangle\triangle} = (F^{\triangle})^{\triangle}$. Además si F es una cara expuesta propia de C, entonces $F^{\triangle\triangle}$ es una cara expuesta propia de C. Para las caras expuestas impropias C y $\emptyset$ tenemos:*

$$C^{\triangle\triangle} = (C^{\triangle})^{\triangle} = \emptyset^{\triangle} = C.$$

$$\emptyset^{\triangle\triangle} = (\emptyset^{\triangle})^{\triangle} = C^{\triangle} = \emptyset.$$

Teorema 2.6.14. *Sea F una cara expuesta propia de C. Entonces $F^{\triangle\triangle} = F$. Similarmente para una cara expuesta propia G de D.*

Demostración.

$$\begin{aligned} F^{\triangle\triangle} &= \{x \in C / \forall\, y \in F^{\triangle}, \langle x,y\rangle = 1\} \\ &= \bigcap_{y\in F^{\triangle}} C \cap H(y,1). \end{aligned}$$

De la Observación 2.6.11 tenemos que $y \in F^{\triangle}$ si y sólo si $H(y,1)$ es un hiperplano soporte de C tal que $F \subset H(y,1)$. Luego $F^{\triangle\triangle}$ es la intersección de todas las caras expuestas de C que contienen a F pero esta intersección es F, ya que F es una cara expuesta de C. Por lo tanto $F^{\triangle\triangle} = F$. □

Observación 2.6.15. *Sean F_1, F_2 caras expuestas de C tales que $F_1 \subset F_2$. Entonces $F_2^{\triangle} \subset F_1^{\triangle}$.*
En efecto: Si $F_1 \subset F_2$, entonces

$$\begin{aligned} F_2^{\triangle} &= \bigcap_{x\in F_2} D\cap H(x,1) \qquad = \left(\bigcap_{x\in F_1} D\cap H(x,1)\right) \cap \left(\bigcap_{x\in F_2\setminus F_1} D\cap H(x,1)\right) \\ &= F_1^{\triangle} \cap \left(\bigcap_{x\in F_2\setminus F_1} D\cap H(x,1)\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto $F_2^{\triangle} \subset F_1^{\triangle}$.

Corolario 2.6.16. *La aplicación $F \mapsto F^{\triangle}$, donde $F \in \mathscr{E}(C)$, es un anti-isomorfismo de $(\mathscr{E}(C), \subset)$ sobre $(\mathscr{E}(D), \subset)$, y la aplicación $G \mapsto G^{\triangle}$, donde $G \in \mathscr{E}(D)$, es un anti-isomorfismo de $(\mathscr{E}(D), \subset)$ sobre $(\mathscr{E}(C), \subset)$. Las dos aplicaciones son mutuamente inversas.*

Demostración. Sea

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & (\mathscr{E}(C), \subset) & \longrightarrow & (\mathscr{E}(D), \subset) \\ & F & \mapsto & \varphi(F) = F^{\triangle}. \end{array}$$

$*\varphi$ es 1-1: Sean $F_1, F_2 \in \mathscr{E}(C)$ tales que $\varphi(F_1) = \varphi(F_2)$.

$$\begin{aligned} \varphi(F_1) = \varphi(F_2) &\Rightarrow F_1^{\triangle} = F_2^{\triangle} \\ &\Rightarrow F_1^{\triangle\triangle} = F_2^{\triangle\triangle} \\ &\Rightarrow F_1 = F_2. \qquad \text{[Por el Teorema 2.6.14]} \end{aligned}$$

Ahora probemos que $F_1 \subset F_2$ si y sólo si $\varphi(F_2) \subset \varphi(F_1)$, $\forall\ F_1, F_2 \in \mathscr{E}(C)$

$$\begin{aligned} \text{Si } F_1 \subset F_2 &\Rightarrow F_2^{\triangle} \subset F_1^{\triangle} \qquad \text{[Por la Observación 2.6.15]} \\ &\Rightarrow \varphi(F_2) \subset \varphi(F_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \varphi(F_2) \subset \varphi(F_1) &\Rightarrow F_2^{\triangle} \subset F_1^{\triangle} \\ &\Rightarrow F_1^{\triangle\triangle} \subset F_2^{\triangle\triangle} \quad \text{[Por la Observación 2.6.15]} \\ &\Rightarrow F_1 \subset F_2. \qquad \text{[Por el Teorema 2.6.14]} \end{aligned}$$

Por lo tanto φ es un anti-isomorfismo de $(\mathscr{E}(C), \subset)$ sobre $(\mathscr{E}(D), \subset)$.
Análogamente, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & (\mathscr{E}(D), \subset) & \longrightarrow & (\mathscr{E}(C), \subset) \\ & G & \mapsto & \Phi(G) = G^{\triangle}. \end{array}$$

Es un anti-isomorfismo de $(\mathscr{E}(D), \subset)$ sobre $(\mathscr{E}(C), \subset)$.
Además

$$(\Phi\circ\varphi)(F) = \Phi(\varphi(F)) = \Phi(F^{\triangle}) = F^{\triangle\triangle} = F,\ F \in \mathscr{E}(C) \qquad \text{y}$$
$$(\varphi\circ\Phi)(G) = \varphi(\Phi(G)) = \varphi(G^{\triangle}) = G^{\triangle\triangle} = G,\ G \in \mathscr{E}(D).$$

Por lo tanto φ y Φ son mutuamente inversas. □

Corolario 2.6.17. *Sea $\{F_i | i \in I\}$ un conjunto de caras expuestas de C, sea F_0 la cara expuesta más grande contenida en todos los F_i's(Es decir, F_0 es la intersección de los F_i's), y sea F_1 la cara expuesta más pequeña de C que contiene a todos los F_i's. Entonces $F_0^{\triangle}$ es la cara expuesta más pequeña de D que contiene a todos los $F_i^{\triangle}$'s, y $F_1^{\triangle}$ es la cara expuesta más grande de D que está contenida en todos los $F_i^{\triangle}$'s(Es decir, $F_1^{\triangle}$ es la intersección de los $F_i^{\triangle}$'s). Similarmente para un conjunto de caras expuestas de D.*

Demostración. Sea φ como en el Corolario 2.6.16, sea $\mathscr{A} := \{F_i | i \in I\}$, $\mathscr{A} \subset \mathscr{E}(C)$, y sea $\varphi(\mathscr{A}) := \{\varphi(F_i) | F_i \in \mathscr{A}\}$, $\mathscr{A}^{\triangle} \subset \mathscr{E}(D)$.
Del Teorema 2.5.28 tenemos que $F_0 = \operatorname{ínf} \mathscr{A}$ y $F_1 = \sup \mathscr{A}$. Ahora por el Corolario 2.6.16 φ es un anti-isomorfismo, entonces

$$F_0^{\triangle} = \varphi(F_0) = \varphi(\operatorname{ínf} \mathscr{A}) = \sup \varphi(\mathscr{A}) \quad \text{y}$$

$$F_1^{\triangle} = \varphi(F_1) = \varphi(\sup \mathscr{A}) = \operatorname{ínf} \varphi(\mathscr{A}).$$

□

Teorema 2.6.18. *Sean F y G un par de caras mutuamente conjugadas de C y D, respectivamente. Entonces*

$$dim\ F + dim\ G \leq d - 1.$$

Demostración. Tenemos que la cara conjugada de la cara impropia $\emptyset$ de C es la cara expuesta impropia D de D. Similarmente, La cara conjugada de la cara impropia C de C es la cara expuesta impropia $\emptyset$ de D. Por el Corolario 2.3.9 tenemos que $dim\ C = d = dim\ D$ y $dim\ \emptyset = -1$. Entonces

$$dim\ \emptyset + dim\ D = d - 1 \qquad \text{y} \qquad dim\ C + dim\ \emptyset = d - 1.$$

Por lo tanto la formula se cumple cuando F es una cara impropia. Ahora sea F una cara expuesta propia de C, entonces por el Teorema 2.6.12 la cara conjugada G de D también es propia. Por definición

$$G = D \cap \bigcap_{x \in F} H(x, 1).$$

Como para cada $x \in F$, $H(x, 1)$ es un hiperplano, entonces $\bigcap\limits_{x \in F} H(x, 1)$ es un subespacio afín y $G \subset \bigcap\limits_{x \in F} H(x, 1)$. Así que $dim\ G \leq dim \bigcap_{x \in F} H(x, 1)$.
Por lo tanto, $\bigcap\limits_{x \in F} H(x, 1) \neq \emptyset$, así que es una traslación del subespacio vectorial $\bigcap\limits_{x \in F} H(x, 0)$, lo que implica que

$$dim \bigcap_{x \in F} H(x, 1) = dim \bigcap_{x \in F} H(x, 0),$$

pero $\bigcap\limits_{x \in F} H(x,0) = \{y \in \mathbb{R}^d / \forall x \in F : \langle x, y \rangle = 0\} = F^{\perp} = (gen\ F)^{\perp}$. Por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} dim\ G & \leq & dim \bigcap\limits_{x \in F} H(x,0) \\ & = & dim((gen\ F)^{\perp}) \\ & = & d - dim(gen\ F) \\ & = & d - (dim(aff\ F) + 1) \\ & = & d - 1 - dim\ F. \end{array}$$

Aquí usamos el hecho que $0 \notin aff\ F$ para obtener que

$$dim(gen\ F) = dim(aff\ F) + 1.$$

$\square$

Capítulo 3

Politopos Convexos

En este capítulo centraremos nuestro estudio en los politopos convexos, usaremos los resultados vistos en el capítulo anterior para dar propiedades de los politopos, estudiar su estructura facial e introducir unos politopos particulares.

3.1. Politopos

Los politopos son conjuntos convexos compactos que tienen una representación como envolvente convexa de un número finito de puntos de $\mathbb{R}^d$, esto hace que se pueda hacer un mejor estudio de su estructura facial y dar propiedades adicionales sobre ellos.
El conjunto de puntos $\{x_1, \ldots, x_n\}$ genera al politopo $P = conv\{x_1, \ldots, x_n\}$ pero este conjunto no es el único que lo genera, podríamos adicionar mas puntos a $\{x_1, \ldots, x_n\}$ que estén en P y se seguiría generando el mismo politopo. Sin embargo, existe un único conjunto minimal que genera a P, *ext* P. Es decir, que podemos omitir de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ aquellos puntos que no sean extremos. Además, las caras del politopo P son generadas por subconjuntos de *ext* P.

Definición 3.1.1. *Un politopo $P = conv\{x_1, \ldots, x_n\}$ es un $k-$politopo si dim $P = k$. Un $k-$simplex es un $k-$politopo el cual es un simplex.*

Observación 3.1.2. *(1) Sea $P = conv\{x_1, \ldots, x_n\}$ un $k-$politopo, entonces alguna $(k+1)-$subfamilia de $(x_1, \ldots, x_n)$ es afínmente independiente, pero ninguna $(k+2)-$subfamilia es afínmente independiente.*

(2) Sea S un simplex. Entonces S es un $k-$simplex si y sólo si S tiene $k+1$ vértices.

En efecto:

(1) Si $P = conv\{x_1, \ldots, x_n\}$*, tenemos que*

$$P \subset aff\{x_1, \ldots, x_n\} \Rightarrow aff\ P \subset aff\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

$$\{x_1, \ldots, x_n\} \subset P \Rightarrow aff\{x_1, \ldots, x_n\} \subset aff\ P.$$

Por lo tanto $aff\ P = aff\{x_1, \ldots, x_n\}$*. Si* $dim\ P = k$*, entonces por el Lema 2.1.26 tenemos que existe alguna* $(k+1)-$*subfamilia de* $(x_1, \ldots, x_n)$ *que es afínmente independiente, pero ninguna* $(k+2)-$*subfamilia afínmente independiente.*

(2) $\Rightarrow]$ *Sea* $S = conv\{x_1, \ldots, x_n\}$ *un simplex tal que* $dim\ S = k$*. Como* S *es un simplex, entonces la* $n-$*familia* $(x_1, \ldots, x_n)$ *es afínmente independiente. Luego por la parte* (1) *existe alguna* $(k+1)-$*subfamilia de* $(x_1, \ldots, x_n)$ *que es afínmente independiente, pero ninguna* $(k+2)-$*subfamilia afínmente independiente, lo que implica que* $n = k+1$*. Por lo tanto* S *tiene* $k+1$ *vértices.*

$\Leftarrow]$ *Sea* S *un simplex con* $k+1$ *vértices, entonces* $S = conv\{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$ *donde* $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})$ *es afínmente independiente. Por otro lado* $aff\ S = aff\{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$ *así que* $(x_1, \ldots, x_n, x_{k+1})$ *es una base para* $aff\ S$*, luego por el Teorema 2.1.25* $dim\ S = k$*. Por lo tanto* S *es un* $k-$*simplex.*

Comentario 3.1.3. *Un* $1-$*simplex es un segmento cerrado. Un* $2-$*simplex es llamado un triángulo. Un* $3-$*simplex es llamado un tetraedro.*

Teorema 3.1.4. *Sea* P *un subconjunto no-vacío de* $\mathbb{R}^d$*. Entonces las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) P *es un politopo.*

(b) P *es un conjunto convexo compacto con un número finito de puntos extremos.*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Si P es un politopo, entonces $P = conv\{x_1, \ldots, x_n\}$ y por el Corolario 2.2.23 tenemos que P es compacto. Ahora el Teorema 2.5.30[$(a) \Rightarrow (b)$] nos dice que $ext\ P \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$. Por lo tanto $ext\ P$ es un conjunto finito.

$(b) \Rightarrow (a)$ Si P es un conjunto convexo compacto con un número finito de puntos extremos, entonces $ext\ P \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$ para algunos $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$. Luego por el Teorema 2.5.30[$(b) \Rightarrow (a)$] tenemos que $P = conv\{x_1, \ldots, x_n\}$. Por lo tanto P es un politopo. □

Comentario 3.1.5. *En adelante a los puntos extremos, es decir, las* $0-$*caras de un politopo* P *los llamaremos vértices de* P*. Continuaremos denotando al conjunto de vértices por* $ext\ P$*. Las* $1-$*caras serán llamadas aristas de* P

Teorema 3.1.6. *Sea* P *un politopo en* $\mathbb{R}^d$*, y sea* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *un subconjunto finito de* P*. Entonces las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) $P = conv\{x_1, \ldots, x_n\}$.

(b) $ext\ P \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$.

En particular,

(c) $P = conv(ext\ P)$.

Demostración. Del Corolario 2.2.23 tenemos que P es un conjunto compacto, luego por el Teorema 2.5.30 obtenemos las equivalencias deseadas. □

Comentario 3.1.7. *El conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ que genera un politopo $P = conv\{x_1, \ldots, x_n\}$ no es único(excepto cuando P es un conjunto $1-$puntual); de hecho, se pueden adicionar puntos $x_{n+1}, \ldots$ que ya estén en P. Sin embargo, el Teorema 3.1.6 nos dice que hay un único conjunto minimal que genera a P, el conjunto $ext\ P$ de vértices de P.*

Teorema 3.1.8. *Sea P un politopo en $\mathbb{R}^d$, y sea F una cara propia de P. Entonces F es un politopo, y $ext\ F = F \cap ext\ P$.*

Demostración. Por el Corolario 2.2.23 tenemos que P es un conjunto compacto, y por el Teorema 2.5.17 F es un conjunto cerrado, además F es acotado ya que $F \subset P$. Por lo tanto F es compacto. Ahora por el Teorema 2.5.19 tenemos que $\{x\}$ un punto extremo de F si y sólo si $\{x\}$ es un punto extremo de P. Así que los puntos extremos de F son aquellos puntos extremos de P que están en F, es decir, $ext\ F = F \cap ext\ P$.
Por otro lado. Como P es un politopo, entonces $ext\ P$ es un conjunto finito por el Teorema 3.1.4[$(a) \Rightarrow (b)$]. Lo que implica que $ext\ F$ es un conjunto finito y probamos que F es compacto entonces por el Teorema 3.1.4 [$(b) \Rightarrow (a)$] concluimos que F es un politopo. En particular, $F = conv(ext\ F)$. □

Corolario 3.1.9. *Sea P un politopo en $\mathbb{R}^d$. Entonces el número de caras de P es finito.*

Demostración. Como P es un politopo, entonces $P = conv\{x_1, \ldots, x_n\}$. Luego por el Teorema 3.1.6[$(a) \Rightarrow (b)$] tenemos que $ext\ P \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$ lo cual implica que $ext\ P$ es un conjunto finito. Ahora, por los Teoremas 3.1.8 y 3.1.6(c) tenemos que cada cara de P es un politopo y además es la envolvente convexa de puntos extremos de P. Por lo tanto, el número de caras de P es finito. □

Teorema 3.1.10. *Sea P un politopo en $\mathbb{R}^d$. Entonces toda cara de P es una cara expuesta.*

Demostración. Probaremos el enunciado para $d-$politopos. Usaremos inducción sobre d
Para $d = 0$ no hay nada que probar puesto que $P = \{x\}$, para $d = 1$ tenemos que P es un segmento y sus caras propias son sus puntos extremos así que por el Teorema 2.4.9 tenemos el resultado, para $d = 2$ el politopo solo tiene puntos extremos y facetas luego por el Teorema

2.5.26 tenemos el resultado.
Supongamos que el enunciado es cierto para un politopo de dimensión $< d$ donde $d \geq 3$. Y sea P un $d-$politopo en $\mathbb{R}^d$. Para las caras impropias de P no hay nada que probar puesto que las caras impropias son expuestas por definición. Así que sea F una cara propia de P. Por el Teorema 2.3.8 $ri\ F \neq \emptyset$, sea x un punto interior relativo de F y sea H un hiperplano soporte propio de P en x, esto es por el Teorema 2.4.9 ya que $F \subset rb\ P$. Entonces $H \cap P$ es una cara expuesta propia de P que contiene a x luego por el Teorema 2.5.24 tenemos que $F \subset H \cap P$. Si $F = H \cap P$ entonces F es una cara expuesta que es lo que queremos probar. Si $F \subsetneq H \cap P$ entonces F es una cara propia de $H \cap P$ por el Teorema 2.5.19. Como $dim(H \cap P) < d$ y $H \cap P$ es un politopo por el Teorema 3.1.8 se sigue por hipótesis inductiva que existe un hiperplano soporte propio H' de $H \cap P$ en $aff(H \cap P)$ tal que

$$F = H' \cap (H \cap P).$$

Este hiperplano H' puede ser extendido a un hiperplano A en H tal que

$$F = A \cap P.$$

Tenemos que $dim\ P = d$ y H es un hiperplano de P entonces $dim\ H = d - 1$, además A es un hiperplano de H asi que $dim\ A = d - 2 \geq 1 (d \geq 3)$.
Sea B un subespacio afín $2-$dimensional de $\mathbb{R}^d$ el cual es ortogonal a A. Y sea π la proyección de $\mathbb{R}^d$ sobre B. Entonces $\pi(A)$ es un conjunto $1-$puntual. Además $\pi(P)$ es un $2-$politopo en B.
Afirmamos que $\pi(A)$ es un vértice de $\pi(P)$, si no lo es, entonces existen puntos $y, z \in P$ tales que $\pi(y) \neq \pi(z)$ y

$$\pi(A) = (1 - \lambda)\pi(y) + \lambda\pi(z),$$

para algún $\lambda \in]0, 1[$. Sea $u := (1 - \lambda)y + \lambda z$, entonces $u \in P$ ya que P es convexo y

$$\pi(u) = \pi((1 - \lambda)y + \lambda z) = (1 - \lambda)\pi(y) + \lambda\pi(z) = \pi(A).$$

Así que $u \in A$ ya que $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$, luego como $F = A \cap P$, $u \in A$ y $u \in P$ entonces $u \in F$, ahora como F es una cara de P entonces $y, z \in F$. Pero $F \subset A$, así que $\pi(v) = \pi(A)$, $\forall\ v \in F$. En particular $\pi(y) = \pi(z)$, absurdo. Así que $\pi(A)$ es un vértice de $\pi(P)$. Ahora por la hipótesis inductiva aplicada al $2-$dimensional politopo en B, existe una recta L en B tal que $L \cap \pi(P) = \pi(A)$, entonces $H_1 := aff(A \cup L) = \pi^{-1}(L)$ es un hiperplano soporte de P en $\mathbb{R}^d$ con $F = P \cap H_1$. Por lo tanto F es una cara expuesta. □

Corolario 3.1.11. *Sea P un politopo en $\mathbb{R}^d$. Entonces los lattices $(\mathscr{F}(P), \subset)$ y $(\mathscr{E}(P), \subset)$ son el mismo.*

Demostración. Por el Teorema 3.1.10 tenemos que $\mathscr{E}(P) = \mathscr{F}(P)$. Por lo tanto los lattices $(\mathscr{F}(P), \subset)$ y $(\mathscr{E}(P), \subset)$ son el mismo. □

Definición 3.1.12. *Una pirámide en $\mathbb{R}^d$ es un politopo(ver Teorema 3.1.15) de la forma*

$$P = conv(Q \cup \{x_0\}).$$

Donde Q es un politopo en $\mathbb{R}^d$, llamado base de P, y x_0 es un punto de $\mathbb{R}^d \setminus aff\ Q$ llamado ápice de P.
Una pirámide es una $e-$pirámide si $dim\ P = e$.

Comentario 3.1.13. *Note que la base y el ápice no necesariamente son únicos: Un simplex es una pirámide donde cualquier faceta puede ser tomada como base, o, equivalentemente cualquier vértice puede ser tomado como ápice.*

Observación 3.1.14. *Una pirámide P es una $e-$pirámide si y sólo si su base Q es un $(e-1)-$politopo.*

Teorema 3.1.15. *Sea P una pirámide en $\mathbb{R}^d$ con base Q y ápice x_0. Entonces se cumple lo siguiente:*

(a) P es un politopo con $ext\ P = (ext\ Q) \cup \{x_0\}$.

(b) Un subconjunto F de P con $x_0 \notin F$ es una cara de P si y sólo si F es una cara de Q.

(c) Un subconjunto F de P con $x_0 \in F$ es una cara de P si y sólo si existe una cara G de Q tal que $F = conv(G \cup \{x_0\})$, es decir. $F = x_0$ o F es una pirámide con una cara G de Q como base y x_0 como ápice. Para cada tal cara F de P, la cara G es única, y $dim\ G = dim\ F - 1$.

Demostración. (a) Definamos el conjunto P_1 como

$$P_1 := conv((ext\ Q) \cup \{x_0\}),$$

tenemos por el Teorema 3.1.6(c) que $Q = conv(ext\ Q)$ y $ext\ Q \subset (ext\ Q \cup \{x_0\})$, entonces $Q \subset P_1$ y $\{x_0\} \subset P_1$. Así que $(Q \cup \{x_0\}) \subset P_1$ lo cual implica que $P \subset P_1$.
Por otro lado, $ext\ Q \subset P$ y $\{x_0\} \subset P$ entonces $(ext\ Q \cup \{x_0\}) \subset P$ así que $P_1 \subset P$.
Por lo tanto tenemos que

$$P = conv((ext\ Q) \cup \{x_0\}).$$

Lo anterior muestra que P es un politopo, ya que por el Teorema 3.1.6 tenemos que $ext\ Q$ es finito luego $((ext\ Q) \cup \{x_0\})$ es un conjunto finito asi que P es la envolvente convexa de un conjunto finito.
Para probar que $ext\ P = (ext\ Q) \cup \{x_0\}$ notemos por el Teorema 3.1.6 que $ext\ P \subset ((ext\ Q) \cup \{x_0\})$.
Ahora probaremos que $((ext\ Q) \cup \{x_0\}) \subset ext\ P$. Por el Ejercicio 2.2.24 tenemos que P

es la unión de todos los segmentos $[y, x_0]$, donde $y \in Q$. Así que, si H_0 es un hiperplano tal que $x_0 \in H_0$ y $H_0 \cap aff\ Q = \emptyset$, entonces H_0 es un hiperplano soporte de P con $H_0 \cap P = \{x_0\}$ lo cual implica que $x_0 \in ext\ P$ por el Lema 2.5.13. Solo falta probar que $ext\ Q \subset ext\ P$, probaremos más generalmente que toda cara propia de Q es una cara de P.
Sea F una cara propia de Q, entonces existe un hiperplano soporte H de Q en $aff\ Q$ tal que $F = H \cap Q$ por el Teorema 3.1.10. Sea H_1 un hiperplano en $\mathbb{R}^d$ tal que $H = H_1 \cap aff\ Q$ y x_0 este sobre el mismo lado que $Q \setminus F$. Ahora como cada punto de P pertenece a algún segmento $[y, x_0]$ con $y \in Q$, vemos que

$$F = H_1 \cap P,$$

así que F es una cara de P por el Lema 2.5.13, luego $ext\ Q \subset ext\ P$ y hemos probado que $((ext\ Q) \cup \{x_0\}) \subset ext\ P$. Por lo tanto, $ext\ P = (ext\ Q) \cup \{x_0\}$.

(b) $\Rightarrow]$ Sea $F \neq \emptyset$ una cara de P tal que $x_0 \notin F$. Por la parte (a) P es un politopo, luego por el Teorema 3.1.10 existe un hiperplano soporte H de P tal que $F = H \cap P$. Usando la parte (a) y el Teorema 3.1.8 tenemos que $ext\ P = (ext\ Q) \cup \{x_0\}$ y $ext\ F = F \cap ext\ P$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad ext\ F &= F \cap (ext\ Q \cup \{x_0\}) \\ &= F \cap ext\ Q \\ \Rightarrow \quad ext\ F &\subset ext\ Q, \end{aligned}$$

lo que implica que $F \subset Q$ luego $F = H \cap Q$. Por lo tanto F es una cara de Q.

$\Leftarrow]$ Durante la prueba de (a), probamos que toda cara propia de Q es una cara propia de P. Como Q también es una cara(de hecho, una faceta) de P, concluimos que toda cara de Q es una cara de P.

(c) $\Rightarrow]$ Solo es necesario considerar el caso donde $F \neq \{x_0\}$ y $F \neq P$. Sea F una cara de P tal que $x_0 \in F$. Por el Teorema 3.1.10 sea H un hiperplano soporte de P tal que $F = H \cap P$, del Ejercicio 2.2.24 tenemos que P es la unión de todos los segmentos $[y, x_0]$, donde $y \in Q$, así F es la unión de todos los segmentos $[y, x_0]$ donde $y \in H \cap Q$. Sea $G := H \cap Q$, G es una cara de Q por el Lema 2.5.13. Aplicando nuevamente el Ejercicio 2.2.24 concluimos que $F = conv(G \cup \{x_0\})$.
Ahora $dim\ G = dim\ F - 1$ por la Observación 3.1.14.

$\Leftarrow]$ Probaremos que todo conjunto F de la forma $F = conv(G \cup \{x_0\})$, donde G es una cara de Q, es una cara de P.
Solamente consideraremos el caso donde G es una cara propia de Q, ya que si $G = Q$ entonces $F = P$ y si $G = \emptyset$ tendríamos que $F = \{x_0\}$ que es un punto extremo de P. Por el Teorema 3.1.10 para cada cara G existe un hiperplano soporte H de Q en

$aff\ Q$ tal que $G = H \cap Q$.
Sea H_1 un hiperplano en $\mathbb{R}^d$ tal que $H = H_1 \cap aff\ Q$ y $x_0 \in H_1$, entonces H_1 es un hiperplano soporte propio de P lo cual implica que $F_1 := H_1 \cap P$ es una cara(expuesta) propia de P. Además

$$\begin{array}{rcll} ext\ F_1 & = & F_1 \cap ext\ P & [\text{Teorema 3.1.8}] \\ & = & H_1 \cap P \cap ext\ P & [F_1 = H_1 \cap P] \\ & = & H_1 \cap ext\ P & [ext\ P \subset P] \\ & = & H_1 \cap (ext\ Q \cup \{x_0\}) & [\text{Parte } (a)] \\ & = & (H_1 \cap ext\ Q) \cup (H_1 \cap \{x_0\}) & \\ & = & (H_1 \cap ext\ Q) \cup \{x_0\} & [x_0 \in H_1] \\ & = & (H \cap ext\ Q) \cup \{x_0\}. & [H = H_1 \cap aff\ Q] \end{array}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{array}{rcll} ext\ G & = & G \cap ext\ Q & [\text{Teorema 3.1.8}] \\ & = & H \cap Q \cap ext\ Q & [G = H \cap Q] \\ & = & H \cap ext\ Q. & [ext\ Q \subset Q] \end{array}$$

Luego $ext\ F_1 = ext\ G \cup \{x_0\}$. Ahora

$$\begin{array}{rcll} F_1 & = & conv(ext\ F_1) & [\text{Teorema 3.1.6}(c)] \\ & = & conv(ext\ G \cup \{x_0\}) & \\ & = & conv(G \cup \{x_0\}). & [\text{Prueba de la parte (a)}] \\ & = & F & \end{array}$$

Por lo tanto, F es una cara de P.

□

Definición 3.1.16. *Una bipirámide en $\mathbb{R}^d$ es un politopo(ver Teorema 3.1.19) de la forma*

$$P = conv(Q \cup \{x_0, x_1\}),$$

donde Q es un politopo en $\mathbb{R}^d$ con dim $Q \geq 1$, y x_0, x_1 son dos puntos de $\mathbb{R}^d \setminus aff\ Q$ tales que $]x_0, x_1[\cap ri\ Q \neq \emptyset$. (En realidad $]x_0, x_1[$ tiene precisamente un punto en común con ri Q.) El conjunto Q es llamado base de P, y x_0, x_1 son llamados ápices de P.
Una bipirámide es una $e-$bipirámide si dim $P = e$.

Comentario 3.1.17. *Como en el caso de las pirámides, la base y los ápices no son únicos en general.*

Observación 3.1.18. *Una bipirámide es una $e-$bipirámide si y sólo si su base Q es un $(e-1)-$politopo.*

Teorema 3.1.19. *Sea P una bipirámide en $\mathbb{R}^d$ con base Q y ápices x_0 y x_1. Entonces se cumplen los enunciados siguientes:*

(a) *P es un politopo con ext $P = (ext\ Q) \cup \{x_0, x_1\}$.*

(b) *Un subconjunto F de P con $x_0, x_1 \notin F$ es una cara de P si y sólo si F es una cara de Q con $F \neq Q$.*

(c) *Un subconjunto F de P con $x_0 \in F$ y $x_1 \notin F$ es una cara de P si y sólo si existe una cara G de Q con $G \neq Q$ tal que $F = conv(G \cup \{x_0\})$, es decir. $F = \{x_0\}$ o F es una pirámide con una cara G de Q con $G \neq Q$ como la base y x_0 como el ápice. Para cada cara F de P, la cara G es única, y dim $G =$ dim $F - 1$. Similarmente para los subconjuntos F de P con $x_1 \in F$ y $x_0 \notin F$.*

(d) *Un subconjunto F de P con $x_0, x_1 \in F$ es una cara de P si y sólo si $F = P$.*

Demostración. (a) Definamos el conjunto P_1 como

$$P_1 := conv((ext\ Q) \cup \{x_0, x_1\}),$$

tenemos por el Teorema 3.1.6(c) que $Q = conv(ext\ Q)$ y $ext\ Q \subset (ext\ Q \cup \{x_0, x_1\})$, entonces $Q \subset P_1$ y $\{x_0, x_1\} \subset P_1$. Así que $(Q \cup \{x_0, x_1\}) \subset P_1$ lo cual implica que $P \subset P_1$.
Por otro lado, $ext\ Q \subset P$ y $\{x_0, x_1\} \subset P$ entonces $(ext\ Q \cup \{x_0, x_1\}) \subset P$ así que $P_1 \subset P$. Por lo tanto tenemos que

$$P = conv((ext\ Q) \cup \{x_0, x_1\}).$$

Lo anterior muestra que P es un politopo, ya que por el Teorema 3.1.6 $ext\ Q$ es finito. Además, por el mismo teorema tenemos que $ext\ P \subset ((ext\ Q) \cup \{x_0, x_1\})$.
Ahora probaremos que $((ext\ Q) \cup \{x_0, x_1\}) \subset ext\ P$. Por el Ejercicio 2.2.24 tenemos que P es la unión de todos los segmentos $[y, z]$, donde $y \in Q$, $z \in \{x_0, x_1\}$. Así que, si H_0 es un hiperplano con $x_0 \in H_0$ y $H_0 \cap aff\ Q = \emptyset$, entonces H_0 es un hiperplano soporte de P con $H_0 \cap P = \{x_0\}$ lo cual implica que $x_0 \in ext\ P$ por el Lema 2.5.13. De igual manera probamos que $x_1 \in ext\ P$. Solo falta probar que $ext\ Q \subset ext\ P$, probaremos más generalmente que toda cara propia de Q es una cara de P.
Sea F una cara propia de Q, entonces existe un hiperplano soporte H de Q en $aff\ Q$ tal que $F = H \cap Q$ por el Teorema 3.1.10. Sea H_1 un hiperplano en $\mathbb{R}^d$ tal que $H = H_1 \cap aff\ Q$ y x_0, x_1 estén sobre el mismo lado que $Q \setminus F$. Ahora como cada punto de P pertenece a algún segmento $[y, z]$ con $y \in Q$, $z \in \{x_0, x_1\}$; x_0, x_1 y $Q \setminus F$ están del mismo lado de H_1, entonces

$$F = H_1 \cap P,$$

así que F es una cara de P por el Lema 2.5.13, luego $ext\ Q \subset ext\ P$ y hemos probado que $((ext\ Q) \cup \{x_0, x_1\}) \subset ext\ P$. Por lo tanto, $ext\ P = (ext\ Q) \cup \{x_0, x_1\}$.

(b) $\Rightarrow$] Sea F una cara de P tal que $x_0, x_1 \notin F$. Por la parte (a) P es un politopo, luego por el Teorema 3.1.10 existe un hiperplano soporte H de P tal que $F = H \cap P$. Usando la parte (a) y el Teorema 3.1.8 tenemos que $ext\ P = (ext\ Q) \cup \{x_0, x_1\}$ y $ext\ F = F \cap ext\ P$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad ext\ F &= F \cap (ext\ Q \cup \{x_0, x_1\}) \\ &= F \cap ext\ Q \end{aligned}$$

$$\Rightarrow ext\ F \subset ext\ Q,$$

lo que implica que $F \subset Q$ luego $F = H \cap Q$. Por lo tanto F es una cara de Q.

$\Leftarrow$] Durante la prueba de (a), probamos que toda cara propia de Q es una cara propia de P.

(c) $\Rightarrow$] Sea F una cara de P tal que $x_0 \in F$ y $x_1 \notin F$. Por el Teorema 3.1.10 sea H un hiperplano soporte de P tal que $F = H \cap P$, del Ejercicio 2.2.24 tenemos que P es la unión de todos los segmentos $[y, z]$, donde $y \in Q$, $z \in \{x_0, x_1\}$, así F es la unión de todos los segmentos $[y, x_0]$ donde $y \in H \cap Q$. Sea $G := H \cap Q$, G es una cara de Q por el Lema 2.5.13. Aplicando nuevamente el Ejercicio 2.2.24 concluimos que $F = conv(G \cup \{x_0\})$.
Ahora $dim\ G = dim\ F - 1$ por la Observación 3.1.14.

$\Leftarrow$] Probaremos que todo conjunto F de la forma $F = conv(G \cup \{x_0\})$, donde G es una cara propia de Q, es una cara de P.
Por el Teorema 3.1.10 para cada cara G existe un hiperplano soporte H de Q en $aff\ Q$ tal que $G = H \cap Q$.
Sea H_1 un hiperplano en $\mathbb{R}^d$ tal que $H = H_1 \cap aff\ Q$ y $x_0 \in H_1$, entonces H_1 es un hiperplano soporte propio de P lo cual implica que $F_1 := H_1 \cap P$ es una cara(expuesta) propia de P. Además

$$\begin{aligned} ext\ F_1 &= F_1 \cap ext\ P && [\text{Teorema } 3.1.8] \\ &= H_1 \cap P \cap ext\ P && [F_1 = H_1 \cap P] \\ &= H_1 \cap ext\ P && [ext\ P \subset P] \\ &= H_1 \cap (ext\ Q \cup \{x_0, x_1\}) && [\text{Parte } (a)] \\ &= (H_1 \cap ext\ Q) \cup (H_1 \cap \{x_0, x_1\}) \\ &= (H_1 \cap ext\ Q) \cup \{x_0\} && [x_0 \in H_1] \\ &= (H \cap ext\ Q) \cup \{x_0\}. && [H = H_1 \cap aff\ Q] \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} ext\ G &= G \cap ext\ Q && [\text{Teorema } 3.1.8] \\ &= H \cap Q \cap ext\ Q && [G = H \cap Q] \\ &= H \cap ext\ Q. && [ext\ Q \subset Q] \end{aligned}$$

Luego $ext\ F_1 = ext\ G \cup \{x_0\}$. Ahora

$$\begin{aligned} F_1 &= conv(ext\ F_1) && \text{[Teorema 3.1.6}(c)\text{]} \\ &= conv(ext\ G \cup \{x_0\}) \\ &= conv(G \cup \{x_0\}) && \text{[Prueba de la parte (a)]} \\ &= F. \end{aligned}$$

Por lo tanto, F es una cara de P.
Similarmente se realiza la prueba para un subconjunto F de P con $x_1 \in F$ y $x_0 \notin F$.

(d) Sea F una cara de P tal que $x_0, x_1 \in F$. Por la definición de una bipirámide tenemos que $]x_0, x_1[\cap ri\ Q \neq \emptyset$, sea $x =]x_0, x_1[\cap ri\ Q$, como F es un conjunto convexo entonces $x \in F$. Ahora sea $y \in ext\ Q$ luego por el Teorema 2.3.13 existe $z \in Q$ tal que $x \in]y, z[$. Así que $]y, z[\cap F = x$, entonces $[y, z] \subset F$ ya que F es una cara, luego $y \in F$ lo cual implica $ext\ Q \subset F$ por lo tanto $Q \subset F$.
Ahora como $(Q \cup \{x_0, x_1\}) \subset F$ y F es convexo entonces $P = conv\{Q \cup \{x_0, x_1\}\} \subset F$ y además por hipótesis $F \subset P$. Por lo tanto $F = P$.

□

3.2. Conjuntos Poliédricos

Los conjuntos poliédricos son unos conjuntos convexos cerrados que tienen una representación como intersección de un número finito de semiespacios cerrados de $\mathbb{R}^d$. De esta representación podemos omitir ciertos semiespacios de tal manera que la representación sea irreducible y así poder tener mayor información acerca de su estructura facial.
Estos conjuntos son importantes en el estudio de los politopos, ya que los conjuntos poliédricos acotados son politopos, en la siguiente sección veremos la estrecha relación que hay entre ellos.

Definición 3.2.1. *Un subconjunto Q de $\mathbb{R}^d$ es un conjunto poliédrico si Q es la intersección de un número finito de semiespacios cerrados o $Q = \mathbb{R}^d$.*

Observación 3.2.2. *(1) Todo hiperplano H en $\mathbb{R}^d$ es un conjunto poliédrico.*

(2) Todo subespacio afín de $\mathbb{R}^d$ es un conjunto poliédrico.

(3) Sea A un espacio afín de $\mathbb{R}^d$ tal que $A \neq \mathbb{R}^d$ y sea $Q \subset A$. Entonces Q es un conjunto poliédrico en $\mathbb{R}^d$ si y sólo si Q es la intersección de un número finito de semiespacios cerrados en A o $Q = A$.

(4) Todo conjunto poliédrico es convexo y cerrado.

(5) La intersección de un número finito de conjuntos poliédricos es un conjunto poliédrico.

(6) Cualquier traslación de un conjunto poliédrico es un conjunto poliédrico.

En efecto:

(1) Sea H un hiperplano en $\mathbb{R}^d$, entonces $H = H(\alpha, y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^d$. Luego $H = K(\alpha, y) \cap K(-\alpha, -y)$. Por lo tanto H es un conjunto poliédrico.

(2) Sea A un espacio afín, entonces por el Teorema 2.1.46 tenemos que $A = \bigcap_{i=1}^{m} H_i$, donde los H_i son hiperplanos en $\mathbb{R}^d$. Luego cada H_i se puede representar como $H_i = H(\alpha_i, y_i)$, así que

$$A = \bigcap_{i=1}^{m} H(\alpha_i, y_i) = \bigcap_{i=1}^{m} (K(\alpha_i, y_i) \cap K(-\alpha_i, -y_i)).$$

Por lo tanto, A es un conjunto poliédrico.

(3) $\Rightarrow$] Sea Q un conjunto poliédrico en $\mathbb{R}^d$, entonces $Q = \bigcap_{i=1}^{n} K_i$ donde K_i son semiespacios cerrados de $\mathbb{R}^d$. Luego como $Q \subset A$ tenemos que $K_i \cap A \neq \emptyset$, entonces por la Observación 2.1.51 $A \cap K_i$ es un semiespacio cerrado en A o $A \cap K_i = A$. Por lo tanto, $Q = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cap K_i)$.

$\Leftarrow$] Sea Q la intersección de un número finito de semiespacios cerrados de A o $Q = A$, entonces $Q = \bigcap_{i=1}^{n} K_i$. Como cada K_i son semiespacios cerrados en A, luego por la Observación 2.1.51 existen K_i' semiespacios cerrados de $\mathbb{R}^d$ tales que $K_i = A \cap K_i'$ y además A es un espacio afín lo que implica que es un conjunto poliédrico, así que $A = \bigcap_{j=1}^{m} K_j$ donde cada K_j son semiespacios cerrados en $\mathbb{R}^d$. Entonces

$$Q = \bigcap_{i=1}^{n} K_i = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cap K_i') = \bigcap_{i=1}^{n} (\bigcap_{j=1}^{m} K_j \cap K_i').$$

Así Q es la intersección de un número finito de semiespacios cerrados en $\mathbb{R}^d$. Por lo tanto, Q es un conjunto poliédrico.

(4) Sea Q un conjunto poliédrico, entonces Q es la intersección de un número finito de semiespacios cerrados de $\mathbb{R}^d$. Ahora como los semiespacios cerrados son conjuntos convexos cerrados. Por lo tanto Q es convexo y cerrado.

(5) Sea $\{Q_i\}_{i=1}^{n}$ una familia de conjuntos poliédricos de $\mathbb{R}^d$, entonces $Q_i = \bigcap_{j=1}^{m} K_{ij}$, donde K_{ij} son semiespacios cerrados de $\mathbb{R}^d$. Ahora sea $Q = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$, veamos que Q es un

conjunto poliédrico.

$$Q = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i = \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} K_{ij}.$$

Luego Q es la intersección de un número finito de semiespacios cerrados de $\mathbb{R}^d$. Por lo tanto, Q es un conjunto poliédrico.

(6) Sea Q un conjunto poliédrico y $z \in \mathbb{R}^d$. Sea $Q' = z + Q$ una traslación de Q. Entonces

$$Q' = z + Q = z + \bigcap_{i=1}^{n} K(\alpha_i, y_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (z + K(\alpha_i, y_i)).$$

Para probar que Q' es un conjunto poliédrico, debemos probar que $z + K(\alpha, y)$ es un semiespacio cerrado de $\mathbb{R}^d$. Tenemos que $K(\alpha, y) = \{x \in \mathbb{R}^d / \langle x, y\rangle \leq \alpha\}$ y $z + K(\alpha, y) = \{u = z + x / x \in K(\alpha, y)\}$, entonces

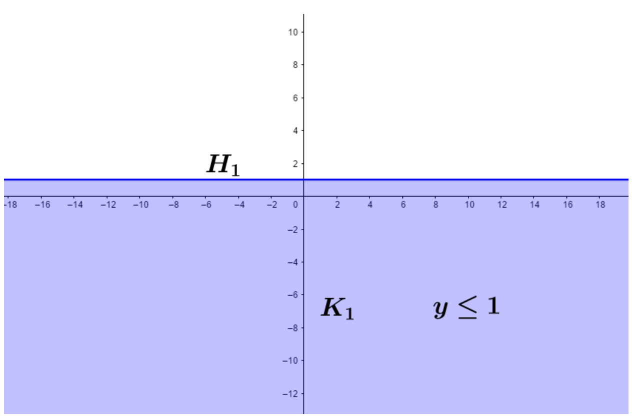
$$\begin{aligned} \langle u, y\rangle = \langle z + x, y\rangle &= \langle z, y\rangle + \langle x, y\rangle \\ &= \mu + \langle x, y\rangle, \qquad \mu = \langle z, y\rangle \\ &\leq \mu + \alpha \\ &= \beta, \qquad \beta = \mu + \alpha. \end{aligned}$$

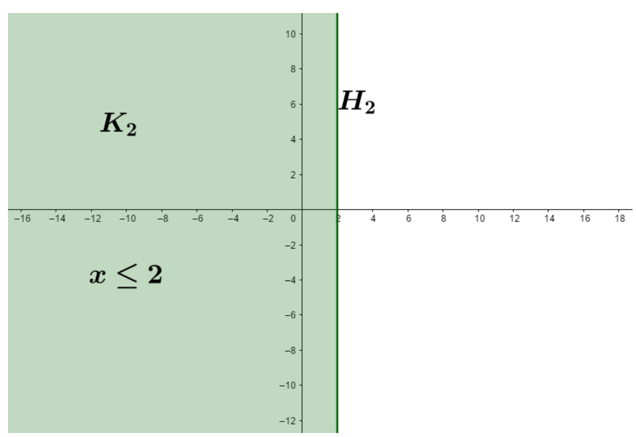
Probemos que $z + K(\alpha, y) = K(\beta, y)$.

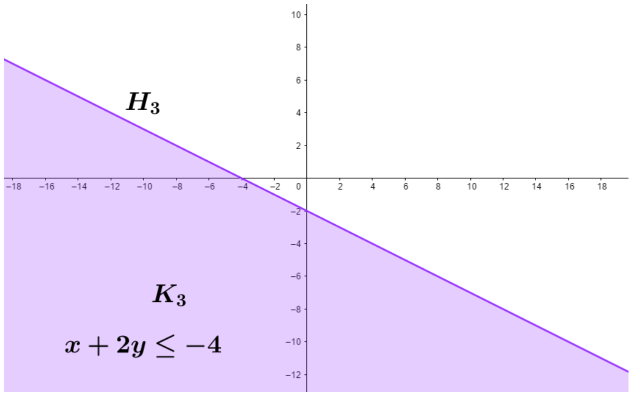
$$\begin{aligned} v \in K(\beta, y) &\Leftrightarrow \langle v, y\rangle \leq \beta & &\Leftrightarrow \langle v, y\rangle \leq \mu + \alpha \\ &\Leftrightarrow \langle v, y\rangle \leq \langle z, y\rangle + \alpha & &\Leftrightarrow \langle v, y\rangle - \langle z, y\rangle \leq \alpha \\ &\Leftrightarrow \langle v - z, y\rangle \leq \alpha & &\Leftrightarrow v - z \in K(\alpha, y) \\ &\Leftrightarrow v \in z + K(\alpha, y). \end{aligned}$$

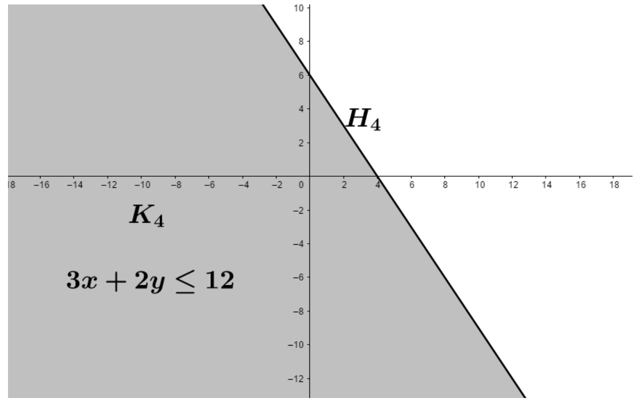
Así que $z + K(\alpha_i, y_i) = K(\beta_i, y_i)$ lo que implica que $z + K(\alpha_i, y_i)$ son semiespacios cerrados de $\mathbb{R}^d$. Por lo tanto, Q' es un conjunto poliédrico.

Ejemplo 3.2.3. *Sean $K_1((0,1),1)$, $K_2((1,0),2)$, $K_3((1,2),-4)$ y $K_4((3,2),12)$ semiespacios cerrados de $\mathbb{R}^2$.*



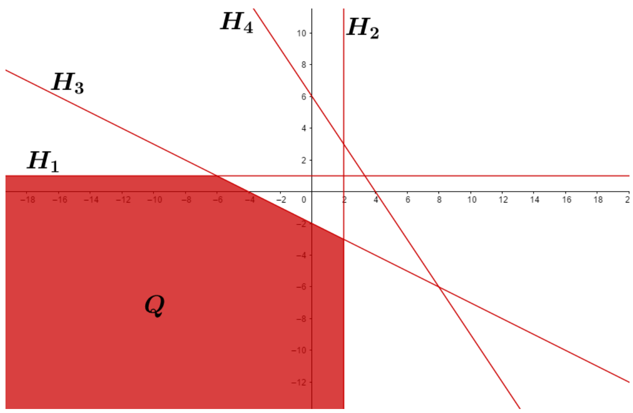






Si hacemos la intersección de estos semiespacios cerrados obtenemos un conjunto poliédrico. Es decir:

$$Q = \bigcap_{i=1}^{4} K_i.$$



Comentario 3.2.4. *La estructura facial de un conjunto poliédrico(no-vacío) Q en $\mathbb{R}^d$ es trivial cuando Q es un subespacio afín de $\mathbb{R}^d$, siendo sus caras solamente $\emptyset$ y Q. Cuando Q es un conjunto poliédrico $e-$dimensional en $\mathbb{R}^d$ el cual no es un subespacio afín, entonces Q es afínmente isomorfo a un conjunto poliédrico Q' en $\mathbb{R}^e$ con dim $Q' = e$ y $Q' \neq \mathbb{R}^e$. Por lo tanto, cuando estudiamos la estructura facial de un conjunto poliédrico, es suficiente considerar conjuntos poliédricos Q en $\mathbb{R}^d$ con dim $Q = d$ y $Q \neq \mathbb{R}^d$.*

Comentario 3.2.5. *Todo conjunto poliédrico Q en $\mathbb{R}^d$ tiene una representación*

$$Q = \bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, \alpha_i). \qquad (1)$$

En lo que sigue, cuando hablemos de una representación (1) de Q, implícitamente asumiremos que dos $K(x_i, \alpha_i)'s$ no son iguales. Para $Q \neq \mathbb{R}^d$ siempre podemos asumir que cada $K(x_i, \alpha_i)$ es un semiespacio cerrado, es decir, cada $x_i \neq 0$. Para $Q = \mathbb{R}^d$ solamente hay una representación, $Q = K(0, \alpha)$, donde $\alpha \geq 0$.

Note que cuando $Q \neq \mathbb{R}^d$ existen infinitas representaciones(excepto para $d = 0$); cualquier semiespacio cerrado que contenga a Q puede ser añadido.

Definición 3.2.6. *Sea Q un conjunto poliédrico. Una representación (1) de Q es irreducible si $n = 1$, o $n > 1$ y*

$$Q \subsetneq \bigcap_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} K(x_i, \alpha_i), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Una representación la cual no es irreducibles es llamada reducible.

Observación 3.2.7. *Cualquier representación reducible puede ser llevada a una representación irreducible omitiendo algunos de los conjuntos $K(x_i, \alpha_i)$.*

Ejemplo 3.2.8. *En el Ejemplo 3.2.3, la representación de Q*

$$Q = \bigcap_{i=1}^{4} K_i,$$

es reducibles, puesto que

$$Q = \bigcap_{i=1}^{3} K_i.$$

Teorema 3.2.9. *Sea Q un conjunto poliédrico en $\mathbb{R}^d$ con $\dim Q = d$ y $Q \neq \mathbb{R}^d$. Sea*

$$Q = \bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, \alpha_i),$$

una representación de Q con $n > 1$, donde cada $K(x_i, \alpha_i)$ es un semiespacio cerrado. Entonces la representación es irreducible si y sólo si

$$H(x_j, \alpha_j) \cap int \bigcap_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} K(x_i, \alpha_i) \neq \emptyset$$

para cada $j = 1, \ldots, n$.

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $Q = \bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, \alpha_i)$ una representación irreducible de Q, entonces $Q \neq \bigcap_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} K(x_i, \alpha_i)$, $j = 1, \ldots, n$. Supongamos que para algún j no se cumple el teorema. Es decir

$$H(x_j, \alpha_j) \cap int \bigcap_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} K(x_i, \alpha_i) = \emptyset,$$

luego por el Teorema 2.4.6 tenemos que

$$\bigcap_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} K(x_i,\alpha_i) \subset K(x_j,\alpha_j),$$

lo que implica que podemos omitir al semiespacio $K(x_j,\alpha_j)$ de la representación de Q así que

$$Q = \bigcap_{i=1}^{n} K(x_i,\alpha_i) = \bigcap_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} K(x_i,\alpha_i),$$

lo cual contradice la hipótesis de que la representación de Q es irreducible. Por lo tanto

$$H(x_j,\alpha_j) \cap int \bigcap_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} K(x_i,\alpha_i) \neq \emptyset,$$

para cada $j = 1,\ldots,n$.

$\Leftarrow$] Sea

$$H(x_j,\alpha_j) \cap int \bigcap_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} K(x_i,\alpha_i) \neq \emptyset, \qquad j = 1,\ldots,n.$$

Para cada $j = 1,\ldots,n$. Sea $M_j := \bigcap_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} K(x_i,\alpha_i)$. Entonces $Q = K(x_j,\alpha_i) \cap M_j$ para cada j.
Por hipótesis $dim\ Q = \mathbb{R}^d$, así que por el Corolario 2.3.9 tenemos $int\ Q \neq\ \emptyset$, lo cual implica que $int\ M_j \neq \emptyset$ por lo que $ri\ M_j = int\ M_j$ y $M_j \not\subset H(x_j,\alpha)$.
Ahora por hipótesis

$$H(x_j,\alpha_j) \cap int\ M_j \neq \emptyset,$$

y vimos que $M_j \not\subset H(x_j,\alpha)$ aplicando el Teorema 2.4.6 a M_j tenemos que

$$M_j \not\subset K(x_j,\alpha_j), \qquad M_j \not\subset K(-x_j,-\alpha_j), \qquad j = 1,\ldots,n.$$

Como $Q = K(x_j,\alpha_j) \cap M_j$ y si $M_j \subset K(-x_j,-\alpha_j)$ implicaría que

$$Q \subset K(x_j,\alpha_j) \cap K(-x_j,-\alpha_j) = H(x_j,\alpha_j),$$

lo cual es una contradicción.
Así que $M_j \not\subset K(x_j,\alpha_j)$, $j = 1,\ldots,n$, esto significa que el semiespacio $K(x_j,\alpha_j)$, $j = 1,\ldots,n$, no puede ser omitido de la representación de Q. Por lo tanto, la representación es irreducible. $\square$

Teorema 3.2.10. *Sea Q un conjunto poliédrico en $\mathbb{R}^d$ con dim $Q = d$ y $Q \neq \mathbb{R}^d$. Sea*

$$Q = \bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, \alpha_i) \qquad (*)$$

una representación de Q, donde cada $K(x_i, \alpha_i)$es un semiespacio cerrado. Entonces se cumplen los enunciados siguientes:

(a) bd $Q = \bigcup_{i=1}^{n} H(x_i, \alpha_i) \cap Q$.

(b) Cada faceta de Q es de la forma $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$.

(c) Cada conjunto $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$ es una faceta de Q si y sólo si la representación $(*)$ es irreducible.

Demostración. (a) Como *dim* $Q = d$, por el Corolario 2.3.9 tenemos que *ri* $Q =$ *int* Q

$$\begin{aligned}
bd\ Q &= Q \setminus int\ Q & &= Q \setminus int\left(\bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, \alpha_i)\right) \\
&= Q \setminus \bigcap_{i=1}^{n} int\ K(x_i, \alpha_i) & &= Q \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} int\ K(x_i, \alpha_i)\right)^c \\
&= Q \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} (int\ K(x_i, \alpha_i))^c\right) & &= Q \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} K(-x_i, -\alpha_i)\right) \\
&= Q \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} H(x_i, \alpha_i)\right).
\end{aligned}$$

(b) Sea F una faceta de Q. Sea x un punto interior relativo de F, luego por Teorema 2.5.24 tenemos que F es la cara más pequeña de Q que contiene a x. Ahora como cada cara de Q pertenece al *bd* Q entonces por la parte (a) existe j tal que $x \in H(x_j, \alpha_j) \cap Q$. Como $H(x_j, \alpha_j)$ es un hiperplano soporte de Q, entonces $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$ es una cara de Q que contiene a x. Así que $F \subset H(x_j, \alpha_j) \cap Q$ y

$$dim\ F = d - 1 \leq dim(H(x_j, \alpha_j) \cap Q) < d,$$

$$\Rightarrow dim\ F = d - 1 = dim(H(x_j, \alpha_j) \cap Q).$$

Así que por el Corolario 2.5.22 concluimos que $F = H(x_j, \alpha_j) \cap Q$.

(c) Para $n = 1$ no hay nada que probar, tendríamos que $Q = K(x, \alpha)$. Así que asumamos que $n > 1$.

$\Leftarrow$] Si $(*)$ es irreducible tenemos que $Q \subset K(x_j, \alpha_j)$ y $Q \cap H(x_j, \alpha_j) \neq \emptyset$, $j = 1, ..., n$ por el Teorema 3.2.9, entonces cada $H(x_j, \alpha_j)$ soporta a Q. Luego por el Lema 2.5.13 $Q \cap H(x_j, \alpha_j)$ es una cara propia de Q.

Probaremos que $Q \cap H(x_j, \alpha_j)$ tiene interior no-vacío en $H(x_j, \alpha_j)$, esto implicaría por el Corolario 2.3.9 que $dim(Q \cap H(x_j, \alpha_j)) = dim(H(x_j, \alpha_j)) = d - 1$ por lo tanto $Q \cap H(x_j, \alpha_j)$ es una faceta. Tenemos:

$$\begin{aligned} Q \cap H(x_j, \alpha_j) &= H(x_j, \alpha_j) \cap \bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, \alpha_i) \\ &= H(x_j, \alpha_j) \cap \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} K(x_i, \alpha_i) \\ &\supset H(x_j, \alpha_j) \cap int \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} K(x_i, \alpha_i) \\ &\neq \emptyset. \qquad \text{[Teorema 3.2.9]} \end{aligned}$$

ya que el conjunto $H(x_j, \alpha_j) \cap int \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} K(x_i, \alpha_i)$ es abierto en $H(x_j, \alpha_j)$ entonces $Q \cap H(x_j, \alpha_j)$ tiene interior no-vacío en $H(x_j, \alpha_j)$. Por lo tanto, $Q \cap H(x_j, \alpha_j)$ es una faceta.

$\Rightarrow$] Supongamos que $(*)$ es reducible, entonces

$$Q = \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} K(x_i, \alpha_i),$$

para algún j. Supongamos que $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$ es una faceta de Q. Sea x un punto interior relativo de $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$, entonces $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$ es la cara más pequeña que contiene a x. Ahora de la parte (a), existe un i, $i \neq j$ tal que $x \in H(x_i, \alpha_i) \cap Q$, lo que implicaría que

$$H(x_i, \alpha_i) \cap Q = H(x_j, \alpha_j) \cap Q,$$

puesto que $dim\ H(x_j, \alpha_j) \cap Q = d - 1 \leq dim\ H(x_i, \alpha_i) \cap Q < d$ y el Corolario 2.5.22. Así que $K(x_j, \alpha_j) = K(x_i, \alpha_i)$ lo cual es absurdo. Por lo tanto, $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$ no es una faceta de Q.

□

Teorema 3.2.11. *Sea Q un conjunto poliédrico de $\mathbb{R}^d$ y F una cara propia de Q. Entonces existe una faceta G de Q que contiene a F.*

Demostración. Asumamos que $dim\ Q = d$. Escojamos una representación irreducible de Q

$$Q = \bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, \alpha_i).$$

Sea x un punto interior relativo de F. Ahora por el Teorema 3.2.10(a), existe j tal que $x \in H(x_j, \alpha_j) \cap Q$. F es la cara más pequeña que contiene a x por el Teorema 2.5.24 y $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$ es una faceta que contiene a x por el Teorema 3.2.10(c). Tomando $G = H(x_j, \alpha_j) \cap Q$ tenemos el resultado que queríamos. □

Corolario 3.2.12. *Sea Q un conjunto poliédrico en $\mathbb{R}^d$. Entonces toda cara de Q es un conjunto poliédrico.*

Demostración. Solamente necesitamos probar el corolario para caras propias de Q. El Teorema 3.2.11 muestra que cualquier cara propia de Q es una cara de una faceta de Q. Por el Teorema 3.2.10(b) cada faceta de Q es de la forma $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$ luego cada faceta de Q es la intersección de dos conjuntos poliédricos, entonces las facetas de Q son conjuntos poliédricos, así que el corolario se tiene aplicando inducción sobre la dimensión. □

Corolario 3.2.13. *Sea Q un conjunto poliédrico en $\mathbb{R}^d$. Entonces el número de caras de Q es finito.*

Demostración. El número de facetas de un conjunto poliédrico es finito por el Teorema 3.2.10(b). Cada cara propia de Q es una cara de una faceta de Q por el Teorema 3.2.11. Así que el corolario se tiene aplicando inducción sobre la dimensión. □

Corolario 3.2.14. *Sea Q un conjunto poliédrico en $\mathbb{R}^d$ con dim $Q = d$. Sean F_j y F_k caras de Q con $F_j \subset F_k$ y dim $F_j = j$, dim $F_k = k$, donde $0 \leq j < j+1 \leq k-1 < k \leq d$. Entonces existen caras $F_{j+1}, \dots, F_{k-1}$ de Q con*

$$F_j \subset F_{j+1} \subset \cdots \subset F_{k-1} \subset F_k$$

y dim $F_i = i, \quad i = j+1, \dots, k-1$.

Demostración. Por el Teorema 2.5.19 tenemos que F_j es una cara propia de F_k, y como F_k es una cara de Q entonces F_k es un conjunto poliédrico por el Corolario 3.2.12. Luego por el Teorema 3.2.11 existe F_{k-1} faceta de F_k tal que $F_j \subset F_{k-1}$. Si $j = k-2$, tendríamos el resultado. Si $j < k-2$. Argumentamos de igual manera remplazando F_k por F_{k-1} y continuando así obtendríamos las caras F_i como queríamos. □

En el Corolario 3.2.14 note que en realidad tenemos:

$$F_j \underset{\neq}{\subsetneq} F_{j+1} \underset{\neq}{\subsetneq} \cdots \underset{\neq}{\subsetneq} F_{k-1} \underset{\neq}{\subsetneq} F_k.$$

Note que el resultado no es válido en general cuando $j = -1$.

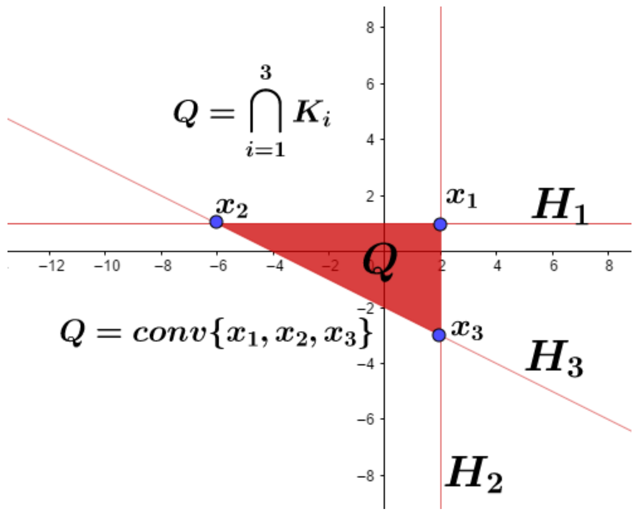
Corolario 3.2.15. *Sea Q un conjunto poliédrico acotado no-vacío en $\mathbb{R}^d$. Entonces Q es un politopo.*

Demostración. Q es cerrado y convexo por ser un conjunto poliédrico y acotado por hipótesis. Por lo tanto, Q es un conjunto convexo compacto. Por el Corolario 3.2.13 tenemos que *ext* Q es finito luego por el Teorema 3.1.4[$(b) \Rightarrow (a)$] Q es un politopo. $\square$

Ejemplo 3.2.16. *Sean* $K_1((0,1),1)$, $K_2((1,0),2)$ *y* $K_3((-1,2),4)$ *semiespacios cerrados de* $\mathbb{R}^2$*, y sea*

$$Q = \bigcap_{i=1}^{3} K_i.$$

Q *es un conjunto poliédrico acotado, así que* Q *es un politopo. Por lo tanto* $Q = conv\{x_1, x_2, x_3\}$.



3.3. Polaridad de Politopos y Conjuntos Poliédricos

Si P es un politopo tal que $0 \in int\ P$, su polar Q es un conjunto poliédrico acotado(un politopo) donde los semiespacios de su representación están determinados por los puntos extremos de P. Además P y Q son mutuamente polares. El principal resultado de esta sección es que un subconjunto P de $\mathbb{R}^d$ es un politopo si y sólo si es un conjunto poliédrico acotado, esto significa que los politopos además de ser descrito por medio de sus vértices, también pueden ser descrito por medio de semiespacios cerrados acotados por los hiperplanos generados por sus facetas y esta representación es irreducible.

Comentario 3.3.1. *Note que los conjuntos poliédricos* Q *que tienen una representación particular de la forma*

$$Q = \bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, 1),$$

tienen al 0 *como punto interior.*

Teorema 3.3.2. *Sean $x_1, \ldots, x_n$, donde $n \geq 1$, puntos distintos de $\mathbb{R}^d$, y sean*

$$P := conv\{x_1, \ldots, x_n\},$$

$$Q := \bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, 1).$$

Entonces tenemos:

(a) $P^\circ = Q$.

(b) $Q^\circ = conv\{0, x_1, \ldots, x_n\}$.

(c) P y Q son mutuamente polares si y sólo si $0 \in P$.

(d) P y Q son mutuamente polares con Q acotado si y sólo si $0 \in int\ P$.

(e) Suponga que P y Q son mutuamente polares con Q acotado (es decir, $0 \in int\ P$, por la parte (d)). Entonces tenemos:
$ext\ P = \{x_1, \ldots, x_n\}$ si y sólo si la representación $Q = \bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, 1)$ es irreducible.

Demostración. De la equivalencia de la Definición 2.6.1 tenemos que

$$\{x_1, \ldots, x_n\}^\circ = \bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, 1) = Q.$$

Por otro lado, aplicando la Observación 2.6.3(1) dos veces tenemos

$$\begin{array}{rcll} y \in \{x_1, \ldots, x_n\}^\circ & \Leftrightarrow & \{x_1, \ldots, x_n\} \subset K(y, 1) & \\ & \Leftrightarrow & conv\{x_1, \ldots, x_n\} \subset K(y, 1) & [K(y, 1) \text{ es convexo}] \\ & \Leftrightarrow & y \in (conv\{x_1, \ldots, x_n\})^\circ & \\ & \Leftrightarrow & y \in P^\circ, & \end{array}$$

lo que implica que $\{x_1, \ldots, x_n\}^\circ = P^\circ$. Por lo tanto, $P^\circ = Q$.

(b) De la parte (a) tenemos que $Q = P^\circ = \{x_1, \ldots, x_n\}^\circ$, entonces

$$\begin{array}{rcll} Q^\circ & = & P^{\circ\circ} & \\ & = & \{x_1, \ldots, x_n\}^{\circ\circ} & \\ & = & clconv(\{0\} \cup \{x_1, \ldots, x_n\}) & [\text{Teorema 2.6.6}] \\ & = & clconv\{0, x_1, \ldots, x_n\} & \\ & = & cl(conv\{0, x_1, \ldots, x_n\}) & [\text{Teorema 2.3.15}] \\ & = & conv\{0, x_1, \ldots, x_n\}. & [\text{Corolario 2.2.23}] \end{array}$$

(c) Aplicando las partes (a) y (b) tenemos

$$\begin{aligned} P \text{ y } Q \text{ son mutuamente polares} &\Leftrightarrow P^\circ = Q \text{ y } Q^\circ = P \\ &\Leftrightarrow 0 \in P. \end{aligned}$$

(d) $\Rightarrow$]Sea Q acotado, P y Q mutuamente polares, entonces por el Teorema 2.6.4 tenemos que $0 \in int\ Q^\circ$ pero $P = Q^\circ$. Por lo tanto, $0 \in int\ P$.

$\Leftarrow$]Sea $0 \in int\ P$, entonces $0 \in P$. Luego por la parte (c) tenemos que P y Q son mutuamente polares.

(e) Por hipótesis $n \geq 2$. Para $j = 1, \ldots, n$, sean

$$P_j := conv\{x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n\},$$

$$Q_j := \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} K(x_i, 1).$$

Aplicando la parte (a) al conjunto $\{x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n\}$ tenemos que $P_j^\circ = Q_j$. Además, por el Teorema 3.1.6[$(a) \Rightarrow (b)$] tenemos que $ext\ P \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$. Si $ext\ P$ es un subconjunto propio de $\{x_1, \ldots, x_n\}$, entonces por el Teorema 3.1.6(c) $P = P_j$ para algún j lo que implica que $P^\circ = Q_j$, pero $P^\circ = Q$. Por lo tanto, $Q = Q_j = \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} K(x_i, 1)$ para algún j. Esto muestra que la representación de Q es reducible.

Recíprocamente, si la representación de Q es reducible, entonces $Q = Q_j$, para algún j, y $Q^\circ = Q_j^\circ$. Ahora, aplicándole la parte (b) al conjunto $\{x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n\}$ tenemos que $Q_j^\circ = conv\{0, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n\}$, luego por hipótesis $Q^\circ = P$ y probamos que $Q^\circ = Q_j^\circ$ entonces

$$P = conv\{0, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n\}.$$

El Teorema 3.1.6[$(a) \Leftrightarrow (b)$] muestra que cualquier punto no extremo de P entre los puntos $0, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ puede ser omitido, y el 0 es tal punto puesto que $0 \in int\ P$ entonces $0 \notin ext\ P$. Por lo tanto,

$$P = conv\{x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n\},$$

aplicando el Teorema 3.1.6[$(a) \Rightarrow (b)$] tenemos que

$$ext\ P \subset \{x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n\}.$$

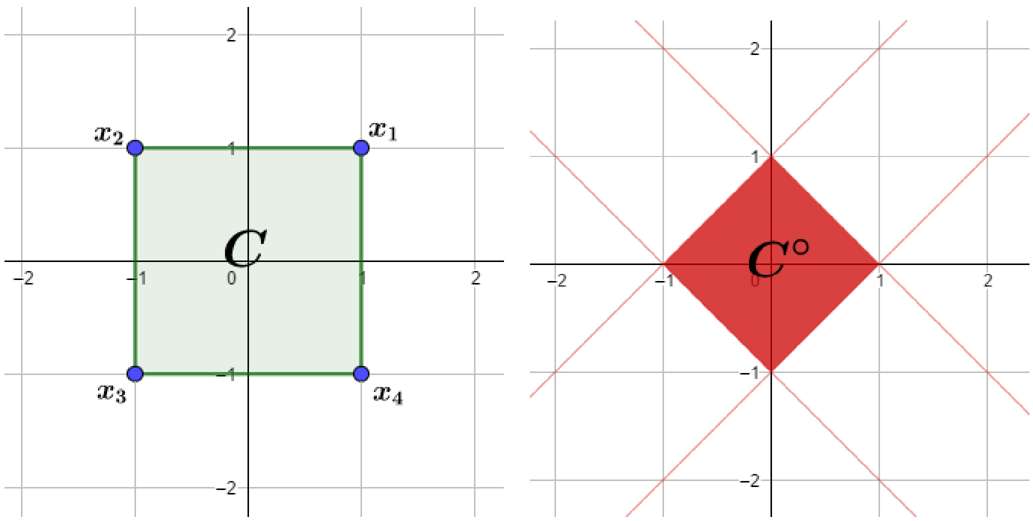
Por lo tanto, $ext\ P$ es un subconjunto propio de $\{x_1, \ldots, x_n\}$. $\square$

Ejemplo 3.3.3. *En $\mathbb{R}^2$, sea C el cuadrado de lado 2 generado por los puntos $x_1 = (1,1)$, $x_2 = (-1,1)$, $x_3 = (-1,-1)$ y $x_4 = (1,-1)$. Es decir*

$$C = conv\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

Luego por el Teorema 3.3.2 tenemos que

$$C^\circ = \bigcap_{i=1}^{4} K(x_i, 1)$$



Teorema 3.3.4. *Un subconjunto no-vacío P de $\mathbb{R}^d$ es un politopo si y sólo si es un conjunto poliédrico acotado.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Sea P un politopo en $\mathbb{R}^d$, es decir $P = conv\{x_1, \ldots, x_n\}$; $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$. Sin pérdida de generalidad asumamos que $o \in int\ P$ y sea Q el conjunto poliédrico $Q := \bigcap\limits_{i=1}^{n} K(x_i, 1)$.
El Teorema 3.3.2(a) nos dice que $P^\circ = Q$, ahora como $0 \in int\ P$ entonces por el Teorema 3.3.2(d) $Q^\circ = P$ y Q es acotado. Luego por el Corolario 3.2.15 tenemos que Q es un politopo, digamos $Q = conv\{y_1, \ldots, y_m\}$ y sea $R := \bigcap\limits_{j=1}^{m} K(y_j, 1)$, aplicando el Teorema 3.3.2(a) al conjunto $\{y_1, \ldots, y_m\}$ tenemos que $Q^\circ = R$ pero ya vimos que $Q^\circ = P$, de donde concluimos que

$$P = \bigcap_{j=1}^{m} K(y_j, 1).$$

Por lo tanto, P es un conjunto poliédrico acotado.

$\Leftarrow]$ Corolario 3.2.15. $\square$

Corolario 3.3.5. *Sean P_1 y P_2 politopos en $\mathbb{R}^d$ tales que $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$. Entonces $P_1 \cap P_2$ es un politopo.*

Demostración. Del Teorema 3.3.4, P_1 y P_2 son conjuntos poliédricos acotados. Luego por la Observación 3.2.2 $P_1 \cap P_2$ es un conjunto poliédrico acotado, finalmente aplicando el Teorema 3.3.4 tenemos que $P_1 \cap P_2$ es un politopo. □

Corolario 3.3.6. *Sea P un politopo en $\mathbb{R}^d$, y sea A un subespacio afín de $\mathbb{R}^d$ tales que $P \cap A \neq \emptyset$. Entonces $P \cap A$ es un politopo.*

Demostración. Por la Observación 3.2.2 tenemos que A es un conjunto poliédrico y P es un conjunto poliédrico acotado, entonces $P \cap A$ es un conjunto poliédrico acotado. Y aplicando el Teorema 3.3.4 concluimos que $P \cap A$ es un politopo. □

Corolario 3.3.7. *Sea P un $d-$politopo en $\mathbb{R}^d$. Entonces P tiene al menos $d+1$ facetas.*

Demostración. Sea $P = conv\{x_1, \dots, x_n\}$, asumamos sin pérdida de generalidad que $0 \in int\ P$. Sea $Q := \bigcap\limits_{i=1}^{n} K(x_i, 1)$ entonces por el Teorema 3.3.2(d) P y Q son mutuamente polares con Q es acotado, y $0 \in int\ Q$ por Teorema 2.6.4, luego por el Corolario 3.2.15 y el Corolario 2.3.9 tenemos que Q es un $d-$politopo.
Sean $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}^d$ los vértices de Q, es decir los puntos extremos de Q y $R := \bigcap\limits_{j=1}^{m} K(y_j, 1)$, entonces por el Teorema 3.3.2(d) Q y R son mutuamente polares ya que $0 \in int\ Q$, de donde $P = Q^\circ = R$. Además el Teorema 3.3.2(e) muestra que la representación

$$P = \bigcap_{j=1}^{m} K(y_j, 1)$$

es irreducible. Entonces el número de facetas de P es m por el Teorema 3.2.10(b), (c).
Por otro lado, el número de vértices del $d-$politopo Q es al menos $d+1$. Por lo tanto $m \geq d+1$. □

Observación 3.3.8. *Note que cuando F es una faceta de un $d-$politopo en $\mathbb{R}^d$, entonces $aff\ F$ es un hiperplano soporte de P.*

En efecto: F es una faceta de P así que $dim\ F = d-1$ y como F es una cara de un politopo entonces por el Teorema 3.1.10 F es una cara expuesta, así que existe un hiperplano soporte propio H de P tal que $F = H \cap P$ lo que implica que $F \subset H$ entonces $aff\ F \subset H$ ya que H es un subespacio afín y como $dim\ F = d-1 = dim\ H$ tenemos que $aff\ F = H$. Por lo tanto $aff\ F$ es un hiperplano soporte de P.

Corolario 3.3.9. *Sea P un $d-$politopo en $\mathbb{R}^d$, sean $F_1, \dots, F_n$ las facetas de P, y sea $K(x_i, \alpha_i)$ el semiespacio soporte de P acotado por $aff\ F_i$ para $i = 1, \dots, n$. Entonces*

$$P = \bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, \alpha_i),$$

y esta representación es irreducible.

Demostración. Por Teorema 3.3.4, P es un conjunto poliédrico acotado. Sea

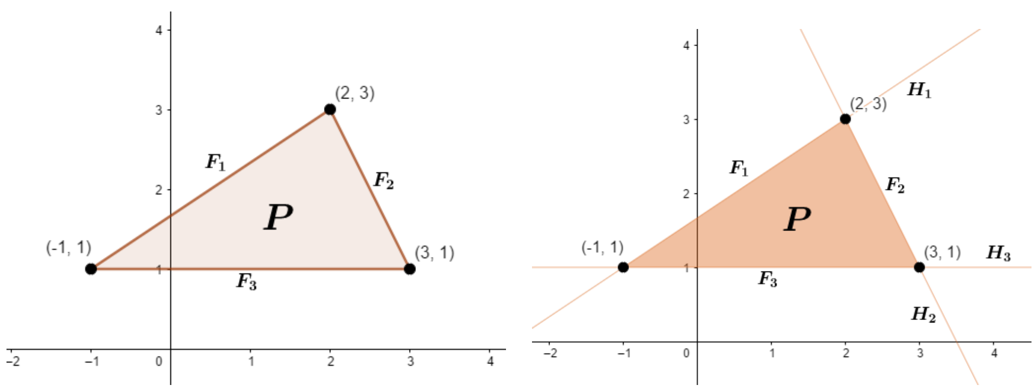
$$P = \bigcap_{j=1}^{m} K(y_j, \beta_j)$$

una representación irreducible de P. Por Teorema 3.2.10$(b),(c)$ las facetas de P son los conjuntos $H(y_j, \beta_j) \cap P$ pero por hipótesis la facetas de P también son los conjuntos $H(x_i, \alpha_i) \cap P$. Por lo tanto, $m = n$ y hay una correspondencia $1-1$ entre $i's$ y $j's$ tales que $H(x_i, \alpha_i) = H(y_j, \beta_j)$, lo cual implica que $K(x_i, \alpha_i) = K(y_j, \beta_j)$ por lo que

$$P = \bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, \alpha_i),$$

y además esta representación es irreducible, ya que la representación $\bigcap\limits_{j=1}^{m} K(y_j, \beta_j)$ es irreducible. $\square$

Ejemplo 3.3.10. *Sean* $(-1,1)$, $(2,3)$, $(3,1) \in \mathbb{R}^2$ *y sea el* $2-$*politopo* $P = conv\{(-1,1),(2,3),(3,1)\}$.



En este caso las facetas de P *son:*

$$F_1 = [(-1,1),(2,3)] \qquad F_2 = [(2,3),(3,1)] \qquad F_3 = [(-1,1),(3,1)].$$

Ahora encontramos $aff\ F_i$, $i = 1,2,3$.

$$aff\ F_1 = H_1((-2,3),5) \qquad aff\ F_2 = H_2((2,1),7) \qquad aff\ F_3 = H_3((0,1),1).$$

Los semiespacios acotados por H_i, $i = 1,2,3$ *son:*

$$K_1((-2,3),5) \qquad K_2((2,1),7) \qquad K_3(-(0,1),-1).$$

Por lo tanto, P *tiene una representación como conjunto poliédrico* $P = \bigcap\limits_{i=1}^{3} K_i$.

Corolario 3.3.11. *Sea P un d−politopo en $\mathbb{R}^d$. Sean F_j y F_k caras de P tales que $F_j \subset F_k$ y dim $F_j = j$, dim $F_k = k$, donde $-1 \leq j < j+1 \leq k-1 < k \leq d$. Entonces existen caras $F_{j+1}, \ldots, F_{k-1}$ de P con*

$$F_j \subset F_{j+1} \subset \cdots \subset F_{k-1} \subset F_k,$$

y dim $F_i = i, \quad i = j+1, \ldots, k-1$.

Demostración. Por el Teorema 3.3.4 P es un conjunto poliédrico, entonces para $j \geq 0$ tenemos el resultado aplicando el Corolario 3.2.14. Para $j = -1$, sea F_0 cualquier vértice de F_k. Si $k = 1$ tenemos que $F_{j+1} = F_{k-1}$ y tendríamos el resultado. Si $k \geq 2$, le aplicamos el Corolario 3.2.14 a las caras F_0 y F_k. □

Comentario 3.3.12. *Note que cuando P es un d−politopo en $\mathbb{R}^d$ con $0 \in int\ P$, entonces P y P° forman un par de d−politopos mutuamente polares, y cada par de d−politopos mutuamente polares surge de esta manera; esto se sigue del Teorema 3.3.2$(a),(d)$ y del Teorema 3.3.4. También, cualquier cara F de P es miembro de un par F, G de caras conjugadas ya que todas las caras de P son expuestas por el Teorema 3.1.10.*

Teorema 3.3.13. *Sean P y Q d−politopos mutuamente polares en $\mathbb{R}^d$ y sean F y G caras conjugadas de P y Q, respectivamente. Entonces*

$$dim\ F + dim\ G = d - 1.$$

Demostración. Como P y Q son mutuamente polares, entonces $0 \in int\ P$. Durante la prueba del Teorema 2.6.18 vimos que la igualdad se cumple para las caras impropias, así que solo vamos a considerar el caso donde F y G son caras propias.
Sean $x_1, \ldots, x_n$ los vértices de P y sean $x_1, \ldots, x_k$ los vértices de F, es decir, $P = conv\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $F = conv\{x_1, \ldots, x_k\}$, donde $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$ ya que F es una cara de P . Luego por el Teorema 3.3.2(a)

$$Q = \bigcap_{i=1}^{n} K(x_i, 1).$$

Además, por la definición de la $\triangle$−operación tenemos que

$$G = Q \cap \bigcap_{x \in F} H(x, 1).$$

Ahora notemos que

$$\bigcap_{x \in F} H(x, 1) = \bigcap_{i=1}^{k} H(x_i, 1).$$

En efecto: Como $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset F$ entonces

$$\bigcap_{x \in F} H(x, 1) \subset \bigcap_{i=1}^{k} H(x_i, 1).$$

Ahora sea

$$\begin{aligned} y \in \bigcap_{i=1}^{k} H(x_i,1) &\Rightarrow y \in H(x_i,1);\ i=1,\ldots,k &&\Rightarrow \langle x_i, y\rangle = 1;\ i=1,\ldots,k \\ &\Rightarrow x_1,\ldots,x_k \in H(y,1) &&\Rightarrow F = con\{x_1,\ldots,x_k\} \subset H(y,1) \\ &\Rightarrow x \in H(y,1),\ \forall\, x \in F &&\Rightarrow \langle x, y\rangle = 1,\ \forall\, x \in F \\ &\Rightarrow y \in H(x,1),\ \forall\, x \in F \\ &\Rightarrow y \in \bigcap_{x\in F} H(x,1). \end{aligned}$$

Así que

$$\bigcap_{x\in F} H(x,1) \supset \bigcap_{i=1}^{k} H(x_i,1).$$

Luego tenemos que

$$\begin{aligned} G &= Q \cap \bigcap_{x\in F} H(x,1) \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} K(x_i,1) \cap \bigcap_{i=1}^{k} H(x_i,1) \\ &= \bigcap_{i=k+1}^{n} K(x_i,1) \cap \bigcap_{i=1}^{k} H(x_i,1). \end{aligned}$$

Sea $A := \bigcap_{i=1}^{k} H(x_i,1)$, entonces A es un subespacio afín por ser la intersección de subespacios afines. De hecho, $A = Aff\ G$. Para ver esto tenemos que $K(x_i,1) \cap A$, $i = k+1,\ldots,n$ son semiespacios cerrados en A. Por lo tanto G es un conjunto poliédrico en A con la representación

$$G = \bigcap_{i=k+1}^{n} K(x_i,1) \cap A,$$

donde se puede dar que $K(x_i,1) \cap A = A$ para ciertos valores de i. Ahora,

$$G \subset A \Rightarrow aff\ G \subset A \Rightarrow dim(aff\ G) \leq dim\ A,$$

Como G es la intersección no-vacía de semiespacios cerrados en el espacio afín A entonces $dim\ G(aff\ G) < dim\ A$ solamente si G está contenido en un hiperplano que acota uno de los semiespacios $K(x_i,1) \cap A$, $i = k+1,\ldots,n$. Pero si G es un subconjunto de algún $H(x_i,1)$, $i = k+1,\ldots,n$, entonces, $\forall\ y \in G$, $\langle x_i, y\rangle = 1$ lo que implica que $x_i \in G^{\triangle} = F$, $i = k+1,\ldots,n$ así que $F = P$ lo cual es absurdo ya que F es una cara propia de P. Así que $dim(aff\ G) = dim\ A$. En conclusión, $aff\ G = A$. En particular

$$dim\ G \ = \ dim\ A \ = \ dim \bigcap_{x\in F} H(x,1).$$

Durante la prueba del Teorema 2.6.18 llegamos fue a $dim\ G \leq dim \bigcap_{x\in F} H(x,1)$, pero de ahí en adelante se siguen los mismos pasos en esta prueba para concluir que

$$dim\ F + dim\ G = d - 1.$$

$\square$

Conclusiones

En el desarrollo del presente trabajo se hizo un amplio estudio de los politopos convexos, sus propiedades, su estructura facial y su polaridad. Para lograrlo, se tuvo que desarrollar la estructura afín de $\mathbb{R}^d$ que junto con la topología relativa al espacio afín fueron necesarios para el estudio de la teoría de conjuntos convexos.

Se encontraron diferentes maneras de representar un politopo, una “representación interna” por medio de sus vértices y una “representación externa” por medio de intersección de semiespacios cerrados.

También se estudiaron unos politopos particulares como pirámides y bipirámides donde su estructura facial depende de la estructura facial de su base. Y se estudiaron los conjuntos poliédricos junto con su estructura facial y si dichos conjuntos son acotados se concluyó que son politopos y recíprocamente los politopos son conjuntos poliédricos acotados, esto ayudó a dar propiedades adicionales de los politopos.

El autor de este trabajo realizó de manera desarrollada y detallada las pruebas de los resultados presentados en [3], ya que en el texto aparecen de manera compacta lo cual dificulta su comprensión. También se realizaron las demostraciones de afirmaciones y enunciados propuestos por el texto mencionado.

Bibliografía

[1] Stephen H Friedberg, Arnold J Insel, and Lawrence E Spence. *Algebra lineal. Publicaciones Cultural*, 1982.

[2] Elon Lages Lima. *Curso de análise*. 1995.

[3] Arne Brondsted. *An introduction to convex polytopes, volume 90. Springer Science & Business Media*, 2012.

[4] Peter M Gruber. *Convex and discrete geometry, volume 336. Springer Science & Business Media*, 2007.

[5] Jean Gallier and Jean H Gallier. *Curves and surfaces in geometric modeling: theory and algorithms. Morgan Kaufmann*, 2000.

[6] Jean Gallier. *Geometric methods and applications: for computer science and engineering, volume 38. Springer Science & Business Media*, 2011.

[7] Valeriu Soltan. *Lectures on convex sets, volume 986. World Scienti c Hackensack, NJ*, 2015.

[8] Roger Webster. *Convexity. Oxford University Press*, 1994.

[9] Günter M. Ziegler. *Lectures on polytopes, volume 152. Springer Science & Business Media*, 2012.

[10] Branko Grünbaum. *Convex polytopes, volume 221. Springer Science & Business Media*, 2013.

[11] Steven R. Lay. *Convex sets and their applications. Courier Corporation*, 2007.

[12] Levent Kandiller. *Principles of mathematics in operations research, volume 97. Springer Science & Business Media*, 2006.

[13] Nicholas Loehr. *Advanced linear algebra. CRC Press*, 2014.

[14] DIMITRI BERTSEKAS AND ANGELIA NEDIC. *Convex analysis and optimization. Athena Scientific*, 2003.

[15] MONIQUE FLORENZANO AND CUONG LE VAN. *Finite dimensional convexity and optimization, volume 13. Springer Science & Business Media*, 2001.