

**AUTORIZACIÓN DE LOS AUTORES PARA LA CONSULTA, LA
REPRODUCCIÓN PARCIAL O TOTAL, Y PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DEL
TEXTO COMPLETO**

Autor1

Puerto Colombia, **04 de mayo de 2020**

Señores

DEPARTAMENTO DE BIBLIOTECAS

Universidad del Atlántico

Cuidad

Asunto: Autorización Trabajo de Grado

Cordial saludo,

Yo **ANGIE MELISSA ÁLVAREZ MORENO**, identificado(s) con **C.C. No. 1.143.463.602** de **Barranquilla**, autor(a) del trabajo de grado titulado **INGENIERIA DIDACTICA PARA LA ENSEÑANZA DE COORDENADAS POLARES USANDO ORIENTACIÓN DEPORTIVA COMO MEDIO** presentado y aprobado en el año **2020** como requisito para optar al título Profesional de **LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICAS**; autorizo al Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico para que, con fines académicos, la producción académica, literaria, intelectual de la Universidad del Atlántico sea divulgada a nivel nacional e internacional a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios del Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico pueden consultar el contenido de este trabajo de grado en la página Web institucional, en el Repositorio Digital y en las redes de información del país y del exterior, con las cuales tenga convenio la Universidad del Atlántico.
- Permitir consulta, reproducción y citación a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato CD-ROM o digital desde Internet, Intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer.

Esto de conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

Atentamente,



Firma

ANGIE MELISSA ÁLVAREZ MORENO

C.C. No. 1.143.463.602 de Barranquilla



Universidad
del Atlántico

CÓDIGO: FOR-DO-109

VERSIÓN: 0

FECHA: 03/06/2020

**AUTORIZACIÓN DE LOS AUTORES PARA LA CONSULTA, LA
REPRODUCCIÓN PARCIAL O TOTAL, Y PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DEL
TEXTO COMPLETO**

Autor2

Puerto Colombia, **04 de mayo de 2020**

Señores

DEPARTAMENTO DE BIBLIOTECAS

Universidad del Atlántico

Cuidad

Asunto: Autorización Trabajo de Grado

Cordial saludo,

Yo **JOSÉ LUIS FONTALVO RODRIGUEZ**, identificado(s) con **C.C. No. 1.143.166.624** de **Barranquilla**, autor(a) del trabajo de grado titulado **INGENIERIA DIDACTICA PARA LA ENSEÑANZA DE COORDENADAS POLARES USANDO ORIENTACIÓN DEPORTIVA COMO MEDIO** presentado y aprobado en el año 2020 como requisito para optar al título Profesional de **LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICAS**; autorizo al Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico para que, con fines académicos, la producción académica, literaria, intelectual de la Universidad del Atlántico sea divulgada a nivel nacional e internacional a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios del Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico pueden consultar el contenido de este trabajo de grado en la página Web institucional, en el Repositorio Digital y en las redes de información del país y del exterior, con las cuales tenga convenio la Universidad del Atlántico.
- Permitir consulta, reproducción y citación a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato CD-ROM o digital desde Internet, Intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer.

Esto de conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

Atentamente,

José Luis Fontalvo R.

Firma

JOSÉ LUIS FONTALVO RODRIGUEZ

C.C. No. 1.143.166.624 de Barranquilla

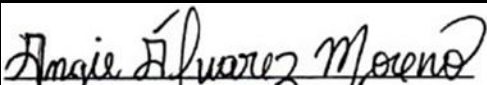
DECLARACIÓN DE AUSENCIA DE PLAGIO EN TRABAJO ACADÉMICO PARA GRADO


Puerto Colombia, **04 de mayo de 2020**

Una vez obtenido el visto bueno del director del trabajo y los evaluadores, presento al **Departamento de Bibliotecas** el resultado académico de mi formación profesional o posgradual. Asimismo, declaro y entiendo lo siguiente:

- El trabajo académico es original y se realizó sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, en consecuencia, la obra es de mi exclusiva autoría y detento la titularidad sobre la misma.
- Asumo total responsabilidad por el contenido del trabajo académico.
- Eximo a la Universidad del Atlántico, quien actúa como un tercero de buena fe, contra cualquier daño o perjuicio originado en la reclamación de los derechos de este documento, por parte de terceros.
- Las fuentes citadas han sido debidamente referenciadas en el mismo.
- El (los) autor (es) declara (n) que conoce (n) lo consignado en el trabajo académico debido a que contribuyeron en su elaboración y aprobaron esta versión adjunta.

Título del trabajo académico:	INGENIERIA DIDACTICA PARA LA ENSEÑANZA DE COORDENADAS POLARES USANDO ORIENTACIÓN DEPORTIVA COMO MEDIO
Programa académico:	Licenciatura En Matemáticas

Firma de Autor 1:							
Nombres y Apellidos:	ANGIE MELISSA ÁLVAREZ MORENO						
Documento de Identificación:	CC	X	CE		PA	Número:	1.143.463.602
Nacionalidad:					Lugar de residencia:		
Dirección de residencia:							
Teléfono:					Celular:		

Firma de Autor 2:							
Nombres y Apellidos:	JOSÉ LUIS FONTALVO RODRIGUEZ						
Documento de Identificación:	CC	X	CE		PA	Número:	1.143.166.624
Nacionalidad:					Lugar de residencia:		
Dirección de residencia:							
Teléfono:					Celular:		



FORMULARIO DESCRIPTIVO DEL TRABAJO DE GRADO

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO DE GRADO	INGENIERIA DIDACTICA PARA LA ENSEÑANZA DE COORDENADAS POLARES USANDO ORIENTACIÓN DEPORTIVA COMO MEDIO
AUTOR(A) (ES)	ANGIE MELISSA ALVAREZ MORENO JOSE LUIS FONTALVO RODRIGUEZ
DIRECTOR (A)	JESUS DAVID BERRIO VALBUENA
CO-DIRECTOR (A)	
JURADOS	YOLIMA AUXILIADORA ROCHA FONTALVO ROBINSON JUNIOR CONDE CARMONA
TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TITULO DE	LICENCIADO (A) EN MATEMÁTICAS
PROGRAMA	LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
PREGRADO / POSTGRADO	PREGRADO
FACULTAD	CIENCIA DE LA EDUCACIÓN
SEDE INSTITUCIONAL	NOMBRE DE LA SEDE.
AÑO DE PRESENTACIÓN DEL TRABAJO DE GRADO	2020
NÚMERO DE PÁGINAS	98
TIPO DE ILUSTRACIONES	DESCRIBIR TIPO DE ILUSTRACIONES: Usamos fotos de los estudiantes realizando la actividad, Gráficas de las coordenadas polares, Esquema de la teoría, Tablas de análisis Y Planos del colegio
MATERIAL ANEXO (VÍDEO, AUDIO, MULTIMEDIA O PRODUCCIÓN ELECTRÓNICA)	
PREMIO O RECONOCIMIENTO	

**INGENIERÍA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE COORDENADAS
POLARES USANDO ORIENTACIÓN DEPORTIVA COMO MEDIO.**

**ANGIE MELISSA ÁLVAREZ MORENO
JOSÉ LUIS FONTALVO RODRÍGUEZ**

**UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO.
FACULTAD CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN.
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.**

2019.

**INGENIERÍA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE COORDENADAS
POLARES USANDO ORIENTACIÓN DEPORTIVA COMO MEDIO.**

**ANGIE MELISSA ÁLVAREZ MORENO
JOSÉ LUIS FONTALVO RODRÍGUEZ**

**TRABAJO PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO EN
MATEMÁTICAS**

**M.Sc. JESUS DAVID BERRIO VALBUENA.
ASESOR**

**UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO.
FACULTAD CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN.
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.**

2019.

Nota de aceptación.

Evaluador 1.

Evaluador 2.

Agradecimientos

Gracias le doy a Dios por nunca abandonarme y cada día llenarme de fuerzas para continuar, permitiendo alcanzar un peldaño muy importante en mi vida como lo es la culminación de esta investigación, agradezco porque cuando sentía que desistía, solo con hablar con él, sentía paz y que las cosas mejorarían. Agradecida infinitamente con mis padres Neydis Moreno y Jesús Álvarez por su apoyo emocional y económico a lo largo de toda mi carrera, además por la confianza que tuvieron en mis capacidades.

Asimismo, agradezco a mi asesor Jesús Berrio por las asesorías y correcciones brindadas para la mejora de este proyecto. Por último, agradezco a todas las personas que directa o indirectamente hicieron aportes significativos en mi vida y que en cierto momento fue de mucha ayuda para seguir adelante tanto en mi vida académica como emocional.

Angie Melissa Álvarez Moreno

Gracias a Dios primordialmente por permitirme cursar este pregrado en forma satisfactoria y por la salud, paciencia y sabiduría para desarrollar este trabajo, luego a mis padres por apoyarme en este proceso y por brindarme todo su apoyo incondicionalmente, a mis familiares, amigos y compañeros que fueron de gran ayuda para esta investigación, a todos ellos gracias por todo. Agradezco por otra parte a nuestro asesor Jesús David Berrio por brindarnos su asesoría y su tiempo para el beneficio de esta investigación.

José Luis Fontalvo Rodríguez

Dedicatoria

Dedico este trabajo de investigación primero a Dios por darme salud y los conocimientos que me permitieron vivir este proceso y permitirme superarlo de manera satisfactoria, a mi madre María Elfa Rodríguez Polo y a mi padre José Rafael Fontalvo Jiménez quienes me dieron vida, educación y apoyo durante todo este tiempo para cumplir esta meta, a mi hermano Luis José Fontalvo Rodríguez quien me acompañó desde el día que nací y con el que he pasado muchas experiencias, a mi tío Roque Rodríguez quien es como mi segundo padre y siempre me ha brindado apoyo y ayuda durante toda mi vida.

José Luis Fontalvo Rodríguez

RESUMEN

El problema de esta investigación está basado en que en la enseñanza de las matemáticas en el ámbito escolar se ha priorizado el estudio de coordenadas cartesianas y su representación en el plano, dejando de lado así el estudio de otros sistemas como el de coordenadas polares, el cual es indispensable entre muchas cosas, para que el estudiante comprenda otros sistemas como el cilíndrico y esférico (Bocco y Villarreal , 1994). Teniendo en cuenta que el Ministerio de Educación Nacional (MEN) propone que el estudio de la geometría puede relacionarse con el deporte, esta investigación toma la orientación deportiva como medio para la realización de esta pues, es un deporte en donde con ayuda de un mapa y una brújula se realiza una carrera, con el objetivo de llegar a una serie marcas, este deporte tiene una gran interdisciplinariedad con diferentes áreas, en el caso de las matemáticas permite estudiar conceptos como ángulos, distancia, sistemas de referencia, segmento, entre otros conceptos (Colinas, 2017). En tal sentido se plantea como objetivo caracterizar la construcción del sistema de coordenadas polares por medio de la ubicación en mapas. La investigación se desarrolla dentro del paradigma socio-crítico y en un enfoque cualitativo, con la Ingeniería Didáctica como metodología de la investigación, donde se siguieron las diferentes fases de la ingeniería didáctica propuesta por (Artigue, Douady, & Moreno, 1995). Los resultados obtenidos muestran que los estudiantes a través de actividades relacionadas a la ubicación en mapas, construyen los elementos básicos del sistema de coordenadas polares.

Palabras claves: Coordenadas polares, Orientación deportiva, ubicación en mapas, ingeniería didáctica, situaciones didácticas.

ABSTRACT Y KEYWORDS

The problem of this research is based on the fact that in the teaching of mathematics in the school environment, the study of Cartesian coordinates and their representation in the plane has been prioritized, thus leaving aside the study of other systems such as the polar coordinate system, which is indispensable among many things, so that the student understands other coordinate systems such as cylindrical and spherical (Bocco & Villarreal, 1994). Taking into account that the Men proposes that the study of geometry can be related to sport, this research takes the sports orientation as a means to carry out this, it is a sport where with the help of a map and a compass a career, with the aim of reaching a series of brands, this sport has a great interdisciplinary with different areas, in the case of mathematics it allows studying concepts such as angles, distance, reference systems, segment, among other concepts (Colinas, 2017). In this sense, the objective is to characterize the construction of the polar coordinate system by means of the location on maps. The research is carried out within the socio-critical paradigm and in a qualitative approach, with Didactic Engineering as a research methodology, where the different phases of the didactic engineering proposed by (Artigue, Douady, & Moreno, 1995) were followed. The results obtained show that students, through activities related to location on maps, build the basic elements of the polar coordinate system.

Keywords: Polar coordinates, Sports orientation, location on maps, didactic engineering, didactic situation

Tabla de Contenidos

INTRODUCCIÓN	1
CAPITULO I PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	4
1.1 Descripción del problema	4
1.2 Formulación del problema	6
1.2.1 Pregunta principal	6
1.2.2 Preguntas secundarias	6
1.3 Justificación	7
1.4 Objetivos.....	9
1.4.1 Objetivo General	9
1.4.2 Objetivos Específicos.....	9
CAPITULO II MARCO REFERENCIAL	10
2.1 Antecedentes	10
2.2 Marco teórico	13
2.2.1 Historia y epistemología de las coordenadas polares.....	13
2.2.2 Paradigma tradicional y el nuevo paradigma de enseñanza.....	15
2.2.3 Teoría de las situaciones didácticas	16
CAPITULO III DISEÑO METODOLÓGICO	20
3.1 Paradigma de la investigación.....	20
3.2 Diseño y Metodología de la investigación	20
3.3 Población y muestra	22

3.4 Técnicas e Instrumentos.....	22
3.4.1 Entrevista	23
3.4.2 Observación:	23
3.4.3 Videgrabación y transcripción:	24
CAPITULO IV ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS.....	25
4.1. Análisis preliminar.....	25
4.1.2. Sistema de coordenadas polares.....	25
4.1.2.1. Gráfica de las coordenadas polares en el plano	26
4.1.2.2 Paso de coordenadas polares a cartesianas y viceversa	27
4.1.3. Análisis didáctico de las dificultades en la enseñanza y aprendizaje de coordenadas polares	29
4.2. Análisis a priori de la actividad del sistema de coordenadas polares	32
4.3. Análisis a posteriori local de la actividad	40
4.3.1. Análisis a posteriori local de la tarea 1	41
4.3.1.1. Análisis a posteriori del Estudiante 1.....	41
4.3.1.2. Análisis a posteriori del estudiante 2	44
4.3.1.3. Análisis a posteriori del estudiante 3	48
4.3.1.4. Análisis a posteriori del estudiante 4	52
4.3.2. Análisis a posteriori local de la tarea 2	55
4.3.2.1. Análisis a posteriori de Estudiante 1 y 2.....	55
4.3.2.2. Análisis a posteriori de Estudiante 3 y 4.....	61
4.3.3. Análisis a posteriori local de la tarea 3	66

4.3.3.1. Análisis a posteriori del Estudiante 1 contra el Estudiante 4.....	67
4.3.3.2. Análisis a posteriori del Estudiante 2 contra el Estudiante 3.....	68
4.4. Análisis a posteriori global	70
CAPITULO V CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	71
5.1. Conclusiones	71
Referentes Bibliográficas.....	74
ANEXOS	77

Lista de Figuras

Figura 1 Teoría de las situaciones didácticas. Tomada de Acosta y Fiallo (2017).	17
Figura 2 Plano sistema de coordenadas polares. Tomada y adaptada Lehmann (1980)...	25
Figura 3. Coordenadas polares. Tomada y adaptada de Lehmann (1980)	26
Figura 4. Transformaciones coordenadas polares a cartesianas y de cartesianas a polares. Tomada y adaptada de Lehmann (1980).....	28
figura 5. Mapa de la primera planta de ENSDB	77
figura 6. Mapa editado de la primera planta de ESNDB	77
figura 7. Mapa serie 1-1	78
figura 8. Mapa serie 1-2	78
figura 9. Mapa serie 1-3	79
figura 10. Mapa serie 1-4	79
figura 11. Mapa serie 2-1	80
figura 12. Mapa serie 2-2	80
figura 13. Mapa serie 2-3	81
figura 14. Mapa serie 2-4	81
figura 15. Evidencia de hacer coincidir el norte del mapa con el de la brújula en la tarea 1	82
figura 16. Evidencia de estimación de ángulos con la brújula en la tarea 1	82
figura 17. Evidencia identificación de punto de partida en la tarea 1	83

figura 18. Evidencia utilización de puntos cardinales en la tarea 1	83
figura 19. Evidencia de comparación de mapas en la tarea 1	84
figura 20. Evidencia de llegada a la marca en la tarea 1	84
figura 21. Evidencia de hacer coincidir las medidas de las brújulas en la tarea 2	85
figura 22. Evidencia de comparación de datos del mapa con la brújula en la tarea 2	85
figura 23. Evidencia partida de batalla naval en la tarea 3	86

Lista de Tablas

Tabla 1. Análisis a priori de la tarea 1	33
Tabla 2. Análisis a priori de la tarea 2	36
Tabla 3. Análisis a priori de la tarea 3	39

INTRODUCCIÓN.

El presente trabajo de investigación titulado *Ingeniería didáctica para la enseñanza de coordenadas polares usando orientación deportiva como medio* busca construir y utilizar un sistema de coordenadas diferente al cartesiano, con base que para ciertas curvas y lugares geométricos es más sencillo usar el sistema de coordenadas polares (Lehmann, 1980).

Esta investigación busca caracterizar la construcción del sistema de coordenadas polares por medio de la ubicación en mapas, para alcanzar este objetivo se realiza un diseño de situaciones didácticas que permita al estudiante construir el sistema de coordenadas polares, una implementación de esas situaciones, luego identificar que estrategias usaron los estudiantes al momento de desarrollar las situaciones didácticas y por último un análisis de las estrategias usadas por los estudiantes.

Dentro del marco teórico se construyó el desarrollo histórico y epistemológico de las coordenadas polares, los hechos históricos- epistemológicos permiten al profesor reflexionar como construye conceptos matemáticos el hombre (Pérez, 2014). En esta parte, se habla de las primeras aproximaciones a las coordenadas, la manera como aparecen las coordenadas polares y las contribuciones de diferentes matemáticos a lo largo de la historia acerca de las coordenadas.

Asimismo, en el marco teórico se hace un distintivo entre el paradigma tradicional y el nuevo paradigma de enseñanza, resaltando que la educación está en constantes cambios;

por tal razón el profesor debe responder a las necesidades de los estudiantes de hoy. Como respuesta a un cambio curricular en el área de matemáticas surge la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD); teoría en la que se basa la presente investigación. Por lo tanto, para la construcción del sistema de coordenadas polares se busca que se dé un aprendizaje por adaptación, producto de la interacción del estudiante con el mapa, la brújula y la actividad de ubicación de marcas en el mapa, tal como lo fundamenta Brousseau en los principios Biológicos y genéticos tomados de la teoría piagetiana (Brousseau, 2007).

Continuando, la investigación se desarrolla dentro del paradigma socio-crítico con un enfoque cualitativo, utilizando como metodología la Ingeniería didáctica para tener control sobre las posibles acciones del estudiante, sobre el medio y las intervenciones del profesor. Dicha metodología cuenta con unos análisis que se realizan de manera sistemática, en el análisis preliminar se realiza un análisis epistemológico y didáctico del sistema de coordenadas polares que permitirán diseñar la actividad con sus respectivas tareas. Luego, se da paso al análisis a priori donde se miran las posibles acciones y estrategias usadas por el estudiante y reacciones del medio.

Por último, un análisis a posteriori donde se analiza las acciones realizadas por el estudiante y las reacciones del medio, para luego hacer una confrontación entre estos análisis y evidenciar si el estudiante realizó y uso las estrategias que se esperaban. Todos estos análisis permitieron evidenciar las estrategias que utilizaron los estudiantes para encontrar las marcas en los mapas, construyendo el sistema de coordenadas polares y

ubicándose en un plano polar. Posteriormente, se realizó un juego para verificar la construcción del sistema polar.

CAPITULO I PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Descripción del problema

En la enseñanza de las matemáticas se ha priorizado el estudio de coordenadas cartesianas y su representación en el plano, las cuales son indispensables entre muchas cosas, para que el estudiante comprenda otros sistemas de coordenadas (Lehmann, 1980; Vicent, Granado y Pariche, 2019). Puede creerse que con el sistema de coordenadas cartesiana es suficiente, pero para ciertas curvas y tipos de lugares geométricos, las coordenadas polares presentan ventaja sobre las cartesianas; incluso un mismo fenómeno puede representarse de manera diversa y es bueno tener la posibilidad de elegir la forma más conveniente de representación (Lehmann, 1980; Bocco y Villarreal , 1994; Semensato, Silva, Lopes y Castilho, 2019).

Con respecto al estudio de las coordenadas polares, Vicent (2017) afirma que es un tema poco estudiado, pues los estudiantes no tienen las suficientes bases o no reconocen este sistema de coordenadas, en consecuencia, quedan con vacíos de contenidos. Por ello, el estudiante se limita a una manera específica de representación y se le dificulta la modelación gráfica de ciertas situaciones, generándole inconvenientes al momento del uso de coordenadas polares, representación de puntos polares, puntos de intersección, representaciones e interpretación de gráficas (Advíncula, 2013; Pérez, 2014; Espinoza, 2017).

Asimismo, estas dificultades las llevan al ámbito universitario, mostrando deficiencia en la comprensión de los conceptos de coordenadas polares (Rincón y Vanegas, 2013).

Por otra parte, Gómez (2018) afirma que el estudio de los sistemas de coordenadas como el polar, cilíndrico y esférico son fundamentales en los contenidos curriculares de matemáticas. Además, en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas de décimo a undécimo en el pensamiento espacial y sistemas geométricos el MEN (2006) menciona que el estudiante debe localizar objetos geométricos en distintos sistemas de representación incluyendo el polar.

Del mismo modo, el MEN (2006) propone relacionar el estudio de la geometría con diferentes áreas como el arte, la tecnología, el deporte, la danza y muchas más situaciones enriquecedoras y motivadoras para el pensamiento espacial. No obstante, en el plan de clases de secundaria no se trabaja el tema de las coordenadas polares (Algarín, Salcedo y Vides, 2007; Pérez, 2014). Debido a esto, los estudiantes pueden presentar dificultades al resolver problemas geométricos que involucren álgebra mediante el uso de coordenadas, pues Soto (2013), afirma que “la geometría analítica es la parte de la matemática que resuelve problemas geométricos bajo el concurso del álgebra mediante el uso de sistema de coordenadas.” (p.19)

Por último, la temática de coordenadas polares a pesar de estar dentro del currículo establecido por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) no se trabaja en la Institución Educativa donde se realiza esta investigación por consideración del comité de matemáticas, para ellos no es de trascendencia, por esto priorizan otros temas en lugar de las coordenadas polares.

1.2 Formulación del problema

Con base en estas ideas que se han ido desarrollando surge la siguiente pregunta

1.2.1 Pregunta principal

- ¿Cómo a través de la ubicación en mapas los estudiantes construyen el sistema de coordenadas polares?

Para responder esta pregunta se ha planteado las siguientes preguntas secundarias

1.2.2 Preguntas secundarias

- ¿Qué situaciones didácticas diseñar e implementar para permitir a los estudiantes la construcción del sistema de coordenadas polares?
- ¿Cómo identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes al momento de desarrollar las situaciones didácticas para la construcción del sistema de coordenadas polares?
- ¿Cómo caracterizar las estrategias utilizadas por los estudiantes en las situaciones didácticas para la construcción del sistema de coordenadas polares?

1.3 Justificación

Priorizar el uso del sistema de coordenadas cartesianas ha generado que al momento de introducir un nuevo sistema, los estudiantes presenten dificultades significativas en la interpretación de problemas con coordenadas polares (Semensato, Silva, Lopes y Castilho, 2019). Por otro lado, las coordenadas polares se ven reflejadas en el tema de trigonometría, es decir los estudiantes tienen un acercamiento a ellas pero a través de las coordenadas cartesianas; por tal razón el docente al tratar de introducir este nuevo sistema de coordenadas nota que los estudiantes lo desconocen por completo (Vicent, Granado y Pariche, 2019).

Es relevante investigar acerca del estudio de coordenadas polares porque permite que los estudiantes escojan la manera más conveniente de resolver un problema, sabiendo que para ciertas curvas es más óptimo usar este tipo de coordenadas. Según el MEN (2006) el estudio de la geometría se puede relacionar con los deportes, por eso esta investigación busca contribuir por medio de la orientación deportiva que los estudiantes construyan el sistema de coordenadas polares y que se ubiquen teniendo en cuenta un nuevo sistema de referencia. El sistema de coordenadas polares permite que los estudiantes a través de las matemáticas entiendan su entorno (Chau y Sánchez, 2010).

A partir de situaciones didácticas se busca que los estudiantes de 11° tengan alternativas para representar el espacio y construir nuevos sistemas de coordenadas como el polar. Según Advíncula (2013); Vicent, Granado y Pariche (2019) el docente debe implementar estrategias didácticas que permitan que los estudiantes contruyan ideas y actividades que

evidencie la importancia de la geometría para representar e interpretar el espacio, por tal motivo la utilización de ubicación en mapas.

En esta investigación se ha decidido utilizar el deporte como forma de mostrar a los estudiantes como las coordenadas polares están relacionadas con su entorno. La orientación deportiva por su naturaleza misma se convirtió en el medio perfecto, debido que en este deporte están intrínsecos los conceptos matemáticos necesarios para la construcción del sistema de coordenadas polares.

Por otra parte, representar la naturaleza matemáticamente es posible, con ayuda de las coordenadas polares se adopta la forma de flores, mariposas, caracoles, entre otros; utilizando las coordenadas cilíndricas se representan tallos, troncos, ramas y las esféricas permiten describir frutas y semillas. De lo anterior, podemos resaltar la importancia de cada sistema de coordenadas para representar la naturaleza. Las coordenadas polares son la base para el estudio de otros sistemas de coordenadas como las cilíndricas y esféricas (Chau y Sánchez, 2010). Al realizar investigaciones acerca de coordenadas polares se da inicio a ideas para la realización de investigaciones con otro tipo de coordenadas.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo General

- Caracterizar la construcción del sistema de coordenadas polares construido por los estudiantes por medio de la ubicación en mapas.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Diseñar e implementar situaciones didácticas que permitan a los estudiantes la construcción del sistema de coordenadas polares por medio de la ubicación en mapas.
- Identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes al momento de desarrollar las situaciones didácticas para la construcción de sistema de coordenadas polares por medio de la ubicación en mapas.
- Caracterizar las estrategias utilizadas por los estudiantes en las situaciones didácticas para la construcción del sistema de coordenadas polares.

CAPITULO II MARCO REFERENCIAL

2.1 Antecedentes

En la revisión de los antecedentes que sirvan como fundamentos a esta investigación con el interés de que alcance los objetivos anteriormente planteados, se encontró un artículo de Semensato, Silva, Lopes y Castilho (2019) titulado *Usando el software Graph para enseñanza de coordenadas polares* enuncian que el estudiante siendo parte activa del proceso enseñanza- aprendizaje despertará y mostrará interés en aprender, además que los estudiantes tienen dificultades significativas con las coordenadas polares porque están familiarizados con las cartesianas, en este sentido usaron el software Graph permitiéndoles la participación activa de los estudiantes y la apropiación de las coordenadas polares.

Por su parte, Advíncula (2013) en su trabajo *Las coordenadas polares en la naturaleza usando Winplot* propone actividades por medio del software Winplot que permiten a los estudiantes generar curiosidad y aprender sobre estas coordenadas, a través de la exploración y el descubrimiento de la naturaleza, además les permite reconocer la importancia de la matemática para representar e interpretar el entorno, motivándolos al estudio de las coordenadas polares.

Continuando, en el trabajo titulado *Estudio del cálculo integral en coordenadas* realizado por Vicent (2017), hace referencia a como se ha dejado a parte la enseñanza de las coordenadas polares por darle prioridad a las coordenadas cartesianas trayendo como consecuencia vacío de contenidos, para esto realiza propuesta para la enseñanza y

aprendizaje de la integral definida en coordenadas polares sustentada en las TIC (Tecnología de la información y las comunicaciones), con el objetivo de revertir el olvido que han tenido el sistema de coordenadas polares en esta asignatura.

Por otra parte, Colinas (2017) realizó un trabajo titulado *Enseñanza de la orientación deportiva en el ámbito escolar*, aquí muestra la interdisciplinariedad y transversalidad de la orientación deportiva con diferentes áreas del conocimiento, lo que ha permitido su gran aceptación en el currículum de España. Aunque la orientación cumple con una gran cantidad de contenidos pertinentes a la educación física, también se relacionan con las Matemáticas, las Ciencias de la Naturaleza, historia, geografía, biología, entre otras, asimismo el MEN (2006) afirma que el estudio de la geometría se puede relacionar con la educación física y los deportes. Éste trabajo aporta significativamente a la investigación en la manera de cómo implementar la orientación deportiva en la escuela.

Entrando en el ámbito nacional, Rincón y Vanegas (2013) en su trabajo titulado Copo: Explorar el mundo de las coordenadas polares resaltan la importancia de utilizar una nueva estrategia para la comprensión de los conceptos de las coordenadas polares, el diseño e implementación del software Copo ayudó a mejorar las deficiencias de los estudiantes universitarios en el aprendizaje de los conceptos de coordenadas polares.

Siguiendo en este ámbito, se trabajó una tesis titulada *Estrategia didáctica para introducir las coordenadas polares y sus aplicaciones en la representación y análisis de la parábola y la elipse* realizada por Pérez (2014) en la cual presenta una propuesta

didáctica para introducir los conceptos básicos de coordenadas polares y sus aplicaciones en los lugares geométricos antes mencionados, a partir de los elementos fundamentales de la trigonometría elemental.

Este trabajo aporta a esta investigación actividades desarrolladas a través de situaciones significativas que brindan a los estudiantes la posibilidad de comprender los elementos del plano polar. Además, evidencia como este tipo de actividades puede servir para que los docentes se motiven y puedan introducir sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas en la educación media, también la importancia de los hechos históricos- epistemológicos para la construcción del concepto de coordenadas polares, permitiéndole al profesor saber las dificultades que se presentan en este tema y poder fortalecerlas.

Asimismo, en el trabajo de Gómez (2018) titulado Enseñanza- aprendizaje de los sistemas de coordenadas mediante formulación de problemas en estudiantes de grado noveno, se utilizó la lúdica y la dinámica para relacionar los conceptos de ángulos y distancia de círculos del sistema polar, antes de esto se trabajó la comprensión de las coordenadas cartesianas para tomarlas como referencia para el estudio de las polares, las actividades propuestas en esta investigación también ayudaron a la participación activa de los estudiantes, permitiendo que se diera el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En la parte local se realizó un trabajo por Algarín, Salcedo y Vides (2007) titulado *Introducción de las coordenadas polares como medio de ayuda al desarrollo del pensamiento geométrico y espacial en noveno grado en básica secundaria*. El aporte de

este trabajo es mostrar como una propuesta didáctica para introducir las coordenadas polares en busca del desarrollo del pensamiento geométrico promueve la exploración del espacio, la formulación y discusión de conjeturas, los cuales son importantes para el estudio de la geometría.

Para alcanzar los objetivos de esta investigación se tomó como antecedente también el trabajo realizado por Ochoa y Osorio (2017) titulado *Ingeniería didáctica para el estudio del acercamiento de estudiantes con capacidades excepcionales a las soluciones aproximadas de las ecuaciones no lineales*, aportando la metodología para el desarrollo de esta investigación, teniendo en cuenta las fases de la ingeniería didáctica y técnicas para el análisis e interpretación de los datos.

2.2 Marco teórico

2.2.1 Historia y epistemología de las coordenadas polares

Apolonio de Perge (262 a.C- 190 a.C) en su libro Las Cónicas mostró que de un cono pueden obtenerse tres tipos de secciones y se dedicó a estudiar las propiedades fundamentales de las cónicas incluyendo tangentes y diámetros conjugados. En este estudio, él considera ciertas líneas de referencia “diámetros conjugados o diámetros tangentes” las cuales se refieren a un sistema de coordenadas oblicuas (González, 2003).

Asimismo, Hiparco (190 a.C- 120 a.C) y Ptolomeo (100 d.C- 170 d.C) estudiaron la localización de puntos sobre la superficie de la Tierra indicando su longitud y latitud. Con esto se generó un buen sistema de ubicación y se desarrolló lo que se conoce como

cartografía (Ortiz, 2005). La idea del sistema de coordenadas cartesianas surge de la observación de una mosca que caminaba en el techo cerca de una esquina de un cuarto, Descartes (1596-1650) observó la trayectoria de la mosca y a partir de esto, ubicó un sistema de coordenadas plano, cuyo punto de origen era una esquina y los ejes coordenados las paredes (Bocco & Villarreal , 1994).

Por su parte, Fermat (1601-1665) con ayuda de los aportes de Descartes expresa la necesidad de utilizar el sistema de coordenadas cartesianas para disminuir las operaciones y resultados al trabajar en su geometría algebraica. Él complementó el trabajo de Descartes de organizar la idea de geometría analítica y el desarrollo del plano de coordenadas (Pinto, 2016).

Una de las primeras aproximaciones de coordenadas polares la desarrolla Bonaventura Cavaliere (1598-1647) relacionando la parábola de Apolonio con la espiral de Arquímedes. Por otro lado, Newton (1642-1727) en su obra *The Method of Fluxions*, buscando dar solución a problemas de curvas y tangentes, presenta en su obra antes mencionada ocho sistemas de coordenadas, la cual la séptima corresponde a lo hoy conocido como coordenadas polares. El séptimo sistema de coordenadas de Newton da paso a la determinación de subtangentes de las espirales. Asimismo, para la representación de un punto del plano, el sistema de coordenadas polares utiliza la distancia y un ángulo (Pérez, 2014).

Luego, Jacob Hermann (1678- 1733) considera tres ejes de referencia, observa que, de un punto cualquiera de cada uno de los ejes, dos de sus coordenadas son nulas. En la obra

de Gourief publicada en 1794 se evidencia el estudio de las curvas dadas por ecuaciones en coordenadas polares, utiliza z para la representación del radio vector y ω para el ángulo vectorial, como se ve en estas ecuaciones $x = z \cos\omega$, $y = z \sen \omega$ (Anfossi & Flores, 1978).

2.2.2 Paradigma tradicional y el nuevo paradigma de enseñanza

La escuela activa se centra en las necesidades de los estudiantes, en el proceso de enseñanza- aprendizaje el profesor es un acompañante en la construcción del conocimiento y busca la motivación de sus estudiantes; por el contrario, en la escuela tradicional se centra en el aprendizaje memorístico, donde el estudiante solo es receptor de los conocimientos impartidos por el profesor (Brousseau, 2007).

La educación está en constante transformación, los autores de la Escuela Nueva manifiestan los fracasos de la Escuela tradicional (García, 1991). La innovación en la escuela hace referencia a modificar las viejas prácticas buscando un cambio en el acto educativo, el nuevo paradigma de enseñanza busca que el estudiante se respete como persona capaz de tomar sus propias decisiones y desempeñarse; por otro lado, que el profesor se encuentre actualizado y se base en enseñar a pensar (González, 2017).

Siendo específicos en el área de matemáticas, debido a la necesidad de preparar a los futuros profesores de esta disciplina y el cambio curricular, emerge la didáctica de las matemáticas. Surge entonces el nuevo paradigma de enseñanza que desde TSD busca dar

respuesta a las necesidades de formación, en particular la enseñanza de las ciencias (Radford, 2011).

2.2.3 Teoría de las situaciones didácticas

Brousseau (2007), plantea que el sujeto construye conocimiento debido a la adaptación a un medio con el que interactúa. El aprendizaje por adaptación proviene del campo de la biología relacionado con la adaptación de los seres vivos al medio que los rodea.

La Teoría de las Situaciones Didácticas (TDS), está sustentada en la concepción constructivista, por tal motivo Brousseau (2007), afirma que el estudiante aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios. Este saber, resultado de la adaptación del estudiante, se manifiesta por nuevas respuestas que son la prueba del aprendizaje.

En la situación didáctica hace parte todo el entorno del estudiante incluyendo el profesor y el sistema educativo; aquí se considera un dispositivo diseñado con el fin de enseñar un conocimiento, el cual puede producir un efecto de enseñanza, si su funcionamiento y desarrollo es efectivo. Una interacción se vuelve didáctica si uno de los sujetos tiene intención de modificar el sistema de conocimientos del otro.

Al presentar una situación se establece entre el profesor y los estudiantes el Contrato didáctico que tiene en cuenta la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Brousseau lo define como un conjunto de reglas que determinan lo que cada participante de la relación didáctica deberá hacer y, lo que debe esperar el otro; este contrato según Guy son

comportamientos que el estudiante espera del profesor y que el profesor espera del estudiante (Joya , 2016).

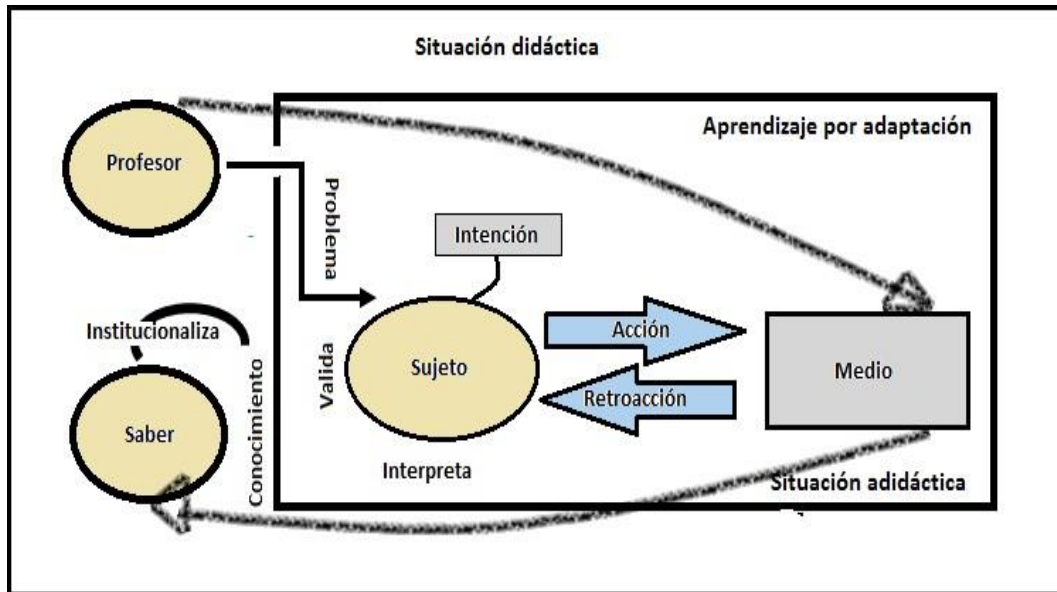


Figura 1 Teoría de las situaciones didácticas. Tomada de Acosta y Fiallo (2017).

En TSD el profesor debe transmitir el saber de manera indirecta y crear condiciones que permita el aprendizaje por adaptación. En el aprendizaje por adaptación el sujeto debe tener una intención, para cumplirla realiza una acción sobre el medio y este responde a dicha acción, esta reacción del medio se llama retroacción; luego el sujeto la descifra, comprende y adquiere un significado para él, este proceso se llama interpretación. Finalmente valida su acción, esta validación puede ser positiva, cuando el sujeto logra alcanzar su intención

en este caso la acción se refuerza, o negativa en este caso la acción es abandonada o modificada porque el sujeto no logro su intención.

El aprendizaje por adaptación da lugar a una situación a didáctica, puesto que en la relación entre el sujeto y el medio no hay intención de enseñar. Al culminar una situación a didáctica, el sujeto produce conocimiento. Cabe aclarar que el profesor entrega un problema y un medio al estudiante, previendo las posibles acciones y retroacciones de los participantes de la situación a didáctica, esto para garantizar el aprendizaje por adaptación, este proceso recibe el nombre de devolución.

Luego, el profesor realiza un proceso llamando institucionalización; consiste en utilizar el conocimiento personal producido por el sujeto en la situación a didáctica para transmitir el saber. Además, el profesor en el proceso de devolución prevía sus posibles comportamientos mientras la situación a didáctica para no impedir el aprendizaje por adaptación. Al final de todo lo anterior se genera la situación didáctica.

2.2.3 Orientación deportiva

En el año 1888, el capitán del ejército sueco Enest Killander propuso un entrenamiento para sus soldados utilizando mapas y la brújula para desplazarse por el bosque, esto se conoce como el primer indicio de orientación deportiva; este deporte con el paso de los años ha ido evolucionando en cuanto al trazado de mapas y uso de herramientas (Colinas, 2017).

La orientación deportiva es un deporte que consiste en realizar una carrera en un terreno desconocido que tiene un recorrido marcado por una serie de controles, los cuales el

corredor debe descubrir utilizando únicamente un mapa y una brújula; el participante es libre de escoger el orden para llegar a cada control, el objetivo de estas carreras es realizar el recorrido de forma completa en el menor tiempo posible (García, 2017).

Este deporte tiene una interdisciplinariedad con geografía e historia, biología, arte, educación física y matemáticas. La orientación deportiva por su naturaleza recreativa y naturalista es una forma presentar a los estudiantes formas de interpretar el espacio matemáticamente, estudiando diferentes conceptos geométricos como medición de distancias y ángulos además de transformaciones de unidades. El hecho de desarrollarse en un medio natural permite a los estudiantes identificar la importancia de las matemáticas fuera del aula y sus diferentes aplicaciones para la resolución de problema.

CAPITULO III DISEÑO METODOLÓGICO

3.1 Paradigma de la investigación

Este trabajo de investigación se desarrolla dentro del paradigma socio-crítico teniendo en cuenta que este paradigma concibe la teoría crítica como una ciencia social que no es puramente empírica, ni solamente interpretativa, este paradigma contribuye desde el estudio de comunidades buscando dar respuesta a problemas presentes en ellas, incluyendo la participación de los miembros (Alvarado y García , 2008). Por tal motivo, esta investigación con este paradigma, busca caracterizar la construcción hecha por los estudiantes del sistema de coordenadas polares con ayuda de la ubicación en mapas.

El enfoque que asume este trabajo de investigación es cualitativo, ya que su finalidad es entender cómo perciben los fenómenos en su entorno los participantes (Hernández, Fernández, y Baptista, 2014). En el caso de esta investigación entender las perspectivas y estrategias de los estudiantes al momento de construir el sistema de coordenadas polares usando la ubicación en mapas.

3.2 Diseño y Metodología de la investigación

El diseño de esta investigación está apoyado por la metodología de Ingeniería Didáctica, en la educación matemática ella funciona como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje y como metodología de investigación (Artigue, Douady, y Moreno, 1995).

Una de las características de esta metodología es la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori, razón que permite prever posibles acciones del estudiantes, posibles respuesta del medio, además las intervenciones del profesor y luego mirar las acciones realizadas por los participantes de la situación y por el medio. Con este marco metodológico se busca la planificación sistematizada y secuencial de las clases y poder llevar a cabo nuestro objetivo. A continuación, en esta investigación se siguen las cuatro fases del proceso experimental de la ingeniería didáctica (Ochoa y Osorio, 2017).

Fase 1. Análisis preliminar: En esta fase se desarrolla el análisis epistemológico haciendo una descripción de los conceptos involucrados del objeto matemático a trabajar en esta investigación como lo son las coordenadas polares y sus elementos, las gráficas polares y el cambio de coordenadas polares a cartesianas. Además del análisis didáctico de las dificultades en la enseñanza-aprendizaje las coordenadas polares y la realización de las actividades teniendo en cuenta los objetivos de la investigación.

Fase 2. Análisis a priori de las situaciones didácticas: Partiendo de las definiciones de coordenada polar y sus elementos (eje polar, ángulo polar y radio vector) se realiza un análisis de las posibles acciones, estrategias, respuestas de los estudiantes al momento de buscar las marcas en el mapa y las respuestas que les brinda el medio.

Fase 3. Experimentación: En esta fase se pone en práctica las actividades de la fase 1 respetando el análisis a priori correspondiente a la fase 2, aquí se realizara una observacion detallada del desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes, teniendo en cuenta cada respuesta o acciones que estos realicen todo esto para dar paso a la fase 4.

Fase 4. Análisis a posteriori y evaluación: En esta fase se realiza un análisis de las respuestas, acciones y estrategias desarrolladas por los estudiantes en la realización de la actividad, el análisis esta compuesto por un análisis por estudiante en cada tarea y un análisis global de cada tarea, para luego hacer la confrontación con los análisis realizados en la fase 2.

3.3 Población y muestra

Población

El objeto de estudio de esta investigación está basado en estudiantes once grado B de la Institución educativa, el cual cuenta con 36 estudiantes.

Muestra

La muestra es dirigida o no probabilística, la cual es establecida (Hernández, Fernández, & Baptista, 2014), donde afirma que el investigador puede seleccionarla de acuerdo a las necesidades de la investigación y del investigador. Asimismo (Greswell, 2014), lo considera como un muestreo por conveniencia. La muestra fue de 4 estudiantes de once B de la Institución Educativa.

3.4 Técnicas e Instrumentos

En esta investigación se aplicaron las siguientes técnicas e instrumentos para la recolección de datos e información

3.4.1 Entrevista:

La entrevista se lleva a cabo por medio de preguntas orales diseñadas para que el investigador recoja información, esta se realiza a personas involucradas en la investigación. En la entrevista es indispensable la presencia de una persona que haga las preguntas a diferencia de un cuestionario, con el fin de captar opiniones, forma de pensar de los entrevistados (Muñoz, 2011).

La entrevista que se aplica a los estudiantes está compuesta por un banco de preguntas que surgen de las previsiones que se desarrollan en el análisis a priori, y tienen como objetivo recolectar la información producida y orientar a los estudiantes a relacionar sus acciones con contenidos matemáticos, especialmente contenidos geométricos.

3.4.2 Observación:

Consiste en la percepción de un fenómeno que produzca la sociedad en función de los objetivos establecidos en la investigación (Arias, 2012). Las observaciones realizadas en esta investigación se recolectan con ayuda de videgrabaciones para luego ser transcritas y estudiadas.

Se observa las respuestas, acciones, gestos y movimientos realizados con su cuerpo mientras desarrollan la actividad y de este modo recoger la información necesaria para realizar el análisis a posteriori que requiere la investigación, esta información se recolecta por medio de videgrabaciones que posteriormente serán transcritos y analizados.

3.4.3 Videograbación y transcripción:

Con una cámara por medio de un vídeo se evidencia las acciones del grupo investigado, lo dice, muestra cuando realiza las tareas de esta investigación. Luego, se transcribe de manera ordenada, especificando lo observado en los vídeos las acciones de los estudiantes.

CAPITULO IV ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

4.1. Análisis preliminar

4.1.2. Sistema de coordenadas polares

En el sistema polar, un punto se localiza con su posición relativa con respecto al eje polar que es una recta fija y un punto fijo llamado polo. Observa la figura 1, P es un punto cualquiera del plano, se traza el segmento OP y su longitud nómbrela r , la línea recta que pasa por el polo y es perpendicular al eje polar se llama el eje a 90° . El ángulo AOP llámele θ , donde r es el radio vector y θ el ángulo polar; estas dos cantidades se llaman coordenadas polares. De modo que las coordenadas de P se escriben (r, θ) .

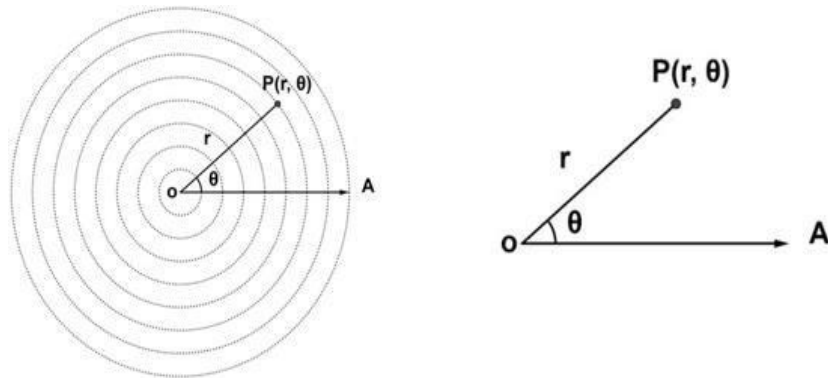


Figura 2 Plano sistema de coordenadas polares. Tomada y adaptada Lehmann (1980)

El ángulo polar θ se mide teniendo en cuenta el eje polar como lado inicial y el radio vector como lado final del ángulo, además el ángulo puede expresarse en grados o radianes. Si un punto tiene un radio vector negativo, se mide el ángulo polar de manera habitual y

luego se toma el radio vector en la prolongación del lado final. De esta manera, un punto P' de coordenadas $(-r, \theta)$ se ubica como se presenta en la figura 3.

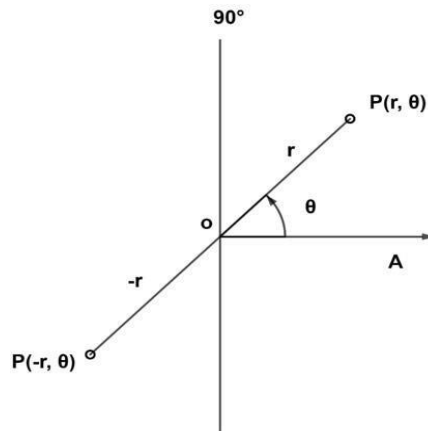


Figura 3. Coordenadas polares. Tomada y adaptada de Lehmann (1980)

4.1.2.1. Gráfica de las coordenadas polares en el plano

Para graficar una ecuación polar, se tiene en cuenta los siguientes pasos:

- 1) Determinar las intersecciones con el eje polar y con el eje de 90° . Las intersecciones con el eje polar, si hay, pueden obtenerse resolviendo la ecuación polar dada para r , cuando a θ se le asignan valores $0, \pm\pi, \pm 2\pi$. En caso similar ocurre con la intersección con el eje de 90° , dándole valores a θ los valores de $\frac{n\pi}{2}$, siendo n un número impar cualquiera.
- 2) Identificar la simetría de la curva con respecto al eje polar, al polo y al eje de 90°
 - Simetría con respecto al eje polar, se puede sustituir θ por $-\theta$, o se sustituye θ por $\pi - \theta$ y r por $-r$.

- Simetría con respecto al eje de 90° , se puede sustituir θ por $\pi - \theta$ o se sustituye θ por $-\theta$ y r por $-r$.
 - Simetría con respecto al polo, se puede sustituir θ por $\pi + \theta$, o se sustituye r por $-r$.
- 3) Determinar la extensión del lugar geométrico, para esto, despejamos r en la función de θ , de modo que tenemos $r = f(\theta)$. Si r es finito para todos los valores de θ , se trata de una curva cerrada. Por el contrario, si r es infinita para ciertos valores de θ entonces no hay curva.
 - 4) Calcular las coordenadas de un número suficientes de puntos para obtener una gráfica adecuada, para la mayoría de nuestro fines, será suficiente tomar valores de θ a intervalos de 30°
 - 5) Trazar la gráfica
 - 6) Transformar la ecuación polar a cartesiana, esto se hace para comprobar la gráfica

4.1.2.2 Paso de coordenadas polares a cartesianas y viceversa

Para efectuar la transformación de un lugar geométrico determinado debemos conocer la familiaridad entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares de cualquier punto del lugar geométrico.

Sea P un punto cualquiera que tenga por coordenadas cartesianas (x, y) y coordenadas polares (r, θ) , se deducen las siguientes relaciones de la figura

$$x = r \cos \theta, y = r \operatorname{sen} \theta, x^2 + y^2 = r^2, \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, r = \pm \sqrt{x^2 + y^2},$$

$\text{sen } \theta = \pm \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\text{cos } \theta = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Si se realiza el paso de una ecuación cartesiana a su forma polar, se sustituye x y y por los valores dados por estas ecuaciones $x = r \text{ cos } \theta$, $y = r \text{ sen } \theta$ en la ecuación cartesiana, se obtiene la ecuación polar aunque no siempre en su forma más simple.

Ahora, si se realiza el paso de una ecuación polar a su forma cartesiana se puede usar las relaciones $x = r \text{ cos } \theta$, $y = r \text{ sen } \theta$, $x^2 + y^2 = r^2$, $\theta = \text{arctg } \frac{y}{x}$, $r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ que expresan θ y r , respectivamente en función de x y y . Por otra parte, si la ecuación polar contiene funciones trigonométricas de θ , se puede expresar primero tales funciones en función de $\text{sen } \theta$ y $\text{cos } \theta$; luego usar las fórmulas $\text{sen } \theta = \pm \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$\text{cos } \theta = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

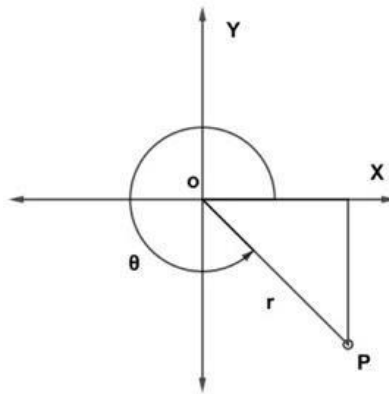


Figura 4. Transformaciones coordenadas polares a cartesianas y de cartesianas a polares. Tomada y adaptada de Lehmann (1980)

4.1.3. Análisis didáctico de las dificultades en la enseñanza y aprendizaje de coordenadas polares

La representación gráfica de ecuaciones hace parte del currículo de la educación básica, media y media superior, sin embargo, los estudiantes poseen problemas a la hora de ubicar puntos en el plano cartesiano e interpretar gráficas en los mismos, incluso se les dificulta la buena realización del plano por no tener en cuenta las escalas. (Acuña, 2001; Sánchez, 2017). Al trasladar el conocimiento aprendido de coordenadas cartesianas a polares, los docentes se dan cuenta que la mayoría de los estudiantes no reconocen las coordenadas polares (Vicent, 2017).

Las actividades presentadas por Chau y Sánchez (2010), se basan en explicar al estudiante como graficar las coordenadas polares por medio de algún software y además mostrarle que es posible representar matemáticamente la naturaleza, como la forma de las flores, caracoles, mariposas, entre otras., de tal modo, Advíncula (2013) incluye en sus actividades situaciones que despierten la curiosidad del estudiante y usa el software Winplot para facilitar el aprendizaje de coordenadas polares.

Por ello, Vicent, Granado y Pariche (2019) crean una propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las coordenadas polares con GeoGebra, donde manejan tres fases, la fase preparativa donde reconocen comandos del software y motivan al estudio de coordenadas polares, la fase de desarrollo donde se introduce conceptos, propiedades, definiciones mediados con el software y luego se pasa al trazado de curvas en coordenadas polares, por último la fase de cierre se reta al estudiante con ejercicios y problemas de gráficos polares

y con ayuda de GeoGebra construyan y comparen gráficas de funciones en coordenadas cartesianas y polares.

Igualmente, Semensato, Silva, Lopes y Castilho (2019) identificaron dificultades al introducir el sistema de coordenadas polares en cuanto a la interpretación de funciones y problemas polares, ellos las abordaron introduciendo contenido de coordenadas polares en el aula con pizarra, tiza y luego con ayuda del software educativo Graph se les pidió a los estudiantes realizar las actividades en clase para comparar los resultados obtenidos, esto permitió que los investigadores evidenciaran los errores cometidos algebraicamente por ellos y a su vez Graph les facilitó la visualización gráfica.

Por otro lado, con el uso de un tablero de tiro al blanco y unos dardos el estudiante mide la distancia del radio vector desde el centro del tablero (polo) hasta el dardo, mide el ángulo respecto al centro y semirrecta fija (eje polar), todo esto para conocer la ubicación del dardo lanzado; luego el estudiante ubicará los datos recolectados en un papel polar (Pérez, 2014). En esta misma investigación el estudiante obtiene curvas a partir de tejidos, esto lo hacen construyendo una circunferencia sobre una tabla de madera, la circunferencia se divide en 72 partes iguales en cada marca se coloca una puntilla.

En los lineamientos curriculares de matemáticas del MEN, se propone el restablecimiento del estudio de los sistemas geométricos como una herramienta de exploración y representación del espacio (MEN, 1998). Los sistemas geométricos se obtienen a través de un proceso cognitivo de interacciones que va desde un espacio

intuitivo o sensorio-motor que es la capacidad de interactuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones y realizando desplazamientos a un espacio conceptual o abstracto que es la capacidad de representar mentalmente el espacio.

Con el fin de construir estos sistemas el MEN (2006) busca que se relacione el estudio de la geometría con el arte y la decoración; con el diseño y construcción de objetos artesanales y tecnológicos; con la educación física, los deportes y la danza, entre otras muchas posibles situaciones muy enriquecedoras y motivadoras para el desarrollo del pensamiento espacial.

Además de tres momentos para favorecer el desarrollo del pensamiento espacial. Las mediciones, los resultados numéricos de medida, no son importante para el primer momento del desarrollo espacial, acá las relaciones entre los objetos involucrados en el espacio, la del individuo con respecto a estos objetos y al espacio, la ubicación son lo realmente importante. Para un segundo momento, la metrización es necesaria, pues las propiedades de los objetos no se deben sólo a la relación que tiene con los demás, sino también a sus medidas y a las relaciones entre ellas. En un tercer y último momento se formaliza el conocimiento de la geometría.

En tal sentido, en los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), en las evidencias de aprendizaje número seis del grado 11, plantea que el estudiante debe reconocer y utilizar distintos sistemas de coordenadas para modelar y además explorar y representar el entorno mediante diversos sistemas de coordenadas (MEN, 2016).

4.2. Análisis a priori de la actividad del sistema de coordenadas polares

Partiendo de las definiciones desarrolladas en el análisis preliminar, se diseñó la siguiente Situación didáctica, la cual está conformada por una actividad, para que los estudiantes construyan el conocimiento relacionado a los conceptos mencionados, mediante la realización de las tareas que se le presentara utilizando como medio didáctico la orientación deportiva.

Actividad de construcción del sistema de coordenadas polares.

En esta actividad se le pedirá al estudiante realizar las tareas, que se describirán más adelante, para alcanzar los objetivos establecidos; además estas deberán realizarse con ayuda de un mapa y una brújula.

Objetivo: Construir un sistema de coordenadas polares a partir de la ubicación en mapas.

Descripción de la actividad: Esta actividad está conformada por dos tareas las cuales se repetirán con una serie de cuatro mapas, en las cuales deberán realizar un objetivo en común, llegar a las marcas encontradas en los diferentes mapas. Además de una tarea de evaluación para verificar que los estudiantes lograron la apropiación de los conceptos necesarios para construcción del sistema de coordenadas polares.

Tarea 1

Dados una brújula y un mapa con la ubicación actual del estudiante y el norte, se le pedirá al estudiante que se desplace hasta la marca que se encuentra en este. Dentro de esta tarea se le presentan al estudiante una serie de cuatro mapas.

Objetivo: Construir un sistema de referencia (eje polar) con el norte y utilizarlo a la hora de trazar un rumbo (construir un ángulo polar y el radio vector) hacia la marca.

Tabla 1. Análisis a priori de la tarea 1

Intención	Acción	Traza un rumbo hacia la marca sin tener en cuenta el mapa
1) Partir desde su ubicación hasta la marca.	Retroacción	No puede encontrar la marca
	Interpretación	El no tener en cuenta el mapa no me llevara a la marca
	Validación	Negativa: Tengo que analizar el mapa para encontrar mi ubicación
Intención	Acción	Identificar la coincidencia entre la marca que indica el norte del mapa y el de la brújula.
2) Orientar el mapa por medio de la brújula	Retroacción	La marca que indica el norte en el mapa y el de la brújula no coinciden
	Interpretación	Al no coincidir la marca del norte en el mapa y el de la brújula, no se puede establecer la orientación del mapa
	Validación	Negativa: No coinciden
Intención	Acción	Mover la brújula buscando que el norte coincida con la marca que indica el norte en el mapa
3) Orientar el mapa por medio de la brújula	Retroacción	Al mover la brújula el norte permanece fijo
	Interpretación	Mover la brújula y dejar el mapa fijo no me ayuda a orientar el mapa
	Validación	Negativa: El norte de la brújula con la marca del

		norte en el mapa no coincide.
Intención	Acción	Mover el mapa buscando que la marca que indica el norte coincida con el de la brújula
4) Orientar el mapa por medio de la brújula	Retroacción	La marca que indica el norte en el mapa coincide con el norte de la brújula.
	Interpretación	Mover el mapa buscando que la marca del norte coincida con el de la brújula me ayuda a orientar el mapa
	Validación	Positiva: El mapa está orientado.
Intención	Acción	Visualizar la marca en el mapa
5) Partir desde su ubicación hasta la marca.	Retroacción	El mapa brinda especificaciones del entorno por medio de formas y figuras
	Interpretación	El estudiante no logra una asociación entre las especificaciones del mapa y el entorno
	Validación	Negativa: Las especificaciones de formas y figuras del mapa no coinciden con las del entorno, debo analizar mejor las características del mapa.
Intención	Acción	Visualiza la marca en el mapa
6) Partir desde su ubicación hasta la marca.	Retroacción	El mapa brinda especificaciones del entorno por medio de formas y figuras
	Interpretación	El estudiante logra una asociación entre las especificaciones del mapa y del entorno.

	Validación	Positiva: Las especificaciones de formas y figuras del mapa coinciden con las del entorno
Intención	Acción	Traza una ruta hacia la marca caminando ciertos pasos a la izquierda o derecha y luego hacia arriba o abajo
7) Partir desde su ubicación hasta la marca.	Retroacción	puedo encontrar la marca
	Interpretación	Debo calcular el número de pasos hacia la derecha o izquierda y arriba o abajo que debo caminar para llegar a la marca.
	Validación	Positiva: llegue a la marca.
Intención	Acción	Traza una ruta hacia la marca usando ángulos y distancias
8) Partir desde su ubicación hasta la marca.	Retroacción	puedo encontrar la marca
	Interpretación	Debo aproximar una distancia en pasos y girar mi cuerpo para escoger el ángulo correcto esto me permitirá llegar a la marca
	Validación	Positivo: llegue a la marca

Se espera que estas acciones se repitan en la serie de cuatro mapas que se le presentarán al estudiante, a través de la interpretación de las situaciones se espera que el estudiante identifique el norte como una referencia (eje polar) a la hora de trazar un rumbo (ángulo polar; radio vector) hacia las marcas presentadas en el mapa.

Tarea 2

Dados una brújula y un mapa que posee la ubicación actual del estudiante y la indicación del norte, se le pedirá a un estudiante que dé instrucciones a uno de sus compañeros para que se desplace a la marca que se encuentra en este. Dentro de esta tarea se le presenta al estudiante una serie de cuatro de mapas.

Objetivo:

Ubicar al compañero utilizando el sistema de coordenadas polares por medio de un mapa y una brújula.

Tabla 2. Análisis a priori de la tarea 2

Intención	Acción	Mover el mapa buscando que la marca que indica el norte coincida con el de la brújula
1) Orientar el mapa por medio de la brújula	Retroacción	La marca que indica el norte en el mapa coincide con el norte de la brújula.
	Interpretación	Mover el mapa buscando que la marca del norte coincida con el de la brújula me ayuda a orientar el mapa
	Validación	Positiva: El mapa está orientado.
Intención	Acción	Indicar a mi compañero que observe la brújula y busque el norte
2) Orientar a mi compañero hacia el norte.	Retroacción	Mi compañero observa la brújula e identifica el norte
	Interpretación	Mi compañero debe girarse para que este orientado hacia el norte
	Validación	Positiva: mi compañero está orientado hacia el norte

Intención	Acción	Visualiza la marca en el mapa
3) Dar instrucciones a mi compañero para que parta desde su ubicación hasta la marca.	Retroacción	El mapa brinda especificaciones del entorno por medio de formas y figuras
	Interpretación	El estudiante no logra una asociación entre las especificaciones del mapa y el entorno
	Validación	Negativa: No encuentro coincidencias entre las especificaciones del mapa y el entorno
Intención	Acción	Visualiza la marca en el mapa
4) Dar instrucciones a mi compañero para que parta desde su ubicación hasta la marca.	Retroacción	El mapa brinda especificaciones del entorno por medio de formas y figuras
	Interpretación	El estudiante logra una asociación entre las especificaciones del mapa y el entorno
	Validación	Positiva: Las especificaciones de formas y figuras del mapa coinciden con las del entorno
Intención	Acción	Traza una ruta hacia la marca para que mi compañero camine ciertos pasos a la izquierda o derecha y luego hacia arriba o abajo
5) Dar instrucciones a mi compañero para que parta desde su	Retroacción	Mi compañero puede encontrar la marca
	Interpretación	Debo calcular el número de pasos hacia la derecha o izquierda y arriba o abajo que mi compañero debe

ubicación hasta la marca.		caminar para llegar a la marca.
	Validación	Positiva: llegó a la marca.
Intención	Acción	Traza una ruta hacia la marca usando ángulos y distancias
6) Dar instrucciones a mi compañero para que parta desde su ubicación hasta la marca.	Retroacción	Mi compañero puede encontrar la marca
	Interpretación	Debo aproximar una distancia en pasos y escoger el ángulo correcto que permitirá a mi compañero llegar a la marca
	Validación	Positivo: llegó a la marca

Como se puede notar esta tarea es similar a la tarea #1, lo que la diferencia con esta es que hasta aquí el estudiante ya sabe que el norte funciona como un punto de referencia (eje polar) a la hora de elegir y trazar un rumbo (ángulo polar y radio vector) hacia la marca, por tanto, se espera que por medio de la comunicación el estudiante sea capaz de ubicar a su compañero utilizando coordenadas polares para llegar a la marca.

Tarea 3

Esta tarea debe realizarse en parejas, cada participante tendrá dos tableros de juego circulares con 4 radios diferentes y 12 ángulos distintos. En el plano de la izquierda se coloca la flota propia, en el plano de la derecha se irán marcando los disparos que el jugador realiza en el mar del competidor: barcos tocados, hundidos y si no acierta ninguna coordenada son disparos al agua. Cada jugador dispone en su tablero izquierdo una flota completa, sin que el contrincante vea su posición. Los barcos no pueden tocarse entre sí, es decir, que todo barco debe estar rodeado de agua o tocar un borde del tablero.

La flota estará formada por 4 tipos de embarcaciones (portaaviones, acorazados, buques, submarinos). Finalmente, se enfrentan y comenzad la batalla siguiendo las siguientes reglas:

- El turno pasa alternativamente de un jugador a otro.
- En su turno, el jugador hace un disparo a una posición del mar enemigo, indicando la coordenada correspondiente (radio y ángulo). Si no hay barcos en esa coordenada, el otro jugador dice: "¡agua!"; si el disparo ha dado en algún barco dice: "¡tocado!"; si con dicho disparo el rival logra completar todas las posiciones del barco, debe decir "¡hundido!".
- Gana el jugador que consigue hundir todos los barcos del rival.

Objetivo:

Verificar que los estudiantes lograron la construcción del sistema de coordenadas polares

Tabla 3. Análisis a priori de la tarea 3

Intención	Acción	Dar una coordenada (radio y ángulo) para disparar
1) Hundir la flota de mi compañero	Retroacción	Mi compañero dice "¡Agua!"
	Interpretación	He fallado
	Validación	Negativa: debo cambiar la coordenada
Intención	Acción	Dar una coordenada distinta a la anterior (radio y ángulo) para disparar
2) Hundir la flota de mi compañero	Retroacción	El compañero dice "¡Tocado!"
	Interpretación	He acertado
	Validación	Positiva

Se espera que este tipo de acciones se repita durante toda la partida.

4.3. Análisis a posteriori local de la actividad

Con la finalidad de establecer la validez y eficacia de la actividad propuesta en este trabajo de investigación se realiza el análisis a posteriori, para esto se presenta unas observaciones que permitirán la confrontación de las acciones previstas en el análisis a priori y las acciones de los estudiantes durante la experimentación.

Esta actividad se llevó a cabo en La Institución Educativa, donde participaron cuatro estudiantes, Estudiante 1 (**E1**), Estudiante 2 (**E2**), Estudiante 3 (**E3**) y Estudiante 4 (**E4**) de once grado, con la compañía de los investigadores Angie Álvarez (**I1**) y José Fontalvo (**I2**), quienes supervisaron y orientaron la actividad.

Las convenciones utilizadas son:

- Letra negra, para identificar lo que decían las personas que intervenían en la actividad.
- **Letra roja**, para identificar las acciones de los estudiantes, durante los momentos que permanecían en silencio.
- **Letra azul**, para resaltar lo que decía, justificaba y escribía el estudiante mientras interactuaba con el medio o señalaba con las manos.
- *Letra negra en cursiva*, para representar algunas observaciones del profesor con respecto a las acciones de los estudiantes.

Actividad

Esta actividad está compuesta por tres tareas, donde la tarea 1 y 2 la conforman cuatro series de mapas, la cual deberá realizarse con la ayuda de un mapa de la Institución Educativa y una brújula. Dejando claro que la tarea 2 es en parejas y por último la tarea 3 que consta de un juego para verificar la construcción del sistema de coordenadas polares.

4.3.1. Análisis a posteriori local de la tarea 1

Tarea 1

Dados una brújula y un mapa con la ubicación actual del estudiante y el norte, se le pedirá al estudiante que se desplace hasta la marca que se encuentra en este. Dentro de esta tarea se le presentan al estudiante una serie de cuatro mapas.

4.3.1.1. Análisis a posteriori del Estudiante 1

Transcripción

Se hace entrega de la primera serie de mapa y de la brújula

[1] E1: **Gira el mapa**

[2] I1: ¿Por qué te giras el mapa?

[3] E1: **Porque trato de hacer con la brújula lo mismo que está en el mapa, entonces el norte esta por allá. Señala que el norte está a su espalda**

[4] I2: ¿De qué te sirve que el norte que indica el mapa este igual al de la brújula?

[5] E1: **Que estoy ubicada como está el mapa**

[6] E1: **Camina en busca de la marca**

[7] E1: Encuentra la marca de la primera serie

[8] I2: ¿Qué referencia usaste para encontrar la marca?

[9] E1: El sticker

[10] I2: El sticker es donde querías llegar

[11] E1: Ok, sí. Ese es mi punto de llegada, entonces la forma de la cancha

[12] I1: ¿Qué representa la marca en el mapa en matemáticas?

[13] E1: Un punto

Se hace entrega de la segunda serie del mapa y la brújula

[14] E1: Se gira y gira el mapa

[15] E1: Camina en busca de la marca

[16] I1: ¿Qué forma tu posición inicial y el punto de la marca?

[17] E1: Una línea recta

[18] I1: ¿Qué referencia usaste en esta serie para encontrar la marca?

[19] E1: Me guíe de la marca anterior que estaba más cerca y no estaba tan desviada

[20] E1: Señala el mapa

Se entrega la tercera serie del mapa

[21] E1: Camina hacia la marca de la tercera serie

[22] I1: Colócale un nombre al camino de donde estabas a la marca

[23] E1: Línea recta

[24] I1: ¿Qué referencia usaste en esta tercera serie?

[25] E1: La marca anterior, los puntos que están pasando me ayudan a encontrar los nuevos

Se entrega la cuarta serie del mapa

[26] E1: Camina hacia la cuarta marca

[27] I2: ¿En qué te ayudó la brújula?

[28] E1: Me permitió saber dónde dirigirme

[29] I2: ¿Cómo podrías describir ese “y hacia donde tengo que dirigirme”?

[30] E1: O sea, cuantos grados aproximadamente debería abrirme para llegar a la marca

[31] I1: ¿Qué representa la línea recta que formas de tu punto de partida al de llegada?

[32] E1: Cambio de posición... un recorrido

Análisis a posteriori de la tarea 1: En el análisis a priori se planteó que los estudiantes antes de buscar una estrategia para encontrar la marca correspondiente a cada mapa, orientaran el mapa con ayuda de la brújula. Luego, que tuviera en cuenta las especificaciones del mapa y lo compara con su alrededor, estableciendo una referencia con el norte (eje polar) y estimar el ángulo y la distancia que le permitiría llegar a la marca formando así el radio vector.

A la hora de realizar la tarea lo primero que hizo el estudiante fue orientar el mapa con ayuda de la brújula permitiéndole saber su posición con respecto al mapa. Para encontrar la primera marca tuvo en cuenta la forma de la cancha, es decir, la especificación que le

brindaba el mapa le permitió encontrarla [11]. En las demás series, creo su eje polar con respecto a la marca antes encontrada [19] y [25], luego con ayuda de la brújula miraba hacia donde tenía que dirigirse [27] a la [30], después caminaba en línea recta [23] hacia la marca construyendo el radio vector.

4.3.1.2. Análisis a posteriori del estudiante 2

Transcripción

Se entrega la primera serie de mapa

[1] E2: **Mira el mapa**

[2] E2: **¿Puedo caminar?**

[3] I1: ¿Ya sabes dónde está la marca?

[4] E2: **Algo así, esto apunta al norte y el norte es mi espalda entonces tengo que ir para allá. Señala hacia el sur**

[5] I1: ¿Qué hiciste para poder ubicarte?

[6] E2: **Lo primero fue ver mi marca y seguidamente lo que conozco de mapas es que tiene una indicación hacia donde está el norte y eso, luego mire la brújula y ubique el mapa.**

[7] E2: **Camina en busca de la primera marca**

[8] I2: ¿Por qué te detienes?

[9] E2: **No sé cuántos pasos exactamente tengo que dar y la inclinación a la que esté**

[10] I2: ¿A qué te refieres con inclinación?

[11] E2: Los grados, la brújula maneja los grados en una circunferencia, por eso estoy algo confuso

[12] E2: Gira el mapa y sigue caminando

[13] E2: Ya me perdí, caminé más

[14] I1: ¿Por qué?

[15] E2: Porque la marca no esta tan pegada al borde y ya literalmente llegué a la última pared

[16] I1: ¿Qué harás?

[17] E2: Recalcular y volver al punto inicial, o sea no volvería al punto; pero sí cerca

[18] I1: ¿Qué tomaste de referencia para ubicar la marca?

[19] E2: El borde de la cancha

[20] E2: Mira el mapa y se siente confuso

[21] I1: ¿Quieres volver a tu posición inicial?

[22] E2: Sí

[23] E2: Gira la brújula y susurra algunas aproximaciones de grados

[24] E2: Me imagino aquí como el plano cartesiano y el poco de ángulos, entonces sería como 30° . Mueve la brújula teniendo en cuenta la marca en el mapa y hace una estimación de 30° para empezar a caminar.

[25] I2: ¿En qué te ayuda el plano cartesiano?

[26] E2: Ubicar los puntos, digamos yo estoy en el punto de origen y me ayuda saber a la posición a la que voy

Se le hace entrega de la segunda serie

[27] E2: **Se gira y gira el mapa**

[28] E2: Este ángulo está full pequeño

[29] E2: **Camina hacia la marca**

[30] E2: **Llegó a la marca que no correspondía a la del mapa entregado en esta serie**

[31] E2: **Supuse que estaba en este espacio y vi el sticker**

Se le entrega la tercera serie

[32] E2: **Hace coincidir el norte que indica el mapa y el norte de la brújula. Luego, camina hacia la marca**

[33] E2: **Algo me dice que la marca anterior es la de este mapa**

[34] I2: ¿Por qué dices eso?

[35] E2: **La distancia, no la distancia sino el ángulo que se forma**

[36] I2: ¿Quieres comparar con el mapa anterior?

[37] E2: **Sí, por favor**

[38] I2: ¿Qué referencia usaste para decir que la marca anterior pertenece a este mapa?

[39] E2: **Lo mismo que he venido haciendo, desde el centro de la cancha busque el ángulo que se forma con la esquina de la cancha**

[40] I1: Entonces, ¿cuál es tu referencia?

[41] E2: **La esquina de la cancha**

[42] E2: **La marca del mapa anterior no la encontré**

[43] I1: ¿Qué elementos matemáticos has usado para encontrar las marcas?

[44] E2: Creación de ángulos, plano cartesiano.

[45] E2: De la esquina a la marca que encontré había como cinco pasos, según el ángulo debe ser 220° para encontrar la marca

[46] E2: Encontró la marca que correspondía a la segunda serie

[47] I1: Hablaste de pasos, esos pasos matemáticamente como lo llamarías

[48] E2: Distancia

Se le entrega la cuarta serie

[49] E2: Está es más fácil

[50] I2: ¿Por qué?

[51] E2: Porque ya he trabajado las anteriores marcas entonces simplemente es ver a mi espalda

[52] I2: ¿Por qué a tu espalda?

[53] E2: Porque estoy tomando como referencia el norte, ahora miraré el ángulo que se va formando

[54] E2: Llegó a la cuarta marca

Análisis a posteriori de la tarea 1: En el análisis a priori se planteó que los estudiantes antes de buscar una estrategia para encontrar la marca correspondiente a cada mapa, orientaran el mapa con ayuda de la brújula. Luego, que tuviera en cuenta las especificaciones del mapa y lo compara con su alrededor, estableciendo una referencia con el norte (eje polar) y estimar el ángulo y la distancia que le permitiría llegar a la marca formando así el radio vector.

También en el análisis a priori se previó que, si el estudiante no tenía en cuenta las especificaciones del mapa, no llegaría a la marca y se esperaba que replanteará su estrategia.

Al momento de realizar la tarea 1, el estudiante lo primero que hizo fue orientar el mapa con ayuda de la brújula para saber su posición con respecto a este [6]. Luego camino en busca de la primera marca, pero no la encontró porque no tuvo en cuenta la especificación del mapa [15]. Volvió al punto inicial y esta vez tuvo en cuenta las especificaciones del mapa. Lo cual, le permitió darse cuenta en la segunda serie que encontró una marca que no correspondía a el mapa dos [30].

En las distintas series construyó un sistema de referencia distinto, por ejemplo, en la tercera serie tomó como referencia la esquina de la cancha [40] y [41] y en la cuarta serie tomó de referencia el norte. Luego, construía ángulos que le permitían formar el radio vector para llegar a las distintas marcas [24], [44], [45].

4.3.1.3. Análisis a posteriori del estudiante 3

Transcripción

Se hace entrega de la primera serie

[1] E3: Gira el mapa

[2] I1: ¿Por qué giras el mapa?

[3] E3: Para saber dónde ubicarme

[4] E3: Camina en busca de la marca

[5] I2: ¿Estas caminando a la deriva?

[6] E3: Sí

[7] E3: No llego a la marca

[8] I1: ¿Por qué caminas para acá? *Camina hacia su frente*

[9] E3: **Primero voy a bajar y luego me voy a mover a la derecha, pero no sé qué tanto tengo que bajar**

[10] E3: Llegó a la marca correspondiente a otra serie

[11] I1: ¿Qué representa la marca en el mapa?

[12] E3: **Un punto donde quiero llegar**

Se entrega la segunda serie

[13] E3: **Tengo que caminar más que en el anterior**

[14] I2: ¿Por qué dices que tienes que caminar más que el anterior?

[15] E3: **La distancia que había era menor que la de ahora**

[16] E3: **La marca que encontré es la de este mapa, o sea que no he encontrado la primera**

[17] I2: ¿Por qué?

[18] E3: **Porque si ahí termina la cancha, entonces a este corresponde la marca**

[19] E3: **Camina a su punto inicial**

[20] I1: ¿Qué elementos matemáticos te han ayudado a encontrar las marcas?

[21] E3: **Distancia y puntos de referencias**

[22] I1: ¿Qué referencia usaste?

[23] E3: En donde termina la cancha

Se le entrega la tercera serie

[24] E3: Orienta el mapa

[25] E3: Camina hacia la marca

[26] I2: ¿Cuál ha sido tu estrategia para encontrar las marcas?

[27] E3: Tomo un punto de referencia, miro más o menos la distancia y empiezo a caminar

[28] E3: Encuentra la marca

[29] I1: ¿Qué forma el punto donde iniciaste hasta la marca?

[30] E3: Una línea recta

[31] I1: ¿Encuentras alguna relación entre esa línea recta con lo que llamaste distancia?

[32] E3: Sí, la distancia de mi punto inicial con el de la marca forman esa línea

Se entrega la cuarta serie

[33] E3: Se orienta y camina hacia la marca

[34] E3: Llega a la cuarta marca

[35] I1: ¿Qué hiciste para encontrar esta marca?

[36] E3: Tuve en cuenta el borde de la cancha y que la marca está en la punta

[37] E3: Trata de mostrar algo con la mano

[38] I1: ¿Qué haces con la mano?

[39] E3: Viendo la dirección en la que está la marca

Análisis a posteriori de la tarea 1: En el análisis a priori se planteó que los estudiantes antes de buscar una estrategia para encontrar la marca correspondiente a cada mapa, orientaran el mapa con ayuda de la brújula. Luego, que tuviera en cuenta las especificaciones del mapa y lo compara con su alrededor, estableciendo una referencia con el norte (eje polar) y estimar el ángulo y la distancia que le permitiría llegar a la marca formando así el radio vector.

En el análisis a priori se previó que, si el estudiante no tenía en cuenta las especificaciones del mapa, no llegaría a la marca y se esperaba que replanteará su estrategia. Una estrategia que podía usar era trazar una ruta formando un triángulo rectángulo, con la que puede llegar a la marca sin embargo la distancia que recorre sería mayor.

A la hora de realizar la tarea 1, el estudiante orienta el mapa con ayuda de la brújula para saber su posición con respecto al mapa [2] y [3]. No recurre a ninguna estrategia y esto hace que no encuentre la primera marca [5] y [6]. Replantea su estrategia y trata de encontrar la primera marca formando un triángulo rectángulo [9]; no llega a la marca correspondiente de la serie entregada porque no tuvo en cuenta las especificaciones del mapa [10].

Luego, al entregarle la segunda serie que correspondía a la marca que encontró se da cuenta que no había encontrado la primera, por lo que ahora observa con detalle el mapa [18]. El estudiante establece un sistema de referencia, pero no construye ángulos, ni el radio vector.

4.3.1.4. Análisis a posteriori del estudiante 4

Transcripción

Se le entrega la primera serie

[1] E4: **Mira el mapa y camina hacia la marca**

[2] I2: ¿Por qué te giraste y caminaste hacia acá? *Camina hacia el sur*

[3] E4: **Porque para allá queda el norte, entonces según la marca tenía que caminar para acá.** *Señala a su espalda el norte y camina al sur*

[4] I2: ¿Por qué giras la brújula?

[5] E4: **Para ver que tanto tenía que voltear porque no sé si me gire más**

[6] I1: ¿A qué te refieres con eso de “para ver que tanto tenía que voltear”?

[7] E4: **Cuantos grados**

[8] E4: **Desliza el dedo en el mapa**

[9] I2: ¿Qué haces?

[10] E4: **Ok, si esta es la cancha, se supone que la cancha pequeña llega hasta aquí, por lo tanto, el sticker es aquel.** *Señala el sticker y camina hacia el sticker*

[11] E4: **Llega a la primera marca**

[12] I1: ¿Qué representa la marca en el mapa?

[13] E4: **Una coordenada**

[14] I1: ¿Qué forma el punto donde iniciaste hasta la marca?

[15] E4: **Una línea**

[16] I1: ¿Qué nombre le pondrías a esa línea?

[17] E4: Camino... el trayecto

Se entrega la segunda serie

[18] E4: Gira el mapa

[19] I1: ¿De qué te sirve girar el mapa?

[20] E4: Por ejemplo, en el mapa dice que el norte es para allá, entonces la marca esta al suroeste

[21] E4: Llega a la segunda marca

[22] I1: ¿Qué tiene de diferente la trayectoria como lo llamaste, de la primera marca y esta segunda marca?

[23] E4: La primera fue mayor, si tomamos esa línea del medio de la cancha el ángulo que arma a la segunda marca es menor que el que arma con la primera marca

Se entrega la tercera serie

[24] E4: Se ubica y mueve la brújula

[25] I2: ¿Por qué mueves la brújula?

[26] E4: Para saber cuánto girar y no abirme mucho

[27] I2: ¿A qué te estas refiriendo al decir “no abirme mucho”?

[28] E4: Digamos que el ángulo para no pasarme de la marca

[29] E4: Llega a la tercera marca

Se entrega la cuarta serie

[30] E4: Se ubica y camina hacia la marca

[31] E4: Llega a la marca

[32] I2: ¿Qué referencia usaste para llegar al sticker?

[33] E4: La esquina de la cancha

Análisis a posteriori de la tarea 1:

En el análisis a priori se planteó que los estudiantes antes de buscar una estrategia para encontrar la marca correspondiente a cada mapa, orientaran el mapa con ayuda de la brújula. Luego, que tuviera en cuenta las especificaciones del mapa y lo compara con su alrededor, estableciendo una referencia con el norte (eje polar) y estimar el ángulo y la distancia que le permitiría llegar a la marca formando así el radio vector.

Al momento de realizar la tarea 1, el estudiante orientó el mapa con ayuda de la brújula lo que permitió conocer su ubicación con respecto al mapa y caminar hacia la primera marca [2] y [3]. Se evidencia que el estudiante construye su sistema de referencia usando el norte [19] y [20] y en otros casos la esquina de la cancha [32] y [33]. Además, la construcción de ángulos [23] y del [26] al [28]; luego formar el radio vector llegando a las distintas marcas.

Conclusiones de los análisis a posteriori de la tarea 1

El objetivo de esta tarea es que los estudiantes construyan el eje polar, un ángulo y por último el radio vector para encontrar las distintas marcas. Los cuatro estudiantes orientaron el mapa con ayuda de la brújula y encontraron su posición con respecto a este.

Como se pudo observar los estudiantes usaban distintos sistemas de referencia, pero solo el **E2** y **E4** hicieron la construcción de ángulos para luego construir el radio vector

que los llevaría encontrar la marca. Sin embargo, la **E1** usaba ángulos como se evidencio en el análisis a posteriori correspondiente, pero no hacia la construcción. Por último, la **E3** uso otro tipo de estrategia, en la que no construyo ángulo, solo un sistema de referencia que finalmente formaba un triángulo rectángulo para encontrar las marcas.

Por tal motivo, para la tarea 2 como es en pareja, se decidió que el **E2** y **E4** guiarán y dieran instrucciones al **E1** y **E3** para que observen y construyan el sistema de coordenadas polar.

4.3.2. Análisis a posteriori local de la tarea

2Tarea 2

Dados una brújula y un mapa que posee la ubicación actual del estudiante y la indicación del norte, se le pedirá a un estudiante que dé instrucciones a uno de sus compañeros para que se desplace a la marca que se encuentra en este. Dentro de esta tarea se le presenta al estudiante una serie de cuatro de mapas.

4.3.2.1. Análisis a posteriori de Estudiante 1 y 2

Transcripción

Se hace entrega de la primera serie de mapa y de la brújula

[1] **E2: Se coloca detrás de E1, orienta el mapa rápidamente.**

[2] **E2: E1, pon la brújula derecha, lo más derecha que puedas.** *Haciendo referencia a su frente.*

[3] **E1: Coloca la brújula apuntando hacia su frente.**

[4] E2: Dime que te da.

[5] E1: 205-206

[6] E2: ok

[7] E2: Muévete como unos 50° grados a tu derecha.

[8] E1: Se gira hacia la derecha

[9] E2: 255 te tiene que dar.

[10] E1: Gira y se detiene cuando la brújula marca 255°

[11] E2: Se supone que el sticker debe estar dentro del límite de la cancha, Da como unos veinte pasos.

[12] E1: Camina contando los pasos, realiza 17 pasos hasta encontrar la marca.

Se hace entrega de la segunda serie del mapa y la brújula

[13] E2: Gira el mapa rápidamente

[14] I2: ¿Por qué giras el mapa?

[15] E2: Siempre quiero tener el punto de partida (*señala la marca en el mapa y forma una línea*) y el norte a mi espalda (*señala hacia su espalda*).

[16] I2: ¿Por qué el norte a tu espalda?

[17] E2: Por la indicación que tiene el mapa (*señala en el mapa que está apuntando hacia su espalda*)

[18] I1: ¿Qué punto de referencia estás usando para ubicar a tu compañero?

[19] E2: La ubicación del norte en mi espalda y que mi compañera tenga un ángulo de 205° en frente.

[20] E2: Dame como 15° derecha.

[21] E1: Gira a la derecha

[22] E1: 20°

[23] E2: Coloca su mano en la espalda de E2 y la hace girar.

[24] E1: Mirando la brújula dice: esto es más de 20°, es 233°. Haciendo referencia que son 28° desde 205°.

[25] E2: Gira un poco hacia la derecha mirando el mapa y la brújula.

[26] E2: Bueno entonces vamos bien, lo estoy haciendo al ojo.

[27] E2: Se supone que es casi donde acaba la cancha.

[28] E1: ¿Casi donde acaba la cancha?

[29] E2: Sí. Llega al límite de la cancha por favor.

[30] E1: Camina recto desde donde está hasta el límite de la cancha. Revisa los alrededores y no encuentra la marca.

[31] E2: Volvamos al punto de inicio.

[32] I1: Santiago, ¿qué diferencia hay entre la marca de ese mapa y la del mapa anterior?

[33] E2: compara los dos mapas

[34] E2: (cara de asombro) Chalee..., señala con los dedos el mapa haciendo ciertos movimientos.

[35] I2: ¿Qué haces con tus dedos? ¿Por qué haces ese movimiento con tus dedos?

[36] E2: **estoy tratando de trazar una línea respecto a la coordenada que tengo**

aquí (*señala el punto de partida en el mapa*)

[37] I1: ¿Qué diferencia hay entre esta marca y la marca anterior?

[38] E2: **Que esta tiene que estar como por aquí** (*señala con su brazo hacia la derecha*), **pero más cercana.**

[39] I2: ¿A qué haces referencia de más cercana?

[40] E2: **Más cercana de aquí** (*señala el piso*), **porque la otra me aleje bastante.**

[41] I1: ¿Qué puedes concluir?

[42] E2: **Que la marca que encontramos de primero sea la segunda y que la primera no la encontramos.**

[43] I2: ¿Qué estrategia utilizarás para encontrar la marca si la que utilizaste anteriormente fallo?

[44] E2: **tratar de usar la marca anterior como lo máximo que desplazare... como un perímetro**

[45] E2: **Mira los dos mapas y compara**

[46] E2: **De hecho, están como a la misma distancia solo que esta está más adentro de la cancha.**

[47] E2: **E1 a tu derecha.**

[48] E2: **Toma los hombros de E1 y gira.**

[49] E2: **Tiene que estar por aquí.**

[50] E1: **Camina recto desde donde estaba hasta encontrar la marca.**

[51] I2: En la primera serie utilizaste la brújula para dar una indicación en grados y una serie de pasos ¿Por qué esta vez no hiciste eso?

[52] E2: Porque ya había encontrado la otra marca y vi que estaban como dentro del mismo perímetro y me guie que eso es lo máximo a lo que puedo llegar, ósea que tendría que estar como por acá (a la derecha de la marca anterior)

[53] I1: ¿Qué elementos matemáticos has utilizado hasta ahora para encontrar la marca?

[54] E2: Construcción de ángulos, perímetro de un cuadrado y el plano cartesiano.

Se entrega la tercera serie del mapa

[55] E2: Orienta el mapa rápidamente, lo analiza.

[56] E2: ¿E1, tienes el 205 en frente?

[57] E2: Mira el mapa y lo analiza.

[58] E2: E1, mira la esquina de la cancha

[59] E1: Se gira buscando la esquina de la cancha

[60] I2: ¿Por qué le dices que mire la cancha?

[61] E2: Porque la marca está en nuestra espalda a la izquierda y estoy guiándome trazando un punto de intersección entre esa marca y el punto de referencia va ser la esquina.

[62] I2: ¿En qué te ayuda que el punto de referencia sea la esquina?

[63] E2: Que se encuentran ahí (con su mano forma una línea recta)

[64] I2: ¿A qué haces referencia con que se encuentran?

[65] E2: **A una forma lineal, ósea trace mi plano (dibuja un plano cartesiano el aire) y vi que si me movía desde el punto de partida hasta la esquina (dibujo un segmento en el aire) enseguida estaba la marca.**

[66] E1: **Se desplaza hacia la esquina, se detiene y luego camina un poco más hasta encontrar la marca.**

Se entrega la cuarta serie del mapa

[67] E2: **Orienta el mapa rápidamente y lo analiza**

[68] E2: **E1 lo mismo esquina superior izquierda.**

[69] E1: **Se gira hacia la esquina**

[70] E2: **No necesitas la brújula**

[71] E1: **Camina hacia la esquina hasta encontrar la marca.**

[72] I2: ¿Porque no fue necesaria la brújula?

[73] E2: **Porque solo tenía que ubicarme con respecto a la cancha, salir a la esquina y ya estaba ahí.**

Análisis a posteriori de la tarea 2: En el análisis a priori se planteó que el estudiante antes de empezar a dar indicaciones para que su compañero encuentre la marca correspondiente a cada mapa, orientaran el mapa con ayuda de la brújula. Luego, que tuviera en cuenta las especificaciones del mapa y lo compara con su alrededor para así orientar a su compañero, estableciera una referencia con el norte (eje polar) y estimar el ángulo la distancia que le permitiría a s su compañero llegar a la marca formando así el radio vector.

Al momento de realizar la tarea, el estudiante lo primero que hizo fue orientar el mapa con ayuda de la brújula para saber la posición de su compañero con respecto a este. Aunque para encontrar la tercera y cuarta marca el **E2** después de analizar el mapa [57] y [67] le resulto más conveniente solo construir una referencia desde el punto de partida hasta las marcas teniendo en cuenta las esquinas de las marcas pues estas formaban líneas rectas [58]; [62]; [63]; [64]; [65]; [68] y [74].

Para encontrar la primera y segunda marca **E1** tuvo en cuenta la posición en la que se encontraba **E2** y la indicación que marcaba la brújula [2]; [4]; [15]; [18] y [19] para usarlo como referencia para elegir el ángulo [7]; [9]; [20]; [24]; [25] y [26], Luego, estima una distancia aproximada teniendo en cuenta la referencia del límite de la cancha [11] y [28]. Evidenciando la utilización de las coordenadas polares a la hora de dar las indicaciones para ubicar al compañero.

4.3.2.2. Análisis a posteriori de Estudiante 3 y 4

Transcripción

Se le entrega la primera serie

[1] E4: orienta el mapa y gira la brújula mirando el mapa fijamente.

[2] E4: Eeee 130° al sur oriente

[3] E3: mira la brújula y se gira hasta llegar a los 130°. Camina recto manteniendo los 130 y se detiene.

[4] I1: ¿Qué estrategia vas a usar ahora? Vas a seguir buscando.

[5] E4: No responde, mira el mapa y la brújula

[6] E4: E3 130° pero más allá.

[7] E3: Camina manteniendo los 130° y luego se detiene.

[8] E4: Mira el mapa y la brújula.

[9] E4: Parece que no es por acá. ¿Podemos volver al inicio?

[10] I1: Si te parece mejor

[11] *Los estudiantes vuelven al punto de partida para realizar un nuevo intento.*

[12] E4: Orienta el mapa rápidamente y gira la brújula lentamente

[13] I2: ¿Por qué giras la brújula?

[14] E4: Porque estamos aquí y queremos llegar allí (señala las dos marcas en el mapa) para darle las indicaciones a ella.

[15] E4: E3, 180° para el sur.

[16] E3: se gira hasta que la brújula marca 180° y camina manteniendo los 180° en la brújula luego se detiene.

[17] I1: ¿Qué tan lejos está la marca del punto de partida?

[18] E4: Desde el Borde de la cancha hasta el inicio es más o menos la misma distancia que hay desde el borde hasta acá (el lugar en donde se encuentran en este momento)

[19] I2: Plantea una estrategia para calcular la distancia hasta la marca

[20] E4: Bien desde aquí hasta acá debe estar la marca (se desplaza desde un punto hasta otro punto y señala con el brazo), encontró la marca. Le dice a su compañera que la marca esta donde él está

[21] I1: ¿Qué estrategia utilizaste para llegar a esta marca?

[22] E4: Al principio hubo un problema porque no estaba utilizando esto (señala la marca del norte en el mapa) porque pensaba que el sur estaba así (señala con el dedo una línea recta hacia abajo) pero en realidad estaba así (señala con el dedo una línea oblicua) y sabía que no podía estar ni muy para allá ni muy para acá (no muy dentro de la cancha y no muy lejos de la cancha) porque según la brújula estaba por acá (la estimación inicial de 180°)

Se entrega la segunda serie

[23] E4: orienta el mapa, gira un poco la brújula

[24] E4: Vámonos 240° al sur oeste, no mentira 230° al sur oeste.

[25] E3: se gira hasta que la brújula marca 230° y camina manteniendo los 230°

[26] E4: Está por fuera de la cancha.

[27] E3: camina manteniendo los 180° hasta encontrar la marca.

[28] I1: ¿Por qué se te hizo más fácil encontrar esta marca? ¿Qué estrategia utilizaste?

[29] E4: digamos que antes no había visto si estaba dentro o fuera de la cancha, y fue como esta fuera y esta para el sur-oeste.

Se entrega la tercera serie

[30] E4: orienta el mapa, gira un poco la brújula

[31] E4: E3 260° al sur oeste, por fuera de la cancha.

[32] E3: se gira hasta que la brújula marca 260° y camina manteniendo los 260° hasta encontrar la marca.

[33] I1: ¿Qué elementos matemáticos has usado para poder encontrar la marca?

[34] E4: La parte de la ubicación cuando nos ponemos en el plano, lo de los cuatro cuartanes y que de aquí a aquí es nororiente y de aquí a aquí es sur oriente ahhh y los ángulos también

Se entrega la cuarta serie

[35] E4: orienta el mapa, gira un poco la brújula

[36] E4: E3 80° al este

[37] E3: se gira hasta que la brújula marca 80° y camina manteniendo los 80°

[38] E4: está fuera de la cancha

[39] E3: Camina hasta encontrar la marca.

Análisis a posteriori de la tarea 2: En el análisis a priori se planteó que el estudiante antes de empezar a dar indicaciones para que su compañero encuentre la marca correspondiente a cada mapa, orientaran el mapa con ayuda de la brújula. Luego, que tuviera en cuenta las especificaciones del mapa y lo compara con su alrededor para así orientar a su compañero, estableciera una referencia con el norte (eje polar) y estimar el

ángulo la distancia que le permitiría a s su compañero llegar a la marca formando así el radio vector.

Al momento de realizar la tarea, el **E4** oriento el mapa con ayuda de la brújula lo que permitió conocer la ubicación de su compañera con respecto al mapa. Para encontrar las marcas **E4** tuvo en cuenta la posición de los distintos puntos cardinales y la indicación que marcaba la brújula para usarlo como referencia para elegir el ángulo [2]; [15]; [24]; [34] y [36], Luego realiza una relación de proximidad teniendo en cuenta la referencia del límite de la cancha obteniendo una distancia aproximada [18]; [28]; [29]; [31] y [38]. Es evidente la construcción de un sistema de referencia utilizando los puntos cardinales, la construcción de ángulos y del radio vector. Mostrando así la utilización de las coordenadas polares a la hora de dar las indicaciones para ubicar al compañero.

Conclusiones de los análisis a posteriori de la tarea 2

El objetivo de esta tarea es que los estudiantes utilicen lo aprendido en la tarea anterior para lograr ubicar a sus compañeros en coordenadas polares, es decir, construyan el eje polar para dar una indicación en grados, es decir, un ángulo y por último dar una distancia para así construir el radio vector para encontrar las distintas marcas. Ambos estudiantes orientaron el mapa con ayuda de la brújula y encontraron su posición con respecto a este, utilizaron distintos sistemas de referencia, hicieron la construcción de ángulos, para luego dar la indicación a su compañero y por último construir el radio vector que los llevaría encontrar la marca.

Sin embargo, el estudiante **E2** en la tercera y cuarta serie no tuvo la necesidad de utilizar la brújula para construir el ángulo polar, pues escogió un punto de referencia que formaba una línea recta hasta la marca como se evidencio en el análisis a posteriori correspondiente.

4.3.3. Análisis a posteriori local de la tarea 3

Tarea 3

Esta tarea debe realizarse en parejas, cada participante tendrá dos tableros de juego circulares con 4 radios diferentes y 12 ángulos distintos. En el plano de la izquierda se coloca la flota propia, en el plano de la derecha se irán marcando los disparos que el jugador realiza en el mar del competidor: barcos tocados, hundidos y si no acierta ninguna coordenada son disparos al agua. Cada jugador dispone en su tablero izquierdo una flota completa, sin que el contrincante vea su posición. Los barcos no pueden tocarse entre sí, es decir, que todo barco debe estar rodeado de agua o tocar un borde del tablero.

La flota estará formada por 4 tipos de embarcaciones (portaaviones, acorazados, buques, submarinos). Finalmente, se enfrentan y comenzad la batalla siguiendo las siguientes reglas:

- El turno pasa alternativamente de un jugador a otro.
- En su turno, el jugador hace un disparo a una posición del mar enemigo, indicando la coordenada correspondiente (radio y ángulo). Si no hay barcos en esa coordenada, el otro jugador dice: "¡agua!"; si el disparo ha dado en algún barco

dice: "¡tocado!"; si con dicho disparo el rival logra completar todas las posiciones del barco, debe decir "¡hundido!".

- Gana el jugador que consigue hundir todos los barcos del rival.

4.3.3.1. Análisis a posteriori del Estudiante 1 contra el Estudiante 4

Transcripción

Se les hace entrega de los tableros y los diferentes tipos de barcos.

[1] E1: Ubica los barcos en el tablero

[2] E4: Ubica los barcos en el tablero

[3] E1: Yo tengo que decirte un círculo y un grado

[4] E1: Mira el tablero y dice 2, 120°

[5] E4: ¿Cómo?

[6] E1: segundo círculo, 120°

[7] E4: Revisa el tablero y hace un movimiento con la cabeza para indicar que el tiro no fue acertado.

[8] E1: Marca en el tablero la coordenada fallida.

[9] E4: 0, 0

[10] E1: No

[11] E4: Marca en el tablero la coordenada fallida.

[12] E1: 4, 225°

[13] E4: Me diste.

A partir de aquí se repitieron este tipo de acciones durante toda la partida hasta que hubo un ganador.

Análisis a posteriori de la tarea 3

En el análisis a priori se planteó que los estudiantes dieran las indicaciones al disparar en coordenadas polares es decir un radio y un ángulo. Al momento de realizar la tarea es claro como ambos estudiantes dan indicaciones usando distancias y ángulos [4]; [6]; [9] y [12] quedando en evidencia que utilizan las coordenadas polares.

4.3.3.2. Análisis a posteriori del Estudiante 2 contra el Estudiante 3

Transcripción

Se les hace entrega de los tableros y los diferentes tipos de barcos.

[1] E2: Ubica los barcos en el tablero

[2] E3: Ubica los barcos en el tablero

[3] E2: 45°, en el tercer circulo

[4] E2: 45 es el que está entre 60 y 30 la gris (haciendo referencia a una de las líneas del tablero)

[5] E3: Nada (mueve la cabeza de un lado a otro)

[6] E2: Marca el disparo fallido en el tablero

[7] E3: Tienes en cero grados

[8] E2: ¿En dónde?

[9] E3: levanta las manos con un gesto de pregunta

[10] **E3: cero grados**

[11] E2: por eso, pero ¿dónde?

[12] **E3: ah ok, en el primero.**

[13] **E2: Jajajaja, me diste**

[14] **E3: Marca en el tablero el tiro acertado**

[15] **E2: Marca el tablero el barco impactado**

A partir de aquí se repitieron este tipo de acciones durante toda la partida hasta que hubo un ganador.

Análisis a posteriori de la tarea 3

En el análisis a priori se planteó que los estudiantes dieran las indicaciones al disparar en coordenadas polares es decir un radio y un ángulo. Al momento de realizar la tarea es claro como ambos estudiantes dan indicaciones usando ángulos y distancias [3]; [10] y [12] contrario a lo previsto en el análisis a priori, pero aun así son los componentes de las coordenadas polares y esto era lo que se esperaba.

Conclusión de la tarea 3

El objetivo de esta tarea era verificar que los estudiantes lograron la construcción del sistema de coordenadas polares. En todo momento, utilizaron las componentes de las coordenadas polares, aunque el **E2** y **E3** lo expresaban de la forma ángulo y distancia.

4.4. Análisis a posteriori global

Esta actividad permitió la construcción del sistema de coordenadas polares por parte de los estudiantes, a través de la ubicación en mapas y luego con la verificación en el juego de batalla naval. En la primera y segunda tarea todos los estudiantes orientaron el mapa de manera acertada a través de la brújula permitiéndole saber su ubicación con respecto a este, además todos realizaron la construcción de diferentes sistemas de referencias utilizando los elementos de su alrededor y la brújula en algunas ocasiones.

Al momento de buscar las marcas una dificultad que tuvieron los estudiantes fue el no tener en cuenta las especificaciones del mapa, tales como si la marca estaba fuera o dentro de la cancha y esto los hacía llegar a marcas correspondientes a otras series. Al enfrentarse con el mapa que tenía la marca ya encontrada, se cuestionaban y replanteaban su estrategia. Algunos estudiantes no realizaron la construcción de ángulos, por tal motivo en la segunda tarea eran los escogidos para recibir instrucciones de sus compañeros que realizaron bien toda la tarea 1, permitiendo que ellos miraran y construyeran el sistema de coordenadas polares mediante las instrucciones dadas por sus compañeros como se puede evidenciar en las transcripciones de la tarea 2.

Por último, todo esto se puso en práctica en la tarea 3, donde los estudiantes utilizaban las coordenadas polares para dar indicaciones de las ubicaciones de los barcos en busca de ganar, con esto se verifico el uso de este tipo de coordenadas.

CAPITULO V CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

- ✓ Las características de la orientación deportiva y su potencial para integrarse en el ámbito escolar por su interdisciplinariedad con diferentes áreas, permitieron el diseño e implementación de una situación didáctica en las instalaciones de la institución educativa. En el diseño de la actividad se tuvo en cuenta que los estudiantes conocen el colegio, por tanto, se realizaron modificaciones al plano de la institución, provocando así que los estudiantes buscaran estrategias al momento de realizar la actividad.
- ✓ Se identificaron estrategias por parte de los estudiantes al momento de utilizar el mapa y la brújula para realizar las diferentes tareas. En el desarrollo de la tarea 1 se evidenció que los estudiantes desde el primer momento utilizaron el mapa y no salieron a buscar la marca sin antes haber planeado una estrategia, además que los estudiantes utilizaban el contorno de la cancha para estimar las distancias de las diferentes marcas, los puntos cardinales y la brújula para la medición de ángulos [3]; [5]; [4]; [6]. [11].
- ✓ Los estudiantes mostraron compromiso y capacidad de trabajo en equipo al momento de realizar la tarea 2 manteniendo una comunicación constante entre ellos, evidenciado en las acciones que emprendía el estudiante receptor de las indicaciones transmitidas del estudiante emisor. [2] hasta [8]

- ✓ En el transcurso de la actividad se puso en evidencia la capacidad de los estudiantes de elegir en que ocasiones es más más sencillo utilizar cierto sistema de coordenadas (cartesianas y polares) teniendo en cuenta su necesidad de llegar a la marca de la manera más óptima. [65] hasta [73].
- ✓ Al momento de realizar las tareas 1 y 2 se identificó una dificultad por parte de los estudiantes para identificar si la marca encontrada era la indicada en el mapa de la serie en desarrollo y solo hasta el momento de recibir el siguiente mapa lograban identificar que la marca encontrada era incorrecta. [32] hasta [42]
- ✓ Se notó como los estudiantes usando distancias y ángulos daban indicaciones de puntos específicos donde posiblemente se encontraba la flota enemiga en la tarea 3. Se evidenció, además, manejo y confianza al momento de dar y recibir información en coordenadas polares. [3] hasta [13]
- ✓ Se caracterizaron las estrategias utilizadas por los estudiantes al momento de realizar cada tarea. En la tarea 1 y 2 todos los estudiantes orientaron el mapa de manera acertada a través de la brújula permitiéndole saber su ubicación con respecto a este [2] y [3], además todos realizaron la construcción de diferentes sistemas de referencias utilizando los elementos de su alrededor [19] y [20]. También hicieron uso de la brújula para estimar ángulos teniendo en cuenta su posición y los sistemas de referencias que crearon, para luego estimar distancias teniendo en cuenta la referencia [23] y del [26] al [28], un claro uso del ángulo polar y el radio vector.

5.2. Recomendaciones

En esta investigación el hecho que los estudiantes conocieran el colegio fue una limitante, por tal motivo, en ocasiones no necesitaban del uso de la brújula, para superar esta dificultad se recomienda:

- Implementar las actividades en un lugar desconocido para los estudiantes, con su respectivo mapa y una brújula, esto para evidenciar nuevas estrategias por parte de los estudiantes.
- Diseñar situaciones donde el estudiante reconozca que sistema de coordenadas (cartesiano o polar) le facilita resolver la situación de manera más óptima.
- Considerar la orientación deportiva como posible medio para abordar otros contenidos matemáticos o geométricos como ángulos, distancia, coordenadas.

Referentes Bibliográficas

- Acosta , M., & Fiallo, J. (2017). *Enseñando geometría con tecnología digital: Una propuesta desde Teoría de las Situaciones Didácticas* . Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas .
- Acuña, C. (2001). Concepciones en la graficación, en el orden entre las coordenadas de los puntos en el plano cartesiano. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(3), 203-217.
- Advíncula, E. (2013). Las coordenadas polares en la naturaleza usando Winplot. *CIBEM*, 6916-6922.
- Algarín, D., Saledo, C., & Vides, W. (2007). *Introducción de las coordenadas polares como medio de ayuda al desarrollo del pensamiento geométrico y espacial en noveno grado en básica secundaria*. Barranquilla: Universidad del Atlántico.
- Alvarado, L., & García , M. (2008). Características más relevantes del paradigma socio-crítico: su aplicación en investigaciones de educación ambiental y de enseñanza de las ciencias realizadas en el Doctorado de Educación del Instituto Pedagógico de Caracas. *Sapiens* , 187, 202.
- Anfossi, A., & Flores, M. (1978). *Geometría Analítica*. Santa María la Ribera: Progreso.
- Arias, F. (2012). *El Proyecto de Investigación: Introducción a la metodología científica*. Caracas: Episteme.
- Artigue, M., Douady, R., & Moreno, L. (1995). *Ingengería didáctica en educación matemática*. (P. Gómez, Ed.) Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.
- Bocco, M., & Villarreal , M. (1994). Coordenadas Cartesianas: ¿La única opción? *Revista de Educación Matemática*, 9(1), 18-48.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas* . Buenos Aires : Libros del Zorzal.
- Chau, N., & Sánchez, R. (2010). Coordenadas polares: Curvas maravillosas. *En Blanco & Negro*. Obtenido de <https://studylib.es/doc/4895140/coordenadas-polares--curvas-maravillosas>
- Colinas, J. (2017). *Enseñanza de la orientación deportiva en el ámbito escolar*. Valladolid : Universidad de Valladolid .
- Espinoza , A. (2017). *Aprendizaje de coordenadas polares en estudiantes en formación de profesores por medio de los registros de representación semiótica*. Huancayo: Universidad Nacional Del Centro Del Perú.
- García, E. (1991). Los modelos educativos, en torno a la vieja polémica Escuela Nueva frente a la Escuela Tradicional. *Didáctica.Lengua y literatura*, 25-46.
- García, S. (2017). *La orientación deportiva en la educación física escolar*. Valencia: Universidad de Valladolid .
- Gómez, W. (2018). *Enseñanza- aprendizaje de los sistemas de coordenadas mediante formulación de problemas en estudiantes de grado noveno*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

- González, M. (20 de septiembre de 2017). Un cambio de paradigma para la escuela del siglo XXI. Obtenido de <http://blog.tiching.com/cambio-paradigma-la-escuela-del-siglo-xxi/>
- González, P. (2003). *Estudio crítico de tres obras cumbres de la literatura matemática: La geometría de Descartes*. Obtenido de <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriadescartes.pdf>
- Greswell, J. (2014). *Research desing: qualitative, quatitative, and mixed methods approaches*. london: SAGE.
- Hernández, R., Fernández , C., & Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación*. México D.F.: Mc Graw Hill Education .
- Joya , S. (2016). *El contrato didáctico y las prácticas comunicativas en el aula de clase*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Lehmann, C. (1980). *Geometría Analítica*. New York: Limusa.
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá: Delfín.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Muñoz, C. (2011). *Cómo elaborar y asesorar una investigación de tesis* . México D.F: Prentice Hall.
- Ochoa, J., & Osorio, A. (2017). *Ingeniería didáctica para el estudio del acercamiento de estudiantes con capacidades excepcionales a las soluciones aproximadas de ecuaciones no lineales* . Barranquilla : Universidad del Atlántico .
- Ortiz, A. (2005). La Trigonometría en la Antigüedad. En A. Ortiz Fernández, *La matemática en la antigüedad* (págs. 324-325). Lima: Pontificia Universidad Católica Del Perú.
- Pérez, U. (2014). *Estrategia didáctica para introducir las coordenadas polares y su aplicación en la representación y análisis de la parábola y elipse*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Pinto, H. (2016). *El plano cartesiano, una idea sencilla cuyo desarrollo llevo dos milenios*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas. *L'activitat docente: intervenció, innovació, investigació*, 33-49.
- Rincón, J., & Vanegas, C. (2013). Copo: Explorar el mundo de las coordenadas polares. *Encuentro de Geometria y sus aplicaciones* (págs. 311-312). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional .
- Sánchez, A. (2017). *El plano cartesiano en el contexto de la vida diaria*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Semensato, M., Silva, F, Lopes, M., y Castilho, A., (2019). Utilização do software Graph para ensino de coordenadas polares. *Espacios*, 40(8), 13.

- Sorando , J. (2012). Matemáticas y deporte. Sugerencias para el aula. *Números*, 80(1), 197-220.
- Soto, A. (2013). *El papel de la geometría analítica en la enseñanza de las matemáticas en la educación básica y media* . Medellín : Universidad Nacional de Colombia .
- Vicent, R. (2017). *Estudio del Cálculo Integral en Coordenadas Polares: aportes desde las TIC*. Maturín: Universidad Pedagógica Experimental Libertador.
- Vicent, R., Granado, F., y Pariche, A. (2019). Propuesta para la enseñanza/aprendizaje de las coordenadas polares con Geogebra. *CIAEM*, 1-8.

ANEXOS

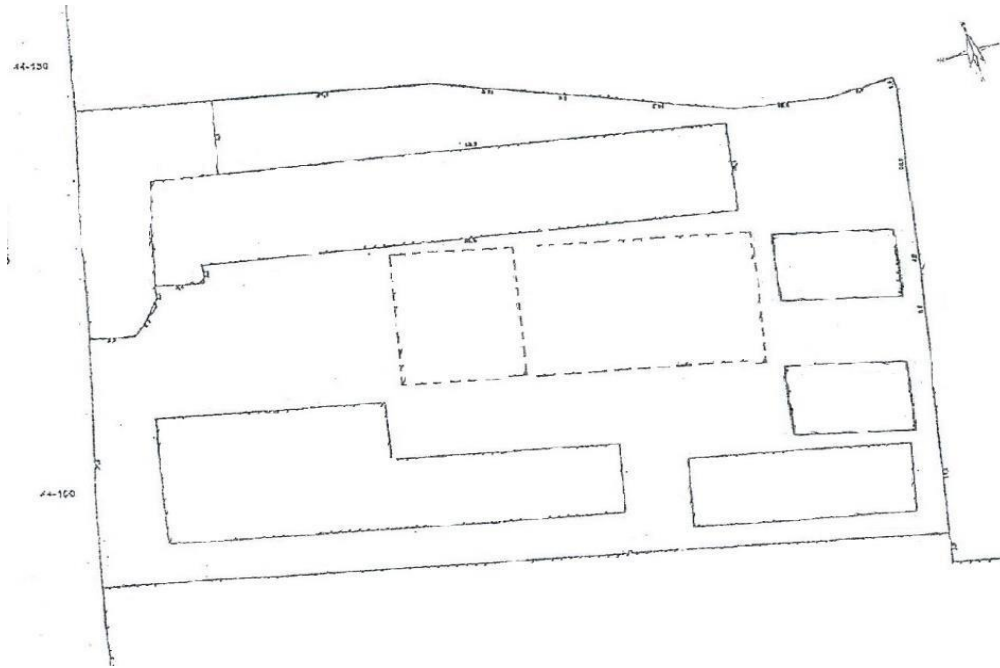


figura 5. Mapa de la primera planta de ENSDB

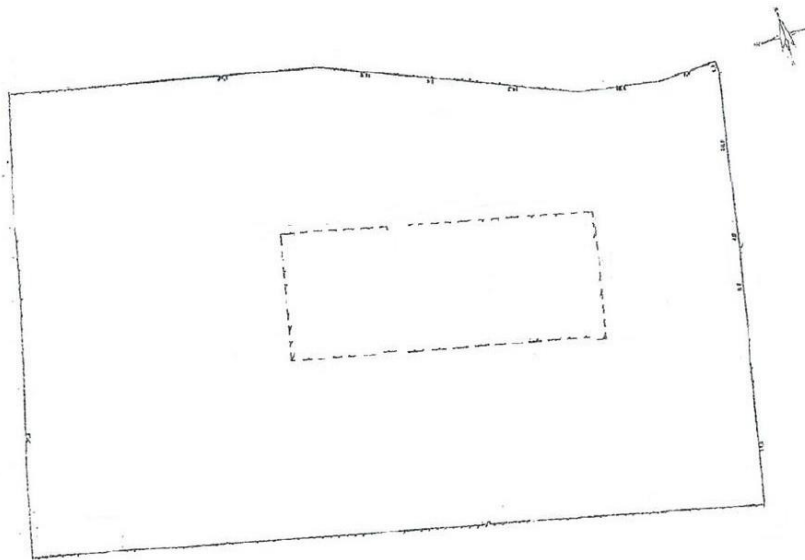


figura 6. Mapa editado de la primera planta de la Institución

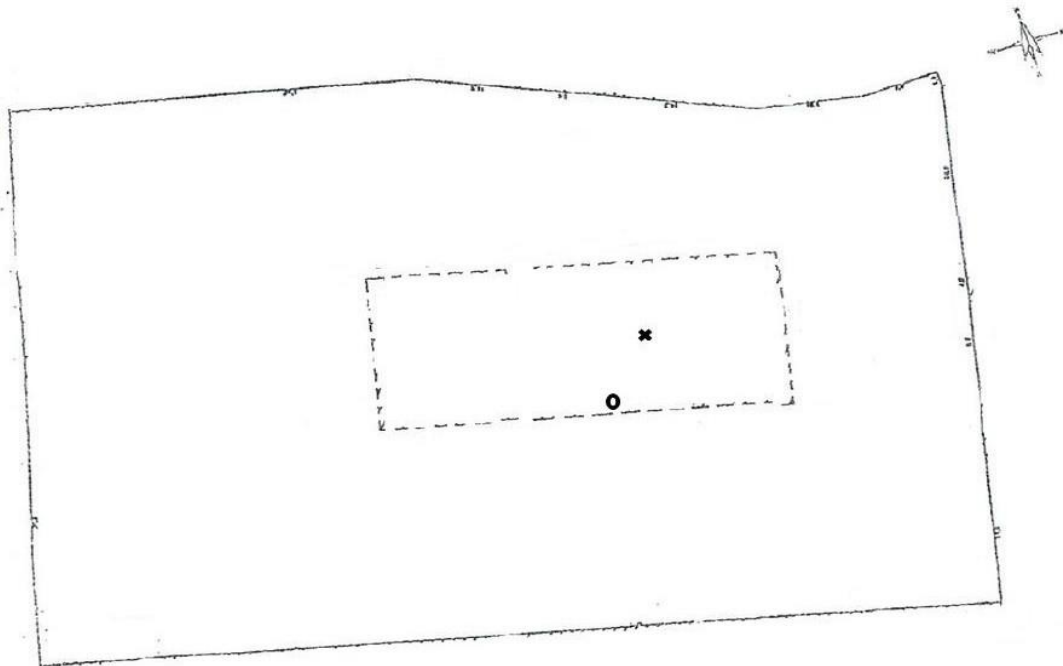


figura 7. Mapa serie 1-1

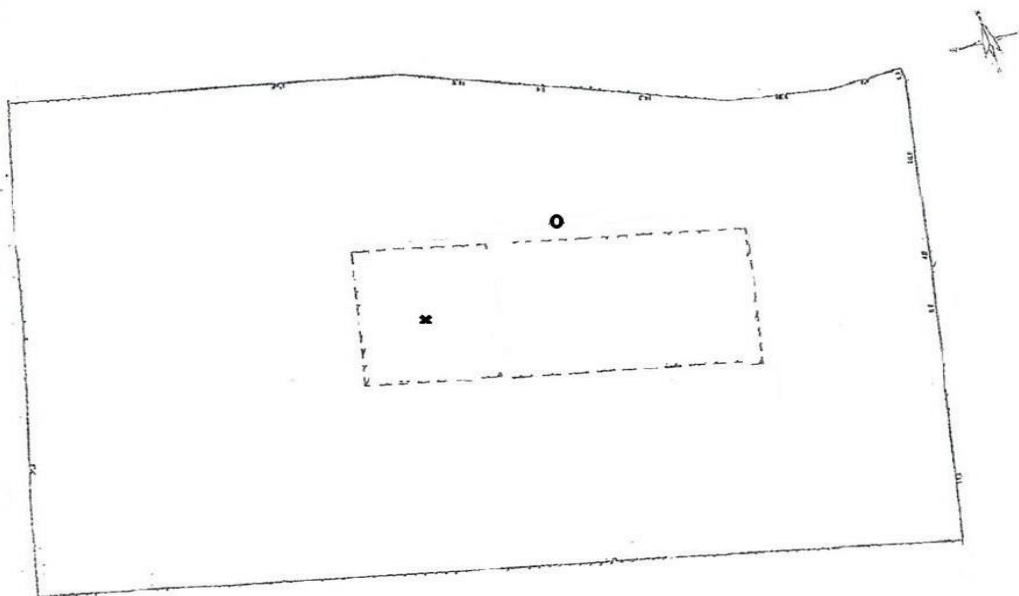


figura 8. Mapa serie 1-2

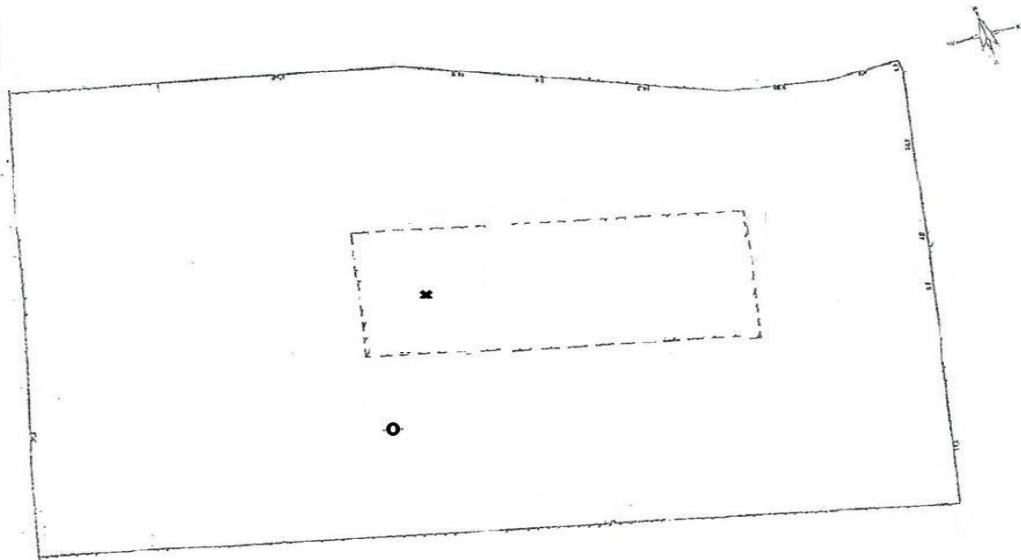


figura 9. Mapa serie 1-3

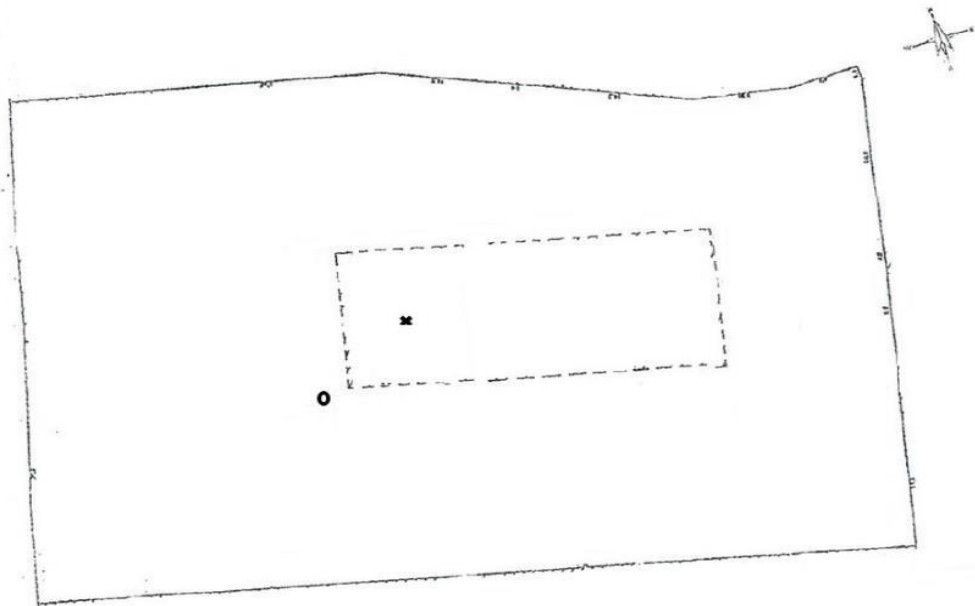


figura 10. Mapa serie 1-4

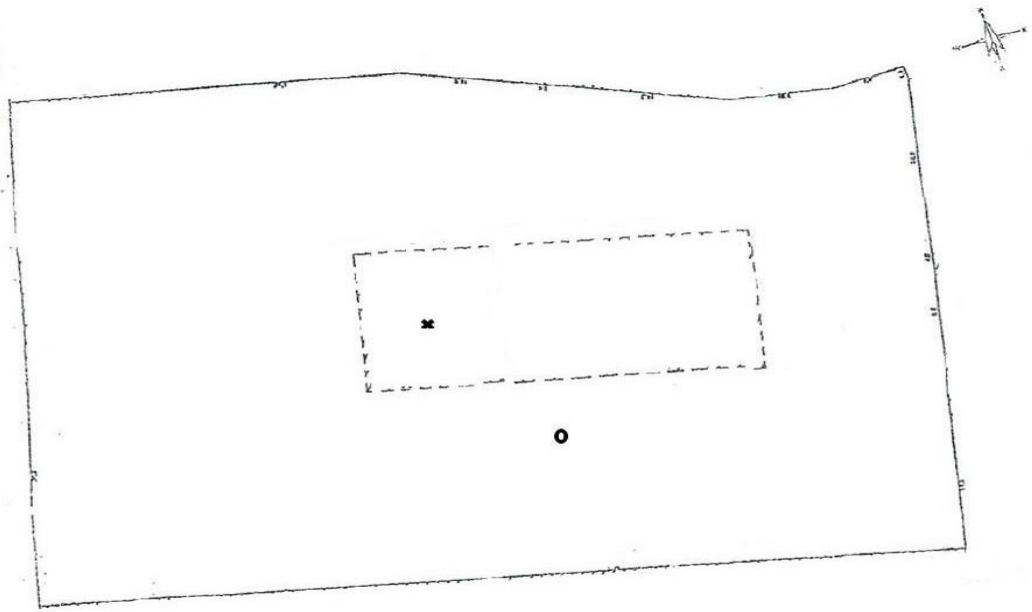


figura 11. Mapa serie 2-1

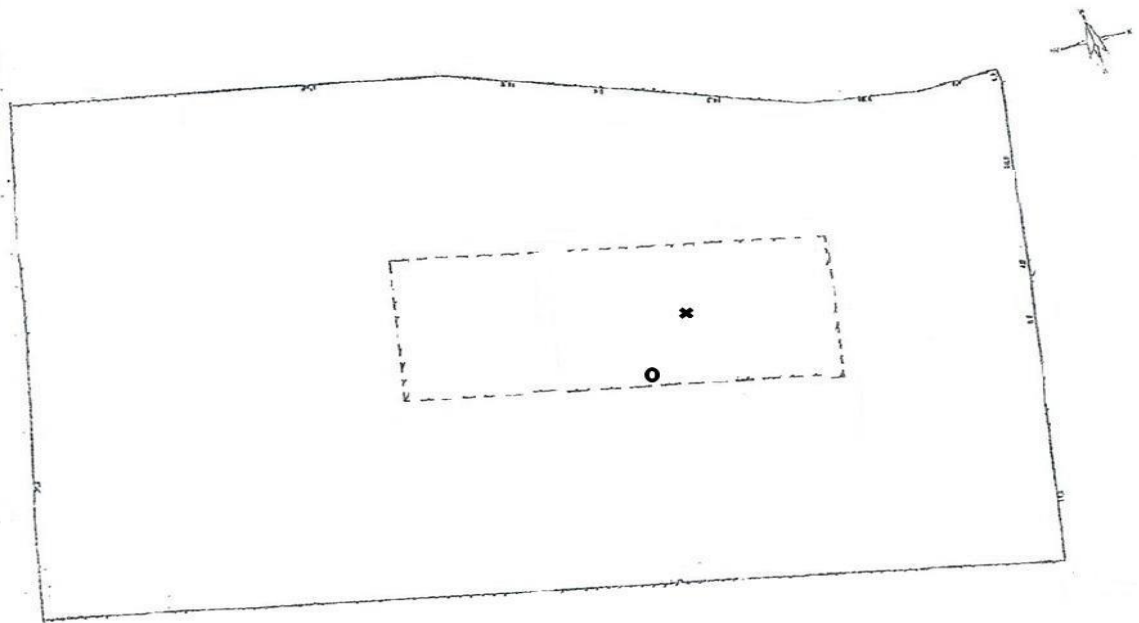


figura 12. Mapa serie 2-2

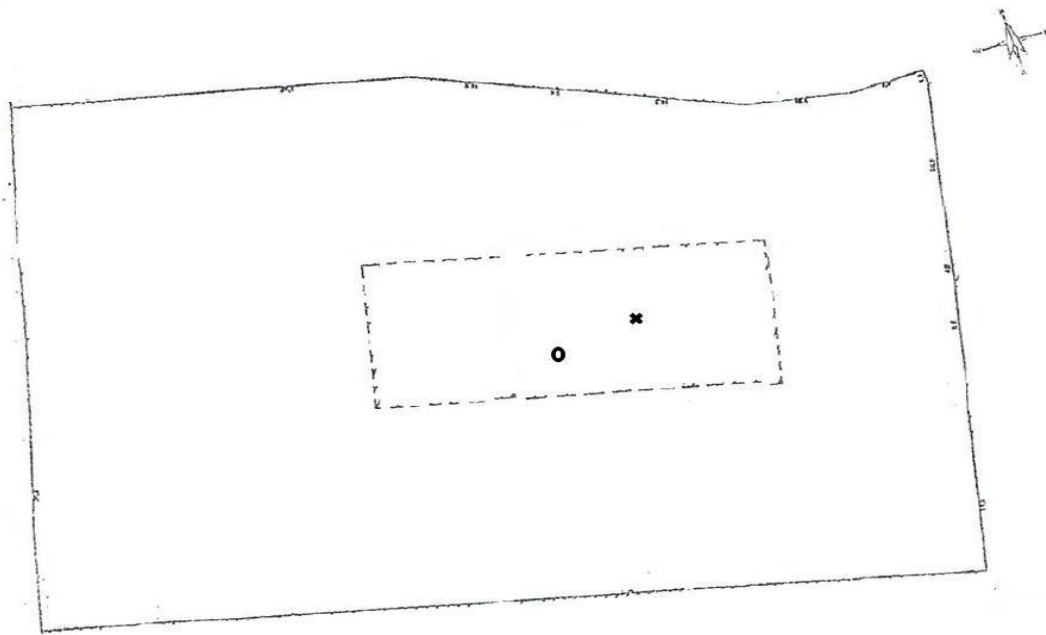


figura 13. Mapa serie 2-3

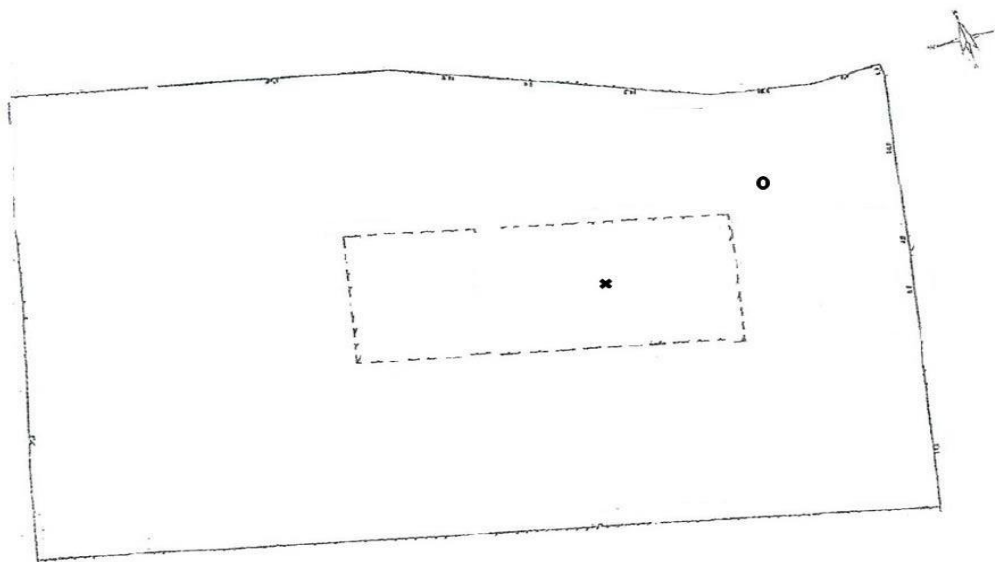


figura 14. Mapa serie 2-4



figura 15. Evidencia de hacer coincidir el norte del mapa con el de la brújula en la tarea 1

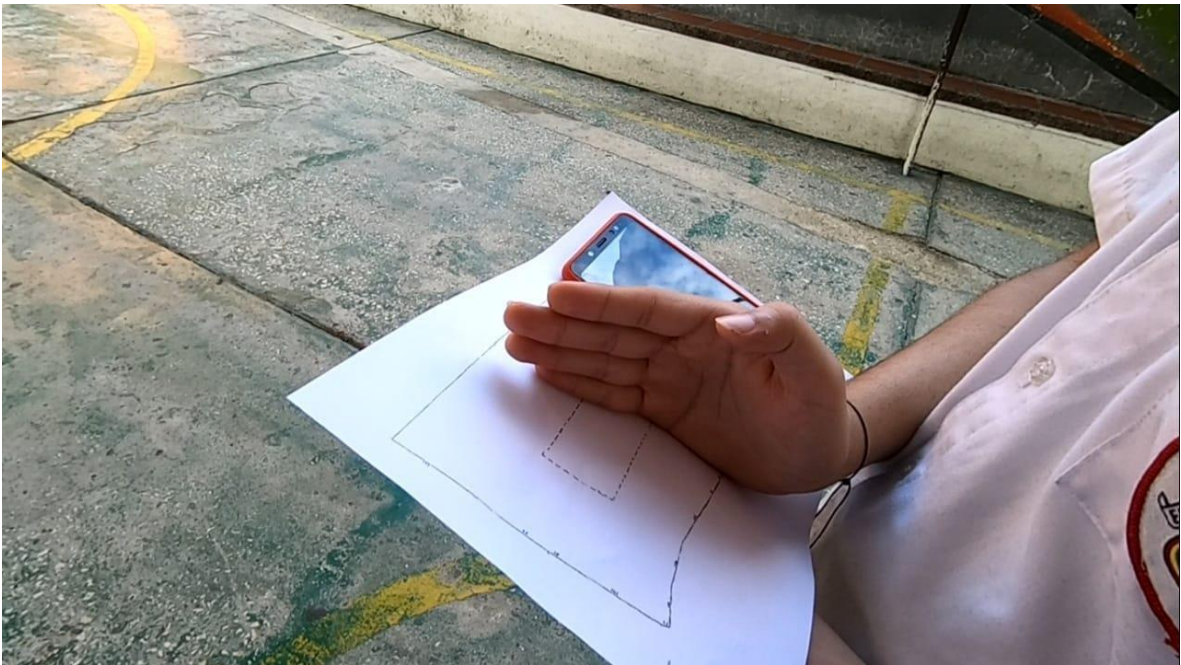


figura 16. Evidencia de estimación de ángulos con la brújula en la tarea 1



figura 17. Evidencia identificación de punto de partida en la tarea 1



figura 18. Evidencia utilización de puntos cardinales en la tarea 1



figura 19. Evidencia de comparación de mapas en la tarea 1



figura 20. Evidencia de llegada a la marca en la tarea 1



figura 21. Evidencia de hacer coincidir las medidas de las brújulas en la tarea 2



figura 22. Evidencia de comparación de datos del mapa con la brújula en la tarea 2



figura 23. Evidencia partida de batalla naval en la tarea 3

