Este libro nace de la demostración clásica del teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias basado en el teorema de punto fijo de Banach. La vida real se modela por EDP's no lineales de ahí el interés de estudiar las soluciones de estas ecuaciones. Invitamos al lector interesado en el análisis funcional y ecuaciones en derivadas parciales a esta aventura de transformar EDP's no Lineales en ecuaciones integrales y resolver estas vía mapeo de contracción.

Cristian Jesús Rojas Milla
Dr. en Matemáticas - Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Especialidad ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos
Asesor Dr. Pavel Naumkin
Centro de ciencias matemáticas – UNAM, Morelia, Mexico

Alex de Jesús Pico Amaya
Matemático - Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia
Tesis de Pregrado en Ecuaciones Diferenciales Parciales
Asesor Dr. Cristian Jesús Rojas Milla
Universidad del Atlántico, Barranquilla-Colombia

Universidad del Atlántico

Escanée el código QR para conocer más títulos publicados por el Sello Editorial Universidad del Atlántico

ISBN 978-958-5525-40-5

MÉTODOS CUALITATIVOS para ecuaciones en derivadas parciales no lineales

Sello Editorial
UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

MÉTODOS CUALITATIVOS
para ecuaciones en derivadas parciales no lineales

ALEX PICO AMAYA - CRISTIAN ROJAS MILLA

MÉTODOS CUALITATIVOS
para ecuaciones en
derivadas parciales
no lineales

Universidad del Atlántico

MÉTODOS CUALITATIVOS
para ecuaciones en derivadas parciales no lineales

ALEX PICO AMAYA
CRISTIAN ROJAS MILLA

Sello Editorial
UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

Catalogación en la publicación. Universidad del Atlántico. Departamento de Bibliotecas
Pico Amaya, Alex
Métodos cualitativos : para ecuaciones en derivadas parciales no lineales / Alex Pico Amaya, Cristian Rojas Milla. Barranquilla: Sello Editorial Universidad del Atlántico, 2018.
86 páginas. 21 x 27 Centímetros. Incluye bibliografía.
ISBN 978-958-5525-40-5 (Libro descargable PDF)
1. Ecuaciones diferenciales no lineales. 2. Teorías no lineales. 3. Ecuaciones – Cálculo. I. Alex Pico Amaya. II. Cristian Rojas Milla.
CDD: 515.25 P598

Metodos cualitativos para ecuaciones en derivadas parciales no lineales
Autoría: Alex Pico Amaya - Cristian Rojas Milla

Universidad del Atlántico, 2018

Edición:
Sello Editorial Universidad del Atlántico
Km 7 Vía Puerto Colombia (Atlántico)
www.uniatlantico.edu.co
publicaciones@mail.uniatlantico.edu.co

Producción Editorial:
Calidad Gráfica S.A.
Av. Circunvalar Calle 110 No. 6QSN-522
PBX: 336 8000
info@calidadgrafica.com.co
Barranquilla, Colombia

Publicación Electrónica

Cómo citar este libro:
Pico Amaya, A., & Rojas Milla, C. (2018). *Metodos cualitativos para ecuaciones en derivadas parciales no lineales*. Barranquilla: Ediciones Universidad del Atlántico.

Contenido

Introducción 7

Prefacio 11

CAPÍTULO 1

Fundamentos 13

Espacios de Banach 13

Desigualdad de Hölder 16

Espacios de Hilbert 16

Una Desigualdad Importante 17

Lema de Contracción 17

Los espacios de Sobolev en R*n* 27

Teorema de Inmersión de Sobolev 30

Distribuciones Periódicas 37

CAPÍTULO 2

Problema no lineal de onda 39

Problema Lineal 39

Existencia local de la solución moderada 51

Existencia global de la solución moderada 54

CAPÍTULO 3

Problema no lineal tipo Burgers 61

Introducción 61

Existencia local de solución clásica 68

Solución global al problema tipo Burgers 71

APÉNDICE A

Resultados Importantes 79

Máximos Intervalos de Existencias 81

Principio de Extensión 82

Referencias bibliográficas 85

Introducción

La teoría de ecuaciones en derivadas parciales juega un papel muy importante en la teoría de la Física-Matemática contemporánea, ya que tales ecuaciones de manera natural tienen aplicación en diversas áreas de la ciencia como la física, química, ingeniería, biología y otros campos. El caso de datos iniciales periódicos es relativamente nuevo en la literatura. El problema que trataremos en su caso lineal y no lineal es del tipo onda, es decir, del tipo hiperbólica. También en el último capítulo trabajamos una ecuación parabólica e introducimos técnicas para este tipo de problemas que en nuestro caso será una ecuación tipo Burgers. Estas técnicas están basadas en el teorema de punto fijo de Banach, y similar a lo que se hace en EDO, estas técnicas tienen la fuerza suficiente para ser llamadas técnicas cualitativas en EDP, lo que motiva el título de nuestro libro.

La aparición de la no-linealidad en el contexto de las matemáticas viene apareciendo en la literatura científica con mayor frecuencia significativa, desde mediados del siglo xx, al comenzar el auge de los temas que conforman la teoría de la complejidad, el caos, el fractal y análogos. Esa no linealidad, matemáticamente representa una obstrucción o pérdida de diferenciabilidad de las soluciones. Las técnicas que usamos acá son dignas de llamarse teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales partiendo del hecho de que los operadores de Green que se definen en el trabajo son ejemplo de un grupo fuertemente continuo, de ahí la utilización de espacios abstractos como los espacios de Sobolev. El método que usaremos en el siguiente trabajo es asociar a nuestro problema no lineal una ecuación integral que resolveremos vía teorema punto fijo de Banach.

La solución de esta ecuación integral es conocidas como *mild solution*, es decir, solución débil que en principio son solo continuas. Este tipo de soluciones nos llevan a plantear la pregunta: ¿Qué nos permite hablar de derivada?. Hablaremos de derivada pero en el sentido distribucional, de aquí que surge la necesidad de recurrir a espacios donde todo esto tenga sentido como los espacios de Sobolev.

En el libro estudiaremos la existencia de soluciones para el siguiente problema no lineal de onda

$$\begin{cases} u_{tt} + 2\alpha u_t - \beta u_{xx} = -\lambda \partial_x \left(|u|^\sigma u \right) \text{ si } t > 0 \\ u(0,x) = \phi(x), \ \ u_t(0,x) = \psi(x) \text{ si } x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

donde $\Omega = [-\pi, \pi]$ con $\alpha, \beta, \lambda, \sigma > 0$ donde vamos a considerar que las soluciones de (1) satisfacen las condiciones de periodicidad $u(t, x) = u(t, 2\pi + x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$ con los valores iniciales $\varphi(x)$ y $\psi(x)$.

Nos interesa garantizar la existencia y unicidad de las soluciones, para ello estudiaremos el problema lineal

$$\begin{cases} u_{tt} + 2\alpha u_t - \beta u_{xx} = f \text{ si } t > 0 \\ u(0,x) = \phi(x), \ \ u_t(0,x) = \psi(x) \text{ si } x \in \Omega \end{cases} \tag{2}$$

donde f es una función $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ y los datos iniciales $\varphi, \psi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Definimos el operador de Green

$$\mathcal{G}(t)\psi(t) = e^{-\alpha t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}_n e^{inx} \frac{\sin(t\sqrt{\beta n^2 - \alpha^2})}{\sqrt{\beta n^2 - \alpha^2}}$$

por lo tanto, la solución lineal para el problema lineal periódico puede ser escrito usando la fórmula de Duhamel como

$$u(t) = \widetilde{\mathcal{G}}(t)\phi + \mathcal{G}\psi + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

donde $\widetilde{\mathcal{G}}(t) = (2\alpha - \partial_t)\mathcal{G}(t)$. Nuestro primer paso será hacer las estimaciones sobre el problema lineal períodico (2) en los espacios de Sobolev H^s. Cada vez que tenemos la solución del problema lineal, definimos el siguiente operador

$$\mathcal{A}v(t) = \widetilde{\mathcal{G}}(t)\phi + \mathcal{G}\psi + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(v)(\tau)d\tau,$$

con dominio y contradominio es el espacio $C([0, T] : H^s)$. Esta transformación es una contracción en un espacio métrico completo, y así tiene un punto fijo, lo cual garantiza la solución para tiempos pequeños de la ecuación no lineal.

Físicamente trabajamos una ecuación de onda con un término de amortiguamiento ($2\alpha u_t$) sometida a un potencial de auto-interacción $(D_x|u|^\sigma u)$; en física el término de amortiguamiento tiene α que sería la constante de amortiguamiento negativa pero nuestro resultado sirven llevando el conteo de los signos y factores imaginarios "*i*"; y la interpretación física cambiaría algunas funciones oscilatorias a amortiguadas y viceversa pero en Matemáticas se procede como lo hemos hecho. Esta ecuación tiene muchas motivaciones físicas; son importantes tanto en teoría de campo como de partículas, en electromagnetismo estarían describiendo una onda amortiguada con un término de auto-interacción proporcional a potencias del campo eléctrico y este tipo de fenómeno se observa con láseres de muy alta potencia propagandose en un medio material. Otro ejemplo con este tipo de potenciales es la ecuación de Schöringer no lineal (que es una EDP parabólica) que lleva un potencial u_t^3 y otras veces $|u|^2u$.

El estudio de las ecuaciones de los fluidos incomprensibles tienen cada vez mayor interés, tanto desde el punto de vista teórico (integrales singulares...) como desde el enfoque más aplicado (simulaciones numéricas...). Las ecuaciones que aparecen modelando problemas de mecánica de fluidos son variadas, pero las más importantes son las de Euler y Naiver-Stokes. La ecuación parabólica que estudiamos tiene aplicaciones en el estudio de turbulencias. La turbulencia tiene como efecto principal facilitar que dos fluidos se mezclen. Así nuestro problema viene de una simplificación de la dimensión espacial.

Prefacio

La teoría de ecuaciones dispersivas no lineales no lineales evolutivas juega un papel muy importante en la teoría de la Física-Matemática contemporánea, ya que tales ecuaciones aparecen en la teoría de campos, la biología, en la ingeniería y en otros campos de la ciencia. El caso de datos iniciales periódicos es relativamente nuevo en la literatura. Para nuestra investigación solo necesitamos requisitos de ecuaciones diferenciales ordinarias, análisis real y fundamentos de variable compleja, y el libro es auto-contenido en lo posible.

El concepto de no-linealidad en el contexto de las Matemáticas viene apareciendo en la literatura científica con significativa mayor frecuencia, desde mediados del siglo XX, al comenzar el auge de los temas que conforman la teoría de la complejidad, el caos, el fractal y análogos.

La moderna Física-Matemática entre otras cosas estudia la teoría de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen muchos procesos físicos. Pero son muy pocas las ecuaciones en derivadas parciales que pueden ser resueltas explícitamente; en vista de esto diferentes técnicas cualitativas juegan un rol importante, de allí la motivación de escribir este libro.

Puede decirse que hasta ese momento en Matemáticas se trataba de aproximar las funciones manejadas en Física y disciplinas afines, de por sí no-lineales, mediante simple supresión de términos de grado superior, a expresiones lineales mucho más fáciles de manipular, aunque el resultado se apartaba significativamente de la realidad física. Es aquí que se implementan nuevos y eficaces procedimientos de linealización que conducen a mayor aproximación a los valores verdaderos, a la vez que los sistemas no-lineales se hacen cada vez más presentes en la ciencia moderna.

Capítulo 1

Fundamentos

En este Capítulo describiremos las herramientas básicas que necesitamos para estudiar nuestro problema. Presentaremos nociones fundamentales de análisis funcional, teoría de Fourier y objetos como las distribuciones periódicas y los espacios de Sobolev asociados a estas, que llamaremos Sobolev periódicos, debido al Matemático Ruso Sergei Sobolev por los años de 1935. También haremos un breve recorrido por las distribuciones temperadas, es decir, el espacio de Sobolev que toma como funciones test a las funciones C_0^∞, que denota a las funciones C^∞ con soporte compacto.

Espacios de Banach

Definición 1.1. *Sea V un espacio vectorial real o complejo. una norma en V es una función*

$$\|\cdot\| : V \to [0, \infty),$$

cualquiera que sean u, v ∈ V y α un escalar,

1) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0;$

2) $\|av\| = |a||v|;$

3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$

La propiedad 3) es llamada la desigualdad triangular. En el caso en que $\|\cdot\|$ satisface las propiedades 2) y 3) pero no satisface 1) decimos que $\|\cdot\|$ es una seminorma en V. Un espacio vectorial V dotado de una norma $\|\cdot\|$ es llamado un espacio vectorial normado; se usaría por lo general la notación $(V, \|\cdot\|)$.

En lo siguiente estaremos interesados en espacios vectoriales complejos de modo que si no se afirma explícitamente lo contrario, todos los espacios vectoriales sobre los que trabajaremos serán sobre el cuerpo de los números complejos.

Sea V un espacio vectorial normado. Una consecuencia inmediata de la desigualdad triangular es

$$\|u - v\| \geq |\|u\| - \|v\||.$$

Sea v_n una sucesión en v. Decimos que la sucesión converge en norma a un elemento $v \in V$ si

$$\|v_n - v\| \to 0 \ \ cuando \ \ n \to \infty.$$

Más precisamente, si dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathrm{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow \|v_n - v\| < \epsilon.$$

La sucesión v_n es una sucesión de Cauchy si

$$n, m \geq N \Rightarrow \|n_n - v_m\| < \epsilon.$$

Es claro que toda sucesión convergente es de Cauchy, el recíproco es falso.

Definición 1.2. *Un espacio normado donde toda sucesión de Cauchy converja se llama espacio completo o espacio de Banach.*

Ejemplo 1.3. *Si* $1 \leq p \leq \infty$, $p \in \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$, *y si* $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ *definimos*

$$\|z\|_p = \left[\sum_{j=1}^{n} |z_j|^p\right]^{\frac{1}{p}}, \ \ 1 \leq p \leq \infty; \tag{1.1}$$

$$\|z\|_\infty = \sup_{1\leq j\leq n} |z_j|.$$

Entonces $\mathbb{C}^n$ *es un espacio de Banach en relación a cualquiera de esas normas. De hecho, todas ellas son equivalentes. Esto es, si* $p, q \in [1,\infty)$, *existen constantes* C_1 *y* C_2 *tal que*

$$C_1\|z\|_p \leq \|z\|_q \leq C_2\|z\|_p,$$

cualquiera sea $z \in \mathbb{C}^n$. *La norma* $|z|_2$ *es llamada la norma euclidiana.*

Ejemplo 1.4. *Sea* $l^p = l^p(\mathbb{Z})$ *el espacio de las sucesiones complejas* $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *tales que*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^p < \infty,$$

donde $p \in [1,\infty)$. *Es f´acil ver que* l^p *es un espacio vectorial con la suma y multiplicación por escalar definida componentes a componentes, esto es*

$$(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} + (\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\alpha_n + \beta_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

$$\lambda(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\lambda\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

El espacio l^p dotado de la norma

$$\|\alpha\|_p = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{1.2}$$

es completo. El espacio $l^\infty = l^\infty(\mathbb{Z})$ *de las sucesiones complejas acotadas es también un espacio de Banach. La norma* $\|\cdot\|_p$ *es llamada la norma* l^p, $1 \leq p \leq \infty$.

Ejemplo 1.5. *para cada* $p \in [1, \infty)$ *defina* $\|\cdot\|_p$ *en* $C([a, b])$ *por*

$$\|f\|_p = \left[\int_a^b |z_j|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Entonces cualquiera sea $p \in [1,\infty)$, $(C[a, b], \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial que no es completo. En tanto que $C[a, b]$ es un espacio de Banach en relación a la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

La norma $\| f \|_p$ es llamada la norma de L^p, $1 \leq p \leq \infty$; la norma L^∞ es también llamada la norma del supremo. El siguiente teorema nos enseña una desigualdad muy útil en nuestros cálculos.

Desigualdad de Hölder

Teorema 1.6. ***(Desigualdad de Hölder):*** *Sean* $f \in L^p([-\pi, \pi])$ *y* $g \in L^q([-\pi, \pi])$*, donde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Entonces el producto* $fg \in L^1([-\pi, \pi])$ *y*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Espacios de Hilbert

Definición 1.7. *Un espacio de Banach cuya norma proviene de un producto interno es llamado un espacio de Hilbert.*

Ejemplo 1.8. *Como vimos anteriormente* $\mathbb{C}^n$ *es un espacio de Banach en relación a cualquiera de las normas* $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$*, definidas en (1.6). En tanto que* $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ *es de Hilbert sí y solamente sí p=2.*

En ese caso la norma proviene del producto interno

$$\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j\bar{w}_j.$$

donde $z = (z_1, ..., z_n)$, $w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n$.

Una Desigualdad Importante

Teorema 1.9. *Para todo u, v* ∈ R*, σ* > 0*, se cumple que*

$$||u|^\sigma u - |v|^\sigma v| \leq (|u|^\sigma + |v|^\sigma)|u - v|.$$

Prueba: Consideremos el intervalo [*a, b*] con *a* < *b* y *a, b* ∈ R. Definiendo *f* (*x*) = $x|x|^\sigma$, $\sigma >$ 0, tenemos que

$$f'(x) = \begin{cases} (\sigma + 1)x^\sigma & si \;\; x \geq 0 \\ (-x)^\sigma(\sigma + 1) & si \;\; x < 0 \end{cases}$$

Por el teorema del valor medio para derivadas, tenemos que existe *c* ∈ (*a, b*) tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Por tanto, procediendo por casos tenemos que:

$$Sean \;\; a, b > 0,$$

$$|f(b) - f(a)| = (\sigma + 1)c^\sigma(b - a) \leq (|b|^\sigma + |a|^\sigma)(b - a)$$

$$a < 0, \;\; b > 0.$$

Así para *c* < 0, tenemos,

$$|f(b) - f(a)| = |f'(c)(b - a)| = (-c^\sigma)(\sigma + 1)|b - a| \leq ||b|^\sigma + |a|^\sigma||b - a|.$$

Ahora para el caso *a* < 0*, b* < 0, el proceso es análogo al caso anterior.

Lema de Contracción

Teorema 1.10. *Sea M un conjuntos cerrado de un espacio de Banach. Sea f:M→M una función y supongamos que existe un número K,* 0 < *K* < 1*, tal que, para todo x, z* ∈ *M , tenemos*

$$|f(x) - f(z)| \leq K|x - z|.$$

Entonces f tienes un punto fijo, esto es, existe un único punto $x_0 \in M$ tal que $f(x_0) = x_0$. Si $x \in M$, entonces la sucesión $f\{^n(x),\}$ (iteración de f repetida n-veces), es una sucesión de Cauchy que converge al punto fijo.

Prueba: Tenemos que para $x \in M$ fijo

$$|f^2(x) - f(x)| = |f(f(x)) - f(x)| \leq K|f(x) - x|.$$

Por inducción

$$|f^{n+1}(x) - f^n(x)| \leq K|f^n(x) - f^{n-1}(x)| \leq K^n|f(x) - x|.$$

En particular vemos que el conjunto de elementos $\{f^n(x)\}$ está acotado, pues

$$|f^n(x) - x| \leq |f^n(x) - f^{n-1}(x)| + |f^{n-1}(x) - f^{n-2}(x)| + ... + |f(x) - x|$$

En particular vemos que el conjunto de elementos $\{f^m(x)\}$ está acotado, pues

$$\begin{aligned} |f^n(x) - x| &\leq |f^n(x) - f^{n-1}(x)| + |f^{n-1}(x) - f^{n-2}(x)| + ... + |f(x) - x \\ &\leq (k^{n-1} + K^{n-2} + ... + K)|f(x) - x|, \end{aligned}$$

y la serie geométrica converge.

Ahora de nuevo por inducción, para cualquier entero $m \leq 1$ y $k \leq 1$ tenemos

$$|f^{m+k}(x) - f^m(x)| \leq K|f^k(x) - x|.$$

Ya vimos que el término $f^k(x) - x$ está acotado, independientemente de k. Por lo tanto, existe N tal que, si m y $n \geq N$, y digamos que $n = m + k$, tenemos

$$|f^{m+k}(x) - f^m(x)| < \epsilon,$$

pues $k^m \to 0$ cuando $m \to \infty$. Por lo tanto, la sucesión $\{f^n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy. Sea x_0 su límite. Seleccionemos N tal que, para todo $n \leq N$, tenemos

$$|x_0 - f^n(x)| < \epsilon,$$

$$|f(x_0) - f^{n+1}(x)| \leq K|x_0 - f^n(x)| < \epsilon.$$

Esto prueba que la sucesión $\{f^n(x)\}$ converge a $f(x_0)$. Por lo tanto $f(x_0) = x_0$ y x_0, es un punto fijo. Finalmente, supongamos que x_1 también es un punto fijo, esto es, que $f(x_1) = x_1$. Entonces

$$|x_1 - x_0| = |f(x_1) - f(x_0)| \leq K|x_1 - x_0|.$$

Como $0 < K < 1$, se sigue que $x_1 - x_0 = 0$ y $x_1 = x_0$. ■

Una función como la del teorema se llama contracción.

SERIES DE FOURIER

Sea $l > 0$ y $f : [-l, l] \to \mathrm{R}$ una función integrable. La serie de Fourier de f es la serie

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right],$$

donde los coeficientes a_n, $n \in \mathrm{Z}^+$ y b_n, $n \in \mathrm{N}$, son dados por las fórmulas de Euler-Fourier, las cuales son

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

Nótese que el cambio de variable $y = \frac{\pi}{l}$, permite escribir la serie de Fourier como:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_n \cos(ky) + b_n \sin(ky)\right].$$

En otras palabras, en vez de considerar funciones periódicas de período $2l$ arbitrario, consideramos funciones periódicas de periodo 2π, sin ninguna pérdida de generalidad.

La próxima simplificación es reescribir las series de Fourier de una forma más compacta usando exponenciales complejas, recordando que

$$\cos(ky) = \frac{e^{iky} + e^{-iky}}{2};$$

$$\sin(ky) = \frac{e^{iky} - e^{-iky}}{2i},$$

obtenemos para todo $k = 1, 2, 3, ..., n$

$$\begin{aligned} a_k \cos(ky) + b_k \sin(ky) &= \left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i}\right) e^{iky} + \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i}\right) e^{-iky} \\ &= \left(\frac{a_k - ib_k}{2}\right) e^{iky} + \left(\frac{a_k + ib_k}{2}\right) e^{-iky}. \end{aligned}$$

Podemos por tanto reescribir la serie de Fourier como

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{iky},$$

donde
$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \;\; c_k = \frac{a_0 - ib_k}{2}, \;\; c_{-k} = \frac{a_0 + ib_k}{2}, \tag{1.3}$$
$$k = 1, 2, ..., n.$$

Supongamos ahora que la serie (1.8) converge uniformemente a una función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},$$

y es claro que las funciones

$$\Phi_k(x) = e^{ikx}, \;\; k \in \mathbb{Z},$$

satisfacen las relaciones de ortogonalidad

$$\begin{aligned}\langle \Phi_k, \Phi_j \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_k(x)\overline{\Phi_j(x)}dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}e^{-ijk}dx \\ &= \begin{cases} 0 \ \ si \ \ j \neq k \\ 2\pi \ \ si \ \ j = k \end{cases} \\ \langle f, \Phi_j \rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \langle \Phi_n \Phi_k \rangle \\ &= 2\pi c_k,\end{aligned}$$

y de allí

$$\begin{aligned}c_k &= \frac{1}{2\pi}\langle f, \Phi_k \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Dada una función $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$, donde esto denotará el conjunto de funciones continuas y periódicas en ese intervalo, la serie de Fourier generada por f y la serie (1.3) donde c_k es dado por (1.4). La sucesión compleja $\{\hat{f}(k)\}_{k\in Z}$ definida por

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx,$$

es llamada la transformada de Fourier de f y los números complejos $\hat{f}(x) = c_k$ son los coeficientes de Fourier de f. Nótese que la aplicación

$$f \to \hat{f}$$

es lineal y

$$\begin{aligned}|\hat{f}(k)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx \\ &= \frac{1}{2\pi}||f||_1 \leq ||f||_\infty.\end{aligned}$$

cualquiera sea $f \in (C_{per}([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Por tanto la aplicación que lleva f en su transformada $\hat{f}$, es una transformación lineal continua de $(C_{per}([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_1)$ en $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ con su norma usual.

Enunciaremos un teorema en función de encontrarnos con una identidad que se usa mucho en el trabajo, esta identidad recibe el nombre de identidad de Parseval. De inmediato enunciaremos un teorema, que nos da condiciones de convergencia uniforme para una función con derivada seccionalmente continua. En el próximo teorema $SC_{per}(2\pi)$ denotará a las funciones seccionalmente continuas y periódicas de período 2π.

Teorema 1.11. *Supongamos que $f \in C_{per}(2\pi)$, y diferenciable en $(-\pi, \pi)$ menos un número finito de puntos, con $f \in SC_{per}(2\pi)$. Entonces la serie de Fourier de f converge uniforme-mente en* R *para f.*

Teorema 1.12. *Sean f, $g \in C_{per}(2\pi)$ y suponga que f es diferenciable en (-l,l) menos un número finito de puntos con $f' \in SC_{per}(2\pi)$. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi}\langle f, g\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}.$$

En particular vale la identidad de Parseval.

$$\frac{1}{2\pi}||f||^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right|^2.$$

Prueba:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\langle f, g\rangle &= \frac{1}{2l}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx \\
&= \frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\int_{-\pi}^{\pi} \overline{g(x)}e^{inx}dx \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\frac{1}{2l}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{inx}dx} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}.
\end{aligned}$$

En particular entonces:

$$\frac{1}{2l}\langle f, f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right|^2 = ||f||^2. \qquad \blacksquare \tag{1.5}$$

A la igualdad (1.5) se le llama identidad de Parseval.

El siguiente teorema que enunciaremos, nos da condiciones para saber cuando tenemos convergencia uniforme de la serie de Fourier de una función continua.

Teorema 1.13. *Suponga que f es continua en* [–π, π] *y que su serie de Fourier converge absolutamente, i.e.*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(k)\right| < \infty.$$

Entonces la serie de Fourier de *f* converge uniformemente a *f* , es decir,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = f(x), \;\; uniformemente \;\; en \;\; x.$$

Nótese que existen funciones continuas cuyas series de Fourier son divergentes. ¿Qué condiciones en f garantizan la convergencia absoluta de la serie de Fourier? Como veremos en el próximo teorema la suavidad en f implicará convergencia absoluta.

Teorema (1.14). *Suponga que f es dos veces continuamente diferenciable en* [–π, π]. *Entonces* $\hat{f}(k) = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$, *cuando* $|k| \to \infty$ *de manera que la serie de Fourier converge absoluta y* uniformemente para *f.*

Prueba: Suponga que $k \neq 0$. integrando por partes y usando la periodicidad de f tenemos que

$$\begin{aligned}
2\pi\hat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{ik}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{(ik)^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)e^{-ikx}dx \\
&= -\frac{1}{k^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)e^{-ikx}dx.
\end{aligned}$$

Luego como $f''(x)$ es continua, así en $[-\pi, \pi]$, está acotada y de allí tenemos que:

$$\left|\hat{f}(k)\right| \leq \frac{c}{k^2}$$

por tanto

$$\hat{f}(k) = O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

es decir, que con condiciones de suavidad impuesta a la función podemos asegurar rapidez de convergencia más rápida que cuadrática. ■

DISTRIBUCIONES

Denotaremos $C_0^{\infty}(\Omega)$ el conjunto de funciones pertenecientes a $C^{\infty}(\Omega)$, con soporte compacto en Ω. Llamaremos funciones test a los elementos de $C_0^{\infty}(\Omega)$.

Ejemplo 1.15. *Es fácil verificar que la función dada por:*

$$\eta(x) = \begin{cases} ce^{\frac{1}{|x|^2-1}} & si \;\; 0 \leq |x| \leq 1 \\ 0 & si \;\; |x| \geq 1 \end{cases}$$

pertenece a C_0^{∞}(R).

La función anterior es un típico ejemplo de una función test. A $C_0^\infty(\Omega)$ le dotaremos de una adecuada noción de convergencia. Observe que el símbolo

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \ldots \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

denota la derivada de orden $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Definición 1.16. *Sea* $\{\varphi_k\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ *y* $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ *. Diremos que*

$$\varphi_k \to \varphi \;\; en \;\; C_0^\infty(\Omega) \;\; cuando \;\; k \to \infty,$$

Si se cumple,

1. *$D^\alpha\varphi_k \to D^\alpha\varphi$ uniformemente en* Ω *para todo* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
2. *Existe un conjunto compacto $K \subset \Omega$, contenido el soporte de toda* φ_k .

Es posible mostrar que el límite así definido es único. El espacio $C_0^\infty(\Omega)$ es denotado por D(Ω), cuando lo equipamos con la noción anterior de convergencia.

Fijemos nuestra atención en los funcionales lineales de D (Ω). Si L es uno de estos, usaremos el corchete L, φ para denotar la acción de L en la función test φ.

Diremos que la función lineal

$$L : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R},$$

es continuo en D(Ω) si

$$\langle L, \varphi_k \rangle \to \langle L, \varphi \rangle \;\; \varphi_k \to \varphi \;\; \mathcal{D}(\Omega).$$

Definición 1.17. *Una distribución en* Ω *es un funcional lineal continuo en* D(Ω). *El conjunto de distribuciones es denotado por* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dos distribuciones F y G coinciden si toda acción en una función test es la misma, es decir, si

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle G, \varphi \rangle \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Para toda $u \in L^2(\Omega)$ corresponde el funcional I_u cuya acción en φ es

$$\langle I_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u\varphi dx.$$

El cual es ciertamente continuo en D(Ω). Por lo tanto I_u es una distribución en $\mathcal{D}'(\Omega)$. Nótese que la función I_u, puede ser identificada con u. Luego la noción de distribución generaliza la noción de función.

Los mismos argumentos muestran que toda función $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ pertenece a $\mathcal{D}'(\Omega)$ y

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_\Omega u\varphi dx.$$

D′(Ω) es un espacio lineal. Si α, β son escalares reales (o complejos), $\varphi \in$ D(Ω) y L_1, $L_2 \in$ D′(Ω), definimos $\alpha L_1 + \beta L_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ por medio de la fórmula,

$$\langle \alpha L_1 + \beta L_2, \varphi \rangle = \alpha \langle L_1, \varphi \rangle + \beta \langle L_2, \varphi \rangle.$$

En D′(Ω) podemos introducir una noción de convergencia d´ebil: $\{L_k\}$ converge a L en D′(Ω) si

$$\langle L_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle L, \varphi \rangle \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Si $1 \leq p \leq \infty$ tenemos el encaje continuo

$$L^p(\Omega) \rightarrow L^1_{loc}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

Esto significa que si $u_k \rightarrow u$ en $L^p(\Omega)$ o en $L^1(\Omega)$, entonces $u_k \rightarrow u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$. Como observación de lo anterior podemos ver que las distribuciones son generalizaciones de las funciones localmente integrables. Enunciaremos dos teoremas que serán útiles en lo que sigue, los cuales son teoremas importantes tanto de la teoría de integración, como del análisis de Fourier.

Teorema 1.18. *(Teorema de la convergencia dominada)*

Sea $\{g_n\}$ *una sucesión de funciones medibles e integrables convergiendo en medida en casi todas partes a una función integrable* g*. Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones medibles tales que* $|f_n| \leq g_n$ *y* f_n *converge a* f *en medida en casi todas partes. Suponga que*

$$\int_S g(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_S g_n(x)d\mu(x).$$

donde S *es un conjunto medible. Entonces*

$$\int_S f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_S f_n(x)d\mu(x).$$

El teorema 1.18 es una generalización del teorema de la convergencia dominada usual.

En su forma más simple y más conocida tenemos $g_n = g$ para todo n

Teorema 1.19. La transformada de Fourier de $f \in L1(R^n)$ es una función continua, acotada y satisface la desigualdad

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \|f\|_{L^1}.$$

En particular la aplicación $f \to \hat{f}$, es un operador acotado de $L^1(\mathbb{R}_n, dx)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n, d\xi)$.

Más aún vale el lema de Riemann-Lebesgue, es decir

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$$

LOS ESPACIOS DE SOBOLEV EN $\mathbb{R}^n$

Sea $s \in \mathbb{R}$. Los espacios de Sobolev en $\mathbb{R}^n$ son los siguientes subconjuntos de $\mathcal{D}'$

$$\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{D}' \ \ tal \ \ que \ \ (1+|\xi^2|)^{\frac{s}{2}} \ \ \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Por tanto $\hat{f} = (1 + |\xi^2|)^{-\frac{s}{2}} h$, con $h \in L^2(\mathbb{R}^n, d\xi)$.

El espacio $\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, es de Hilbert dotado del producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi^2|)^s \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} d\xi.$$

La norma correspondiente es evidente

$$||f||_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi^2|)^s \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi.$$

En particular, $\mathrm{H}^0(\mathbb{R}^n) = L^2_s(\mathbb{R}^n)$. $L^2_s(\mathbb{R})$ denotará a los espacios L^2 con peso. Por otra parte

$$(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}, d\xi),$$

esto es $\hat{f}$ es una función medible y

$$||f||_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi^2|)^s \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi < \infty.$$

Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.20. *Sean $s, s' \in \mathbb{R}$. Entonces:*

i. $\mathrm{H}^s(\mathbb{R}_n) \subset \mathrm{H}^{s'}(\mathbb{R}_n)$ *si $s \leq s'$. Además de eso esta inclusión es continua y densa.*

ii. $\widehat{\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^n)} = L^2(\mathbb{R}^n, (1+|\xi|^2)^s d\xi) = L^2_s(\mathbb{R}^n)$

iii. El dual topológico de $H^s(R_n)$ *es decir, la colección de todos los funcionales lineales continuos de* $H^s(R_n)$ *en* C*, es isométricamente isomorfo a* $H^{-s}(R^n)$.

Prueba: Nótese que $s \geq s'$ implica que

$$(1+|\xi|^2)^{\frac{s'}{2}} \leq (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}.$$

Por tanto, si $f \in H^S(R^n)$ se sigue que

$$\begin{aligned} ||f||_{s'} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi^2|)^{s'} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi^2|)^{s} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = ||f||_s^2 < \infty. \end{aligned}$$

Esto prueba que

$$\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathrm{H}^{s'}(\mathbb{R}^n)$$

y que la inclusión es continua. Para obtener la densidad, basta mostrar que

$$\mathrm{H}^\infty(\mathbb{R}^n) = \cap_{\theta\in\mathbb{R}} \mathrm{H}^\theta(\mathbb{R}^n),$$

es denso en $H^r(R^n)$, cualquiera que sea $r \in R$. Sea $f \in H^r(R_n)$ y considere

$$f_t = (e^{-t|\cdot|^2}\hat{f})^\vee, \quad t \geq 0,$$

entonces $f_t \in H^{infty}(R_n)$ si $t > 0$. De hecho

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi^2|)^\theta \, |(f_t)^\wedge(\xi)|^2 \, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi^2|)^{\theta-r} (1+|\xi^2|)^r e^{-2t|\xi^2|} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\ &\leq \left[\sup_{\zeta\in\mathbb{R}^n} (1+|\xi^2|)^{\theta-r} e^{-2t|\xi^2|}\right] ||f||_r^2 < \infty, \end{aligned}$$

cualquiera que sean *r*; $\theta \in$ R. Observe ahora que

$$\begin{aligned} &||f_t - f||_t^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi^2|)^r \left|1 - e^{-2t|\xi^2|}\right| \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi. \end{aligned}$$

El lado derecho de la última igualdad tiende a cero cuando $t \to 0$ por el teorema de la convergencia dominada. Esto termina la demostraci´on de *i*). Para las partes *ii*) y *iii*), remitimos al lector a [9]. ■

Finalmente es interesante y extremadamente útil observar que si *s* es suficientemente grande entonces los elementos de $H^s(R^n)$ son funciones continuas. Mas Precisamente, vale el Lema de Sobolev o teorema de inmersión de Sobolev:

Teorema de Inmersión de Sobolev

Teorema 1.21. *Sea* $s > \frac{n}{2}$. *Entonces* $H^s(R^n)$ *puede ser inmerso continuamente en el espacio de funciones continuas de* R_n *que tienden a cero cuando* $|x| \to \infty$ *y vale la desigualdad*

$$||f||_{L^\infty} \leq (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi^2|)^{-s}\right]^{\frac{1}{2}} ||f||_s.$$

Prueba: Vamos a probar que sobre las condiciones dadas $\hat{f}(\xi)$ es una función integrable. El resultado se sigue del teorema 1.19. Tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\xi)\right| &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi^2|)^{-\frac{s}{2}} (1+|\xi^2|)^{\frac{s}{2}} \left|\hat{f}(\xi)\right| d\xi \\ &\leq ||f||_s \int_{\mathbb{R}^n} \left[(1+|\xi^2|)^{-s}\right]^{\frac{1}{2n}} < \infty, \end{aligned}$$

toda vez que la integral del miembro derecho de la última desigualdad es finita por hipótesis $s > \frac{n}{2}$

Observación 1.22. *Toda* $f \in H^s(R^n)$, $s > \frac{n}{2}$ *es Hölder-continua, es decir, una función* $f : X \mid Y$ *, donde f es continua diremos que es Hölder-continua sí existe* $C > 0$ *que satisface la desigualdad*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\epsilon} \;\; para \;\; \epsilon > 0.$$

Para concluir este Capítulo enunciamos un teorema que nos va a permitir trabajar de forma continua como discreta y esto último siendo de valiosa ayuda en el caso periódico que nos interesa.

Teorema 1.23. *La transformada de Fourier restringida a* $L^2([-\pi, \pi])$ *es una biyección entre* $L^2([-\pi, \pi])$ *y* $l^2(Z)$. *Además de eso vale la identidad de Parseval*

$$\left\|\hat{f}\right\|_2^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(k)\right|^2 = 2\pi \left\|\hat{f}\right\|_2^2, \;\; f \in L^2([-\pi, \pi]).$$

o equivalentemente

$$\langle f, q\rangle = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)} = 2\pi\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle \;\; f, g \in L^2([-\pi, \pi]).$$

Prueba: Dada $\alpha = (\alpha_k)_{k\in Z} \in l^2(Z)$, defina para $n \in N$,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{|k|\leq n} \alpha_k e^{ikx} \\ &= \sum_{|k|\leq n} \alpha_k \Phi_k(x). \end{aligned}$$

Es claro que $\psi_n \in D$, usando las relaciones de ortogonalidad

$$\|\psi_n - \psi_m\|_{L^2}^2 = 2\pi \sum_{n\leq|k|\leq m+1} |\alpha_k|^2, \qquad (A)$$

Donde sin pérdida de generalidad podemos suponer que $n > m$; como $\alpha \in L^2(Z)$, el lado derecho de (A) tiende a cero cuando $n, m \to \infty$, y por tanto $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en relación a la norma L^2. Así existe $f \in L^2([-\pi, \pi])$ tal que $\psi_n \to f$ en la norma L^2; por la unicidad de la serie de Fourier en $\mathcal{D}'$, $\hat{f} = \alpha$.

Recíprocamente, dada $f \in L^2([-\pi, \pi])$, sea $\psi_n \subseteq$ D tal que $\psi_n \to f$ en la norma L^2.

Como $\psi_n \to f$ en $\mathcal{D}'$, para todo $k \in$ Z,

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\langle f, \Phi_{-k}\rangle \qquad (B) \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle \psi_n, \Phi_{-k}\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \widehat{\psi_n}(k). \end{aligned}$$

por la identidad de Parseval (válida en D), tenemos:

$$\|\psi_n - \psi_m\|_{L^2}^2 = 2\pi \left\|\widehat{\psi_n} - \widehat{\psi_m}\right\|_{L^2}$$

Luego $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en l^2(Z), que es completo y por tanto $\psi_n \to \aleph$ en l^2(Z), para algún $\alpha \in l^2$(Z). Entonces para todo $k \in$ Z,

$$\begin{aligned} &\left|\alpha_k - \widehat{\psi_n}(k)\right|^2 \\ &\leq \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left|\alpha_l - \widehat{\psi_n}(l)\right|^2 \\ &= \|\alpha - \psi_n\|_{L^2}^2 \to 0, \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, y de (B), $\alpha = \hat{f} \in l^2$(Z). Con esto probamos que la transformada de Fourier es una biyección entre $L^2([-\pi, \pi])$ y l^2(Z). ■

Este teorema nos dice entonces que $L^2([-\pi, \pi])$ es la colección de las funciones de la forma

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \Phi_k;$$

donde la convergencia de la serie en todo L^2 es $\alpha = \hat{f} \in l^2(\mathrm{Z})$.

Para terminar esta sección, podemos resumir algunos de los resultados más importantes, sobre la serie de Fourier en la siguiente figura, donde en cada caso la transformada de Fourier $\hat{}$ es una biyección lineal con inversa continua $\check{}$ y las inclusiones son continuas con imagen densa, esto es, cada elemento del espacio mayor puede ser aproximada por una sucesión en el espacio menor, la convergencia como es claro en el sentido del espacio mayor.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D} & \hookrightarrow & L^2([-\pi,\pi]) & \hookrightarrow & \mathcal{D}' \\ \downarrow\uparrow & & \downarrow\uparrow & & \downarrow\uparrow \\ S(\mathbb{Z}) & \hookrightarrow & l^2(\mathbb{Z}) & \hookrightarrow & S'(\mathbb{Z}) \end{array}$$

La flecha hacia arriba es la transformada de Fourier y La flecha hacia abajo indica la transformada inversa de Fourier.

Expliquemos que son los espacios $S(\mathrm{Z})$ y $S(\mathrm{R}^n)$. $S(\mathrm{Z})$ es el espacio de Schwartz también llamado el espacio de las sucesiones complejas rápidamente decrecientes, es decir

$$\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$$

tales que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k| < \infty, \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k||k|^n < \infty, \ \ n = 1, 2, ...$$

Se puede mostrar que $S(\mathrm{Z})$, es la imagen de, D bajo la transformada de Fourier.

También podemos definir el espacio de Schwartz (o el espacio de funciones rápidamente decrecientes), denotado or $S(\mathrm{R}^n)$, como la colección de funciones

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$$

tales que

$$||f||_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \partial^\beta f(x)\right| < \infty,$$

para todo par de multi-índices *α, β*.

Como observación final en este sentido, es importante comentar que el espacio D, de las funciones C^∞ con soporte compacto, está contenido en $S(\mathbb{R}^n)$. La contección contraria no se da pues la función (Gaussiana) definida por:

$$\gamma(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}, \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

está en $S(\mathbb{R}^n)$ pero no tiene soporte compacto.

SOBOLEV PERIÓDICOS

También podemos definir el espacio de Sobolev de orden *s* en el caso periódico de la forma

$$\mathrm{H}^s(\Omega) = \{\phi \in \wp' : \|\phi\|^2_{H^s} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle n\rangle^{2s} |\phi|^2 < \infty\},$$

donde: $\wp = C^\infty_{per}; \langle n\rangle = \sqrt{1+n^2}$, con $n \in \mathbb{Z}$.

$\wp$, denota la colección de todas las funciones $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, las cuales son C^∞ y 2π- periódicas, $\wp'$ es el espacio dual topológico de $\wp$, es decir la colección de todos los funcionales lienales y continuos de *wp* a *C*, y a sus elementos le llamaremos distribución periódicas que en la proxima sección definiremos.

Claramente $\wp$ es un subespacio vectorial de C_{per^∞} para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora $\wp$ es denso en C_{per^∞}, con respecto a las normas C^n, definidas anteriormente. Esto muestra que $\wp$ no es completo con respecto a esas normas. No existe una norma natural respecto a la cual $\wp$, es un espacio de Banach. Sin embargo existe una distancia natural con respecto a la cual $\wp$, es un espacio de Banach.

$$d(\varphi,\psi)=\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}\frac{\|\varphi^{(j)}-\psi^{(j)}\|_\infty}{1+\|\varphi^{(j)}-\psi^{(j)}\|_\infty},\ \ \varphi,\psi\in\wp$$

define una métrica en $\wp$ tal que

$$\varphi_k\to\varphi\ \ en\ \ \wp\Longleftrightarrow\|\varphi_k^{(j)}-\varphi^{(j)}\|_\infty\to 0 \text{ cuando } n\to\infty,\ \ \forall j=0,1,2,...$$

Esta noción de convergencia es muy fuerte: φ_n y todas sus derivadas convergen uniformemente sobre R(a φ_n y sus derivadas). En particular $\varphi_n \to\varphi$ en $\wp$ implica que $\varphi_n\to\phi$ con respecto a todas las normas L^p, $1\leq p\leq\infty$. Como veremos esto es muy conveniente para nuestros propósitos.

Teorema 1.24. *($\wp$, d) es un espacio métrico completo. Más aún, si* $(\varphi_n)\subset\wp$ *y* $\varphi\in\wp$, *entonces*

$$\varphi_k\to\varphi\ \ en\ \ \wp\Longleftrightarrow\|\varphi^{(j)}-\psi^{(j)}\|_\infty\to 0\ \ n\to\infty\ \ \forall j=0,1,2,...$$

Observación 1.25. *La completud de ($\wp$, d), es una condición necesaria para que toda distribución periódica sea un funcional lineal continuo en ($\wp$, d).*

Definición 1.26. *Sea $\alpha=(\alpha_k)_{k\in Z}$. La transformada inversa de Fourier de α, es la función*

$$\alpha^{\vee}(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k e^{ikx},\ \ x\in\mathbb{R}.$$

Afirmación 1.27. *El espacio de Sobolev periódico es completo.*

Prueba: sea$\{f^n\}$ una sucesión de Cauchy en H^s. Dado $\in>0$, existe $N\in Z^+$ tal que, s

$$m,n\leq N\Rightarrow\|f_n-f_m\|_{H^s}<\epsilon.$$

En particular para cada $x \in \Omega$

$$\|f_n - f_m\|_{H^s} < \epsilon,$$

y así para cada $\{f_n(x)\}_{n\leq 1}$ es una sucesión de Cauchy, por tanto existe el límite de la sucesión $\{f_n(x)\}_{n\leq 1}$. Además

$$\begin{aligned}\|f(x)\|_{H^s} &= \|f(x) - f_n(x) + f_n(x)\|_{H^s} \\ &\leq \|f(x) - f_n(x)\|_{H^s} + \|f_n(x)\|_{H^s} \\ &< \epsilon + \|f_n(x)\|_{H^s}.\end{aligned}$$

Luego $f \in H^s$ y H^s es completo. ■

Por tanto el espacio $C([0, T] : H^s)$ es un espacio normado completo. En el siguiente teorema resumiremos algunas propiedades de los espacios de Sobolev escrito en su forma discreta para el caso periódico.

Teorema 1.28. *a.) Para todo* $s \in \mathrm{R}$, $H^s = H^s([-\pi, \pi])$ *es un espacio de Hilbert con relación al producto interno*

$$\langle f, g\rangle = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + k^2)^s \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}.$$

b.) Sean $s, r \in \mathrm{R}$, $s \leq r$. *Entonces* H^s *está continua y densamente inmerso en* H^r *y*

$$\|f\|_r \leq \|f\|s \ \ Para \ \ todo \ \ f \in H^s$$

El siguiente resultado conocido como el lema de Sobolev para el caso periódico nos permite relacionar derivadas débiles¸ con derivadas en el sentido clásico.

Teorema 1.29. *si* $s > \frac{1}{2}$, *entonces* $H^s([-\pi, \pi])$ *es continua y densamente inmerso en* C_{per} *y*

$$\|f\|_\infty \leq \|\hat{f}\|_{l^1} \leq \|f\|_{H^s}, f \in H^s$$

Prueba: Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la hipótesis $s > \frac{1}{2}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}(k)\right| &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(1+k^2)^{\frac{s}{2}}|\hat{f}(k)|}{(1+k^2)^{\frac{s}{2}}}\\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left((1+k^2)^s|\hat{f}(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(1+k^2)^s}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(1+k^2)^s}\right)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{H^s},\end{aligned}$$

por lo tanto $\{\hat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l^1$ y así

$$g(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)e^{ikx}$$

converge absolutamente y uniformemente en $[-\pi, \pi]$. Por lo tanto $g \in C_{per}(2\pi)$. ■

Observación 1.30. *Los espacios de Sobolev miden la diferenciabilidad de funciones en L^2. Por otra parte, la importancia de estos espacios, radican en su persistencia, es decir, tomando condiciones iniciales en Sobolev, la solución de una ecuación diferencial evolutiva, en particular no-lineal vivirá en Sobolev.*

Distribuciones Periódicas

Definición 1.31. *Un funcional lineal en $\wp$, $L : \wp \to \mathbb{C}$, es llamada una distribución periódica si existe una sucesión $(\Psi_n)_{n\leq 1} \subset \wp$ tal que*

$$L(\varphi) = \langle L, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_n(x)\varphi(x)dx, \ \ \forall\varphi \in \wp.$$

Observación 1.32. *El conjunto de las distribuciones periódicas será denotado por $\wp'$*

Observación 1.33. *Los elementos del espacio Sobolev periódico, son las distribuciones periódicas.*

Proposici´on 1.34. *sea $f \in C_{per}$, es decir, una función continua y periódica. Entonces la fórmula*

$$\langle L_f, \varphi \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \wp,$$

define una distribución periódica L_f. La función

$$f \in C_{per} \to L_f \in \wp',$$

es lineal, inyectiva y continua en el sentido que si $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset C_{per}$ converge uniformemente a f entonces

$$\langle L_{f_n}, \varphi \rangle \to \langle L_f, \varphi \rangle \forall \varphi \in \wp.$$

Capítulo 2

Problema no lineal de onda

Problema Lineal

Estudiaremos el problema con datos iniciales periódicos, definidos por la ecuación diferencial parcial no-lineal tipo onda:

$$\begin{cases} u_{tt} + 2\alpha u_t - \beta u_{xx} = -\lambda \partial_x \left(|u|^{\sigma} u \right) \\ u(0,x) = \phi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases} \tag{2.1}$$

con *phi* y ψ funciones 2π-periódicas y de clase C^{∞}, es decir, $\varphi, \psi \in C^{\infty}_{per}$ (R, R). Aqu´ı $\alpha, \beta, \lambda, \theta$ denotan constantes positivas.

Nos interesa garantizar la existencia y unicidad de soluciones. Para esto utilizaremos como ambiente de las soluciones los espacios de Sobolev. Además, garantizar que las soluciones lineales vivan en el mismo espacio donde son tomados los datos iniciales, fenómeno que llamaremos persistencia, que nos permitirá ser mas exigentes con las hipótesis impuestas a los datos iniciales.

Usaremos también la transformada de Fourier como primer paso en el caso linealizado.

$$u_{tt} + 2\alpha u_t - \beta u_{xx} = f(t,x); \quad f \in C^{\infty}((0,\infty) \times \mathbb{R})$$

donde f, φ, ψ son periódicas con respecto a la variable espacial, es decir

$$f(t, 2\pi + x) = f(t, x).$$

$$\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x),$$
$$\phi(x + 2\pi) = \phi(x).$$

Entonces consideremos la ecuación,

$u_{tt} + 2\alpha u_t - \beta u_{xx} = f(t, x),$

donde denotaremos a

$$\widehat{u}_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t, x)e^{-inx}dx.$$

a la transformada de Fourier de u. De la misma forma
$\widehat{f}_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t, x)e^{-inx}dx$

denota la transformada de Fourier de f.

Procedamos entonces utilizando la transformada de Fourier.

$$e^{-inx}u_{tt} + e^{-inx}2\alpha u_t - e^{-inx}\beta u_{xx} = e^{-inx}f(t, x)$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{-inx}u_{tt} + e^{-inx}2\alpha u_t - e^{-inx}\beta u_{xx}\right)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}f(t, x)dx$$
$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}u_{tt}dx + \frac{\alpha}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}u_t dx - \frac{\beta}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}u_{xx}dx\right) = \widehat{f}_n(t)$$
$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{d}{dt^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}udx + \frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{\pi} 2\alpha e^{-inx}udx - \int_{-\pi}^{\pi}\beta e^{-inx}u_{xx}dx\right) = \widehat{f}_n(t)$$
$$\widehat{u}_n''(t) + 2\alpha\widehat{u}_n'(t) - \frac{\beta}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}u_{xx}dx = \widehat{f}_n(t)$$

Ahora aplicamos integración por partes para la integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}u_{xx}dx.$$

y en este proceso obtenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}u_{xx}dx = -n^2\widehat{u}_n(t),$$

así tenemos la ecuación diferencial ordinaria con datos iniciales

$$\begin{cases} \widehat{u}_n''(t) + 2\alpha\widehat{u}_n'(t) + \beta n^2\widehat{u}_n(t) = \widehat{f}_n(t), \\ \widehat{u}_n(0) = \widehat{\phi}_n, \\ \widehat{u}_n'(0) = \widehat{\psi}_n. \end{cases}$$

Resolvemos esta ecuación ordinaria por el método de variación de parámetros. A esta ecuación ordinaria le asociamos el polinomio característico, el cual es

$$m^2 + 2\alpha m + \beta n^2 = 0$$

$$-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta n^2} = m.$$

Nótase que m, puede ser real o complejo según el signo de $\alpha^2 - \beta n^2$.

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha^2 - \beta n^2} &\in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta n^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 \geq \beta n^2 \\ &\Leftrightarrow n^2 \leq \frac{\alpha^2}{\beta} \\ |n| &\leq \frac{\alpha^2}{\sqrt{\beta}}. \end{aligned}$$

Tómese $N_0 = \left[\left|\frac{\alpha^2}{\sqrt{\beta}}\right|\right]$ y veamos cuál es la cara de la solución para $|n| \leq N_0$. $y_n(t)$ denotara la solución para cada $n \in Z^+$ donde $|n| \leq N_0$, la solución de la homogénea asociada es

$$y_n = A_n e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} + B_n e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}.$$

Buscamos una solución particular de la no homogénea asociada, esto nos da lugar al sistema:

$$\begin{cases} (1)\ \ A_n'(t)e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} + B_n'(t)e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} = 0 \\ (2)\ \ A_n'(t)e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}\right) \\ +B_n'(t)e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}\left(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}\right) = \widehat{f}_n(t) \end{cases}$$

Resolvamos este sistema. De (1), obtenemos que

$$\begin{aligned} A_n'(t) &= -\frac{B_n'(t)e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}}{e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}} \\ &= -B_n'(t)e^{(-2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}. \end{aligned}$$

sustituyendo en (2), obtenemos

$$\begin{aligned} \widehat{f}_n(t) &= -B_n'(t)e^{(-2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}\right) \\ &\quad + B_n'(t)e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}\left(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}\right) \\ \widehat{f}_n(t) &= B_n'(t)e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}\left(-2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}\right), \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \widehat{f}_n(t) &= B_n'(t)e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}\left(-2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}\right) \\ B_n'(t) &= -\frac{\widehat{f}_n(t)e^{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}}{2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}} \\ B_n(t) &= -\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})s}}{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}ds. \end{aligned}$$

por otra parte tenemos:

$$\begin{aligned} A_n'(t) &= \frac{\widehat{f}_n(t)e^{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}}{2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}} \\ A_n(t) &= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})s}}{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}ds. \end{aligned}$$

Luego, la solución general de la no homogénea es:

$$\begin{aligned}\widehat{u}_n(t) &= A_n e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} + B_n e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}\\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})s}}{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}ds\left(e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}\right)\\ &- \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})s}}{-2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}ds\left(e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}\right)\end{aligned}$$

La cual podemos escribir como:

$$\begin{aligned}\widehat{u}_n(t) &= A_n e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} + B_n e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}\\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}(t-s)}}{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}ds\\ &- \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}(t-s)}}{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}ds.\end{aligned}$$

ahora si consideramos la diferencia de integrales tenemos que:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}(t-s)}}{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}ds - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}(t-s)}}{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}ds\\ &= \int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)}}{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}\frac{e^{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}(t-s)} - e^{-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}(t-s)}}{2}ds\\ &= \int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)}}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}\frac{e^{i\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}(t-s)} - e^{-i\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}(t-s)}}{2i}ds\\ &= \int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)}}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}\sin\left(\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}(t-s)\right)ds.\end{aligned}$$

Por tanto podemos escribir la solución general de la ecuación no homogénea como:

$$\begin{aligned}\widehat{u}_n(t) &= A_n e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} + B_n e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}\\ &+ \int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)}}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}\sin\left(\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}(t-s)\right)ds.\end{aligned}$$

Solo nos falta conseguir A_n y B_n y esto lo hacemos gracias a las condiciones iniciales.

$$\widehat{u}_n(0) = \widehat{\phi}_n,$$

luego

$$A_n + B_n = \widehat{\phi}_n \Rightarrow A_n = \widehat{\phi} - B_n,$$

y por condición inicial

$$\widehat{u}_n(0) = \widehat{\psi}_n,$$

tenemos que:

$$A_n\left(-\alpha + \sqrt{\alpha_2 - \beta n^2}\right) + B_n\left(-\alpha - \sqrt{\alpha_2 - \beta n^2}\right) = \widehat{\psi}_n:$$

y sustituyendo $A_n = \widehat{\phi}_n - B_n$ en la última ecuación tenemos que:

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}_n &= \left(\widehat{\phi}_n - B_n\right)\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta n^2}\right) + B_n\left(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta n^2}\right) \\
B_n\left(-2\sqrt{\alpha^2 - \beta n^2}\right) &= \widehat{\psi}_n - \widehat{\phi}_n\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta n^2}\right) \\
B_n &= \frac{\widehat{\psi}_n - \widehat{\phi}_n\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta n^2}\right)}{-2\sqrt{\alpha^2 - \beta n^2}}.
\end{aligned}$$

y luego

$$\begin{aligned}
A_n &= \widehat{\phi}_n - \left(\frac{\widehat{\psi}_n - \widehat{\phi}_n\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta n^2}\right)}{-2\sqrt{\alpha^2 - \beta n^2}}\right) \\
A_n &= \frac{\widehat{\psi}_n + \widehat{\phi}_n\left(2\sqrt{\alpha^2 - \beta n^2}\right) + \widehat{\phi}_n\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta n^2}\right)}{2\sqrt{\alpha^2 - \beta n^2}} \\
A_n &= \frac{\widehat{\psi}_n}{2\sqrt{\alpha^2 - \beta n^2}} + \frac{\widehat{\phi}_n\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta n^2}\right)}{2\sqrt{\alpha^2 - \beta n^2}}.
\end{aligned}$$

Así, sustituyendo los valores de A_n y B_n en la solución general de la ecuación no homogénea tenemos:

$$\begin{aligned}\widehat{u}_n(t) = &\left(\frac{\widehat{\psi}_n}{2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}} + \frac{\widehat{\phi}_n\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}\right)}{2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}\right) e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} \\ &+ \left(\frac{\widehat{\psi}_n - \widehat{\phi}_n\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}\right)}{-2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}\right) e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} \\ &+ \int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)}}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}} \sin\left(\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}(t-s)\right) ds.\end{aligned}$$

Trabajemos entonces los coeficientes $\widehat{\phi}_n$ y ψ_n por separado. Iniciamos trabajando con $\widehat{\psi}_n$.

$$\begin{aligned}&\frac{\widehat{\psi}_n}{2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}} e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} - \frac{\widehat{\psi}_n}{2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}} e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} \\ &= \frac{\widehat{\psi}_n}{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}} e^{(-\alpha t)} \frac{e^{(\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} - e^{-(\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}}{2} \\ &= \frac{\widehat{\psi}_n}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}} e^{(-\alpha t)} \frac{e^{it\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}} - e^{-it\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}}{2i} \\ &= \frac{\widehat{\psi}_n}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}} e^{(-\alpha t)} \sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}).\end{aligned}$$

Hagamos lo propio con el termino $\widehat{\phi}_n$.

$$\begin{aligned}&\frac{\widehat{\phi}_n\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}\right)}{2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}} e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} + \frac{\widehat{\phi}_n\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}\right)}{2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}} e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} \\ &= \frac{2\alpha\widehat{\phi}_n}{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}} e^{(-\alpha t)} \frac{e^{t\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}} - e^{-t\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}}{2} + \widehat{\phi}_n e^{(-\alpha t)} \frac{e^{t\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}} + e^{-t\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}}{2} \\ &= \frac{2\alpha\widehat{\phi}_n}{\sqrt{\beta n^2+\alpha^2}} e^{(-\alpha t)} \frac{e^{it\sqrt{\beta n^2+\alpha^2}} - e^{-it\sqrt{\beta n^2+\alpha^2}}}{2i} + \widehat{\phi}_n e^{(-\alpha t)} \frac{e^{it\sqrt{\beta n^2+\alpha^2}} + e^{-it\sqrt{\beta n^2+\alpha^2}}}{2} \\ &= \frac{2\alpha\widehat{\phi}_n}{\sqrt{\beta n^2+\alpha^2}} e^{(-\alpha t)} \sin(\sqrt{\beta n^2+\alpha^2}) + \widehat{\phi}_n e^{(-\alpha t)} \cos(\sqrt{\beta n^2+\alpha^2}).\end{aligned}$$

Así la solución general con los datos iniciales para $|n| \leq N_n$ es:

$$\begin{aligned}\widehat{u}_n(t) &= \frac{\psi_n}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}e^{(-\alpha t)}\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\\ &+\widehat{\phi}_n\left(\frac{2\alpha}{\sqrt{\beta n^2+\alpha^2}}e^{(-\alpha t)}\sin(\sqrt{\beta n^2+\alpha^2})+e^{(-\alpha t)}\cos(\sqrt{\beta n^2+\alpha^2})\right)\\ &+\int_0^t\frac{\widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)}}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}\sin\left(\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}(t-s)\right)ds.\end{aligned}$$

Por otra parte para $|n| > N_0$, tenemos: La solución a la ecuación homogénea asociada es

$$y = A_n e^{(-\alpha t)}\sin(\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}) + B_n e^{(-\alpha t)}\cos(\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}),$$

donde consideramos

$$p_n = \sqrt{\beta n^2-\alpha^2},$$

y haciendo variar los coeficientes dependiendo de t, el método de variación de parámetros nos lleva a plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}(1)\ \ A_n'(t)e^{-\alpha t}\sin(p_n t)+B_n'(t)e^{-\alpha t}\cos(p_n t)=0\\ (2)\ \ -\alpha A_n'(t)e^{-\alpha t}\sin(p_n t)+A_n'(t)e^{-\alpha t}\cos(p_n t)p_n\\ \ -\alpha B_n'(t)e^{-\alpha t}\cos(p_n t)-B_n'(t)e^{-\alpha t}\sin(p_n t)p_n=\widehat{f}_n(t)\end{cases}$$

La solución de este sistema es

$$\begin{aligned}A_n(t) &= e^{\alpha s}\int_0^t \widehat{f}_n(s)\cos(p_n s)\frac{1}{p_n}ds\\ B_n(t) &= -e^{\alpha s}\int_0^t \widehat{f}_n(s)\sin(p_n s)\frac{1}{p_n}ds.\end{aligned}$$

y la solución general de la ecuación es

$$\begin{aligned}\widehat{u}_n(t) &= A_n(t)e^{-\alpha t}\sin(p_n t)+B_n(t)e^{-\alpha t}\cos(p_n t)\\ &+\int_0^t \widehat{f}_n(s)e^{\alpha(t-s)}\sin(p_n(t-s))\frac{1}{p_n}ds,\\ &\widehat{u}_n(0)=\widehat{\phi}_n,\ \ \widehat{u}_n'(0)=\widehat{\psi}_n\ \text{ sus condiciones iniciales.}\end{aligned}$$

y de esto obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
B_n &= \widehat{\phi}_n \\
\widehat{u}'_n(t) &= -\alpha A_n e^{-\alpha t}\sin(p_n t) + A_n e^{-\alpha t}\cos(p_n t) - \alpha\widehat{\phi}_n e^{-\alpha t}\cos(p_n t) \\
&\quad + e^{-\alpha t}\sin(p_n t)\widehat{\psi}_n,
\end{aligned}
$$

y para obtener A_n, vemos que:

$$\widehat{u}'_n(0) = A_n - \alpha\widehat{\phi}_n = \widehat{\psi}_n.$$

Luego la solución de la ecuación ordinaria la escribimos como

$$
\begin{aligned}
\widehat{u}_n(t) = &\left(\widehat{\psi}_n + \alpha\widehat{\phi}_n\right)\frac{1}{p_n}e^{-\alpha t}\sin(p_n t) + \widehat{\phi}_n e^{-\alpha t}\cos(p_n t) \\
&+ \int_0^t \widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)}\sin(p_n(t-s))\frac{1}{p_n}ds.
\end{aligned}
$$

La cual también podemos escribir como:

$$
\begin{aligned}
\widehat{u}_n(t) = &\widehat{\psi}_n\frac{1}{p_n}e^{-\alpha t}\sin(p_n t) + \widehat{\phi}_n\left(\alpha\frac{1}{p_n}e^{-\alpha t}\sin(p_n t) + e^{-\alpha t}\cos(p_n t)\right) \\
&+ \int_0^t \widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)}\sin(p_n(t-s))\frac{1}{p_n}ds.
\end{aligned}
$$

y tiene la misma expresión que para los $|n| \leq N_0$.

Observación 2.1. *La función* $\frac{\sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$ *es una función entera.*

Ahora construimos el operador de Green, y así podemos escribir la solución de nuestra ecuación en la siguiente forma, definiendo el operador $\mathcal{G}$ cuyo dominio y contra-dominio es:

$$\mathcal{G} : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$$

definido por

$$\mathcal{G}(t)\psi(x) = e^{-\alpha t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}_n e^{inx} \frac{\sin(p_n t)}{p_n} = e^{-\alpha t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}_n e^{inx} \frac{\sin(t\sqrt{\beta n^2 - \alpha^2})}{\sqrt{\beta n^2 - \alpha^2}}$$

y definamos el operador

$$\widetilde{\mathcal{G}} : C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},\mathbb{R})$$
$$\widetilde{\mathcal{G}} = (2\alpha + \partial_t)\mathcal{G}(t),$$

luego este operador está definido por:

$$\widetilde{\mathcal{G}}(t)\phi(x) = e^{-\alpha t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}_n e^{inx} \frac{\sin(t\sqrt{\beta n^2 - \alpha^2})}{\sqrt{\beta n^2 - \alpha^2}} + \cos(t\sqrt{\beta n^2 - \alpha^2}).$$

Nótese que estos operadores definidos por series son uniformemente convergentes en norma l^1. estudiemos por separado cada una de estas series. El operador definido por:

$$\mathcal{G}(t)\psi(x) = e^{-\alpha t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}_n e^{inx} \frac{\sin(t\sqrt{\beta n^2 - \alpha^2})}{\sqrt{\beta n^2 - \alpha^2}}:$$

converge absolutamente, ya que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{\psi}_n e^{inx} \frac{\sin(t\sqrt{\beta n^2 - \alpha^2})}{\sqrt{\beta n^2 - \alpha^2}} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}_n| \left| \frac{1}{\sqrt{\beta n^2 - \alpha^2}} \right|$$

ya que el dato inicial ψ es infinitamente diferenciable y por el teorema 1.14 del Capítulo 1, bastaría que fuese de clase C^2 para que sus coeficientes de Fourier se fuera a cero más rápido que cuadrático. Por lo tanto

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}_n| \left| \frac{1}{\sqrt{\beta n^2 - \alpha^2}} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

y por el criterio de Weierstrass la serie converge uniformemente en (0, $+\infty$) x R. Análogamente la serie definida por

$$\widetilde{\mathcal{G}}(t)\phi(x) = e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{\phi}_n e^{inx}\frac{\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}} + \cos(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})$$

converge absolutamente en $(0,\infty)$ x R, ya que si descomponemos la suma, en sumas de serie, cada serie por separado es absolutamente convergente y por criterio de Weierstrass la serie converge uniformemente en el dominio señalado. De igual forma para

$$\int_0^t \mathcal{G}(t-s)f(s)ds$$

La serie que esta integral define es uniformemente convergente ya que suponemos f de clase C^∞. Luego escribimos $u_n(t)$, para $n \in Z$, como

$$\widehat{u}_n(t) = \frac{e^{-\alpha t}\sin(p_n t)}{p_n}\widehat{\psi}_n + e^{-\alpha t}\left(\cos(p_n t) + \frac{\alpha\sin(p_n t)}{p_n}\right)\widehat{\phi}_n + \int_0^t \widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)}\frac{\sin(p_n(t-s))}{p_n}ds.$$

Por tanto escribimos la solución del problema lineal como

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{u}_n(t)e^{inx} \\ &= e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{\psi}_n e^{inx}\frac{\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})}{t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}} \\ &+ e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{\phi}_n e^{inx}\left(\cos(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}) + \frac{\alpha\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}\right) \\ &+ \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}_n(s)e^{inx}\frac{\sin(\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}(t-s))}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}ds. \end{aligned}$$

observe que $\widehat{f}_n(s)$ conserva la propiedad de decaimiento, donde s es un parámetro en el intervalo$[0, t]$ con $t > 0$, es decir, gracias a la suavidad de f , podemos asegurar que cada s en $[0, T]$, $\widehat{f}_n(s)$ se va a cero más rápido que cualquier otro polinomio. La prueba es idéntica a la del teorema 1.13 del capítulo 1. Luego, de lo anterior tenemos que la fórmula de Duhamel para la solución del problema lineal:

$$u(t,x) = \mathcal{G}(t)\psi + \widetilde{\mathcal{G}}\phi + \int_0^t \mathcal{G}(t-s)f(s)ds.$$

Ahora iniciamos con una serie de lemas que permitirán construir las estimaciones que se quieren.

Lema 2.2. *sea* $\phi \in H^s$, $\psi \in H^{s-1}$, *con* $s \geq 0$. *Entonces los siguientes estimados son verdaderos para todos* $t > 0$ *y* $\mu = \Re(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}) > 0$.

1. $||\widetilde{\mathcal{G}}(t)\phi||_{H^s} \leq C||\phi||_{H^s}$.
2. $||\mathcal{G}(t)\psi||_{H^s} \leq C||\psi||_{H^{s-1}}$.
3. $\left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)f(\tau)d\tau \right\|_{H^s} \leq C\int_0^t \|f(\tau)\|_{H(s-1)} d\tau$.

Prueba: Por la identidad de Parseval tenemos:

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{\mathcal{G}}(t)\phi\right\|_{H^s}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle n\rangle^{2s}e^{-2\alpha t}\left|\frac{\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}} + \cos(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\right|\left|\widehat{\phi}_n\right|^2 \\ &\leq C\,\|\phi\|_{H^s}^2 .\end{aligned}$$

Luego tenemos un operador lineal y continuo definido en un subespacio denso de H^s, para todo $s \in$ R, como lo son las funciones C^∞, y así por teorema de Hahn-Banach el operador $g(t)$, se puede extender de manera continua y canónica a todo H^s. Análogamente se obtienen los demás estimados del lema.

$$\begin{aligned}\|\mathcal{G}(t)\psi\|_{H^s}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle n\rangle^{2s}e^{-2\alpha t}\left|\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\right|^2\left|\frac{1}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}\right|\left|\widehat{\psi}_n\right|^2 \\ &\leq C\,\|\psi\|_{H^{s-1}}^2 .\end{aligned}$$

Aplicando los estimados anteriores tenemos

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)f(\tau)d\tau\right\|_{H^s} &\leq C\int_0^t \|\mathcal{G}(t-\tau)f(\tau)\|_{H^s}\,d\tau\\ &\leq C\int_0^t \|f(\tau)\|_{H^{s-1}}\,d\tau\end{aligned}$$

Por lo anterior el operador de Green C, queda definido con el siguiente dominio y contradominio

$$\mathcal{G} : C([0,T] : H^s) \to C([0,T] : H^s)$$

Existencia local de la solución moderada

Probaremos la existencia local de solución, vía el mapeo de contracción.

Lema 2.3. *Supongamos que el datos inicial* $\phi \in \mathrm{H}^s$, $\psi \in \mathrm{H}^{s-1}$ *con* $1 \geq s > \frac{1}{2}$ *y* $\sigma > 0$.

Entonces para algún tiempo $T > 0$ *existe una única solución* $u(t, x)$ *del problema periódico*

(2.1)

Prueba: Denotemos por

$$\begin{aligned}\mathcal{N} : C([0,T] : \mathrm{H}^s) &\longrightarrow C([0,T] : \mathrm{H}^s)\\ u &\longmapsto \mathcal{N}(u) = -\lambda\partial_x(|u|^\sigma u).\end{aligned}$$

En virtud del operador de Green $\mathcal{G}(t)$ del problema periódico (2.1) escribiremos el problema periódico no lineal en forma de una ecuación integral

$$u(t,x) = \widetilde{\mathcal{G}}(t)\phi + \mathcal{G}(t)\psi + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(u)(\tau)d\tau. \tag{2.2}$$

Resolvemos la ecuación integral (2.2) usando el principio de contracción. Definimos la Transformación

$$\mathcal{A}v(t) = \widetilde{\mathcal{G}}(t)\phi + \mathcal{G}(t)\psi + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(v)(\tau)d\tau,$$

en el espacio $C([0, T] : H^s)$.

Debemos estimar $T > 0$. Por la desigualdad:

$$|\mathcal{N}(u) - \mathcal{N}(v)| \le C||u|^\sigma + |v|^\sigma||u-v|,$$

Probemos esta desigualdad.

Como suponemos que $s \in (\frac{1}{2}, 1)$; $s - 1 \in (-\frac{1}{2}, 0)$ lo que nos da la facultad de realizar las estimaciones en $s = -1$

Sea $\varphi \in \mathrm{H}^{-1}$, $\varphi = \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}_n e^{inx}$ y $\varphi' = \sum_{-\infty}^{\infty} n\widehat{\varphi}_n e^{inx}$.

Veamos que

$$||\varphi||_{\mathrm{H}^{-1}} \le ||\varphi||_{\mathrm{H}^{s-1}} \le ||\varphi||_{L^2}$$

Ya que

$$\begin{aligned} ||\varphi'||_{\mathrm{H}^{-1}} &= \sum_{-\infty}^{\infty} n^2 \langle n\rangle^{2(-1)} |\widehat{\varphi}_n|^2 \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{\langle n\rangle^2} |\widehat{\varphi}_n|^2 \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^2} |\widehat{\varphi}_n|^2 \\ &\le \sum_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}_n|^2 \quad \text{ya que } \frac{n^2}{1+n^2} \le 1. \\ &= ||\varphi||_{L^2}. \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} ||\mathcal{N}(u) - \mathcal{N}(v)||_{\mathrm{H}^{s-1}} &\le ||\mathcal{N}(u) - \mathcal{N}(v)||_{L^2} \\ &\le C||(|u|^\sigma + |v|^\sigma)|u-v|||_{L^2} \end{aligned}$$

Por desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned}||\mathcal{N}(u)-\mathcal{N}(v)||_{\mathrm{H}^{s-1}} &\leq C||(|u|^{\sigma}+|v|^{\sigma})||_{L^{\infty}}||u-v||_{L^2}\\ &\leq C\left(||u||_{L^{\infty}}+||v||_{L^{\infty}}\right)||u-v||_{\mathrm{H}^s}\\ &\leq C\left(||u||_{\mathrm{H}^s}+||v||_{\mathrm{H}^s}\right)||u-v||_{\mathrm{H}^s}\end{aligned}$$

Ahora esto último se cumple, gracias al teorema de inmersión de Sobolev para todas las funciones $u, v \in \mathrm{H}^s(\Omega)$, con $s \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Luego gracias al Lema 2.2 tenemos que

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\|\mathcal{A}v(t)\|_{\mathrm{H}^{-1}} &\leq \sup_{t\in[0,T]}\left(\|\widetilde{\mathcal{G}}(t)\phi\|_{\mathrm{H}^{-1}}+\|\widetilde{\mathcal{G}}(t)\psi\|_{\mathrm{H}^{-1}}+\left\|\int_0^t\mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(v)(\tau)d\tau\right\|_{\mathrm{H}^{-1}}\right)\\ &\leq C\|\phi\|_{\mathrm{H}^s}+C\|\psi\|_{\mathrm{H}^{s-1}}+CT\sup_{t\in[0,T]}\|\mathcal{N}(v)(t)\|_{\mathrm{H}^{-1}}\\ &\leq C\|\phi\|_{\mathrm{H}^s}+C\|\psi\|_{\mathrm{H}^{s-1}}+CT\sup_{t\in[0,T]}\|v\|_{\mathrm{H}^s}^{\sigma+1},\end{aligned}$$

podemos concluir que existe un T suficientemente pequeño que depende de la norma del dato inicial

$$\|\phi\|_{\mathrm{H}^s}+\|\psi\|_{\mathrm{H}^{s-1}},$$

tomando v en la bola de radio $2C(|\phi|_{\mathrm{H}^s}+|\psi|_{\mathrm{H}^{s-1}})$, tenemos que

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\mathcal{A}v(t)\|_{\mathrm{H}^s}\leq 2C(\|\phi\|_{\mathrm{H}^s}+\|\psi\|_{\mathrm{H}^{s-1}}).$$

Estimemos ahora la diferencia para u, v en la bola de radio $2C(|\varphi|_{H^s}+\|\psi\|_{H^{s-1}})$

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\|\mathcal{A}u(t)-\mathcal{A}v(t)\|_{\mathrm{H}^{-1}} &\leq \sup_{t\in[0,T]}\left\|\int_0^t G(t-\tau)\left(\mathcal{N}(u)(\tau)-\mathcal{N}(v)(\tau)\right)d\tau\right\|_{\mathrm{H}^{-1}}\\ &\leq CT\sup_{t\in[0,T]}\|\mathcal{N}(u)-\mathcal{N}(v)\|_{\mathrm{H}^{-1}}\\ &\leq CT\sup_{t\in[0,T]}\left(\|u\|_{\mathrm{H}^s}^{\sigma}+\|v\|_{\mathrm{H}^s}^{\sigma}\right)\|u-v\|_{\mathrm{H}^s}\\ &\leq \frac{1}{2}\sup_{t\in[0,T]}\|u-v\|_{\mathrm{H}^s}\end{aligned}$$

$T > 0$ es suficientemente pequen˜o y dependiendo s´olo de la norma de los datos iniciales. Por tanto, la transformación A es una contracción en la bola cerrada de radio $2C(\|\varphi\|_{H^s}+\|\psi\|_{H^{s-1}})$ en el espacio $C([0, T] : H_s)$. Luego, existe una única $u(t, x) \in C([0, T]: H^s)$ del problema periódico (2.1)

Definición 2.4. *Una solución de la ecuación integral (2.2) la llamaremos una solución moderada del problema de valor inicial (2.1).*

En lo que sigue con el objetivo de explicar en detalle cómo se logra ampliar el dominio de la definición de la solución de (2.1), nos apoyamos en las técnicas [10], para garantizar la existencia del límite

$$\lim_{t\to T^-} \|u(t)\|_{H^1}$$

que nos permite aplicar el principio de existencia explicado en el apéndice.

EXISTENCIA GLOBAL DE LA SOLUCIÓN MODERADA

Lema 2.5. *Supongamos que el dato inicial $\phi \in H^1$, $\psi \in L^2$. Entonces existe una única solución en tiempo global $u(t, x) \in C([0,\infty] : H^1)$ del problema (2.1). Más aún para todo $\in$ existe un tiempo T tal que*

$$\|u(t)\|_{H^1} + \|u_t(t)\|_{L^2} \leq \epsilon \textit{ para todo } t \geq T.$$

Demostración: Usaremos estimados tipo energía. Sea u la Solución construida en el lema 2.3 de la ecuación $u_{tt} + 2\alpha u_t - \beta u_{xx} = -\lambda\partial_x(|u|^\sigma u)$, entonces multiplicamos la ecuación por $2u_t + \alpha u$ damos lugar a esto

$$(2u_t + \alpha u)(u_{tt} + 2\alpha u_t - \beta u_{xx} = -\lambda(2u_t + \alpha u)\partial_x(|u|^\sigma u)$$

por lo tanto obtenemos

$$\begin{gathered} 2u_tu_{tt} + 4\alpha u_t^2 - 2\beta u_tu_{xx} + \alpha uu_{tt} + 2\alpha^2 uu_t \\ -\alpha\beta uu_xx + 2\lambda u_t\partial_x(|u|^\sigma u) + \lambda\alpha u\partial_x(|u|^\sigma u) = 0 \end{gathered}$$

Entonces integrando sobre **Ω**, tenemos:

$$\begin{gathered} \int_\Omega (2u_tu_{tt} + 4\alpha u_t^2 - 2\beta u_tu_{xx} + \alpha uu_{tt} + 2\alpha^2 uu_t \\ -\alpha\beta uu_xx + 2\lambda u_t\partial_x(|u|^\sigma u) + \lambda\alpha u\partial_x(|u|^\sigma u))dx = 0 \end{gathered}$$

Ahora veamos que

$$2u_t u_{tt} = \frac{d}{dt}(u_t^2), \qquad \alpha u u_{tt} = \frac{d}{dt}(\alpha u_t u) - \alpha u_t^2, \qquad 2\alpha^2 u u_t = \frac{d}{dt}(\alpha^2 u^2).$$

Asimismo, integrando por partes hallamos que

$$\int_\Omega (-2\beta u_t u_{xx}) = \int_\Omega (2\beta u_{xt} u_x) = \int_\Omega \left(\frac{d}{dt}(\beta u_x^2)\right),$$

$$\int_\Omega (-\alpha\beta u u_{xx}) = \int_\Omega (\alpha\beta u_x^2),$$

$$\int_\Omega (2\lambda u_t \partial_x(|u|^\sigma u)) = \int_\Omega (2\lambda(\sigma+1)|u|^\sigma u_t u_x),$$

$$\int_\Omega (\alpha\lambda u \partial_x(|u|^\sigma u)) = \int_\Omega (\alpha\lambda(\sigma+1)(|u|^\sigma u u_x)) = \int_\Omega \left(\alpha\lambda\frac{(\sigma+1)}{(\sigma+2)}\partial_x(|u|^\sigma u^2)\right) = 0$$

Por lo tanto conseguimos

$$\int_\Omega \Bigg(\frac{d}{dt}(u_t^2) + 4\alpha u_t^2 + \frac{d}{dt}(\beta u_x^2) + \frac{d}{dt}(\alpha u_t u) - \alpha u_t^2 + \frac{d}{dt}(\alpha^2 u^2)$$
$$+\alpha\beta u_x^2 + 2\lambda(\sigma+1)|u|^\sigma u_t u_x\Bigg)\, dx = 0.$$

luego

$$\int_\Omega \Bigg(\frac{d}{dt}(u_t^2) + \frac{d}{dt}(\beta u_x^2) + \frac{d}{dt}(\alpha u_t u) + \frac{d}{dt}(\alpha^2 u^2)$$
$$+3\alpha u_x^2 + \alpha\beta u_x^2 + 2\lambda(\sigma+1)|u|^\sigma u_t u_x\Bigg)\, dx = 0.$$

veamos que

$$\frac{dE}{dt} + H = 0$$

donde

$$E = \int_\Omega \left(u_t^2 + \beta u_x^2 + \alpha u_t u + \alpha^2 u^2\right) dx.$$

y

$$H = \int_\Omega \left(3\alpha u_t^2 + \alpha\beta u_x^2 + 2\lambda(\sigma+1)|u|^\sigma u_t u_x\right) dx.$$

Nótese que *H(t)*≤*,* 0. Por otra parte $\frac{dE}{dt} \leq 0$. Integrando es claro que $E(t) \leq E(0)$. Lo cual nos da las siguientes estimaciones para la solución

$$||u(t)||_{\mathrm{H}^1} + ||u_t(t)||_{L^2} \leq C \text{ para todo } t \in [0,T]$$

Nótese que una solución moderada definida en $[0, T]$ puede ser extendida a un intervalo $[0, T+\delta]$, $\delta > 0$ por definir

$$u(t+t_1) = w(t)$$

donde $w(t)$ es una solución moderada de

$$\begin{cases} w_{tt} + 2\alpha w_t - \beta w_{xx} = -\lambda\partial_x(|w|^\sigma w) \\ w(0,x) = u(t_1,x) \\ w_t(0,x) = u_t(t_1,x) \end{cases}$$

La existencia de un intervalo de longitud $\delta > 0$ es asegurado por teorema de existencia local de solución.

Aseguremos que el siguiente límite existe

$$\lim_{t\to T^-} ||u(t)||_{\mathrm{H}^1}$$

Veamos: consideremos $0 < \rho < t < t' < T$ y estimemos la diferencia

$$||u(t') - u(t)||_{\mathrm{H}^1}.$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned}||u(t')-u(t)||_{\mathrm{H}^1} &= \left\|\widetilde{\mathcal{G}}(t')\phi+\mathcal{G}(t')\psi+\int_0^{t}\mathcal{G}(t'-s)\mathcal{N}(s)ds-\widetilde{\mathcal{G}}(t)\phi-\mathcal{G}(t)\psi-\int_0^{t}\mathcal{G}(t-s)\mathcal{N}(s)ds\right\|_{\mathrm{H}^1}\\ &\leq \left\|\widetilde{\mathcal{G}}(t')\phi-\widetilde{\mathcal{G}}(t)\phi\right\|_{\mathrm{H}^1}+\|\mathcal{G}(t')\psi-\mathcal{G}(t)\psi\|_{\mathrm{H}^1}\\ &+\left\|\left(\int_0^{t-\rho}+\int_{t-\rho}^{t}\right)(\mathcal{G}(t'-s)-\mathcal{G}(t-s))\mathcal{N}(u)(s)ds\right\|_{\mathrm{H}^1}+\left\|\int_t^{t'}\mathcal{G}(t'-s)\mathcal{N}(u)(s)ds\right\|_{\mathrm{H}^1}\\ &\leq \left\|\widetilde{\mathcal{G}}(t')\phi-\widetilde{\mathcal{G}}(t)\phi\right\|_{\mathrm{H}^1}+C_1\int_0^{\rho}\|\mathcal{G}(t'-s)-\mathcal{G}(t-s)\|_{\mathrm{H}^1}ds+C_\rho+(t'-t)C\end{aligned}$$

g es un operador continuo, luego

$$\begin{aligned}&(t,t')\to T^-\Rightarrow ||u(t')-u(t)||_{\mathrm{H}^1}\to 0\\ &\qquad\Rightarrow u(t)\to u(T)\text{ cuando } t\to T^- \text{ ya que } \mathrm{H}^1 \text{ es completo.}\end{aligned}$$

Así el

$$\lim_{t\to T^-}||u(t)||_{\mathrm{H}^1}=||u(T)||_{\mathrm{H}^1}$$

Luego tenemos

$$||u(t)||_{\mathrm{H}^1}<C\ \ \forall t\in[0,T]$$

y como la constante$C$ no crece, siempre podremos extender el problema de Cauchy en intervalos regulares de tiempo de longitud δ, y por tal razón existe una solución

$$u(t,x)\in C([0,\infty]:\mathrm{H}^1).$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt}&=-H(t)\\ E(t)-E(0)&=-\int_0^t H(s)ds\end{aligned}$$

Lo que implíca que

$$\int_0^\infty H(s)ds < \infty$$

por tanto

$$\forall \epsilon > 0, \;\; \exists T > 0, \; \text{tal que } H(T) \leq \epsilon$$

de esto último tenemos que

$$\begin{aligned} ||u(t)||_{\mathrm{H}^1} + ||u_t(t)||_{L^2} &\leq C_2 E(t) \leq C_2 E(T) \\ &\leq \frac{C_2}{C_1} (||u(t)||_{\mathrm{H}^1} + ||u_t(t)||_{L^2}) \\ &< \frac{C_2}{C_1} \epsilon_1 \text{ con } \epsilon_1 < \epsilon C_1, \end{aligned}$$

luego

$$||u(t)||_{\mathrm{H}^1} + ||u_t(t)||_{L^2} < \epsilon \text{ para todo } t \geq T,$$

ya que $E(t)$ decae para todo $t \geq 0$. Así el lema 3.5 esta probado.

Ahora recordemos que

$$u(t,x) = \widetilde{\mathcal{G}}(t)\phi(x) + \mathcal{G}(t)\psi(x) + \int_0^t \mathcal{G}(t-s)N(u)(s)ds.$$

Afirmación 1:

$$u(t,x) \in C([0,\infty] : \mathrm{H}^1).$$

Sea $T > 0$, y consideremos el intervalo $[0, T]$. Por el operador contracción existe $v_n(t) \in$

$C([0, \infty] : \mathrm{H}^1)$, con $\mathrm{A}(v_n(t)) = v_{n+1}(t)$, tal que

$$
\begin{aligned}
||u_{n+1}(t)||_{\mathrm{H}^1} &\leq ||\widetilde{\mathcal{G}}(t)\phi(x)||_{\mathrm{H}^1} + ||\mathcal{G}(t)\psi(x)||_{\mathrm{H}^1} + C\int_0^t ||N(v_n)(s)||_{L^2} ds \\
&\leq C||\phi||_{\mathrm{H}^1} + C||\psi||_{L^2} + CT \sup_{t\in[0,T]} ||v_n(t)||_{\mathrm{H}^1}^{\sigma+1} \\
&\leq C||\phi||_{\mathrm{H}^1} + C||\psi||_{L^2}.
\end{aligned}
$$

tomando límite obtenemos

$$
||u(t)||_{\mathrm{H}^1} \leq C||\phi||_{\mathrm{H}^1} + C||\psi||_{L^2}.
$$

Afirmación 2.

$$
u_t \in C([0,\infty] : L^2).
$$

$$
(u_n)_t(t,x) = \frac{\partial}{\partial_t}\widetilde{\mathcal{G}}(t)\phi(x) + \frac{\partial}{\partial_t}\mathcal{G}(t)\psi(x) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial_t}\mathcal{G}(t-s)N(u)(s)ds.
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial_t}\widetilde{\mathcal{G}}(t)\phi(x) = &-\alpha e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{\phi}_n e^{inx}\left(\frac{\sin\left(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}\right)}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}} + \cos\left(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}\right)\right) \\
&+ e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{\phi}_n e^{inx}\left(\cos\left(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}\right) - \sqrt{\beta n^2-\alpha^2}\sin\left(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Estimemos entonces $\frac{\partial}{\partial_t}\widetilde{\mathcal{G}}(t)\phi(x)$ en L^2.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial_t}\widetilde{\mathcal{G}}(t)\phi(x) = &-\alpha e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\phi}_n\right|^2\left|\frac{\sin\left(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}\right)}{|\beta n^2-\alpha^2|} + \cos\left(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}\right)\right|^2 \\
&+ e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\phi}_n\right|^2\left|\cos\left(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}\right) - \sqrt{\beta n^2-\alpha^2}\sin\left(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}\right)\right|^2.
\end{aligned}
$$

Análogamente

$$
\frac{\partial}{\partial_t}\mathcal{G}(t)\psi(x) = -\alpha e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{\psi}_n e^{inx}\frac{\sin\left(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}\right)}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}} + e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{\psi}_n e^{inx}\cos\left(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}\right)
$$

$$
\left\|\frac{\partial}{\partial_t}\mathcal{G}(t)\psi(x)\right\|_{L^2}^2 = \alpha^2 e^{-2\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\psi}_n\right|^2\frac{\sin^2\left(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}\right)}{|\beta n^2-\alpha^2|} + e^{-2\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\psi}_n\right|^2\cos^2\left(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}\right)
$$

■

Observación 2.6. *De lo anterior, concluimos que u, u_t convergen en sentido L^2.*

Capítulo 3

Problema no lineal tipo Burgers

Introducción

En este capítulo estudiaremos la existencia de solución local y global del problema periódico para la ecuación no-lineal tipo Burgers

$$\begin{cases} \psi_t = \psi_{xx} + \lambda\psi + \psi\psi_x, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \psi(0,x) = \tilde{\psi}(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $\Omega = [-\pi, \pi]$, $\lambda < 1$. Probamos que si el dato inicial $\tilde{\psi} \in L^2(\Omega)$, entonces existe una única solución $\psi(t,x) \in C([0,\infty) : L^2(\Omega)) \cap C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R})$ del problema periódico. Más aún bajo algunas condiciones iniciales encontramos expresiones asintóticas de las soluciones.

Consideraremos soluciones de la ecuación (4.1), la cual satisface condiciones de frontera periódica $\psi(t, x) = \Psi(t, x + 2\pi)$ para todo $x \in$ R con $t > 0$ y el dato inicial 2π-periódico $\psi(x)$.

Tomando el cambio de variable

$$\psi(t,x) = e^{\lambda t} w(t,x),$$

tenemos

$$\begin{cases} w_t = w_{xx} + e^{\lambda t} w w_x, \\ w(0,x) = \tilde{\psi}(x), \;\; x \in \Omega. \end{cases}$$

Nótese que el valor medio es una ley de conservación

$$\begin{aligned} w_0(t) &= \int_\Omega w(t,x)dx \\ &= \int_\Omega \tilde{\psi} dx \\ &= M. \end{aligned}$$

Es claro que $w_0'(t) = 0$.

Luego realizamos el cambio

$$w(t,x) = v(t,x) + M,$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} v_t = v_{xx} + e^{\lambda t} v v_x + e^{\lambda t} M v_x, \;\; x \in \Omega, \;\; t > 0, \\ v(0,x) = \tilde{\psi}(x) - M, \;\; x \in \Omega. \end{aligned}$$

Por u´ltimo hacemos el cambio

$$u(t,x) = v(t, x - M \int_0^t e^{\lambda \tau} d\tau),$$

esto da lugar al problema periódico

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{\lambda t} u u_x, \;\; x \in \Omega, \;\; t > 0, \\ u(0,x) = \phi(x) \end{cases} \tag{3.2}$$

donde el dato inicial

$$\phi(x) = \tilde{\psi}(x) - M$$

tiene el valor medio cero. La solución $\psi(t,\ x)$ del problema periódico (4.1) es entonces dada por

$$\psi(t,x) = e^{\lambda t}M + e^{\lambda t}u(t, x + M\int_0^t e^{\lambda\tau}d\tau)$$

El objetivo de este Capítulo es estudiar el comportamiento asintótico del problema periódico (4.2).

Nótese que en el caso $\lambda = 0$, la ecuación (4.1) es la ecuación de Burgers. Esta se resuelve usando la transformación de Hopf-Cole, la cual es

$$u := \frac{-2\partial\varphi}{\varphi\partial x},$$

donde $\varphi \in C^3((0,\infty) \times \Omega, \mathbb{R}^*)$, y de forma impresionante esto da a lugar a la ecuación del calor que es lineal y se utiliza el método clásico de separación de variables. Es decir, si ϕ es solución de la ecuación del calor, entonces, u según la transformación Hopf-Cole es solución de la ecuación de Burgers.

El prop´osito de este Capítulo es de encontrar fórmulas asintóticas para tiempos largos de las soluciones del problema periódico (4.2) con $\lambda <$ *No.* 1. Aplicamos estimados de tipo energía para remover toda restricción del tamaño del dato inical. Conocemos que no existen resultados para el comportamiento asintótico para largos tiempos de la soluciones para el caso

$\lambda \geq 1$, en la ecuación (4.2). Este caso es objetivo de investigación futura.

PROBLEMA LINEAL

Consideremos el problema periódico lineal

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(t,x), \;\; x \in \Omega, \;\; t > 0 \\ u(0,x) = \phi(x), \;\; x \in \Omega \end{cases} \tag{3.3}$$

donde la fuerza $f(t, x)$ y el dato inicial $\phi(x)$ son periódicos con respecto a la variable espacial x, es decir, $f(t, x) = f(t, 2\pi + x)$, $\phi(x) = \phi(2\pi + x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Usando la transformada de Fourier, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} u_n'(t) &= -n^2 u_n(t) + f_n(t). \\ f_n(t) &= u_n'(t) + n^2 u_n(t) \end{aligned}$$

tenemos así una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y multiplicando por el factor integrante, tenemos:

$$\begin{aligned} e^{n^2 t} f_n(t) &= e^{n^2 t} n^2 u_n(t) + u_n'(t) e^{n^2 t}. \\ e^{n^2 t} f_n(t) &= \frac{d}{dt}\left(e^{n^2 t} u_n(t)\right) \end{aligned}$$

Luego integrando, obtenemos:

$$\begin{aligned} e^{n^2 t} u_n(t) &= \int_0^t e^{n^2 s} f_n(s) ds + k \\ u_n(t) &= e^{-n^2 t} \int_0^t e^{n^2 s} f_n(s) ds + e^{-n^2 t} k \\ u_n(t) &= \int_0^t e^{n^2 s - n^2 t} f_n(s) ds + e^{-n^2 t} k \\ u_n(t) &= \int_0^t e^{n^2 (s-t)} f_n(s) ds + e^{-n^2 t} k. \end{aligned}$$

Luego por la condición inicial, tenemos

$$\begin{aligned} u_n(0) &= \phi_n \\ u_n(t) &= \int_0^t e^{n^2 (s-t)} f_n(s) ds + e^{-n^2 t} \phi_n. \end{aligned}$$

Luego definimos el operador de Green de la forma:

$$\mathcal{G}(t)\phi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_n e^{inx - tn^2}$$

y así podemos escribir la solución del problema periódico usando la fórmula de Duhamel

$$u(t) = \mathcal{G}(t)\phi + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

A continuación haremos alguna estimaciones para la solución del problema lineal periódico (4.2) en el espacio de Sobolev H^s. Definimos dos proyectores

$$P_N u = \sum_{|n|\leq N} \widehat{u}_n(t)e^{inx};$$
$$R_n(u) = \sum_{|n|\geq N} \widehat{u}_n(t)e^{inx}.$$

donde $N \geq 1$. Por tanto tenemos

$$P_n u + R_n(u) = u \text{ para } N \geq 0.$$

también nótese que

$$P_0 u \equiv 0 \text{ y } u = R_1(u)$$

Denotaremos

$$\{t\} = min(1,t)$$

Lema 3.1. *Sea* $s \in \mathbb{R},\ \phi \in \mathrm{H}^s(\Omega)$ *y* $f \in C([0,\infty) : \mathrm{H}^s(\Omega))$. *Entonces los siguientes son ciertos*

$$||R_N\mathcal{G}(t)\phi||_{\mathrm{H}^{s+2\alpha}} \leq C\{t\}^{-\alpha}e^{-tN^2}||R_N\phi||_{\mathrm{H}^s}$$

para todo $t \geq 0$, donde $N \geq 1$, $\alpha \geq 0$.

$$\left\|R_N\int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)f(\tau)d\tau\right\|_{\mathrm{H}^{s+2\alpha}} \leq C\{t\}^{1-\alpha-\beta}e^{-t\,\mathrm{mín}(\Lambda,N^2)}\sup_{t>0} e^{\Lambda t}\{t\}^{\beta}||R_N f(\tau)||_{\mathrm{H}^s}$$

para todo $t > 0$, donde $N \geq 1$, $\alpha, \beta \in [0, 1)$, $\Lambda \neq N^2$, y

$$\left\| P_N \int_t^\infty \mathcal{G}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right\|_{\mathrm{H}^{s+2\alpha}} \leq C\{t\}^{1-\alpha-\beta} e^{-\Lambda t} \sup_{\tau>0} e^{\Lambda\tau}\{\tau\}^{\beta} ||P_N f(\tau)||_{\mathrm{H}^s}.$$

Para todo $t > 0$, donde $\alpha, \beta \in [0,1)$, $\Lambda > N^2 \geq 1$. C_N, será una constante que depende de N, que en general llamaremos C.

Prueba. Como

$$e^{-2tn^2} \leq C_N e^{-2tN^2} (\{t\}\langle n\rangle^2)^{-\alpha},$$

para $|n| \geq N \geq 1$ con $\alpha > 0$, luego por la identidad de Parseval tenemos que

$$\begin{aligned} ||R_N \mathcal{G}(t)\phi||_{\mathrm{H}^{s+2\alpha}} &= \sum_{|n|\geq N} \langle n\rangle^{2s+4\alpha} e^{-2tn^2} \left|\widehat{\phi}_n\right|^2 \\ &\leq C\{t\}^{-2\alpha} e^{-2tN^2} \sum_{|n|\geq N} \langle n\rangle^{2s} \left|\widehat{\phi}_n\right|^2 \\ &\leq C\{t\}^{-2\alpha} e^{-2tN^2} ||R_N\phi||^2_{\mathrm{H}^s}. \end{aligned}$$

para todo $t > 0$, y para todo $\tau > t$

$$\begin{aligned} ||P_N \mathcal{G}(t-\tau)\phi||_{\mathrm{H}^{s+2\alpha}} &= \sum_{|n|\leq N} \langle n\rangle^{2s+4\alpha} e^{-2(t-\tau)n^2} \left|\widehat{\phi}_n\right|^2 \\ &\leq C\langle N\rangle^{4\alpha} e^{-2(t-\tau)N^2} \sum_{|n|\leq N} \langle n\rangle^{2s} \left|\widehat{\phi}_n\right|^2 \\ &\leq C_N e^{-2(t-\tau)N^2} ||P_N\phi||^2_{\mathrm{H}^s}. \end{aligned}$$

Aplicando los estimados anteriores con $\alpha \in (0, 1)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} &\left\| R_N \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right\|_{\mathrm{H}^{s+2\alpha}} \\ &\leq C \int_0^t \{t-\tau\}^{-\alpha} e^{-(t-\tau)N^2} ||R_N f(\tau)||_{\mathrm{H}^s} d\tau \\ &\leq C e^{-tN^2} \int_0^t \{t-\tau\}^{-\alpha} \{\tau\}^{-\beta} e^{\tau(N^2-\Lambda)} d\tau \sup_{\tau>0} e^{\Lambda t}\{t\}^{\beta} ||R_N f(\tau) d\tau||_{\mathrm{H}^s} \\ &\leq C\{t\}^{1-\alpha-\beta} e^{-t\,\mathrm{mín}(\Lambda,N^2)} \sup_{\tau>0} e^{\Lambda t}\{t\}^{\beta} ||R_N f(\tau) d\tau||_{\mathrm{H}^s}. \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
& e^{-}tN^2 \int_0^t \{t-\tau\}^{-\alpha}\tau^{-\beta}e^{\tau(N^2-\Lambda)}d\tau \\
& = e^{-t\Lambda}\int_0^t \{t-\tau\}^{-\beta}\tau^{-\alpha}e^{-\tau(N^2-\Lambda)}d\tau \\
& \leq C\{t\}^{1-\alpha-\beta}e^{-t\Lambda},
\end{aligned}
$$

para todo $t > 0$ si $\Lambda < n^2$ y

$$
Ce^{-tN^2}\int_0^t \{t-\tau\}^{-\alpha}\{\tau\}^{-\beta}e^{\tau(N^2-\Lambda)}d\tau \leq C\{t\}^{1-\alpha-\beta}e^{-tN^2},
$$

para todo $t > 0$ si $\Lambda > n^2$. De igual forma encontramos el siguiente estimado:

$$
\begin{aligned}
& \left\| P_N \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)f(\tau)d\tau \right\|_{\mathrm{H}^{s+2\alpha}} \\
& \leq C\int_0^t \{t-\tau\}^{-\alpha}e^{(t-\tau)N^2}||P_N f(\tau)||_{\mathrm{H}^s}d\tau \\
& \leq Ce^{-tN^2}\int_0^t \{t-\tau\}^{-\alpha}\{\tau\}^{-\beta}e^{\tau(\Lambda-N^2)}d\tau \sup_{\tau>0} e^{\Lambda t}\{t\}^{\beta}||P_N f(\tau)||_{\mathrm{H}^s} \\
& \leq C\{t\}^{1-\alpha-\beta}e^{\Lambda\tau}\sup e^{\Lambda t}\{t\}^{\beta}||P_N f(\tau)||_{\mathrm{H}^s}.
\end{aligned}
$$

para todo $t > 0$ donde $\alpha, \beta \in [0,1),\ \ \Lambda > N^2 \geq 1$. Con esto el lema 4.1 es probado. ■

Lo que haremos de inmediato será probar la existencia local de soluciones del problema periódico (4.2). Supongamos que $\lambda < 1$, pero esta suposición no es esencial para la existencia local de soluciones. Está básicamente será usada para la existencia global de soluciones y estimados asintóticos.

Observación 3.2. *El factor {t} que se introduce en las estimaciones anteriores es debido a la propiedad de difusión de la ecuación de Burgers.*

Existencia local de solución clásica

Lema 3.3. *Supongamos que el dato inical* $\phi \in L^2(\Omega)$. *Entonces existe para algún tiempo* $T > 0$ *existe una única solución* $u(t, x) \in C([0, T] : L^2(\Omega)) \cap C^\infty((0, T] \times \mathrm{R})$ *del problema periódico (4.2)*

Prueba. Denotemos

$$\mathcal{N}(u) = e^{\lambda t} u u_x.$$

En virtud del operador de Green $\mathcal{G}(t)$ del problema periódico lineal (4.3), escribimos el problema periódico no lineal (4.2) en la forma de ecuación integral

$$u(t) = \mathcal{G}(t)\phi + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(u)(\tau)d\tau. \tag{3.4}$$

Note que $\phi = R_1\phi$ y $u = R_1 u$. Resolvemos la ecuación (4.4) por el principio de contracción, definiendo la transformación

$$\mathcal{A}v(t) = \mathcal{G}(t)\phi + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(v)(\tau)d\tau,$$

en el espacio

$$X = \{\phi \in C([0,T] : L^2(\Omega)) \cap C([0,T] : \mathrm{H}^s(\Omega)) : ||\phi||_X < \infty\}$$

con la norma

$$||\phi||_X = \sup_{t\in[0,T]} e^t ||\phi(t)||_{L^2} + \sup_{t\in[0,T]} \{t\}^{\frac{s}{2}} e^t ||\phi(t)||_{\mathrm{H}^s},$$

donde $s \in (\frac{1}{2}, 1)$, y el valor $T > 0$ deberá ser estimado. tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}||\mathcal{N}(u)-\mathcal{N}(u)||_{\mathrm{H}^{-1}} &= \left\|e^{\lambda t}uu_x - e^{\lambda t}vv_x\right\|_{\mathrm{H}^{-1}} \\ &\leq Ce^{\lambda t}||\partial_x(u^2-v^2)||_{\mathrm{H}^{-1}} \\ &\leq Ce^{\lambda t}||u^2-v^2||_{L^2} \\ &\leq Ce^{\lambda t}||u+v||_{L^\infty}||u-v||_{L^2} \\ &\leq Ce^{\lambda t}(||u||_{L^\infty}+||u||_{L^\infty})||u-v||_{L^2} \\ &\leq Ce^{\lambda t}(||u||_{\mathrm{H}^s}+||u||_{\mathrm{H}^s})||u-v||_{L^2},\end{aligned}$$

Esto último se cumple gracias a la desigualdad de Hôlder y al teorema de inmersión de Sobolev para todas las funciones $u, v \in \mathrm{H}^s(\Omega)$, con $s \in (\frac{11}{2}, 1)$. En virtud de los estimados del lema 4.1 y considerando $v = \text{mín}(1, 1-\lambda) \in (0, 1]$

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]}||\mathcal{A}v(t)||_{L^2} \\ &\leq C\sup_{t\in[0,T]}\left(||\phi||_{L^2}+\{t\}^{\frac{1}{2}+\frac{s}{2}}e^{-vt}\sup_{t\in[0,T]}e^{(1+v)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}||R_1\mathcal{N}(u)(\tau)||_{\mathrm{H}^{-1}}\right) \\ &\leq C||\phi||_{L^2}+CT^{\frac{1}{2}+\frac{s}{2}}\sup_{\tau>0}e^{(1+v)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}||\mathcal{N}(v)(\tau)||_{\mathrm{H}^{-1}} \\ &\leq C||\phi||_{L^2}+CT^{\frac{1}{2}+\frac{s}{2}}\sup_{\tau>0}e^{(1+v+\Lambda)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}||v||_{\mathrm{H}^s||v}||_{L^2}.\end{aligned}$$

Nótese que el estimado R_1N, hemos hecho en el lema 4.1, $s = -1$, $\alpha = 0$, al igual se hace en el segundo componente de la norma X.

De la misma forma obtenemos

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]}\{t\}\frac{s}{2}e^t||\phi(t)||^s_{\mathrm{H}} \\ &\leq C\sup_{t\in[0,T]}\left(||\phi||_{L^2}+\{t\}^{\frac{1}{2}+\frac{s}{2}}e^{-vt}\sup_{t\in[0,T]}e^{(1+v)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}||R_1\mathcal{N}(u)(\tau)||_{\mathrm{H}^{-1}}\right) \\ &\leq C\sup_{\tau>0}\left(||\phi||_{L^2}+T^{\frac{1}{2}+\frac{s}{2}}\sup_{\tau>0}e^{(1+v+\Lambda)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}||v||_{\mathrm{H}^s}||v||_{L^2}\right).\end{aligned}$$

Luego consideraremos suficientemente pequeño T el cual depende de la norma del dato inicial $||\varphi||_{L^2}$ tal que

$$||\mathcal{A}v(t)||_X \leq C||\phi||_{L^2}.$$

Estimemos ahora la diferencia, utilizando la desigualdad de Hôlder y el teorema de inmersión de Sobolev.

$$\begin{aligned}
&||\mathcal{A}u(t) - \mathcal{A}v(t)||_X \\
&\leq C \sup_{t\in[0,T]} \{t\}^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} e^{-vt} \sup_{\tau>0} e^{(1+v)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}||R_1(\mathcal{N}(u) - \mathcal{N}(v))(\tau)||_{\mathrm{H}^{-1}} \\
&\leq CT^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \sup_{\tau>0} e^{(1+v)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}||R_1(\mathcal{N}(u) - \mathcal{N}(v))(\tau)||_{\mathrm{H}^{-1}} \\
&\leq CT^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \sup_{\tau>0} e^{(1+v)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}||\mathcal{N}(u) - \mathcal{N}(v)||_{\mathrm{H}^{-1}} \\
&\leq CT^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \sup_{\tau>0} e^{(1+v)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}||\partial_x(u^2 - v^2)||_{\mathrm{H}^{-1}} \\
&\leq CT^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \sup_{\tau>0} e^{(1+v)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}||u^2 - v^2||_{L^2} \\
&= CT^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \sup_{\tau>0} e^{(1+v)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}||(u - v)(u+v)||_{L^2} \\
&\leq CT^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \sup_{\tau>0} e^{(1+v)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}||u+v||_{L^\infty}||u - v||_{L^2} \\
&\leq CT^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \sup_{\tau>0} e^{(1+v)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}\left(||u||_{L^\infty} + ||v||_{L^\infty}\right)||u - v||_{L^2} \\
&\leq CT^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \sup_{\tau>0} e^{(1+v+\Lambda)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}\left(||u||_{\mathrm{H}^s}||u-v||_{L^2} + ||v||_{\mathrm{H}^s}||u - v||_{L^2}\right) \\
&\leq CT^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}\left(||u||_X + ||v||_X\right)||u - v||_X \\
&\leq \frac{1}{2}||u - v||_X.
\end{aligned}$$

Recuerde que

$$\begin{aligned}
&s \geq \frac{1}{2} : ||u||_{L^2} \leq ||u||_{\mathrm{H}^s} \\
&s \geq 0 : ||u||_{L^2} \leq ||u||_{\mathrm{H}^s}
\end{aligned}$$

Si $T > 0$, suficientemente pequeño. Por tanto, la transformación A es una contracción wn la bola cerrada de radio $C||\phi||_{L^2}$ en el espacio X.

Luego existe una única solución en el espacio $u(t, x) \in X$ del problema periódico (4.2). Debido a la propiedad de difusión de la ecuación de Burgers, la solución obtiene más regularidad en el tiempo $t > 0$.

Así tomando un tiempo $t_1 > 0$ y considerando el problema periódico (4.2) con el dato inicial $\phi_1(x) = u(t, x)$, en la misma forma podemos considerar encontar que existe una única solución $u(t, x) \in C([t_1, T] : \mathrm{H}^s(\Omega)) \cap C([t_1, T] : \mathrm{H}^{2s}(\Omega))$. Repitiendo este argumento vemos que $u(t, x) \in C((0, T] : \mathrm{H}^\infty(\Omega))$. Entonces por ecuación (4.2) esto muestra que $u(t, x) \in C^\infty((0, T] \times \mathrm{R})$. ■

Solución global al problema tipo Burgers

Teorema 3.4. *Supongamos que el dato inicial $\phi \in L^2(\Omega)$. Entonces existe una única solución $u(t, x) \in C([0, \infty) : L^2(\Omega)) \cap C^\infty((0, \infty) \times \mathrm{R})$ del problema periódico (4.2), el cual obedece el estimado de decaimiento $\|u(t)\|_{L^2} \to 0$ para $t \to \infty$.*

Prueba. Usaremos estimados tipo energía. Sea u la solución construida en el Lema 4.3.

Multiplicamos la ecuación (4.2) por $2U$. Luego integrando sobre Ω, obtenemos

$$\int_\Omega (2uu_t - 2uu_x - 2e^{\lambda t}u^2u_x)dx = 0.$$

de esto, integrando por partes y tomando las condiciones de frontera peri´odica tenemos que:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2(t,x)dx + 2\int_\Omega u_x^2(t,x)dx = 0. \tag{3.5}$$

Luego la norma $||u(t)||_{L^2}$ decae en el tiempo. integrando un estimado *a priori* para la solución $||u(t)||_{L^2}$

$||u(t)||_{L^2} \leq ||\phi||_{L^2} \leq C,$

para todo $t > 0$.

En lo que sigue estimaremos la norma L^∞ para la solución. Como la solución del problema periódico (4.2) tiene valor medio cero

$$\int_\Omega u(t,x)dx = 0,$$

vemos que

$$\sup_{x\in\Omega} u(t,x) \geq 0,$$
$$\inf_{x\in\Omega} u(t,x) \leq 0$$

para todo $t > 0$.

Nos apoyamos en el siguiente lema para terminar la prueba del teorema 4.4.

Lema 3.5. *Sea* $u \in C^1([0, T) : C(\Omega))$ *y* $m(t) = \inf_{x\in\Omega} u(t, x) < 0$ *para todo* $t \in [0, T)$. *Entonces existe un punto* $\xi(t) \in \Omega$ *tal que* $m(t) = u(t, \xi(t))$; *más aun* $m'(t) = u_t(t, \xi(t))$ *en todo* $[0, T)$.

Prueba. Sea c, una constante genérica. Fijemos $t \in [0, T)$ y definamos

$$m(t) = \inf_{x\in\Omega} u(t,x).$$

como $u(t, .) \in H^1(R)$, vemos que

$$\lim_{|x|\to\infty} u(t,x) = 0,$$

así existe al menos un punto $\xi(t) \in R$ con

$$m(t) = u(t,\xi(t)).$$

Sean ahora $s, t \in [0, T)$ fijo.

Si $m(t) \leq m(s)$, tenemos que

$$\begin{aligned}0 &\leq m(s) - m(t)\\ &= \inf_{x\in\Omega}(u(s,x) - u(t,\xi(t)))\\ &\leq u(s,\xi(t)) - u(t,\xi(t)).\end{aligned}$$

Por el teorema de inmersi´on de Sobolev H[1](R) ⊂ l^{∞}(R), concluimos que

$$\begin{aligned}&|m(s) - m(t)|\\ &\leq |u(t) - u(s)|_{L^{\infty}(\mathbb{R})}\\ &\leq c|u(t) - u(s)|_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Luego por el teorema del valor medio para funciones con valores en el espacio de Banach- H[1], tenemos

$$\begin{aligned}&|m(s) - m(t)|\\ &\leq c|u(t) - u(s)| \max_{0\leq\tau\leq\max\{s,t\}}[|u(\tau)|_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R})}], \quad t, s \in [0, T).\end{aligned}$$

Como $u_t \in C([0, T) : L^2(\mathrm{R}))$, vemos que m es localmente Lipschitz en $[0, T)$ y por ende es de variaci´on acotada, l que implica que m es diferenciable casi en todas partes en $(0, t)$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}m'(t) &= \lim_{s\to t^+}\frac{m(s) - m(t)}{s - t}\\ &\leq \lim_{s\to t^+}\frac{u(t,\xi(t)) - u(s,\xi(t))}{s - t}\\ &= u_t(t,\xi(t)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m'(t) &= \lim_{s\to t^-}\frac{m(s) - m(t)}{s - t}\\ &\geq \lim_{s\to t^-}\frac{u(t,\xi(t)) - u(s,\xi(t))}{s - t}\\ &= u_t(t,\xi(t)),\end{aligned}$$

casi en todas partes en $(0, T)$, y por el teorema de inmersi´on de Sobolev

$$\lim_{s \to t} \frac{u(t,x) - u(s,x)}{s - t}:$$

existe uniformemente con respecto a $x \in$ R. Por tanto

$$m'(t) = u_t(t, \xi(t)).$$

El lema anterior básicamente es una consecuencia del teorema de funciones implícitas.

Continuemos la demostración del teorema 4.4 considerando el punto $\xi(t)$ em ña ecuación (4.2), tenemos para la función

$$m(t) = \inf_{x \in \Omega} u(t,x)$$
$$\frac{d}{dt} m(t) \geq 0,$$

ya que

$$u_x(t, \xi(t)) = 0$$
$$u_{xx}(t, \xi(t)) \geq 0,$$

y así

$$\begin{aligned} m'(t) &= u_t(t, \xi(t)) \\ &= u_{xx}(t, \xi(t)) + e^{\lambda t} u(t, \xi(t)) u_x(t, \xi(t)) \geq 0. \end{aligned}$$

esto muestra que $m(t) \geq m(T)$ para todod $t \geq T$.

En la misma forma tenemos que:

$$\sup_{x \in \Omega} u(t,x) \leq \sup_{x \in \Omega} u(T,x),$$

para todo $t \geq T$.

Es conocido de la teoría clásica parabólica [15], [16], [17], que en el caso de que la no-linealidad no crezca más rápido que cuadrática en el gradiente, es suficiente un estimado L^∞ *a priori* para probar la existencia global de las soluciones.

También por (4.5) tenemos el estimado:

$$\int_0^t \int_\Omega u_x^2(\tau, x)dxd\tau \leq \int_\Omega \phi^2(x)dx.$$

Esto implica que para todo $\in > 0$ existe un tiempo T tal que

$$||u_x(T)||_{\mathrm{H}^1} \leq \epsilon.$$

En particular

$$\begin{aligned}
&||u(T)||_{L^2}\\
&= \sum_{n\neq 0} |u_n(T)|^2\\
&\leq \sum_{n\neq 0} \langle n\rangle^2 |u_n(T)|^2\\
&= ||u_x(T)||_{L^2} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Por la identidad de Parseval, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&||u(T)||_{L^2}^2\\
&= \sum_{n\geq 1} |\widehat{u}_n(t)|^2\\
&\leq \sum_{n\geq 1} \langle n\rangle^2 |\widehat{u}_n(t)|^2\\
&\leq ||u(t)||_{\mathrm{H}^1}^2,
\end{aligned}$$

y la norma $||u(t)||_2^{\;2}$ decae en el tiempo, así tenemos la siguiente desigualdad:

$$||u(t)||_{L^2} \leq \epsilon$$

para todo $t \leq T$.

También nótese que la norma L^{∞} es pequeña, es decir,

$$\begin{aligned}
&||u(t)||_{L^{\infty}} \\
&\leq ||u(T)||_{L^{\infty}} \\
&\leq 2||u(t)||_{L^{\infty}}^{\frac{1}{2}}||u_x(t)||_{L^{\infty}}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2\epsilon,
\end{aligned}$$

para todo $t \geq T$. Con esto tenemos probado el teorema 4.4. ■

Para proba la desigualdad

$$||u(t)||_{L^2}^2 \leq 2||u(T)||_{L^2}||u_x(T)||_{L^2}.$$

Considérese $f \in \mathrm{H}^1$, y es sencillo probar que existe $C > 0$, tal que

$$||f||_{L^{\infty}}^2 \leq C||f||_{L^2}^2 + ||f||_{L^2}||f'||_{L^2}.$$

Para esto considérese

$$f = 2\pi\widehat{f}(0) + g,$$

esto muestra que

$$g \in \mathrm{H}^1 \hookrightarrow C_{per},$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(y)dy = 0,$$

luego existe $x_0 \in [-\pi, \pi]$, tal que $g(x_0) = 0$. Combinando esto con el hecho que $(g^2)' \in \mathrm{H}^{-1}$, obtenemos

$$g^2(x) = 2\int_{-\pi}^{\pi} g(y)g'(y)dy,$$

y de lo anterior concluimos que

$$|g(x)|^2 \leq 2||g||_{L^2}||g'||_{L^2}.$$

Esta última desigualdad es la que usamos en nuestra prueba. ■

Tarea: Dejamos un ejercicio al lector interesado que es estudiar el mismo problema con $\lambda \geq 1$ y hacer implementaciones numéricas motivadas por las ecuaciones en diferencia que aparecen en la solución local. Hasta donde los autores conocen estos serían problemas no resueltos en la literatura, esperando que nuestro libro sirva de motivación para trabajar esto problemas.

APÉNDICE A

Resultados Importantes

En esta sección final del libro, abordaremos un teorema usado en un lema del libro y este es de gran importancia en el estudio del análisis funcional como lo es el consagrado teorema de Hahn-Banach. También explicaremos lo que significa que un problema de ecuaciones diferenciales parciales esté localmente y globalmente bien puesto. En particular, estudiaremos un problema clásico al estudiar ecuaciones diferenciales ya sean ordinarias o parciales, el cual es el problema de cómo prolongar el dominio de definición de una solución de estas ecuaciones.

Teorema A.1. *(Teorema de Hahn-Banach)*

Sea E un espacio vectorial normado, F un subespacio y G un espacio vectorial normado completo. Sea

$$\lambda : F \to G,$$

un operador lineal continuo, con norma C. Entonces la clausura F de F en E es un subespacio de E. Entonces existe una única extensi´on de λ a un funcional lineal

$$\overline{\lambda} : \overline{F} \to G,$$

y λ tiene la misma norma que λ.

Observación A.2. *Las funciones periódicas de clase C^∞, son densas en los espacios de Sobolev de cualquier orden.*

La prueba de la observación anterior es sencilla, basta pensar en los polinomios trigonométricos. De igual forma escribimos un bosquejo de la prueba de la observación.

prueba: Sea $\varphi \in H^\alpha$, luego

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}_n|^2 \langle n \rangle^{2\alpha} < \infty$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} \widehat{\varphi}_n.$$

Definimos

$$\varphi_N(x) = \sum_{N=-\infty}^{N} e^{inx} \widehat{\varphi}_n \in C_{per}^{\infty}.$$

De lo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}\forall \in \mathbb{R} : ||\varphi(x) - \varphi(x)||_{H^\alpha}^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} \widehat{\varphi}_n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} \widehat{\varphi}_n \right| \langle n \rangle^{2\alpha} \\ &= \sum_{|n| \geq N} |\widehat{\psi}_n|^2 \langle n \rangle^{2\alpha} \to 0, \ \ N \to \infty.\end{aligned}$$

Definición A.3. *Sean X, Y espacios de Banach,* $T_0 \in (0, \infty)$ *y sea* $F : [0, T_0] \times Y \to X$ *una función continua. Diremos que el problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} &\partial_t u(t) = F(t, u(t)) \in X, \\ &\qquad u(0) = \phi \in Y, \end{aligned} \tag{A.1}$$

es localmente bien puesto en Y si:

a. *Existe* $T \in (0, T_0]$ *y una función* $u \in C((0,T] : Y)$ *tal que* $u(0) = \phi$ *y la ecuación diferencial se satisface en el sentido que*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - F(t,u(t)) \right\|_X = 0;$$

donde las derivadas en $t = 0$ *y* $t = T$ *son tomadas por la derecha y la izquierda, respectivamente.*

b.El problema (A.1) tiene al menos una solución en $C((0, T] : Y)$.

La función $\varphi \to u$ *es continua. Mas precisamente, sea* $\phi_n \in Y$, $n = 1, 2, 3, \ldots$,*. Son tales que* $\phi_n \to \phi_n\infty$ *en* Y *y sean* $u_n \in C((0, T_n] : Y)$ *las correspondientes soluciones. Sea* $T \in (0, T_\infty)$*. Entonces las soluciones* u_n *pueden ser extendidas al intervalo [0,T] para todo n suficientemente grande y*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T]} ||u_n(t) - u_\infty(t)||_Y = 0$$

nosotros resumiremos esas propiedades por decir que el problema está localmente bien puesto. Si una de esas propiedades falla diremos que el problema está mal puesto.

Máximos Intervalos de Existencias

Después de establecer cuando un problema de Cauchy está localmente bien puesto, surge una pregunta natural, ¿Puedo extender la solución?

Si $F(t, u)$ está definida para todo tiempo positivo, quisiéramos saber si la solución exista también para todo tiempo positivo. En está sección introducimos un método para responder a esta pregunta. La respuesta en sí depende de entender las propiedades de la ecuación diferencial a examinar. Expondremos el caso autónomo y asumimos que F está definida en todo Y.

Definición A.4. *(Globalmente bien puesto)*

Sean X, Y espacios de Banach $T_0 \in (0,\infty)$ *y sea* $F : [0, T_0] \times Y \to X$ *una función continua. Diremos que el problema de Cauchy*

$$\partial_t u(t) = F(u(t)) \in X, \qquad \text{(A.2)}$$
$$u(0) = \phi \in Y,$$

es globalmente bien puesto en Y si:

Existe una única $u \in C([0,\infty) : Y)$ *tal que* $u(0) = \phi$ *y la ecuación diferencial es satisfecha en el sentido que*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T]} ||u_n(t) - u_\infty(t)||_Y = 0 \ \ \forall t \in [0,\infty)$$

con derivada en $t = 0$ *tomada por la derecha.*

La función $\phi \to u$ *es continua. Más precisamente* $\phi_n \in Y$, $n = 1, 2, ...,$ *son tales que* $\phi_n \to \phi_\infty$ *en Y y sean* $u_n \in C(0, T_n] : Y)$ *las correspondientes soluciones. Para cada* $T > 0$ *tenemos*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T]} ||u_n(t) - u_\infty(t)||_Y = 0.$$

Para obtener la existencia global para (A.2), debemos combinar una estimación global a priori para $\|u(t)\|_Y$ *con el principio de extensión.*

Principio de Extensión

Sea $\phi \in Y$ y asumamos que (A.2) es localmente bien puesto. Sea

$$T^*(\phi) = \sup T > 0 : \exists! \text{ solución de (A.2) en } [0,T].$$

Entonces lo siguiente es válido.

$$\textbf{a. } T^*(\phi) = \infty \ \ o \ \ T^*(\phi) < \infty \ \ y \lim_{t\to T^*(\phi)} ||u(t)||_Y = \infty.$$

E el segundo caso diremos que la solución explota en el tiempo finito. La función

$$u \in C([0, T^*(\phi)] : Y),$$

es llamada la máxima extensión de la solución del problema (A.2).

b. La función $\phi \to T^*(\phi)$ es semi-continua interiormente, este es

$$\begin{aligned} &\forall \epsilon > 0, \ \ \exists \delta = \delta(\epsilon, \phi) > 0 / ||\phi - \psi||_Y \leq \delta \\ &\quad \Rightarrow T^*(\phi) - \epsilon < T^*(\psi). \end{aligned}$$

En términos de sucesiones, semi-continuidad inferior significa que si

$$\phi_n \to \phi_\infty \text{ en } Y,$$

entonces dado $T \in (0,\, T^*(\phi_\infty))$, tenemos $T^*(\phi_\infty) \geq T$ para todo n suficientemente grande. En particular, las soluciones locales $u_n(t)$ pueden ser extendidas a $[0,\, T\,]$ para todo n.

Observación A.5. *La razón de no establecer el principio de extensión como un teorema es que prueba o no según cada situación bajo consideración.*

Referencias bibliográficas

[1] N. Hayashi; P. Naumkin; J.Rodriguez-Ceballos. *Asymptotics of solutions to the periodic problem for the nonlinear damped wave equation.* Nonlinear Differ. Equ. Appl. 17. 355- 369. 2010.

[2] F. Linares. *Ecuaciones dispersivas no lineales. Caso periódico.* Caracas: Escuela Venezolana de Matemáticas. 2007.

[3] P. Naumkin; J. Rodríguez-Ceballos. *Estimaciónes en los espacios de Sobolev de la solución del problema de Cauchy.* Matemáticas: Enseñanza Universitaria. pp.31-40. 2009.

[4] P. Naumkin; C. Rojas Milla. *Soluciones asintóticas para un problema no lineal de onda.* Tesis Doctoral. 2011.

[5] A. Marín; C. Rojas; R. Ortiz. *Solutions for the nonlinear damped wave equation.* International Journal of Mathematical Analysis. 2015.

[6] H. Brézis. *Análisis funcional, teoría y aplicaciones.* Masson, París, Ed. cast.: Alianza Editorial S.A. Madrid. 1984.

[7] J. Sotomayor. *Licoes de equacoes diferenciais ordinárias.* Instituto de Matemáticas Pura e Aplicada. 1979.

[8] V. P. Mijailov. *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.* Editorial MIR Moscú. 1978.

[9] Rafael Iório; Valería Iório. *Equeacoes diferenciais parciais. Uma introducao.* CNPq (Proyecto Euclides). 1998.

[10] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial diferential equations*. Aplpplied mathematical sciences; v.44 Springer Verlag, New York, Inc. 1983.

[11] N. Hayashy; E.I. Kaikina; P. Naumkin. *Damped wave equation whit a critical nonlinearity*. Trans.Am Math.soc. 358(3), 1165. 2006.

[12] N. Hayashy; E.I. Kaikina; P. Naumkin. *Damped wave equation in the subcritical cases*.J. Differential Equation. 207(1), 161-194. 2004.

[13] N. Hayashy; E.I. Kaikina; P. Naumkin; I.A. Shishmarev *Damped wave equation in the subcritical cases*.J. Differential Equation. 207(1), 161-194. 2009.

[14] P. Naumkin; C. Rojas *Asymptotics of solutions to the periodic Problem for a burguer type equation* J. Evol. Equa. Springer Basel AG-DOY10.1007. 2010.

[15] H. Amman *Dinamic theory of quasilinear parabolic systms. Global existence.* Math Z202 No.2, 219-250. 1989.

[16] A. Constantin; J. Escher *Global solutions for quasilinear parabolic problems* Evol. Equ 2(2002) Nro. 1,97-11.Doering, CR., Gibbon.

[17] E.I. Kaikina; P.I. Naumkin; I.A. Shishmarev *Periodic problem for a model nonlinear evolution equation* Adv.Differ.Equ. 7(5), 581-616(2002)